

Teoria Cuantica de Campos - 2012

High Energy Physics Theory Group
Universidad de Oviedo



Contents

1	Seccion cero: preliminares	4
1.1	Fuentes	4
1.2	Convenios	5
2	Por que campos cuanticos?	5
2.1	Las teorias de campos son teorias efectivas	8
3	Campos en espacio-tiempo	9
3.1	Imagen de Schrodinger <i>vs.</i> imagen Heisenberg en mecanica cuantica	10
3.2	Campos en espacio-tiempo	11
3.2.1	La fuerza de Casimir	13
3.2.2	La constante cosmologica	14
3.3	Campos complejos y antiparticulas	14
4	Campos en interaccion	15
4.1	Interacciones relevantes y el IR	17
4.2	Scattering de particulas	17
4.3	Formula de reduccion de LSZ	19
4.4	Calculando correladores en teoria de perturbaciones	23
4.4.1	La imagen de interaccion en mecanica cuantica	23
4.5	Una expansion perturbativa para la teoria de campos	24
4.5.1	El teorema de Wick	28
4.6	Propagadores	29
4.6.1	Funciones de Green	31
4.7	Reglas de Feynman	32
5	Path integrals	36
5.1	Path integrals en mecanica cuantica	37
5.1.1	La particula libre	41
5.2	Ordenados temporales y path integral	42
5.3	Fuentes y funciones generatrices	43
5.4	Tiempo euclideo, path integrals y mecanica estadistica	44
6	Path integrals en Teoria Cuantica de Campos	46
6.1	Campos libres	46
6.2	Fucional generador para diagramas conexos y accion efectiva 1PI	48
6.3	Campos en interaccion	50
6.3.1	$\lambda \phi^4$ hasta $\mathcal{O}(\lambda)$	51

7	Lo que nos falto por discutir	52
7.1	Loops, divergencias y renormalizacion	52
7.2	Simetrias	54
7.2.1	Simetrias globales	55
7.2.2	Simetrias locales (<i>gauge</i>)	55
7.2.3	Ruptura espontanea de simetria	56
7.2.4	Simetrias anomalas	57
7.3	Efectos no perturbativos	58
A	Campos clasicos	59
A.1	Simetrias y corrientes conservadas	61
B	El grupo de Lorentz	62
B.1	Rotaciones en 3d	63
B.2	Rotaciones en 4d	64
B.3	El grupo de Lorentz	65
C	Normalizaciones relativistas	66
D	Calculo diferencial funcional	67

1 Seccion cero: preliminares

La teoria cuantica de campos es el pilar fundamental de nuestra descripcion de la Naturaleza. Juega un papel clave en fisica de la materia condensada, mecanica estadistica y fisica de altas energias.

1.1 Fuentes

Hay muchos y muy buenos libros. Una lista parcial (y no ordenada) es

- M.Peskin V.Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*
Es uno de los libros mas utilizados, casi un libro standard.
- A.Zee, *Quantum Field Theory in a nutshell*
Es un libro escrito de manera bastante informal, muy facil de leer y con mucha fisica. Muy recomendable.
- M.Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*
Un libro conciso pero que aun asi contiene los detalles tecnicos relevantes. Escrito ademas con una perspectiva moderna.
- M Srednicki, *Quantum Field Theory*
Un libro muy muy completo, con todos los detalles tecnicos explicitos.
- T.Banks, *Modern Quantum Field Theory*
Un libro escrito con un enfoque moderno. Aunque quizas un poquito avanzado, su lectura es muy recomendable.
- C.Itzykson, B.Zuber, *Quantum Field Theory*
Uno de los clasicos. Aunque escrito en un lenguaje un poco obsoleto hoy en dia, es una fuente fundamental para los desarrollos mas clasicos.
- S.Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*
Los 3 volumenes de Weinberg lo contienen todo, si bien un poco dificil de leer.
- L.Alvarez-Gaume y M.A.Vazquez-Mozo, *An invitation to Quantum Field Theory*
Una introduccion a la teoria cuantica de campos sencilla y concisa sin muchos engorros tecnicos.
- A.Altman, B.Simons, *Condensed Matter Field Theory*
Es un libro de fisica de la materia condensada. Su introduccion a la teoria cuantica de campos –especialmente no relativista– es muy util y muy fisica. Tambien se pueden encontrar trocitos en la pagina web de Ben Simons

<http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/tp3.html>

Ademas de estos libros existen muy buenas notas en internet. Son particularmente utiles las notas de David Tong para los *Mathematical Tripos* de Cambridge. Se pueden encontrar *online* en

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf>

Estas notas estan inspiradas en todos estas fuentes, aunque quizas seguimos mas de cerca el libro de Maggiore y las notas de Tong.

1.2 Convenios

Vamos a asumir la metrica de Minkowski en signatura *mostly minus*, es decir $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. Ademas usaremos unidades tales que $\hbar = c = 1$.

Haremos transformadas de Fourier como

$$f(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} f(p) e^{i p \cdot x} \quad f(p) = \int d^d x f(x) e^{-i p \cdot x} \quad (1)$$

La δ de Dirac es

$$\delta(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i p \cdot x} \quad (2)$$

2 Por que campos cuanticos?

En mecanica cuantica un sistema se describe por un estado $|\psi\rangle$ que es un vector en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La evolucion temporal la dicta la ecuacion de Schrodinger

$$\hat{H} |\psi\rangle = i \partial_t |\psi\rangle \quad (3)$$

En general el sistema contendra N particulas, asi que en general $|\psi\rangle$ es una funcion de *e.g.* sus N posiciones $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}$. Ademas, si las particulas son identicas, es necesario especificar que ocurre bajo el intercambio de dos particulas: la funcion de onda ha de ser simetrica para bosones y antisimetrica para fermiones. Dejando de lado por un momento las propiedades de simetria de la funcion de onda, en el limite en el que la interaccion entre las particulas es muy pequegna, el espacio de Hilbert total se puede escribir como $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, es decir, como el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada particula por separado. El estado $|\psi\rangle$ se escribe por lo tanto

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle \quad (4)$$

Una notación más útil es etiquetar cada partícula por sus números cuánticos: energía, spin... Llamémoslos en general E_n con $n = 1, \dots, N$. Es decir, E_1 son los números cuánticos de la partícula 1, E_2 los de la partícula 2 y así sucesivamente. En esta notación el estado es

$$|\psi\rangle = |E_1\rangle \otimes \dots \otimes |E_N\rangle \quad (5)$$

En esta función de onda por supuesto puede ocurrir que los números cuánticos de la partícula n y los de la m sean idénticos. De hecho, otra manera de etiquetar el sistema es contando cuántas partículas tienen ciertos números cuánticos. Siendo más concretos, supongamos un sistema donde solo hay un número cuántico discreto E . Supongamos que los posibles valores de E son 1, 2, 3... Si hay N partículas en el sistema, habrá n_1 en el estado E_1 con $E = 1$, n_2 en el estado E_2 con $n = 2$ y así sucesivamente. Escogiendo un orden para los posibles estados, la función de onda se escribe simplemente como

$$|\psi\rangle = |n_1, \dots, n_N\rangle \quad \sum n_i = N \quad (6)$$

Por supuesto, en realidad debemos imponer las pertinentes propiedades de simetría en la función de onda, que en esta base –que se llama *base de números de ocupación*– se traducen en que n_i puede ser 0 o 1 para fermiones y cualquier entero positivo para bosones. Estas funciones de onda viven en un espacio que vamos a llamar \mathcal{F}_N .

En muchas situaciones es conveniente no fijar el número de partículas. Por ejemplo, si estamos tratando electrones en metales estos se comportan como un gas con un número de partículas enorme, de manera que es conveniente tratarlos como si el número de electrones no fuese fijo –más técnicamente en el gran canónico–. El paso crucial entonces es que para considerar dichos sistemas es conveniente considerar el estado del sistema en el *espacio de Fock*¹

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{F}_N \quad (7)$$

Es importante darse cuenta de que en la suma \mathcal{F}_0 –i.e. no partículas– también está incluido en la suma. Este estado es un poco especial. Se llama *vacio* y lo denotaremos como $|0\rangle$.

En este espacio es natural construir unos operadores creación/aniquilación que nos mueven entre \mathcal{F}_N y \mathcal{F}_M :

$$\begin{aligned} \text{aniquilacion} \quad \hat{a}_{E_n} : \mathcal{F}_N &\rightarrow \mathcal{F}_{N-1} \\ \text{creacion} \quad \hat{a}_{E_n}^\dagger : \mathcal{F}_N &\rightarrow \mathcal{F}_{N+1} \end{aligned} \quad (8)$$

Estos operadores actúan como (hablaremos de la normalización más tarde)

¹Victor Fock fue el físico ruso que lo introdujo.

$$\hat{a}_{E_n} |n_1, \dots, n_n, \dots\rangle = \hat{a}_{E_n} |n_1, \dots, n_n - 1, \dots\rangle \quad (9)$$

$$(10)$$

$$\hat{a}_{E_n}^\dagger |n_1, \dots, n_n, \dots\rangle = \hat{a}_{E_n}^\dagger |n_1, \dots, n_n + 1, \dots\rangle \quad (11)$$

Es decir, \hat{a}_{E_n} toma un estado con N partículas y lo lleva a un estado con $N - 1$ partículas destruyendo una partícula en el estado E_n (y el converso para $\hat{a}_{E_n}^\dagger$). Por supuesto, \hat{a}_{E_n} aniquila el vacío, es decir

$$\hat{a}_{E_n} |0\rangle = 0 \quad (12)$$

Estos operadores satisfacen que²

$$\text{bosones} \quad [\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\gamma^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\lambda - \gamma) \quad (13)$$

$$(14)$$

$$\text{fermiones} \quad \{\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\gamma^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta(\lambda - \gamma) \quad (15)$$

Estas relaciones de conmutación aseguran que los estados fermiónicos tengan 0 o 1 partículas por estado y arbitrarias para estados bosónicos.

Supongamos ahora el sistema más sencillo que podemos imaginar: un conjunto de bosones libres. En este caso los estados están etiquetados simplemente por el momento \vec{p} de la partícula.³ Las funciones de onda para cada bosón son simplemente ondas planas $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ (omitamos por sencillez el factor de normalización). Como cuando creamos una partícula esta viene con la función de onda $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ es natural considerar la cantidad $\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$. Como el sistema contiene todos los posibles estados, es natural sumar dichas cantidades para todos los estados, construyendo así el operador (devolvamos ahora todas las normalizaciones correctamente)

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad \omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (16)$$

Esta claro que si devolvemos este operador a función esto simplemente describe un campo clásico, de manera que los modos de Fourier se corresponden con las partículas. Es decir, recuperamos la cuantización canónica de un campo escalar real.

La lección que se aprende aquí es que un sistema de partículas en donde el número de partículas no está fijo necesariamente se describe en términos de campos cuánticos. Alternativamente un campo cuántico describe un sistema cuántico de partículas donde el número no está fijo.

²El $(2\pi)^3$ es debido a como definimos la función δ .

³Si el sistema está en \mathbb{R}^3 el momento \vec{p} es continuo, pero más allá de tecnicidades, es como si los E_n se corresponden con los \vec{p} .

Es evidente ahora por que un sistema relativista cuantico debe describirse por un campo cuantico: la ecuacion de Einstein $E = m c^2$ implica que materia y energia son intercambiables, esto es, una teoria relativista debe permitir crear y destruir particulas (cambiar masa por energia). Por lo tanto es natural que un sistema relativista cuantico se describa por una teoria cuantica de campos.

2.1 Las teorias de campos son teorias efectivas

Hemos particularizado nuestra discusion para campos escalares reales, pero evidentemente la podriamos haber generalizado a campos complejos, fermionicos y campos gauge. Sigamos sin embargo con nuestro ejemplo del campo escalar real. Dicho ejemplo podemos de hecho pensarlo como una situacion fisica de verdad: el π^0 es una particula escalar sin carga electrica que se describe por un campo escalar real. La teoria que hemos analizado describe pues π^0 's libres, y en lo que resta vamos a desarrollar la teoria del π^0 y sus interacciones.⁴

Como es sabido, el π^0 no es fundamental en el sentido de que esta hecho de dos quarks. Sin embargo es obvio que a bajas energias dichos quarks son irrelevantes: el π^0 se ve como una particula fundamental. Es mas, a bajas energias, las interacciones del π^0 son despreciables, con lo que una buena aproximacion es la teoria libre de arriba. Podemos entonces agnadirle interaccion, exactamente tal y como vamos a hacer. Sin embargo la teoria que obtendremos no sera valida a energias arbitrarias. Es obvio que cuando la energia crece, la descripcion correcta no es en terminos de π^0 , sino en terminos de quarks y gluones libres, es decir, la descripcion correcta sera QCD.⁵ Por lo tanto, debemos pensar en la teoria que describe el π^0 como en una **teoria efectiva**, valida en un cierto rango de energias. Esta es la imagen moderna de las teorias de campos, basada en los trabajos seminales de Ken Wilson, que situa **todas** las teorias de campos como **teorias efectivas**: a cada escala de energia los grados de libertad relevantes seran distintos, y por lo tanto la teoria que describe de modo efectivo la fisica –de ahi el nombre de teoria efectiva– sera diferente.

Para entenderlo mejor, consideremos una analogia sugerida por David Gross: consideremos un fluido, por ejemplo el agua del mar. Si uno considera un objeto muy grande –*e.g.* un barco–, la fisica relevante es la de las olas moviendolo, todo ello descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes. Con especificar unos pocos parametros –densidad, numero de Reynolds–. Al ir considerando objetos mas y mas pequenios –longitud $\sim 1/\text{energia}$ – empieza a ser mas relevante especificar mas y mas cosas –si es agua de mar, su tension superficial...–. Si seguimos reduciendo el tamagno de la “sonda” de hecho en cierto momento nos encontraremos con que la descripcion en terminos de fluido en si misma es

⁴En el mundo real hay otros dos compaeneros cargados π^\pm , ademas de una torre enorme de otras particulas. Consideremos de momento el subsector que solo contiene π^0 .

