Conceptos básicos sobre probabilidad

Una moneda caída sobre una superficie plana puede presentar dos alternativas: cara o cruz. Un dado puede presentar seis sucesos alternativos. Un descendiente puede ser niño o niña. Un individuo de la "segunda generación filial" de un cruzamiento entre guisantes amarillos y verdes puede ser de uno de esos dos colores. Un avión puede volar correctamente o tener un accidente en el despegue. Verdaderamente, es casi infinito el número de fenómenos de la naturaleza que dan lugar a situaciones o sucesos alternativos.
La probabilidad de un suceso es equiparable a la frecuencia con la que ocurre ese suceso. Si el fenómeno se repite n veces (casos posibles), y el número de casos en los que aparece el suceso en cuestión (casos favorables) es f, la probabilidad (p) del suceso es:

$$p = \frac{f}{n}$$

Por ejemplo, si consideramos que el regimiento von Kartoffeln de la caballería prusiana tenía 1000 soldados, y en 1919 murieron instantáneamente 4 de ellos como resultado de una coz de mula, podemos concluir que la probabilidad de morir de esa forma en ese regimiento en 1919 (p_m) fué:

$$p_m = \frac{4}{1000}$$

El número de soldados que no murió instantáneamente por patada de mula (aunque recibieran alguna que otra coz) fué 983, y la probabilidad de no morir de forma tan prosaica (p_v) fué:

$$p_v = \frac{996}{1000}$$

Otro ejemplo: en la segunda generación filial de un cruzamiento entre dos líneas puras de guisantes amarillos y verdes, Mendel obtuvo 6022 guisantes amarillos y 2001 verdes. Las probabilidades de ser guisante amarillo (p_A) o verde (p_B) en esa descendencia son:

$$p_A = \frac{6022}{8023} \qquad p_B = \frac{2001}{8023}$$

Si la probabilidad se expresa en forma de fracción, al considerar sucesos mutuamente excluyentes (si ha muerto instantáneamente no sigue vivo; si es verde no es amarillo), la suma de las probabilidades de todas las alternativas posibles de un fenómeno debe ser 1.
En estos dos ejemplos, tenemos distribuciones formadas por dos clases (muertos y vivos; amarillos y verdes) y por sus respectivas probabilidades o frecuencias (p_m y p_v; p_A. y p_B). Obviamente, $p_m + p_v = 1$; $p_A + p_B = 1$

Supongamos ahora que en aquel regimiento hubo 43 heridos por coz de mula. Podríamos replantear las probabilidades de tres sucesos alternativos, considerando una distribución con tres clases: morir instantáneamente (frecuencia= p_m), salir herido (frecuencia= p_h) y permanecer indemne (frecuencia= p_i):

$$p_m = \frac{4}{1000} \qquad p_h = \frac{43}{1000} \qquad p_i = \frac{953}{1000}$$

de nuevo, $p_m + p_h + p_i = 1$

En estos casos, la probabilidad medida a partir de las observaciones es una estimación de la probabilidad "real". Es decir, si analizasemos los resultados de ese mismo regimiento en otro año, o si analizasemos otra descendencia de guisantes, tendríamos estimaciones diferentes de las correspondientes probabilidades (sin duda, el número de muertos por coz de mula o el número de semillas verdes no sería exactamente igual). En definitiva, sucesos como los de estos ejemplos dependen de numerosos factores difíciles de controlar y que se engloban dentro de lo que se denomina azar.
En algunas situaciones, se puede determinar la probabilidad de un suceso basándose en razonamientos teóricos. Por ejemplo, Al tirar una moneda no trucada, los dos sucesos posibles son cara y cruz, y podemos pensar que los dos sucesos tienen la misma probabilidad p= 1/2 (la probabilidad de que la moneda quede de canto es muy pequeña y puede despreciarse). En el caso de un dado, si las seis caras son iguales y el dado está bien equilibrado, todas las caras tendrán la misma probabilidad de salir, por lo que la probabilidad de cada resultado será p= 1/6 . Si hay 10000 números en una lotería, la probabilidad de que toque el primer premio a cualquiera de los números será p= 1/10000.

Operaciones con probabilidades

1.- La suma de probabilidades es una probabilidad.
Como hemos visto antes, la suma de las probabilidades de todas las alternativas posibles de un fenómeno debe ser 1. De ello se deduce que la probabilidad de obtener un resultado cualquiera de entre varios resultados mutuamente excluyentes, es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de esos resultados. Por ejemplo, la probabilidad de que al tirar un dado salga un resultado igual o mayor que cinco (P_5) será igual a la probabilidad de que salga un cinco + la probabilidad de que salga un seis:

$$P_5 = 1/6 + 1/6 = 2/6$$

En algunas ocasiones, el cálculo de una probabilidad puede simplificarse restando de 1 la probabilidad contraria. Por ejemplo, como al tirar cuatro dados, pueden aparecer 0, 1, 2, 3 o 4 cincos con probabilidades P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5, respectivamente (véase distribuciones binomial y multinómica), la probabilidad (P) de que aparezca al menos un cinco es:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5;\ \text{o bien, más fácil de calcular: } P = 1 - P_0;\ \text{ya que: } P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

2.- El producto de probabilidades es una probabilidad.
Cuando dos o más sucesos ocurren independientemente, la probabilidad conjunta de esos sucesos es igual al producto de sus probabilidades individuales. Por ejemplo, a partir de una moneda puede obtenerse una cara (prob= 1/2) o una cruz (prob= 1/2). A partir de un dado (fenómeno independiente de la moneda) pueden obtenerse seis resultados diferentes (de 1 a 6) cada uno de ellos con una probabilidad 1/6. La probabilidad de que aparezca una cara en la moneda y un cuatro en el dado (P_{C4}) es:

$$P_{C4} = 1/2 \times 1/6 = 1/12$$

En efecto, si consideramos simultáneamente la moneda y el dado, los resultados conjuntos posibles son 12, todos ellos con la misma probabilidad por tratarse de sucesos independientes:

Resultados posibles de la moneda	Resultados posibles del dado 1	2	3	4	5	6
cara	cara + 1	cara + 2	cara + 3	cara + 4	cara + 5	cara + 6
cruz	cruz + 1	cruz + 2	cruz + 3	cruz + 4	cruz + 5	cruz + 6

Por supuesto, aunque la probabilidad puede expresarse de otras formas (por ejemplo, en %), es conveniente hacerlo en forma de fracción o en tanto por uno. Eso facilita los cálculos. Por ejemplo, el producto de las dos probabilidades p_1= 50%, y p_2= 80%, es: p_{1x2}= 40%. Es más fácil hacerlo si se expresa en tanto por uno: $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.8$; y el producto: $p_{1x2} = 0.4$