⁵QCD es el acronimo en ingles de *CromoDinamica Cuantica* (*Quantum ChromoDynamics*). Es la teoria que describe la fuerza nuclear fuerte. Es como el electromagnetismo pero con mas fotones –que se llaman de hecho *gluones*–. Los gluones median la interaccion entre *quarks*. QCD se hace fuertemente acoplada a bajas energias. Por debajo de una energia que se denota como Λ_{QCD} los quarks y los gluones solo existen como estados ligados neutros: π^0 , π^\pm , proton, neutron...

incorrecta. . . para cuando estemos usando un objeto del tamagno de la molecula de agua esta claro que la descripcion en terminos de un continuo gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes no tiene sentido! Esto es exactamente igual al ejemplo analogo del π^0 y QCD.

En lo sucesivo deberemos pensar que estamos cosntruyendo una teoria de campos que describe los grados de libertad efectivos relevantes para la descripcion a esa energia. Por ejemplo, nuestro campo escalar real sera un π^0 y asumimos que estamos midiendo a escalas mucho mas pequeñas que Λ_{QCD} .

3 Campos en espacio-tiempo

Usando argumentos muy basicos, es de esperar que un sistema relativista se describa por una teoria cuantica de campos. En el caso mas sencillo de particulas bosonicas libres, el campo cuantico se escribe como

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \quad \omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (17)$$

Donde

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (18)$$

Notese que un estado con $n_{\vec{p}}$ particulas en el nivel \vec{p} se puede construir actuando con operadores creacion sobre el vacio

$$|n_{\vec{p}}\rangle = (\sqrt{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger) \cdots (\sqrt{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger) |0\rangle \quad (19)$$

donde el factor $\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$ acompagnando a cada operador creacion asegura que la normalizacion de los estados de una particula producidos es invariante Lorentz. Entonces, debido al algebra que los operadores creacion/descruccion satisfacen, es natural construir el operador

$$\hat{n}_{\vec{p}} = \frac{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}}{(2\pi)^3} \quad (20)$$

Esta claro que este operador actua sobre un estado con n particulas en el nivel etiquetado por \vec{p} como

$$\hat{n}_{\vec{p}} |n_{\vec{p}}\rangle = n_{\vec{p}} |n_{\vec{p}}\rangle \quad (21)$$

Es decir, el operador $\hat{n}_{\vec{p}}$ cuenta el numero de particulas en el estado \vec{p} . Si cada particula tiene energia $\omega_{\vec{p}}$, dichas particulas evidentemente contribuyen una energia $n_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}}$, con lo que la energia total es simplemente

$$E = \int d^3\vec{p} n_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \quad (22)$$

Esta claro que esta energia es el autovalor de un operador hamiltoniano definido como

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p} \omega_{\vec{p}} \hat{n}_{\vec{p}} \quad (23)$$

Notese que

$$[\hat{n}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}] = -\hat{a}_{\vec{p}} \quad [\hat{n}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \quad (24)$$

Esto es muy familiar del algebra del momento angular. Es la manera usual de construir representaciones, que nos indica que $\{\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger\}$ son respectivamente operadores destruccion y creacion.

Volvamos a nuestro operador campo. Aunque estamos estudiando un sistema no relativista, este operador campo no parece muy covariante Lorentz ya que para empezar depende solo de \vec{x} y no de t . Eso es porque este operador campo es un operador en la imagen de Schrodinger.

3.1 Imagen de Schrodinger vs. imagen Heisenberg en mecanica cuantica

Empecemos con el caso sencillo de la mecanica cuantica de una sola particula. En tal caso el sistema se describe por un estado $|\psi\rangle$ cuya evolucion temporal esta gobernada por la ecuacion de Schrodinger

$$\hat{H} |\psi\rangle = i \partial_t |\psi\rangle \quad (25)$$

Evidentemente aca el estado del sistema evoluciona con el tiempo, asi que en realidad $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$. Sin embargo los operadores –entre ellos el hamiltoniano \hat{H} – se asumen independientes del tiempo. Esta es la *imagen de Schrodinger*.

Supongamos un estado en un instante t_0 especificado por $|\psi(t_0)\rangle$. La pregunta es como evoluciona dicho estado en el tiempo. Tal evolucion ha de ser implementada por un operador evolucion $\hat{U}(t, t_0)$, tal que

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (26)$$

Evidentemente la evolucion ha de ser tal que la norma del estado se conserve

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \iff \hat{U}(t, t_0)^\dagger \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} \quad (27)$$

Enchufando esto en la ecuacion de Schrodinger

$$\hat{H} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = i \partial_t \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (28)$$

Por lo tanto el operador evolucion satisface la ecuacion de operadores

$$\hat{H} \hat{U}(t, t_0) = i \partial_t \hat{U}(t, t_0) \quad (29)$$

Por lo tanto, si conocemos el operador de evolucion a traves de su ecuacion de Schrodinger podemos simplemente considerar nuestros estados a un tiempo fijo dado t_0 como independientes del tiempo y pasar toda la evolucion temporal a los operadores. Por ejemplo, si tenemos un operador \mathcal{O} (por ejemplo momento angular, o spin o cualquier otro operador), el elemento de matriz en la imagen de Schrodinger se escribe como

$$\langle \psi(t) | \hat{\mathcal{O}} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{\mathcal{O}} \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (30)$$

Esto sugiere que si consideramos los estados como independientes del tiempo, los operadores contienen la dependencia temporal. Esto se conoce como *imagen de Heisenberg*. En vista de (30), un operador en la imagen de Schrodinger \mathcal{O}_S se escribe como un operador en la imagen de Heisenberg \mathcal{O}_H como

$$\hat{\mathcal{O}}_H = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{\mathcal{O}}_S \hat{U}(t, t_0) \quad \iff \quad \hat{\mathcal{O}}_S = \hat{U}(t, t_0) \hat{\mathcal{O}}_H \hat{U}^\dagger(t, t_0) \quad (31)$$

Volviendo a la ecuacion que especifica el operador evolucion, esta es una ecuacion diferencial de primer orden, asi que necesita una condicion de contorno. Dicha condicion de contorno es obvia

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (32)$$

Por lo tanto la solucion de la ecuacion diferencial es sencilla

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (33)$$

3.2 Campos en espacio-tiempo

Apliquemos esto a nuestro operador campo. Para ello veamos que ocurre con los operadores creacion/desctrucion al pasarlos a la imagen de Heisenberg. Usando que $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}t}$ (escojamos coordenadas tal que $t_0 = 0$), estos e convierten en

$$e^{i\hat{H}t} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\omega_{\vec{p}}t} \hat{a}_{\vec{p}} \quad e^{i\hat{H}t} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}t} = e^{i\omega_{\vec{p}}t} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \quad (34)$$

Usando esto, podemos pasarle la dependencia temporal al campo, produciendo el operador campo en la imagen de Heisenberg $\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{\phi}(\vec{x}) \hat{U}(t, t_0)$. Explicitamente

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right] \quad (35)$$

Donde la contraccion $p \cdot x$ esta hecha con la metrica de Minkowski, es decir, $p \cdot x = \omega_{\vec{p}}t - \vec{p} \cdot \vec{x}$, que es evidentemente invariante bajo transformaciones de Lorentz. Como todo viene en terminos del 4-vector $p = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$, hemos simplificado la notacion y etiquetado a los operadores creacio/aniquilacion por p .

A la vista de la forma del campo en imagen de Heisenberg, dado que $\omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$, esta claro que satisface la ecuacion de Klein-Gordon ($x = (t, \vec{x})$)

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \hat{\phi}(x) = 0 \quad \iff \quad \left(\partial_0^2 - \vec{\partial}^2 + m^2\right) \hat{\phi}(x) = 0 \quad (36)$$

Vemos de nuevo como recuperamos la cuantizacion canonica de un campo escalar que satisface la ecuacion de Klein-Gordon. Dicha ecuacion se deriva de un lagrangiano que es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (37)$$

La densidad de momento canonicamente conjugado del campo es

$$\pi = \partial_0 \phi \quad (38)$$

De manera que el hamiltoniano del campo es

$$H = \int d^3 \vec{x} \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \vec{\partial} \phi \cdot \vec{\partial} \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (39)$$

Dado la expresion del campo en espacio tiempo que conocemos es sencillo ver que en efecto el operador hamiltoniano acaba por ser

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger) \quad (40)$$

Usando las reglas de conmutacion esto es

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta(0)) \quad (41)$$

Esto es casi lo que esperabamos pero con un termino de mas. Como dicho termino es el unico que contribuye si calculamos $E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$, este ultimo trozo en \hat{H} se corresponde con la energia del vacio. Como en realidad lo que se mide son diferencias de energia con el vacio, podemos simplemente substraer este termino y escribir el hamiltoniano esperado

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \quad (42)$$

Esta substraccion de la energia de vacio es lo mismo que considerar los operadores escritos en terminos de operadores creacion/destruccion ordenados tal que los operador destruccion vayan a la izquierda. Por eso esta prescripcion se llama *ordenado normal* y se denota como $:\hat{\mathcal{O}}:$, denotando que hemos construido $\hat{\mathcal{O}}$ ordenando los operadores creacion/destruccion tal que los creacion van primero (a la izquierda).

Examinemos el termino en \hat{H} que hemos tirado. Este contiene $\delta(0)$, que es

$$\delta(0) = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}|_{\vec{p}=0} = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^3} = \frac{\text{Vol}}{(2\pi)^3} \quad (43)$$

Donde Vol es el volumen del espacio donde vive la teoria de campos. Pasandolo al otro lado, podemos escribir la densidad de energia en el vacio de la teoria de campos $\mathcal{E}_0 = \frac{E_0}{\text{Vol}}$ como

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_p \quad (44)$$

3.2.1 La fuerza de Casimir

Tomando la prescripcion de ordenado normal hemos basicamente eliminado la contribucion de la energia de vacio. El argumento fisico es que en realidad lo que medimos son diferencias de energias. Pero hay situaciones sin embargo en las que la energia de vacio si es fisica. Imaginemos un metal con forma circular, de manera que de modo efectivo se describa por una teoria cuantica de campos en un circulo de longitud L . Dado que el sistema es efectivamente unidimensional (es decir, 1+1), la unica diferencia es que en las expresiones de antes $d^3\vec{p} \rightarrow dp_x$. La densidad de energia del vacio sera simplemente

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{dp_x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \omega_{p_x} \quad (45)$$

Pero dado que estamos en una caja, debemos imponer condiciones de contorno apropiadas para las funciones de onda en las paredes. Impongamos condiciones de contorno periodicas, que es como suponer que en realidad el campo vive en un circulo. En tal caso

$$e^{ip_x x}|_{x=0} = e^{ip_x x}|_{x=L} \quad \rightsquigarrow \quad p_x = \frac{2\pi}{L} n \quad (46)$$

Como los momentos son discretos, la integral se convierte en una suma

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} + m^2} \quad (47)$$

Esta suma parece diverger. Estudiemos por sencillez el caso de $m = 0$.

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (48)$$

Donde hemos partido la suma en dos: entre $-\infty$ y 0 y entre 0 e ∞ , ademas de eliminado el termino trivial de $n = 0$. Ahora bien, esta suma se puede escribir en terminos de la funcion zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum n^{-s}$. De hecho es $\zeta(-1)$, que, aunque a priori divergente, es en realidad igual a $-\frac{1}{12}$. Por lo tanto, la energia de vacio es

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\pi}{12L} \quad (49)$$

Ya que la densidad de energia depende de L , hay una fuerza $F = -\frac{d\mathcal{E}_0}{dL}$ dada por

$$F = -\frac{\pi}{12 L^2} \quad (50)$$

Esta fuerza tenderia a contraer el circulo. Este tipo de fuerzas, conocidas como *fuerzas de Casimir* se miden explicitamente en el laboratorio, poniendo de manifiesto la entidad fisica del vacio de la teoria cuantica de campos.

3.2.2 La constante cosmologica

Existe otra situacion donde la energia del vacio es muy relevante, y es en presencia de gravedad. Normalmente la fuerza de gravedad se desprecia, ya que es mucho mas debil que el resto de fuerzas relevantes. Sin embargo si el sistema a estudiar es el universo en si la fuerza de gravedad es de hecho la interaccion dominante. Cuando la curvatura es pequengna la fuerza de gravedad se describe usando la relatividad general. Las ecuaciones de Einstein que describen la dinamica del campo gravitatorio son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = 8 \pi G T_{\mu\nu} \quad (51)$$

Donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de impulso-energia de la materia que llena el universo, es decir, el tensor de impulso-energia de todos los campos cuanticos. En particular, esta claro que la “energia tambien gravita”, con lo que la energia de vacio tendra unos efectos no triviales en el campo gravitatorio. Dicha energia de vacio se conoce como *constante cosmologica*. En \mathbb{R}^3 la densidad de energia del vacio es

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (52)$$

Esta claro que esta integral es divergente como

$$\mathcal{E}_0 \sim \frac{1}{8\pi} \int dp p^3 \sim \frac{1}{32\pi} \Lambda^4 \quad (53)$$

donde hemos regulado la integral asumiendo que la cortamos en $|\vec{p}| = \Lambda$. Esta claro que la integral diverge cuando mandamos ese Λ a infinito como Λ^4 . Sin embargo las medidas cosmologicas sugieren que la constante cosmologica (*i.e.* la densidad de energia del vacio) es casi casi cero. Explicar la enorme diferencia entre la prediccion Λ^4 y la medida ~ 0 es uno de los mas grandes problemas abiertos en fisica.

3.3 Campos complejos y antiparticulas

Toda la discusion que hemos hecho la podriamos haber repetido para el caso del campo complejo. Aunque moralmente nada habria cambiado, nos encontraríamos sin embargo con una diferencia con consecuencias muy importantes. Para entender esto podemos considerar un campo clasico. La solucion de la ecuacion de Klein-Gordon en general es (en esta subseccion no prestaremos demasiada atencion a normalizaciones y detalles numericos)

$$\phi = \int d^3\vec{p} a_{\vec{p}} e^{i(\omega_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + b_{\vec{p}} e^{-i(\omega_{\vec{p}}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \quad (54)$$

En el caso del campo real, como $\phi^\dagger = \phi$, tenemos que $b_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^\dagger$. Sin embargo, en el caso del campo complejo no hay ninguna relacion entre $b_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}$. Debido a ello, al cuantizar el campo encontraremos dos juegos de operadores creacion y destruccion: los $\{\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger\}$ y los $\{\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\}$. El sistema contendra por lo tanto dos tipos de particulas con igual masa.

Dichas particulas se distiguirian sin embargo si acoplamos el campo a un campo electromagnetico. Como es bien sabido, eso se hace promoviendo la derivada a derivada covariante gauge

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu \quad (55)$$

Debido a que el trozo con el campo electromagnetico A_μ lleva una i , si ϕ tiene carga digamos positiva, ϕ^\dagger tendra carga negativa. Eso lleva a que las particulas creadas por $\{\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger\}$ tengan carga opuesta de las creadas por $\{\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger\}$. Las ultimas reciben el nombre de *antiparticulas*.

Notese que para un campo real esta discusion no tiene sentido: no se puede acoplar al electromagnetismo. Por eso, para un campo real cada particula es su propia antiparticula.

En lo sucesivo nos concentraremos en campos escalares reales por sencillez, pero hay que recordar siempre que una historia muy parecida –pero con ciertos matices– es cierta en el caso general en el que tenemos un campo complejo y por lo tanto antiparticulas.

4 Campos en interaccion

Hasta ahora hemos asumido que el sistema no contiene interacciones, es decir, hemos cuantizado un sistema clasico con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (56)$$

Esta claro que el campo no tiene por que ser libre. En general podemos considerar un lagrangiano clasico compatible con todas las simetrias. En este caso, estamos asumiendo un campo escalar, asi que la unica restriccion es invariancia Lorentz. Por lo tanto, el lagrangiano mas general sera de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sum_{n>2} \lambda_n \phi^n \quad (57)$$

Es evidente que la ecuacion de movimiento ya no es simplemente la ecuacion de Klein-Gordon, sino que se convierte en

$$\left(\partial_0^2 - \vec{\partial}^2 + m^2 \right) \phi(x) = - \sum_{n>2} n \lambda_n \phi^{n-1} \quad (58)$$

Esta claro que los coeficientes λ_n controlan las no-linealidades, es decir, las interacciones del campo (en este caso consigo mismo).

Volviendo a la accion es

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sum_{n>2} \lambda_n \phi^n \quad (59)$$

Asumiendo unidades en las que $[\hbar] = [c] = 1$, como la accion ha de ser adimensional, si x^μ tiene unidades de E^{-1} , vemos que $[\phi] = E$, de manera que

$$[\lambda_n] = 4 - n \quad (60)$$

Ya que los coeficientes λ_n son dimensionales, en realidad no tiene mucho sentido decir que controlan la intensidad de las interacciones. Es natural construir constantes de acoplamiento adimensionales g_n usando alguna escala de energia tipica E que tenga el problema

$$g_n = E^{n-4} \lambda_n \quad \rightsquigarrow \quad [g_n] = 0 \quad (61)$$

Manteniendo λ_n fijo, esta claro que segun n el comportamiento de g_n es muy diferente al variar la escala característica E . Esta escala podemos pensarla como la escala a la que estamos observando el sistema, y por lo tanto marca el rango de energias en el que estamos interesados. Como nuestro mundo es un mundo de baja energia, en realidad estamos interesados en estudiar el sistema a bajas E . En otras palabras, estamos interesados en la teoria efectiva a baja energia. Segun n cosas muy diferentes ocurren

- $n > 4$: el exponente de E es positivo, por lo que al ir E a cero g_n va a cero. Estos terminos se llaman **irrelevantes**.
- $n = 4$: en este caso $g_n = \lambda_n$ y –al menos naivamente– no hay dependencia con E . Estos terminos se llaman **marginales**.
- $n < 4$: el exponente de E es negativo, y por lo tanto estos g_n se hacen mayores y mayores al decrecer E . Estos terminos se llaman **relevantes**.

Esta observacion es crucial. Al final, nuestro modelo sencillo de teoria escalar podria representar el campo del π^0 . En principio parece que uno deberia tener en cuenta las infinitas interacciones del π^0 consigo mismo, lo que parece algo imposible de analizar. Sin embargo, dado que al final el π^0 es observado en un mundo de baja energia, todas las interacciones con $n > 4$ son basicamente despreciables. Por lo tanto es suficiente con considerar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda_3 \phi^3 - \lambda_4 \phi^4 \quad (62)$$

De hecho, imponiendo simetria bajo $\phi \rightarrow -\phi$, los unicos terminos relevantes son

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 \quad (63)$$

Este es el modelo sencillo con el que trabajaremos para hacer calculos explicitos de aqui en adelante. Dado que un campo en interaccion se describe clasicamente por una ecuacion mucho mas complicada que la ecuacion de Klein-Gordon, evidentemente la cuantizacion de este sistema ya no dara algo tan sencillo como

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i p \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i p \cdot x} \right] \quad (64)$$

4.1 Interacciones relevantes y el IR

Como vimos, las interacciones irrelevantes no cambian la fisica de bajas energias (infrarojo=IR), ya que en ese regimen son despreciables. Sin embargo las interacciones relevantes son cruciales para entender el IR. Las interacciones marginales pueden, por efectos cuanticos, volverse relevantes y cambiar completamente las propiedades del IR. De hecho esto es lo que ocurre en QCD: la interaccion de QCD –como el electromagnetismo– es marginal en 4d. Sin embargo, a diferencia del electromagnetismo, QCD es una interaccion marginalmente **relevante**, es decir, se vuelve, por efectos cuanticos, muy fuerte en el IR. Esto es lo que genera el confinamiento de los quarks y gluones en π^0 , π^\pm , protones, mesones... Podemos ahora entender mejor algunos comentarios anteriores: en QCD naivamente tenemos una interaccion marginal que se vuelve relevante, creciendo por lo tanto al bajar la energia. A una cierta escala de energias Λ_{QCD} la interaccion se hace tan fuerte que quarks y gluones ya no existen libres. Por debajo de esa energia, la teoria efectiva es una teoria para π^0 , π^\pm , protones, mesones... Nosotros estamos considerando el subsector de dicha teoria que solo contiene π^0 !

4.2 Scattering de particulas

En el mundo real las particulas –y por ende los campos cuanticos que las describen– interaccionan. La manifestacion mas directa de esto es que dos particulas chocan y se desvian cuando se encuentran. Es por esto que uno de los intereses primarios es calcular amplitudes de scattering entre particulas. Supongamos que en un tiempo T_i tenemos un cierto numero m de particulas en un cierto estado etiquetado por los momentos \vec{k}_i de cada particula (y sus espines *etc.*). La pregunta es cual es la probabilidad de que a un tiempo final T_f el estado contenga n particulas en otro determinado estado etiquetado por los correspondientes \vec{p}_i . Es decir, debemos calcular

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; T_f | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; T_i \rangle \quad (65)$$

Implicitamente asumimos que $T_i \rightarrow -\infty$ y $T_f \rightarrow \infty$, de manera que en estos estados iniciales y finales las particulas no interactuan –por ejemplo porque todas las particulas acaban suficientemente separadas como para que sus interacciones sean despreciables–. A

estos estados que contienen basicamente particulas libres se les llama *estados asintoticos*. Al estado inicial $|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; T_i\rangle$ con $T_i \rightarrow -\infty$ se le llama *estado in* y al final $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; T_f\rangle$ con $T_f \rightarrow \infty$ se le llama *estado out*. Asi pues, llamando en general al estado *in* como $|in\rangle$ y al *out* como $|out\rangle$ moralmente queremos calcular

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty} \langle out | \hat{U}(t_{in}, t_{out}) | in \rangle \quad (66)$$

Donde \hat{U} es el correspondiente operador de evolucion. Esto usualmente se denota asumiendo la existencia de un operador unitario \hat{S} que implementa esta transicion como

$$\langle out | \hat{S} | in \rangle \quad (67)$$

Al operador \hat{S} se le llama *matriz S*. Normalmente se separa de la matriz S el caso trivial de no interaccion. Es decir, se escribe $\hat{S} = \mathbb{1} + i\hat{T}$, donde \hat{T} mide la probabilidad de transicion entre estados diferentes. Como solemos estar interesados en estados inicial y final diferentes, en realidad normalmente calculamos $\langle out | \hat{T} | in \rangle$

En un experimento de verdad se hacen chocar haces de particulas y se observa el resultado. Una manera de comparar dichos resultados de manera independiente del tamagno del haz de particulas, el numero de particulas u otros detalles dependientes del experimento en particular es calculando la *seccion eficaz* (*cross section* en ingles). A groso modo, si un haz de particulas con N_A particulas choca con un haz de N_B particulas en una superficie A , algunas particulas chocaran mientras que otras ni se veran entre si. El numero de scatterings # sera

$$\#_{scatterings} = \sigma \frac{N_A N_B}{A} \quad (68)$$

donde σ es la cantidad que controla la probabilidad intrinseca al tipo de particulas de interaccion (es decir, σ lleva la informacion de como es la interaccion entre las particulas d A y las de B). Esta cantidad intrinseca al tipo de particulas y su dinamica es la seccion eficaz.

Otra cantidad con interpretacion fisica muy directa es la *probabilidad de desintegracion* (*decay rate* en ingles). Si tenemos N_A particulas no estable, que se desintegran en ciertas otras particulas, podemos contar el numero de desintegraciones por unidad de tiempo. Dividiendo por el numero de particulas tenemos una medida intrinseca de la probabilidad de desintegracion. Es decir

$$\#_{desintegraciones} = \Gamma N_A \quad (69)$$

donde Γ es el *decay rate*.

Aunque no vamos a desarrollar toda la teoria de scattering, la cuestion es que tanto σ como Γ se pueden definir de modo diferencial, es decir, contando decaimientos o scatterings por angulo solido. En realidad en un experimento de verdad nunca hay un estado puro ni se mide un estado puro. Asi pues en realidad lo que tenemos por ejemplo en una colision es que los haces de particulas tienen una distribucion de momentos centrada en un cierto

valor. Por el mismo motivo, lo que medimos al final tiene tambien una cierta distribucion de momentos. Es por eso por lo que al escribir las secciones eficaces/probabilidades de desintegracion estas vienen en terminos del elemento de matriz S correspondiente a la transicion entre el estado *in* y el *out* correspondientes multiplicado por el numero de estados *out* que tenemos. Por lo tanto, en ambos casos se puede dar una expresion que esquematicamente es de la forma

$$d\sigma = |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}| d\Phi \quad d\Gamma = |\mathcal{M}_{A \rightarrow f}| d\Phi \quad (70)$$

Donde $d\Phi$ es el elemento de volumen en espacio de fases, es decir, la densidad de estados correspondiente, mientras que $|\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|$ es el elemento de matriz correspondiente a la transicion. Si bien $d\Phi$ es una cantidad puramente cinematica, $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ es una cantidad que contiene informacion sobre la teoria en si. Esto es lo que mas nos urge calcular, lo realmente no trivial y lo que se persigue estudiar en cualquier experimento. Esta claro que este elemento de matriz es

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \langle out | \hat{S} | in \rangle = \langle out | \hat{T} | in \rangle = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; T_f | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; T_i \rangle \quad (71)$$

Calcular esto sera nuestro principal objetivo.

4.3 Formula de reduccion de LSZ

Estamos interesados en calcular amplitudes de transicion entre estados *in* y *out*, es decir, elementos de la matriz S. Estos estan definidos asintoticamente en $t \rightarrow \pm\infty$, de manera que para ellos las particulas contenidas son esencialmente libres. Asi pues es como si en $t \rightarrow \pm\infty$ tuviesemos sendas teorias de campos libres, cada una con sus operadores creacion/destruccion y su vacio. Asi pues, por ejemplo para el estado *in*, podemos escribir

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; T_i\rangle = \sqrt{2\omega_{k_1}} \hat{a}_{in, k_1}^\dagger \cdots \sqrt{2\omega_{in, k_m}} \hat{a}_{in, k_m}^\dagger |0_{in}\rangle \quad (72)$$

donde estos operadores creacion son los del campo in, es decir, el campo libre en $t \rightarrow -\infty$ actuando sobre el vacio *in* con la correcta normalizacion relativista (ver apendice). Una expresion analoga es cierta para el estado *out*.

Olvidemonos ahora por un momento de la interaccion. Para un campo libre podemos escribir los operadores creacion/desctrucion en terminos de campos como

$$\sqrt{2\omega_p} \hat{a}_p = i \int d^3\vec{x} e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}_l \quad \sqrt{2\omega_p} \hat{a}_p^\dagger = -i \int d^3\vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}_l^\dagger \quad (73)$$

donde $f \overleftrightarrow{\partial}_0 g = f \partial_0 g - g \partial_0 f$.

Volvamos ahora a nuestro problema, en donde si tenemos interacciones. En presencia de interaccion esta claro que la expansion del campo en operadores creacion/destruccion es incorrecta. De todos modos, es natural asumir que la interaccion entre particulas muy

separadas sea despreciable⁶, con lo que es de esperar que el campo en interaccion, al ir $t \rightarrow \pm\infty$ se aproxime asintoticamente al campo libre. Al final, en nuestro experimento de scattering, al mandar $T_i \rightarrow -\infty$ y $T_f \rightarrow \infty$ asumimos que las particulas estan suficientemente lejos como para que la interaccion sea despreciable. Haciendo formal esta asuncion podemos escribir

$$\phi = \sqrt{Z} \phi_l \quad (74)$$

Con Z una funcion tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Z = 1 \quad (75)$$

Usando esto, podemos escribir los operadores creacion y destruccion libres en terminos de campos en interaccion como

$$\sqrt{2\omega_p} \hat{a}_p = i Z^{-1/2} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3 \vec{x} e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi} \quad \sqrt{2\omega_p} \hat{a}_p^\dagger = -i Z^{-1/2} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3 \vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}^\dagger \quad (76)$$

Usando esta definicion en terminos de $\hat{\phi}$ esta claro que podemos escribir el estado in y el out en terminos de $\hat{\phi}$. En lugar de hacer el caso mas general, analicemos el caso mas sencillo, donde $n = m = 1$. Queremos calcular $\langle \vec{p}; T_f | \vec{k}; T_i \rangle$. Usando que en el estado in podemos escribir el estado actuando con los operadores creacion tenemos que

$$\langle \vec{p}; T_f | \vec{k}; T_i \rangle = \sqrt{2\omega_k} \langle \vec{p}; T_f | \hat{a}_{in,k}^\dagger | 0_{in} \rangle \quad (77)$$

Asumiendo que $\vec{p} \neq \vec{k}$ esto es igual a

$$\langle \vec{p}; T_f | \vec{k}; T_i \rangle = \sqrt{2\omega_k} \langle \vec{p}; T_f | \left(\hat{a}_{in,k}^\dagger - \hat{a}_{out,k}^\dagger \right) | 0_{in} \rangle \quad (78)$$

ya que el operador $\hat{a}_{out,k}$ aniquila $|\vec{p}; T_f\rangle$ si $\vec{p} \neq \vec{k}$. La cuestion es que ahora, reemplazando los operadores creacion/destruccion por su expresion en terminos del campo en interaccion

$$\sqrt{2\omega_k} \left(\hat{a}_{in,k}^\dagger - \hat{a}_{out,k}^\dagger \right) = -i Z^{-1/2} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow \infty} \right) \int d^3 \vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}^\dagger \quad (79)$$

Pero esto es lo mismo que

$$\sqrt{2\omega_k} \left(\hat{a}_{in,k}^\dagger - \hat{a}_{out,k}^\dagger \right) = i Z^{-1/2} \int d^4 x \partial_0 \left(e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}^\dagger \right) \quad (80)$$

Fijemonos en el integrando ahora

⁶Esto es a coger por los pelos...hay interacciones de importancia capital tanto de modo conceptual como en la realidad que no satisfacen esto, sino que confinan!.

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{x} \partial_0 \left(e^{-i p \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}^\dagger \right) &= \int d^4x \partial_0 \left(e^{-i p \cdot x} \partial_0 \hat{\phi} + i \omega_p e^{-i p \cdot x} \hat{\phi} \right) = \\
&= \int d^4x \left(-i \omega_p e^{-i p \cdot x} \partial_0 \hat{\phi} + e^{-i p \cdot x} \partial_0^2 \hat{\phi} + \omega_p^2 e^{-i p \cdot x} \hat{\phi} + i \omega_p e^{-i p \cdot x} \partial_0 \hat{\phi} \right) \\
&= \int d^4x e^{-i p \cdot x} \left(\partial_0^2 + \omega_p^2 \right) \hat{\phi}
\end{aligned} \tag{81}$$

Dado que $\omega_p = \bar{p}^2 + m^2$, y como en espacio de posiciones $\bar{p}^2 = -\bar{\partial}^2$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int d^4x \partial_0 \left(e^{-i p \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\phi}^\dagger \right) &= \int d^4x e^{-i p \cdot x} \left(\partial_0^2 - \bar{\partial}^2 + m^2 \right) \hat{\phi} \\
&= \int d^4x e^{-i p \cdot x} \left(\partial_x^2 + m^2 \right) \hat{\phi}(x)
\end{aligned} \tag{82}$$

Poniendolo todo junto

$$\sqrt{2\omega_k} \left(\hat{a}_{in,k}^\dagger - \hat{a}_{out,k}^\dagger \right) = i Z^{-1/2} \int d^4x e^{-i p \cdot x} \left(\partial_x^2 + m^2 \right) \hat{\phi}(x) \tag{83}$$

Es importante darse cuenta de que en la teoria en libre $\hat{\phi}$ satisfaria la ecuacion de movimiento y por lo tanto esto daria 0 –es decir, los dos operadores creacion *in* y *out* son iguales–. Sin embargo en la teoria en interaccion esto no es asi, y por lo tanto esto no es cero. Usando esto, podemos entonces escribir

$$\langle \vec{p}; T_f | \vec{k}; T_i \rangle = i Z^{-1/2} \int d^4x e^{-i p \cdot x} \left(\partial_x^2 + m^2 \right) \langle \vec{p}; T_f | \hat{\phi}(x) | 0_{in} \rangle \tag{84}$$

Hagamos ahora lo mismo con el estado final. Para ello

$$\langle \vec{p}; T_f | \hat{\phi}(x) | 0_{in} \rangle = \sqrt{2\omega_p} \langle 0_{out} | \hat{a}_{out,p} \hat{\phi}(x) | 0_{in} \rangle \tag{85}$$

Al igual que antes, nos gustaria cambiar $\hat{a}_{out,p}$ por $\hat{a}_{out,p} - \hat{a}_{in,p}$. El problema es que si bien antes introducir el termino restante era gratis, ya que evidentemente era un cero, en este caso no es tan obvio, ya que por el medio esta el $\hat{\phi}(x)$. Lo que si podemos agnadir gratis es $\hat{\phi}(x) \hat{a}_{in,p}$, ya que evidentemente el $\hat{a}_{in,p}$ aniquila el vacio. Asi pues podemos escribir

$$\langle \vec{p}; T_f | \hat{\phi}(x) | 0_{in} \rangle = \sqrt{2\omega_p} \langle 0_{out} | \left(\hat{a}_{out,p} \hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x) \hat{a}_{in,p} \right) | 0_{in} \rangle \tag{86}$$

Inventemonos ahora un operador de *ordenacion temporal*

$$T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] = \theta(x^0 - y^0) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) + \theta(y^0 - x^0) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) \tag{87}$$

Entonces, usando la definicion de los operadores creacion/destruccion en terminos de campos resulta que

$$\begin{aligned}
T\left[\hat{a}_{in,p}\hat{\phi}(x)\right] &= T\left[\hat{a}_{in,p}\hat{\phi}(x)\right] = -i(2\omega_p)^{-1/2}Z^{-1/2}\lim_{y^0\rightarrow-\infty}\int d^3\vec{y}e^{ip\cdot y}\overleftrightarrow{\partial}_{y^0}T\left[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\right] \\
&= -i(2\omega_p)^{-1/2}Z^{-1/2}\lim_{y^0\rightarrow-\infty}\int d^3\vec{y}e^{ip\cdot y}\overleftrightarrow{\partial}_{y^0}\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \hat{\phi}(x)\hat{a}_{in,p}
\end{aligned} \tag{88}$$

ya que, dado que $y^0 \rightarrow -\infty$, resulta que $T\left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right] = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)$. Por las mismas

$$\begin{aligned}
T\left[\hat{a}_{out,p}\hat{\phi}(x)\right] &= T\left[\hat{a}_{in,p}\hat{\phi}(x)\right] = -i(2\omega_p)^{-1/2}Z^{-1/2}\lim_{y^0\rightarrow\infty}\int d^3\vec{y}e^{ip\cdot y}\overleftrightarrow{\partial}_{y^0}T\left[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\right] \\
&= -i(2\omega_p)^{-1/2}Z^{-1/2}\lim_{y^0\rightarrow\infty}\int d^3\vec{y}e^{ip\cdot y}\overleftrightarrow{\partial}_{y^0}\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) = \hat{a}_{out,p}\hat{\phi}(x)
\end{aligned} \tag{89}$$

Asi que

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}; T_f|\hat{\phi}(x)|0_{in}\rangle &= \sqrt{2\omega_p}\langle 0_{out}|\left(\hat{a}_{out,p}\hat{\phi}(x) - \hat{\phi}(x)\hat{a}_{in,p}\right)|0_{in}\rangle \\
&= \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\langle 0_{out}|\left[\left(\hat{a}_{out,p} - \hat{a}_{in,p}\right)\hat{\phi}(x)\right]|0_{in}\rangle
\end{aligned} \tag{90}$$

Ahora, dentro del operador de ordenacion temporal tenemos precisamente lo que buscamos. Exactamente igual que antes, resulta que

$$\sqrt{2\omega_k}\left(\hat{a}_{out,k} - \hat{a}_{in,k}\right) = iZ^{-1/2}\int d^4xe^{ip\cdot x}\left(\partial_x^2 + m^2\right)\hat{\phi}(x) \tag{91}$$

Con lo que, todo junto, resulta que

$$\begin{aligned}
\langle\vec{p}; T_f|\vec{k}; T_i\rangle & \tag{92} \\
&= (iZ^{-1/2})^2\int d^4x\int d^4ye^{-ip\cdot x}\left(\partial_x^2 + m^2\right)e^{iq\cdot y}\left(\partial_y^2 + m^2\right)\langle 0_{out}|\left[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\right]|0_{in}\rangle
\end{aligned}$$

Usualmente (al menos en procesos perturbativos) uno asume que el vacio *in* es igual al *out*, por lo que podemos denotarlo en general por $|0\rangle$. Por otra parte, esta claro que si hubiesemos considerado el estado mas general tendríamos

$$\langle\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; T_f|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; T_i\rangle = \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
&(iZ^{-1/2})^{n+m}\int\prod_{i=1}^m d^4x_i\int\prod_{j=1}^n d^4y_j e^{-i\sum_{i=1}^n p_i\cdot x_i + i\sum_{j=1}^m k_j\cdot y_j} \\
&\times\prod_{i=1}^m\left(\partial_{x_i}^2 + m^2\right)\prod_{j=1}^n\left(\partial_{y_j}^2 + m^2\right)G^{(n+m)}(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{94}$$

Donde en general

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \left[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) \right] | 0 \rangle \quad (95)$$

Estas funciones $G^{(n)}$ de n puntos así definidas –como valores de expectación ordenados temporales– son absolutamente centrales en teoría cuántica de campos. Se las suele llamar funciones a n puntos, correladores o funciones de Green. El caso $n = 2$ recibe un nombre especial: es el *propagador* (de Feynman). A veces, para simplificar la notación, se omite la referencia explícita al vacío, esto es, en lugar de escribir $\langle 0 | T \left[\cdots \right] | 0 \rangle$ se escribe simplemente $\langle T \left[\cdots \right] \rangle$.

Podemos escribir la expresión de antes en espacio de momentos. Al final tenemos que

$$\left(\prod_{i=1}^m \frac{i \sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{i \sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) {}_{in} \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rangle_{out} = \quad (96)$$

$$\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-i k_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{i p_j \cdot y_j} \langle T \left[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_m) \hat{\phi}(y_1) \cdots \hat{\phi}(y_n) \right] \rangle$$

A esta expresión que hemos obtenido, que permite escribir amplitudes de probabilidad de transición entre estados en términos de correladores, se le llama *formula de reducción de LSZ*, en honor a sus descubridores Lehmann, Symanzik y Zimmermann.

Notese que en la ecuación (96) las partículas externas son físicas. Esto quiere decir que para ellas $p_i^2 = m^2$ –a esto se le llama *on shell*. Esto hace diverger la parte izquierda de la ecuación. Para entender esta divergencia debemos calcular la función de correlación para $\{p_i^2, m^2\}$ genéricos –es decir, *off shell*–. En el límite en el que tomamos $p_i^2 = m^2$ la función de correlación tendrá polos, que cancelarán los de la parte izquierda. Otra manera de decir esto es que de (96) se sigue que los elementos de matriz S se obtienen de los residuos de los correladores de n puntos calculados *off shell*. Es importante remarcar que, de hecho, el correlador es calculado *off shell*.

4.4 Calculando correladores en teoría de perturbaciones

Hemos visto que la amplitud de probabilidad de transición entre dos estados asintóticos se puede escribir en términos de funciones a n puntos. Sin embargo, así tal cual esto es básicamente inútil si no encontramos una manera de calcular dichas funciones. Antes de proceder con el campo cuántico, recordemos el caso de la mecánica cuántica.

4.4.1 La imagen de interacción en mecánica cuántica

Muchas veces ocurre que un sistema está descrito por un hamiltoniano que tiene dos trozos: uno “sencillo” cuyos autoestados y autovalores conocemos –llamémoslo \hat{H}_0 – y uno que complica las cosas mezclando niveles. Dicho término “complicado” es un término de

interaccion –denotemoslo por \hat{H}_{int} . La ecuacion de Schrodinger, que dicta la evolucion de los estados en la imagen de Schrodinger, es

$$[\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] |\psi(t)\rangle = i \partial_t |\psi(t)\rangle \quad (97)$$

Si no tuviesemos \hat{H}_{int} seria natural usar la imagen de Heisenberg y pensar en operadores dependientes del tiempo actuando sobre estados independientes del tiempo. Como la presencia de la interaccion complica las cosas mezclando estados, es util considerar una imagen “mixta” en la que la dependencia temporal de los operadores la lleva el hamiltoniano \hat{H}_0 mientras que la evolucion temporal de los estados la hace \hat{H}_{int} . Esta se conoce como *imagen de interaccion*. Mas explicitamente los estados en la imagen de interaccion se relacionan con los de la imagen de Schrodinger como

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (98)$$

Donde $\hat{U}_0(t)$ satisface la ecuacion de Schrodinger con el hamiltoniano \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 \hat{U}_0 = i \partial_t \hat{U}_0(t) \quad (99)$$

Metiendo esto en la ecuacion de Schrodinger

$$\hat{H}_{int} U_0(t) |\psi(t)\rangle_I = i U_0(t) \partial_t |\psi(t)\rangle_I \quad \rightsquigarrow \quad \hat{H}_I |\psi(t)\rangle_I = i \partial_t |\psi(t)\rangle_I \quad (100)$$

Por lo tanto el estado $|\psi(t)\rangle_I$ en la imagen de interaccion evoluciona con el tiempo con la ecuacion de Schrodinger $\hat{H}_I |\psi(t)\rangle_I = i \partial_t |\psi(t)\rangle_I$. Poniendolo todo junto, estados y operadores en la imagen de Schrodinger se escriben en terminos de operadores y estados en la imagen de interaccion como

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t) |\psi(t)\rangle_I \quad \hat{\mathcal{O}}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{\mathcal{O}}_I \hat{U}_0(t) \quad (101)$$

De aqui se sigue que

$$|\psi(t)\rangle_I = U_0^\dagger(t) |\psi(t)\rangle \quad \hat{\mathcal{O}}_I(t) = \hat{U}_0(t) \hat{\mathcal{O}} \hat{U}_0^\dagger(t) \quad (102)$$

Es decir, los estados y operadores en la imagen de interaccion son los estados y operadores en la imagen de Heisenberg suponiendo $\hat{H} = \hat{H}_0$.

Para el estado en interaccion podemos construir un operador evolucion $U)I$ que satisface

$$\hat{H}_I \hat{U}_I(t) = i \partial_t \hat{U}_I(t) \quad (103)$$

4.5 Una expansion perturbativa para la teoria de campos

Volviendo a nuestro problema original, queremos calcular las funciones a n puntos

$$\langle 0 | T \left[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) \right] | 0 \rangle \quad (104)$$

Implicitamente estas funciones estan en terminos del operador campo en la representacion de Heisenberg para el hamiltoniano total. De lo que se trata ahora es de encontrar una manera de calcular estas funciones a n puntos. Para ello vamos a asumir que el hamiltoniano del campo es de la forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$, siendo \hat{H}_0 el hamiltoniano libre y \hat{H}_{int} el de interaccion. Haciendolo explicito en nuestro modelo de juguete del campo escalar real tenemos que

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial\phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \mathcal{L}_{int} = -\lambda \phi^4 \quad \Longleftrightarrow \quad H_{int} = \lambda \phi^4 \quad (105)$$

Usando la representacion de interaccion, podemos escribir para el operador campo

$$\hat{\phi}(x) = \hat{U}_I^\dagger(x^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(x^0, x_0^0) \quad (106)$$

Por lo tanto el correlador se convierte en (asumamos los campos correctamente ordenados para evitar escribir el T)

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(x_1^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_1) \hat{U}_I(x_1^0, x_0^0) \hat{U}_I^\dagger(x_2^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_2) \hat{U}_I(x_2^0, x_0^0) \cdots \hat{U}_I^\dagger(x_n^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(x_n^0, x_0^0) | 0 \rangle \quad (107)$$

Entre cada dos operadores campo hay $\hat{U}_I(x_n^0, x^0) \hat{U}_I^\dagger(x_{n+1}^0, x^0)$. Como $\hat{U}_I^\dagger(x_{n+1}^0, x^0) = \hat{U}_I(x^0, x_{n+1}^0)$, eso es

$$\hat{U}_I(x_n^0, x^0) \hat{U}_I^\dagger(x_{n+1}^0, x^0) = \hat{U}_I(x_n^0, x^0) \hat{U}_I(x^0, x_{n+1}^0) = \hat{U}_I(x_{n+1}^0, x^0) \quad (108)$$

Por lo tanto

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(x_1^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_1) \hat{U}_I(x_2^0, x_1^0) \hat{\phi}_I(x_2) \hat{U}_I(x_3^0, x_2^0) \cdots \hat{U}_I^\dagger(x_n^0, x_{n-1}^0) \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(x_n^0, x_0^0) | 0 \rangle \quad (109)$$

Introduzcamos ahora un t tal que $t \gg x_1^0$ y $x_n^0 \gg -t$. Como los x_i^0 estan ordenados, se satisface que $t \gg x_1^0 \gg x_x^0 \gg \cdots \gg x_n^0 \gg -t$. Ademas

$$\hat{U}_I(x_n^0, x^0) = \hat{U}_I(x_n^0, -t) \hat{U}_I(-t, x^0) \quad (110)$$

y

$$\hat{U}_I^\dagger(x_1^0, x_0^0) = \hat{U}_I(x_0^0, x_1^0) = \hat{U}_I(x_0^0, t) \hat{U}_I(t, x_1^0) = \hat{U}_I^\dagger(t, x_0^0) \hat{U}_I(t, x_1^0) \quad (111)$$

Resulta que el correlador es

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(t, x_0^0) \hat{U}_I(t, x_1^0) \hat{\phi}_I(x_1) \hat{U}_I(x_1^0, x_0^0) \hat{U}_I^\dagger(x_2^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_2) \hat{U}_I(x_2^0, x_0^0) \cdots \hat{U}_I^\dagger(x_n^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(x_n^0, -t) \hat{U}_I(-t, x^0) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(t, x_0^0) \hat{\mathcal{O}} \hat{U}_I(-t, x_0^0) | 0 \rangle \quad (112)$$

con

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{U}_I(t, x_1^0) \hat{\phi}_I(x_1) \hat{U}_I(x_1^0, x_0^0) \hat{U}_I^\dagger(x_2^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_2) \hat{U}_I(x_2^0, x_0^0) \cdots \hat{U}_I^\dagger(x_n^0, x_0^0) \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(x_n^0, -t) \quad (113)$$

Hasta ahora hemos sido cuidadosos con los ordenados temporales. De ahí que $\hat{\mathcal{O}}$ este ordenado en una manera precisa. Podemos introducir otro ordenado temporal y escribir

$$\hat{\mathcal{O}} = T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(t, x_1^0) \hat{U}_I(x_2^0, x_1^0) \cdots \hat{U}_I(-t, x_n^0) \right] = T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(t, -t) \right] \quad (114)$$

Así pues la función a n puntos se escribe como

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(t, x_0^0) T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(t, -t) \right] \hat{U}_I(-t, x_0^0) | 0 \rangle \quad (115)$$

Podemos ahora escoger en particular $t = -x_0^0$ y mandar $t \rightarrow \infty$. El cálculo de arriba no debe cambiar, ya que x_0^0 es solamente un punto de referencia. En tal caso formalmente el correlador es

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(-\infty, \infty) T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(t, -t) \right] \hat{U}_I(\infty, \infty) | 0 \rangle \quad (116)$$

Como $\hat{U}_I(\infty, \infty) = \mathbb{1}$, esto es

$$\langle 0 | \hat{U}_I^\dagger(-\infty, \infty) T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(t, -t) \right] | 0 \rangle \quad (117)$$

Al calcular anteriormente las transiciones entre estados *in* y *out* asumimos que el vacío *in* y el *out* son iguales. Estrictamente pueden diferir en una fase, que es no observable en ningún experimento. De hecho dicha fase es precisamente relevante en el cálculo de arriba

$$\hat{U}_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{i\alpha} | 0 \rangle \quad (118)$$

Esta fase la podemos calcular actuando con $\langle 0 |$:

$$\langle 0 | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{i\alpha} \quad (119)$$

Por lo tanto acabamos por tener que la función a n puntos es

$$\frac{\langle 0 | T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) \hat{U}_I(\infty, -\infty) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle} \quad (120)$$

Recordemos que \hat{U}_I satisface que

$$\hat{H}_I \hat{U}_I(t) = i \partial_t \hat{U}_I(t) \quad (121)$$

Podemos resolver esta ecuación al menos formalmente si asumimos que \hat{H}_I es “pequeño”, es decir, si asumimos que $\hat{H}_I = \epsilon \hat{V}_I$. Para ϵ muy pequeño, podemos resolver en serie obteniendo

$$\hat{U}_I = \sum_{n=0}^{\infty} (-i\epsilon)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{V}_I(t_1) \cdots \hat{V}_I(t_n) \quad (122)$$

Por definicion el integrando esta ordenado de manera que $t_1 > t_2 > t_3 \cdots > t_n$. Asi pues podemos escribirlo usando un ordenado temporal como

$$\hat{U}_I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \left[\hat{V}_I(t_1) \cdots \hat{V}_I(t_n) \right] \quad (123)$$

Donde el $1/n!$ es debido a que al introducir el ordenado temporal hay un monton de ordenes de los operadores que son identicos. Reconocemos ahora la expansion de la exponencial. Podemos resumar dicha expansion de manera exacta, valida incluso cuando ϵ no es pequeño para tener que

$$\hat{U}_I(t, t_0) = T \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt \int d^3\vec{x} \hat{H}_I} \right] \quad (124)$$

En el limite $t = -t_0 \rightarrow -\infty$, resto es

$$\hat{U}_I(t, t_0) = T \left[e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3\vec{x} \hat{H}_I} \right] = T \left[e^{-i \int d^4x \hat{H}_I} \right] \quad (125)$$

Por lo tanto

$$\langle T \left[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right] \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) e^{-i \int d^4x \hat{H}_I} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int d^4x \hat{H}_I} \right] | 0 \rangle} \quad (126)$$

A esta formula a veces se la conoce como *formula de Dyson*.

Particularizando para nuestro modelo de juguete, resulta que $\hat{H}_{int} = \lambda \hat{\phi}^4$. Es facil escribir esto en la imagen de interaccion

$$\hat{\phi}^4 = \hat{U}_0(t) \hat{\phi}_I^4 \hat{U}_0^\dagger(t) = \hat{U}_0(t) \hat{\phi}_I \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{U}_0(t) \hat{\phi}_I \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{U}_0(t) \hat{\phi}_I \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{U}_0(t) \hat{\phi}_I \hat{U}_0^\dagger(t) = \hat{\phi}_I^4(x) \quad (127)$$

De manera que

$$\langle T \left[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right] \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[\hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_n) e^{-i\lambda \int d^4x \hat{\phi}_I^4} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i\lambda \int d^4x \hat{\phi}_I^4} \right] | 0 \rangle} \quad (128)$$

Nota:

De aqui en adelante **todos** los campos que apareceran seran campos en espaciotiempo en la imagen de interaccion, es decir, los $\hat{\phi}_I(x)$ de arriba. Por lo tanto, para no hacer la notacion engorrosa, eliminaremos el subindice I .

El denominador de la expresion (126) es simplemente una normalizacion –no depende de x_i – asi que mayormente podemos olvidarnos de el. Para el numerador, si el sistema en consideracion tiene algun parametro adimensional pequenio que controle \hat{H}_I , podemos expandir en serie de potencias. Por ejemplo, para nuestro modelo de juguete tenemos que

$$G^{(n)} = \langle T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] \rangle - i \lambda \int dy \langle T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) \hat{\phi}(y)] \rangle + \cdots \quad (129)$$

Vemos pues que, a traves de la reduccion de LSZ las amplitudes de scattering se escriben en terminos de correladores de n campos de Heisenberg, que a su vez admiten una expansion perturbativa en terminos de ordenados temporales de campos en la imagen de interaccion. Pero estos campos son “faciles”, ya que son los campos en la imagen de Heisenberg obtenidos con el hamitoniano libre, es decir, son campos libres en espacio-tiempo! Asi pues, tenemos que la amplitud de scattering se puede escribir en terminos de correladores de campos libres! Aun nos queda saber como calcular estos.

4.5.1 El teorema de Wick

Hemos visto que, para la teoria de perturbaciones en teoria cuantica de campos, necesitamos calcular funciones a n puntos con campos en interaccion $\langle T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] \rangle$. Empecemos con el caso mas sencillo donde tenemos dos campos. Para ello escribamos nuestro campo como

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x)^+ + \hat{\phi}(x)^- \quad (130)$$

Con

$$\hat{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \hat{a}_p e^{-ip \cdot x} \quad \hat{\phi}^-(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x} \quad (131)$$

Asi pues (asumamos explicitamente $x^0 > y^0$ para simplificar la expresion)

$$\begin{aligned} T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] &= \theta(x^0 - y^0) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) + \theta(y^0 - x^0) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) \\ &= \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^-(y) \end{aligned} \quad (132)$$

Ya que $\hat{\phi}^+$ contiene operadores destruccion y $\hat{\phi}^-$ creacion, podemos escribir esta cantidad en terminos de ordenados normales. Para ello completemos la expresion intentando pasar a la derecha el mayor numero de $\hat{\phi}^+$ posibles:

$$\hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) + [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^-(y) \quad (133)$$

La cantidad $\hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^-(y)$ es simplemente el ordenado normal de $\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)$, denotado como $: \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) :$. Por otra parte, llamemos

$D(x - y) = [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]$. Donde, anticipandonos un poquito a los acontecimientos, hemos notado que la funcion D es funcion de $x - y$. Por lo tanto si $x^0 > y^0$

$$T\left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right]_{|x^0>y^0} =: \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) : +D(x - y) \quad (134)$$

Si hubiesemos asumido $y^0 > x^0$ es claro que nos hubiese salido lo mismo, solo que con el argumento de D al reves. Asi pues, si definimos

$$D_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0) [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] + \theta(y^0 - x^0) [\hat{\phi}^+(y), \hat{\phi}^-(x)] \quad (135)$$

tenemos que en general

$$T\left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right] =: \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) : +D_F(x - y) \quad (136)$$

La cantidad $D_F(x - y)$ es central en teoria cuantica de campos y se llama *propagador de Feynman*. Ya que el ordenado normal aniquila el vacio, esta claro que

$$\langle T\left[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right] \rangle = D_F(x - y) \quad (137)$$

Es decir, el propagador de Feynman es el correlador a dos puntos.

Haciendo el mismo juego con funciones a n puntos esta claro que podemos escribirlas en terminos de ordenados normales y propagadores de Feynman. Por ejemplo, para una funcion a 4 puntos

$$\begin{aligned} T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)\right] &= : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) : +D_F(x_1 - x_2) : \hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4) : \\ &\quad +D_F(x_1 - x_3) : \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4) : +D_F(x_1 - x_4) : \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3) : \\ &\quad +D_F(x_2 - x_3) : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_4) : +D_F(x_2 - x_4) : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3) : \\ &\quad +D_F(x_3 - x_4) : \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) : +D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) \\ &\quad +D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

De manera que al tomar el valor de expectacion en el vacio solo las contribuciones proporcionales a productos de propagadores contribuyen. Esta tecnica de escribir los correladores en terminos de ordenados normales y propagadores de Feynman se conoce como *teorema de Wick*. Permite escribir correladores en terminos de propagadores de Feynman, con lo que la evaluacion de amplitudes de scattering en teoria de perturbaciones es por fin una tarea “sencilla”!

4.6 Propagadores

Hemos encontrado que el propagador de Feynman es una cantidad de importancia central en teoria cuantica de campos. Recordemos que esta definido como

$$D_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0) [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] + \theta(y^0 - x^0) [\hat{\phi}^+(y), \hat{\phi}^-(x)] \quad (138)$$

Explicitamente, usando quien es $\hat{\phi}^\pm$, esto es

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \theta(x^0 - y^0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] \\ & + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \theta(y^0 - x^0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] \end{aligned} \quad (139)$$

Usando las reglas de conmutacion de los operadores creacion/destruccion

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \theta(x^0 - y^0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\ & + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \theta(y^0 - x^0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) = \\ & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + \theta(y^0 - x^0) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right] \end{aligned} \quad (140)$$

Esta integral se puede re-escribir como una integral 4-dimensional

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \quad (141)$$

En donde se asume que ϵ va a 0^+ . Demostremos esto haciendo la integral en dp_0 explicita. El integrando es (llamemos $z = x - y$ por sencillez de notacion)

$$\int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip_0 z^0} \quad (142)$$

La integral en p_0 la podemos hacer usando el teorema de los residuos. Los polos del integrando estan en $\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i\epsilon$. Como ϵ es pequengno podemos expandir en serie y escribir los polos aproximadamente como

$$p_0^+ \simeq \omega_{\vec{p}} - i\frac{\epsilon}{2} \quad p_0^- \simeq -\omega_{\vec{p}} + i\frac{\epsilon}{2} \quad (143)$$

Donde como siempre $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Notese que los polos estan ligeramente desplazados del eje real: el polo con parte real negativa esta ligeramente subido en la parte positiva compleja mientras que el polo con parte negativa esta un poco mas bajado (ver fig. (1)).

La cuestion es que contorno usar. En particular, queremos un contorno tal que la contribucion del semicirculo en el infinito sea nula. Supongamos $z^0 > 0$. En tal caso la exponencial $e^{ip_0 z^0}$ decaeria para $z_0 \rightarrow \infty$ si p_0 tuviese una pequengna parte imaginaria positiva. Por lo tanto vemos que para $z^0 > 0$ debemos cerrar el contorno por arriba, atrapando el polo p_0^- . El residuo en este polo es

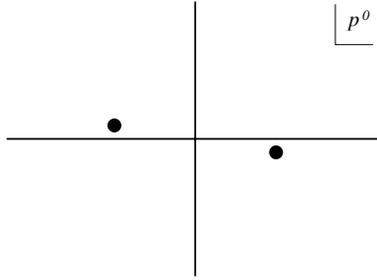


Figure 1: Posicion de los polos en el plano complejo p^0 .

$$\text{Res}_{p_0=p_0^-} \left[\frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i p_0 z^0} \right] = -\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\omega_{\vec{p}} z^0} \quad (144)$$

Este es rodeado en sentido contrario a las agujas del reloj, y por lo tanto da una contribucion que es directamente el residuo de arriba, es decir, contribuye

$$-(2\pi i) \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\omega_{\vec{p}} z^0} \theta(z^0) \quad (145)$$

Por otra parte, cuando $z^0 < 0$ la exponencial se atenúa si p_0 tiene una pequeña parte imaginaria negativa. Debemos por lo tanto cerrar el contorno por abajo de manera que rodeamos el polo p_0^+ . En el

$$\text{Res}_{p_0=p_0^+} \left[\frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i p_0 z^0} \right] = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{i\omega_{\vec{p}} z^0} \quad (146)$$

Como este polo es rodeado en el sentido de las agujas del reloj contribuye como menos lo de arriba, es decir

$$-(2\pi i) \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{i\omega_{\vec{p}} z^0} \theta(-z^0) \quad (147)$$

Por lo tanto

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{z}} \left[\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{i\omega_{\vec{p}} z^0} \theta(-z^0) + \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} e^{-i\omega_{\vec{p}} z^0} \theta(z^0) \right] \quad (148)$$

que es la expresion de partida. Asi pues, resumiendo, el propagador de Feynman D_F se puede escribir en notacion covariante usando la prescripcion de $+i\epsilon$, que nos fuerza a escoger un contorno tal que se recupera la expresion correcta de la funcion a dos puntos.

4.6.1 Funciones de Green

Podemos actuar con el operador de Klein-Gordon sobre el propagador de Feynman. Esta claro que en el limite $\epsilon \rightarrow 0$ lo que obtenemos es

$$\left(\partial^2 + m^2\right) D_F = i \delta^4(x) \quad (149)$$

siendo $\delta^4(x)$ la δ de Dirac en espacio de Minkowski (a veces suprimiremos el superíndice)

$$\delta^4(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i p \cdot x} \quad (150)$$

La ecuación de arriba es familiar: D_F es simplemente una función de Green para el operador de Klein-Gordon! En general, la ecuación de Klein-Gordon con fuente δ tiene como solución

$$\left(\partial^2 + m^2\right) G = -i \delta^4(x) \quad \iff \quad G = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{i p \cdot (x-y)} \quad (151)$$

Es trivial que G satisface la ecuación de Klein-Gordon con fuente δ para cualquier p tal que $p^2 \neq m^2$. El problema es que ocurre precisamente en $p^2 = 0$. En tal caso uno debe dar una prescripción para rodear los polos. Una posibilidad es la prescripción $+i\epsilon$, que lleva al propagador de Feynman como acabamos de ver. Pero está claro que uno puede tomar otras prescripciones. Las más relevantes son

- **Propagador retardado:**

escogiendo el contorno cerrado por arriba, solo cuando $z^0 > 0$ la contribución del semicírculo se anula. Como este propagador tiene $z^0 > 0$ se le conoce como propagador retardado $D_R(x-y)$. En teoría clásica, si uno conoce la configuración del campo en un instante de tiempo es este propagador el que la hace avanzar en el tiempo.

- **Propagador avanzado:**

escogiendo el contorno cerrado por abajo, solo cuando $z^0 < 0$ la contribución del semicírculo se anula. Como este propagador tiene $z^0 < 0$ se le conoce como propagador avanzado $D_A(x-y)$. En la teoría clásica se usará cuando uno conoce la configuración final y pretende encontrar de donde viene esta atrás en el tiempo.

Volviendo al propagador de Feynman, vemos que es tal que propaga frecuencias positivas –es decir, el trozo con $e^{-i\omega_{\vec{p}}z^0}$ – adelante en el tiempo –debido al $\theta(z^0)$ – y frecuencias negativas –el trozo con $e^{i\omega_{\vec{p}}z^0}$ – atrás en el tiempo –debido al $\theta(-z^0)$ –.

4.7 Reglas de Feynman

Podemos ahora poner todo junto lo que hemos aprendido. La amplitud de scattering que queremos calcular se escribe en términos de (redefinimos el acoplamiento con un $1/4!$ por conveniencia)

$$\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-i k_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{i p_j \cdot y_j} \frac{\langle T \left[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_m) \hat{\phi}(y_1) \cdots \hat{\phi}(y_n) e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \hat{\phi}^4} \right] \rangle}{\langle T \left[e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \hat{\phi}^4} \right] \rangle} \quad (152)$$

Expandiendo la exponencial hasta el orden deseado en λ tenemos que esto se expresa en terminos de correladores que podemos calcular usando el teorema de Wick. Por lo tanto, usando LSZ, podemos calcular, al orden en λ deseado, la probabilidad de scattering.

Veamos un ejemplo sencillo: el scattering de 2 particulas en dos particulas. Usando la formula de LSZ, la probabilidad de transicion es

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 | i \hat{T} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = (k_1^2 - m^2) (k_2^2 - m^2) (p_1^2 - m^2) (p_2^2 - m^2) \langle T \left[\hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \hat{\phi}(p_1) \hat{\phi}(p_2) \right] \rangle \quad (153)$$

Donde $\langle T \left[\hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \hat{\phi}(p_1) \hat{\phi}(p_2) \right] \rangle$ representa la transformada de Fourier del correlador a 4 puntos (es decir, el correlador en espacio de momentos). Dicho correlador lo calculamos usando la expresion de Dyson como

$$\frac{\langle T \left[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \hat{\phi}^4} \right] \rangle}{\langle T \left[e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \hat{\phi}^4} \right] \rangle} \quad (154)$$

En teoria de perturbaciones uno asume $\lambda \ll 1$, de manera que la exponencial se puede expandir. A orden 0 el correlador es pues simplemente el correlador a 4 puntos libre, que se puede calcular facilmente usando el teorema de Wick. Como vimos antes⁷

$$\begin{aligned} & \langle T \left[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) \right] \rangle \\ & = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (155)$$

Ahora bien, como vimos, esto es el producto de dos propagadores de Feynman, mientras que LSZ pone 4 factores de $(p_i^2 - m^2)$. Al poner las particulas externas *on shell* estos dan 4 ceros mientras que los propagadores dan solo dos polos. Por lo tanto la amplitud a orden λ^0 es cero. A orden λ debemos calcular

$$-i \lambda \int d^4 x \langle T \left[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) \hat{\phi}(x)^4 \right] \rangle \quad (156)$$

Al tener 8 campos, usando el teorema de Wick esta cantidad sera proporcional a 4 propagadores, con lo que potencialmente algunos terminos podran cancelar los 4 ceros en la formula de LSZ. La cuestion clave es que al expandir el correlador de arriba, de los muchos terminos que saldran, solo unos pocos son tales que se producen los polos deseados, es decir,

⁷Al poner el correlador dentro del $\langle \cdot \rangle$ todos los ordenados normales dan 0!

muchos de los terminos en el teorema de Wick no contribuyen a la amplitud de scattering porque no contienen los polos apropiados. De hecho, los terminos que contribuyen son de la forma

$$\int d^4x D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x) \quad (157)$$

Al pasar a espacio de momentos es facil ver que esto produce polos que cancelan los ceros de la formula LSZ, dejando al final simplemente $-i\lambda$.

Volvamos por un momento al termino de orden λ^0 . Si $D_F(x - y)$ es pensado como la propagacion de una partucula entre x e y resulta que esto es simplemente los 3 posibles diagramas representando las maneras de unir 3 puntos (ver fig(3)).

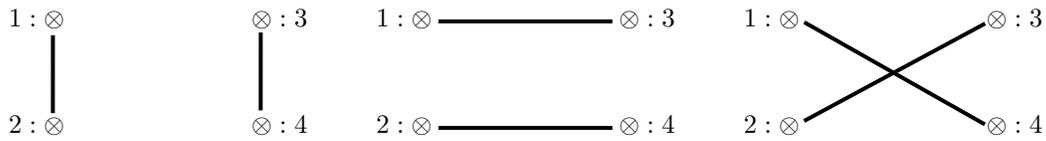


Figure 2: Las 3 posibles propagaciones. En el ultimo las lineas se cruzan sin intersecarse.

Por otra parte, en esta interpretacion diagramatica, el primer diagrama que contribuye, a orden λ , se corresponde con

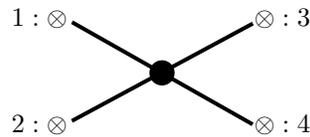


Figure 3: Primer diagrama contribuyendo a orden λ^1 . El punto gordo es la interaccion en x .

Notese que, siguiendo con la interpretacion de que el propagador representa la propagacion de una partucula, este primer termino que contribuye al scattering se puede entender como un diagrama en el que todos los puntos x_i estan conectados a traves del punto de interaccion x . Por otra parte, a orden λ^0 , ninguno de los terminos que teniamos conectaba todos los puntos y consecuentemente obtuvimos cero. Si siguiessemos yendo a ordenes mas altos de nuevo veriamos que solo algunos terminos contribuyen, y de nuevo corresponderian a diagramas en los que todos los puntos estan conectados entre si a traves de interacciones. Es decir, de esta manera aprendemos que solo los diagramas conexos contribuyen a los scatterings.

De hecho, el patron que emerge es que las contribuciones a la amplitud de scattering se pueden construir orden a orden con estos dibujos –que se llaman *diagramas de Feynman*–, donde solo diagramas conexos contribuyen. Las conexiones internas –“puntos gordos”– se corresponden con la interaccion y se conocen como vertices. En el caso de $\lambda \phi^4$ tenemos que por cada vertice ⁸ hemos de poner un factor $-i \lambda$. Estos vertices se unen con propagadores para formar el diagrama completo. Usualmente se trabaja en espacio de momentos, donde todo es mas sencillo. Siendo mas explicitos, en el caso que nos ocupa $-\lambda \phi^4$ – dichas reglas en espacio de momentos son

1. Dibujar un diagrama hecho a partir de lineas que se juntan en vertices con estrictamente 4 segmentos.
2. Asignar un momento p_i a cada linea.
3. En cada vertice entran 4 momentos. Imponer conservacion del momento en cada vertice y agnadir un factor

$$-i \lambda \tag{158}$$

4. Por cada linea interna agnadir un propagador de Feynman con el momento correspondiente

$$D_F = \frac{i}{p^2 - m^2 + i \epsilon} \tag{159}$$

5. Por cada lazo cerrado (el nombre tecnico es *loop*) agnadir una integral al momento corriendo en el loop

$$\int \frac{d^4 p}{(2 \pi)^4} \tag{160}$$

Antes de seguir, algunos comentarios sobre estas reglas

- El hecho de que en (1) tengamos vertices con 4 patas se debe a que estamos considerando una interaccion ϕ^4 . Para una interaccion ϕ^n los vertices tendran n patas.
- El que el factor del vertice sea simplemente $-i \lambda$ se debe a que hemos tomado que $H_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$. Sin el 4! tendríamos un factor de 24 extra.
- En esta prescripcion solo contribuyen diagramas conexos. Cosas como el primer diagrama en la figura (3) no deben ser incluidas.

⁸Notese que en realidad hay varias combinaciones de este diagrama, que corresponden a las diferentes maneras de poner los numeros externos etiquetando los puntos. Esta claro que hay 4! dichas maneras. Por eso definimos la interaccion con $\frac{\lambda}{4!}$, de manera que la primera contribucion a la amplitud de scattering –vertice a secas– sea simplemente $-i \lambda$.

- En esta prescripcion, esto da directamente el elemento de matriz ${}_{in}\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m \rangle_{out}$.
- Hemos basicamente olvidado las patas externas. Las patas externas son los estados *in* y *out*. Esto nos permite entender ahora mejor la formula de LSZ: debido a los factores de $p_i^2 - m^2$, solo los polos del correlador contribuyen. Es decir, debido a los numeradores $p_i^2 - m^2$, la amplitud debe tambien tener polos $(p_i^2 - m^2)^{-1}$ al poner on shell particulas externas. Dichos polos no son mas que las patas externas del diagrama. Podriamos haberlas tenido en cuenta, pero en tal caso deberiamos tambien tener en cuenta los factores de $p^2 - m^2$ en la formula de LSZ para calcular la amplitud (que evidentemente cancelan los propagadores externos)

En resumen, siguiendo estas reglas podemos calcular en principio a un orden arbitrario en λ , ya que cada termino en la expansion de la formula de LSZ se corresponde con un diagrama, para el que tenemos reglas sencillas para proceder.

Como ejemplo, calculemos la funcion a 6 puntos en $\lambda \phi^4$. Debido a que en el lagrangiano no hay interaccion ϕ^6 , dicha funcion a 6 puntos empieza a orden λ^2 . Es facil darse cuenta de que el primer diagrama que podemos dibujar es fig. (4)

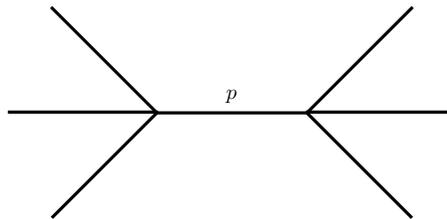


Figure 4: Primer diagrama contribuyendo a la funcion a 6 puntos.

El diagrama vale

$$(-i \lambda) D_F(p) (-i \lambda) = \frac{-i \lambda^2}{p^2 - m^2 + i \epsilon} \quad (161)$$

Donde p es la suma de todos los momentos *in* (a su vez evidentemente igual a los *out*).

5 Path integrals

Hasta ahora una fuente comun de engorro es el hecho de que, pese a estar especialmente interesados en teorías invariantes Lorentz, hemos estado usando un formalismo manifiestamente no covariante, basado en el formalismo hamiltoniano donde t juega un papel distinguido. Para “poner remedio” a esto debemos usar el formalismo de la *integral de caminos* (*path integral* en ingles) introducido por Feynman. Antes de aplicarlo a la teoría cuantica de campos, veamoslo en el contexto mas familiar de la mecánica cuantica

5.1 Path integrals en mecanica cuantica

Es natural preguntarse por la propagacion de las particulas en mecanica cuantica. En mecanica clasica una particula se propaga entre q_I y q_F siguiendo una trayectoria. Eso es una funcion $q(t)$ tal que $q(t_I) = q_I$ y $q(t_F) = q_F$. En mecanica cuantica, debido a que posicion y momento no conmutan, este concepto no existe. Esto de hecho es lo que el experimento de la doble rendija pone de manifiesto: una particula no pasa por una rendija o por la otra, sino que la probabilidad de deteccion es la suma de las amplitudes de probabilidad para la particula pasando por cada uno de los dos agujeros.

Tratemos de hacer esto explicito. Consideremos la propagacion de una particula libre entre q_I y q_F en un tiempo $T = t_F - t_I$. La amplitud de probabilidad asociada a dicho proceso es

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle \quad (162)$$

Donde $e^{-i\hat{H}T}$ no es mas que el operador evolucion. Notese que estamos en la representacion de Schrodinger, donde los estados dependen del tiempo (de hecho por ejemplo $|q_I\rangle = |q(t_I)\rangle$). Dividamos ahora el intervalo T en N subintervalos de tamagno $\delta t = \frac{T}{N}$. Entonces $e^{-i\hat{H}T} = e^{-i\hat{H}\delta t} \dots e^{-i\hat{H}\delta t}$. Tras cada δt podemos insertar una identidad escrita como

$$\int dq_i |q_i\rangle \langle q_i| \quad (163)$$

donde el subindice i significa “tras i intervalos δt ”. Explicitamente

$$\begin{aligned} \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle &= \langle q_F | e^{-i\hat{H}\delta t} \dots e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{N-1} \int dq_i \langle q_F | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \end{aligned} \quad (164)$$

Una vez mas, recordemos que $|q_i\rangle = |q(t_i)\rangle$.

Si llamamos $q_I = q_0$ y $q_F = q_N$ esto es

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \langle q_{i+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_i \rangle \quad (165)$$

Recordemos que estamos estudiando una particula libre. Como el hamiltoniano es sencillamente $\frac{\hat{p}^2}{2m}$, esta claro que es mas sencillo trabajar en espacio de momentos. Insertemos una identidad en espacio de momentos. Para cada t_i tenemos

$$\int \frac{dp_i}{(2\pi)} |p_i\rangle \langle p_i| = 1 \quad (166)$$

Para ver que esto es correcto, consideremos $\langle q'_i | q_i \rangle = \delta(q'_i - q_i)$. Como $\langle p_i | q_i \rangle = e^{-ip_i q_i}$, eso es

$$\int \frac{dp_i}{(2\pi)} \langle q'_i | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle = \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{i p_i (q'_i - q_i)} = \delta(q'_i - q_i) \quad (167)$$

Es decir, la “asignacion” de (2π) 's es correcta. Notese ademas que

$$\langle p'_i | p_i \rangle = \int dq_i \langle p'_i | q_i \rangle \langle q_i | p_i \rangle = \int dq_i e^{i q_i (p_i - p'_i)} = (2\pi) \delta(p'_i - p_i) \quad (168)$$

Volviendo ahora a nuestro calculo, insertemos 1 escrito en espacio de momentos de manera que

$$\langle q_F | e^{-i \hat{H} T} | q_I \rangle = \prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)} \int \frac{dp_i}{(2\pi)} \langle q_{i+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle \quad (169)$$

Usando que $\langle p_i | q_i \rangle = e^{-i p_i q_i}$, esto es

$$\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)} \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{i p_{i+1} q_{i+1}} \langle p_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | p_i \rangle e^{-i p_i q_i} \quad (170)$$

Por otra parte, como $|p_i\rangle$ son autoestados del hamiltoniano $e^{-i \hat{H} \delta t} |p_i\rangle = e^{-i \frac{p_i^2}{2m} \delta t} |p_i\rangle$, asi que

$$\langle p_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | p_i \rangle = (2\pi) e^{-i \frac{p_i^2}{2m} \delta t} \delta(p_{i+1} - p_i) \quad (171)$$

Asi que en nuestro calculo

$$\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)} \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{i p_{i+1} q_{i+1}} e^{-i p_i q_i} (2\pi) e^{-i \frac{p_i^2}{2m} \delta t} \delta(p_{i+1} - p_i) \quad (172)$$

Integrando en dp_{i+1} queda

$$\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{i p_i q_{i+1}} e^{-i p_i q_i} e^{-i \frac{p_i^2}{2m} \delta t} \quad (173)$$

Esto es

$$\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-i \left(\frac{p_i^2}{2m} + p_i \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t} \right) \delta t} \quad (174)$$

Podemos completar el cuadrado hasta tener

$$\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \left[\int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-i \left(\frac{p_i}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t} \right)^2 \delta t} \right] e^{i \frac{m}{2} \left(\frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t} \right)^2 \delta t} \quad (175)$$

La integral en dp_i es facil de hacer. Como p_i corre en $(-\infty, \infty)$, podemos absorber el termino lineal. Por lo tanto

$$\int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-i\left(\frac{p_i}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t}\right)^2 \delta t} = \int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-i\frac{p_i^2}{2m} \delta t} = \sqrt{-\frac{2mi}{\delta t}} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \quad (176)$$

La integral Gaussianas es facil de hacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (177)$$

Asi que todo junto

$$\int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-i\left(\frac{p_i}{\sqrt{2m}} + \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t}\right)^2 \delta t} = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\delta t}} \quad (178)$$

Por lo que, metiendo esto en nuestro calculo, tenemos que

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i e^{i\frac{m}{2} \left(\frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t}\right)^2 \delta t} \quad (179)$$

Esto lo podemos re-escribir como

$$\begin{aligned} \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle &= \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i\right) \left(\prod e^{i\frac{m}{2} \left(\frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t}\right)^2 \delta t}\right) \\ &= \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i\right) e^{i\sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t}\right)^2 \delta t} \end{aligned} \quad (180)$$

Tomemos ahora el limite de $N \rightarrow \infty$. En tal caso $\delta t \rightarrow 0$. De hecho

$$\frac{(q_{i+1} - q_i)}{\delta t} \rightarrow \dot{q} \quad \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dt \quad (181)$$

Definiendo el simbolo

$$\int \mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i\right) \quad (182)$$

Notese que aqui se asume que $q_0 = q_I$ y $q_N = q_F$.

Puesto todo junto, resulta al final que

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F - t_I)} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q e^{i\int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2} \quad (183)$$

Si hubiesemos hecho el mismo razonamiento para una partícula en interacción hubiésemos obtenido⁹

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V} \quad (184)$$

Ahora bien, la cantidad $\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V$ no es más que el lagrangiano clásico de la partícula, con lo que la fórmula en general se escribe como

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iS} \quad (185)$$

Notese que en el exponente del integrando ha aparecido la acción clásica de la partícula. Por otra parte, al obtener esta fórmula, y oculto en $\int \mathcal{D}q$ está el hecho de que estamos sumando a todas las posibles trayectorias. Puesto todo junto, hemos obtenido una expresión para la propagación de la partícula que es la suma de todas las posibles trayectorias clásicas pesadas con su correspondiente acción.¹⁰

Supongamos ahora que estamos interesados en la probabilidad de evolución de un estado inicial $|I\rangle$ en uno final $|F\rangle$ entre t_I y t_F . Esto está dado por $\langle F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | I \rangle$. Insertando identidades escritas en términos de autoestados en espacio de posiciones

$$\langle F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | I \rangle = \int dq_I \int dq_F \langle F | q_F \rangle \langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle \langle q_I | I \rangle \quad (186)$$

Pero $\langle q_I | I \rangle$ y $\langle q_F | F \rangle$ no son más que las funciones de onda asociadas a los estados inicial y final en espacio de posiciones. Por lo tanto

$$\langle F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | I \rangle = \int dq_I \int dq_F \psi_F^*(q_F) \langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle \psi_I(q_I) \quad (187)$$

Es decir, podemos escribir la evolución de un estado en términos del path integral $\langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle$. Si recuperamos los factores de c y \hbar dicho path integral es

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q e^{i \frac{S}{\hbar}} \quad (188)$$

En el límite $\hbar \rightarrow 0$ la exponencial oscila infinitamente y está dominada por los puntos de acción estacionaria. Es decir, en el límite $\hbar \rightarrow 0$, que es el límite clásico, el path integral localiza en las configuraciones con $\delta S = 0$, es decir, en las configuraciones clásicas. De esta manera el mundo clásico emerge.

⁹Notese que esto es un poco más sutil, ya que la interacción es $V = V(q, p)$, con lo que $|p\rangle$ ya no es autoestado del hamiltoniano. Para una discusión del caso general en detalle ver la bibliografía.

¹⁰La explicación en el capítulo 1 del libro de Zee sobre el path integral y su significado, sobre todo en el contexto del experimento de la doble rendija con infinitas rendijas es muy recomendable!

5.1.1 La partícula libre

Consideremos el ejemplo mas sencillo: una partícula libre. La acción clásica es

$$\frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (189)$$

La ecuación de movimiento es simplemente $\ddot{q} = 0$. La solución, con condiciones iniciales $q(t_I) = q_I$ y $q(t_F) = q_F$ es

$$q_{cl}(t) = \frac{q_F - q_I}{t_F - t_I} t + q_I \quad (190)$$

Escribamos una trayectoria arbitraria como $q = q_{cl} + q_q$, con q_q tal que es cero en t_I y t_F . La acción es

$$\int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_{cl}^2 + \int_{t_I}^{t_F} dt m \dot{q}_{cl} \dot{q}_q + \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_q^2 \quad (191)$$

Explícitamente

$$\frac{m}{2} \frac{(q_F - q_I)^2}{(t_F - t_I)} + \int_{t_I}^{t_F} dt m \left(\frac{q_F - q_I}{t_F - t_I} \right) \dot{q}_q + \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_q^2 \quad (192)$$

El trozo del medio es la integral de una derivada total, así que

$$\int_{t_I}^{t_F} dt m \left(\frac{q_F - q_I}{t_F - t_I} \right) \dot{q}_q = m \left(\frac{q_F - q_I}{t_F - t_I} \right) \int_{t_I}^{t_F} dt \dot{q}_q = m \left(\frac{q_F - q_I}{t_F - t_I} \right) (q_q(t_F) - q_q(t_I)) \quad (193)$$

Debido a las condiciones de contorno en q_q , esto es cero. Por lo tanto la acción clásica para una trayectoria arbitraria es

$$S = \frac{m}{2} \frac{(q_F - q_I)^2}{(t_F - t_I)} + \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_q^2 \quad (194)$$

Por lo tanto

$$\langle q_F | e^{-i \hat{H} (t_F - t_I)} | q_I \rangle = e^{i \frac{m}{2} \frac{(q_F - q_I)^2}{(t_F - t_I)}} \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}_q^2} \quad (195)$$

Para hacer la integral debemos tener cuenta de que, como las condiciones de contorno son $q_I = q_F = 0$, esta integral es

$$\langle 0 | e^{-i \hat{H} (t_F - t_I)} | 0 \rangle \quad (196)$$

Introduciendo unidades escritas en términos de $|p\rangle$, esto es

$$\int \frac{dp}{(2\pi)} \int \frac{dp'}{(2\pi)} \langle 0 | p \rangle \langle p | e^{-i \hat{H} (t_F - t_I)} | p' \rangle \langle p' | 0 \rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)} e^{-i \frac{p^2}{2m} (t_F - t_I)} \quad (197)$$

Haciendo la integral encontramos finalmente

$$\int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_I}^{t_F} dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2} = \sqrt{\frac{m}{i 2 \pi (t_F - t_I)}} \quad (198)$$

Por lo tanto, todo junto

$$\langle q_F | e^{-i \hat{H} (t_F - t_I)} | q_I \rangle = \sqrt{\frac{m}{i 2 \pi (t_F - t_I)}} e^{i \frac{m}{2} \frac{(q_F - q_I)^2}{(t_F - t_I)}} \quad (199)$$

5.2 Ordenados temporales y path integral

Supongamos que queremos calcular la siguiente cantidad

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] e^{iS} \quad (200)$$

con $q(t_I) = q_I$ y $q(t_F) = q_F$. Aquí A es un funcional de la función $q(t_1)$.

Para hacer esto volvamos atrás en la definición de path integral. Recordemos que dividiendo el intervalo $t_F - t_I$ en subintervalos infinitesimales

$$\int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}q e^{iS} \prod_{i=0}^{N-1} \int dq_i \langle q_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | q_i \rangle = \langle q_F | e^{-i \hat{H} T} | q_I \rangle = \quad (201)$$

donde hemos hecho explícitos los límites de integración. Esta claro por lo tanto que

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] e^{iS} = \prod_{i=0}^{N-1} \int_{\text{no } I} dq_i \langle q_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | q_i \rangle \int dq_I \langle q_{I+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} A[q(t_1)] | q_I \rangle \quad (202)$$

Donde I es el intervalo donde está t_1 . Es decir, $A[q(t_1)]$ aparece en el factor que corresponde al subintervalo donde está t_1 . Ahora bien, $\langle q_{I+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} A[q(t_1)] | q_I \rangle$ es el elemento de matriz del operador de Heisenberg $A[\hat{q}(t_1)]$, es decir, $\langle q_F | e^{-i \hat{H} T} A[\hat{q}(t_1)] | q_I \rangle$

Supongamos ahora

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] B[q(t_2)] e^{iS} \quad (203)$$

Por las mismas, esto es

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] B[q(t_2)] e^{iS} = \prod_{i=0}^{N-1} \int_{\text{no } I_1, I_2} dq_i \langle q_{i+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} | q_i \rangle \int dq_{I_1} \langle q_{I_1+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} A[q(t_1)] | q_{I_1} \rangle \int dq_{I_2} \langle q_{I_2+1} | e^{-i \hat{H} \delta t} B[q(t_2)] | q_{I_2} \rangle \quad (204)$$

Donde I_1 es el intervalo que contiene t_1 e I_2 el que contiene t_2 . Supongamos que $t_2 < t_1$. Entonces al pasar a operadores esto es

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} A[\hat{q}(t_1)] B[\hat{q}(t_2)] | q_I \rangle \quad (205)$$

ya que primero actua el operador que esta antes al subdividir el intervalo.

Si por el contrario embargo, si $t_1 < t_2$, como en el path integral $A[q(t_1)]$ y $B[q(t_2)]$ son funciones (numeros!¹¹), podemos escribir

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] B[q(t_2)] e^{iS} = \int \mathcal{D}q B[q(t_2)] A[q(t_1)] e^{iS} \quad (207)$$

y por el mismo motivo que antes, esto es

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} B[\hat{q}(t_2)] A[\hat{q}(t_1)] | q_I \rangle \quad (208)$$

Por lo tanto, si $t_1 > t_2$ el path integral calcula $A[\hat{q}(t_1)] B[\hat{q}(t_2)]$, y si $t_2 > t_1$ calcula $B[\hat{q}(t_2)] A[\hat{q}(t_1)]$. Esto es, de manera automatica el path integral implementa de manera natural los ordenados temporales!!! Es decir

$$\int \mathcal{D}q A[q(t_1)] B[q(t_2)] e^{iS} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} T[A[\hat{q}(t_1)] B[\hat{q}(t_2)]] | q_I \rangle \quad (209)$$

5.3 Fuentes y funciones generatrices

Volvamos a la ecuacion anterior para el caso mas sencillo, donde $A[q(t)] = q$

$$\int \mathcal{D}q q(t_1) e^{iS} = \langle q_F | e^{-i\hat{H}T} \hat{q}(t_1) | q_I \rangle \quad (210)$$

Construyamos la siguiente cantidad

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{\int \mathcal{D}q e^{iS + \int_{t_I}^{t_F} J(t) q(t)}}{\int \mathcal{D}q e^{iS}} \quad (211)$$

Si $t_1 \in [t_I, t_F]$ esta claro que

$$\frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(t_1)} = \frac{\int \mathcal{D}q q(t_1) e^{iS + \int_{t_I}^{t_F} J(t) q(t)}}{\int \mathcal{D}q e^{iS}} \quad (212)$$

Asi pues, si ahora evaluamos esta derivada funcional en $J(t) = 0$ tenemos que

¹¹Notese que si estuviésemos discutiendo fermiones, $A[q(t_1)]$ y $B[q(t_2)]$ serian variables Grassman, y por lo tanto en lugar de conmutar, anticonmutarian. Esta es una manera de argumentar que el ordenado temporal para fermiones debe ser

$$T[\bar{\psi}(t_1) \psi(t_2)] = \theta(t_1 - t_2) \bar{\psi}(t_1) \psi(t_2) - \theta(t_2 - t_1) \psi(t_2) \bar{\psi}(t_1) \quad (206)$$

$$\frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}q q(t_1) e^{iS}}{\int \mathcal{D}q e^{iS}} = \frac{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} \hat{q}(t_1) | q_I \rangle}{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle} \quad (213)$$

Es por lo tanto evidente que

$$\frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}q q(t_1) \cdots q(t_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}q e^{iS}} = \frac{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} T[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_I \rangle}{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle} \quad (214)$$

Es decir, $\mathcal{Z}[J]$ lo podemos pensar como funcional generador de las funciones

$$G(t_1, \dots, t_n) = \frac{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} T[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_I \rangle}{\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle} \quad (215)$$

Volvamos a la definicion de $\mathcal{Z}[J]$. En el numerador tenemos

$$\int \mathcal{D}q e^{iS + \int J(t)q(t)} = \int \mathcal{D}q e^{i \int \mathcal{L} + i \int J(t)q(t)} \quad (216)$$

Es decir, el numerador es el path integral para una partícula con una acción en la que hemos agnado la interacción extra iJq . Para entenderlo tomemos el ejemplo sencillo de una partícula libre. En tal caso $\mathcal{L} + Jq = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + iJq$. La ecuación de movimiento es

$$m \ddot{q} = iJ \quad (217)$$

Es decir, J es una fuente externa. Esto es, al agnadir el término $\int Jq$ es como haber agnado una fuente externa J para q . La función generatriz $\mathcal{Z}[J]$ por lo tanto tiene en cuenta la respuesta del sistema a una fuente externa J .

5.4 Tiempo euclideo, path integrals y mecánica estadística

Consideremos ahora una situación a priori completamente diferente. Supongamos que queremos estudiar la mecánica estadística de un sistema a temperatura $T = \beta^{-1}$. Como todo el mundo sabe, la función de partición canónica es

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \quad (218)$$

Si $|n\rangle$ es una base del espacio de Hilbert, esto es

$$\mathcal{Z} = \sum_n \langle n |, e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle \quad (219)$$

Supongamos ahora que definimos $\beta = iT_E$. Entonces

$$\mathcal{Z} = \sum_n \langle n |, e^{-i\hat{H}T_E} | n \rangle \quad (220)$$

Pero acabamos de ver una manera de escribir elementos de matriz genericos $\langle F | e^{-i \hat{H} T_E} | I \rangle$ en terminos de path integrals.

$$\langle F | e^{-i \hat{H} T_E} | I \rangle = \int dq_I \int dq_F \psi_F^*(q_F) \langle q_F | e^{-i \hat{H} T_E} | q_I \rangle \psi_I(q_I) \quad (221)$$

donde

$$\langle q_F | e^{-i \hat{H} T_E} | q_I \rangle = \int_{q_I=q(0)}^{q_F=q(T_E)} \mathcal{D}q e^{i \int_0^{T_E} \mathcal{L}} \quad (222)$$

Como la cantidad relevante en mecanica estadistica es cuando estados inicial y final coinciden, nos interesa en realidad

$$\langle n | e^{-i \hat{H} T_E} | n \rangle = \int dq_I \int dq_F \psi_n^*(q_F) \langle q_F | e^{-i \hat{H} T_E} | q_I \rangle \psi_n(q_I) \quad (223)$$

donde

$$\langle q_F | e^{-i \hat{H} T_E} | q_I \rangle = \int_{q_I=q(0)}^{q_F=q(T_E)} \mathcal{D}q e^{i \int_0^{T_E} \mathcal{L}} \quad (224)$$

Podemos asumir ψ_n una base ortonormalizada del espacio de Hilbert, de manera que

$$\sum_n \psi_n^*(q_F) \psi_n(q_I) = \delta(q_I - q_F) \quad (225)$$

Por lo tanto al final

$$\mathcal{Z} = \int_{q(0)=\hat{q}}^{q(T_E)=\hat{q}} \mathcal{D}q e^{i \int_0^{T_E} \mathcal{L}} \quad (226)$$

Es decir, hemos encontrado que el path integral que tenemos tras hacer

$$t \rightarrow -i t_E \quad (227)$$

e imponer condiciones de contorno periodicas $q(0) = q(T_E)$, tenemos la mecanica estadistica del sistema.

El cambio de variables (227) se conoce como *rotacion de Wick*. Notese que si tenemos el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, la rotacion de Wick lo convierte en el espacio euclideo \mathbb{R}^4 . Para nuestra mecanica estadistica no solo estamos haciendo la rotacion de Wick, sino que ademas estamos suponiendo que el tiempo euclideo (una de las coordenadas en \mathbb{R}^4) tiene un tamagno finito T_E e imponemos condiciones de contorno periodicas. Esto es analogo a decir que la mecanica estadistica de un sistema es igual al path integral euclideo con el tiempo euclideo siendo un circulo de tamagno $T_E = \beta$.

Este descubrimiento es absolutamente sorprendente e increiblemente profundo. De alguna manera, es como decir que la mecanica cuantica es una mecanica estadistica en tiempo complejo (aunque esto son simplemente palabras!).

6 Path integrals en Teoria Cuantica de Campos

El path integral esta formulado de manera natural en terminos del lagrangiano, que a su vez esta adaptado a mantener explicitas todas las simetrias de una teoria invariante Lorentz. Por otra parte, el path integral incorpora de manera natural ordenados temporales. Esto sugiere que la teoria de campos se formula de manera natural en terminos de path integrals.

El path integral para un campo es la generalizacion obvia del path integral en mecanica cuantica.¹²

$$\langle \phi_F | e^{-i \hat{H} (t_F - t_I)} | \phi_I \rangle = \int_{\phi(t_I) = \phi_I}^{\phi(t_F) = \phi_F} \mathcal{D}\phi e^{i \int_{t_I}^{t_F} dt \mathcal{L}} \quad (228)$$

A la vista de que al agnadir fuentes tenemos un funcional generador para ordenados temporales, y dado que, calculados en el vacio dichos ordenados temporales son los correladores a n puntos centrales en teoria de campos, esta claro que nos interesa tomar el limite $t_I \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$ con $\phi_I = \phi_F = \text{vacio}$. En tal caso podemos definir

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i S + \int J \phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i S}} \quad (229)$$

De manera que

$$\langle T [\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] \rangle = \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0} \quad (230)$$

Notese que el denominador en $\mathcal{Z}[J]$ es tal que, para la funcion a 0 puntos, que no es mas que la norma del vacio, tenemos $\langle 0|0 \rangle = 1$.

Es importante darse cuenta de que esta formula es obvia de generalizar a teorias con un numero arbitrario de campos, a su vez estos de un tipo arbitrario (fermionicos, bosonicos, complejos, reales, spin 1... incluso a priori spin 2!). De esta manera al menos en principio, podemos calcular un correlador arbitrario en una teoria arbitraria a traves de una integral.

6.1 Campos libres

Fijemonos en el caso mas sencillo del campo escalar real sin interacciones. La accion es

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (231)$$

Por lo tanto el funcional generador es

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \int d^4x J(x) \phi(x)} \quad \mathcal{N} = \int \mathcal{D}\phi e^{i S} \quad (232)$$

¹²Una manera de argumentar esto es discretizando el campo, de manera que el campo es una coleccion finita de particulas en un cierto potencial. Para cada particula podemos usar la derivacion de path integral conocida. Tomando despues el limite continuo de este sistema recuperamos el path integral para campos.

No es para nada obvio que esta integral tenga sentido (converja). Para empezar, es una integral de una funcion oscilatoria. Para darle sentido podemos hacer $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ y tomar el limite $\epsilon \rightarrow 0^+$. Asi, el exponente adquiere $-\int d^4x \epsilon \phi^2$, que hace que la exponencial se atenue en $\phi \rightarrow \infty$, haciendo que la integral converja. Asi pues hemos de calcular

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + \int d^4x J(x) \phi(x)} \quad \mathcal{N} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \quad (233)$$

Fijemonos en el exponente. Integrando por partes podemos escribir

$$\int d^4x \phi \frac{-i}{2} [\partial^2 + (m^2 - i\epsilon)] \phi + \int d^4x J(x) \phi(x) = \int d^4x \phi \frac{-i}{2} [\partial^2 + (m^2 - i\epsilon)] \phi + \frac{1}{2} J(x) \phi(x) + \frac{1}{2} \phi(x) J(x) \quad (234)$$

Transformando de Fourier

$$\phi = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(p) e^{ip \cdot x} \quad (235)$$

Tenemos

$$\int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\phi(q) \frac{i}{2} [p^2 - (m^2 - i\epsilon)] \phi(p) + \frac{1}{2} J(q) \phi(p) + \frac{1}{2} \phi(q) J(p) \right) e^{i(p+q) \cdot x} \quad (236)$$

La integral en d^4x es una δ , y por lo tanto

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(-p) \frac{i}{2} [p^2 - (m^2 - i\epsilon)] \phi(p) + \frac{1}{2} J(-p) \phi(p) + \frac{1}{2} \phi(-p) J(p) \quad (237)$$

Por ahorrar notacion llamemos $\Delta(p) = \frac{i}{2} [p^2 - (m^2 - i\epsilon)]$. Evidentemente $\Delta(-p) = \Delta(p)$. Asi pues

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(-p) \Delta(p) \phi(p) + \frac{1}{2} J(-p) \phi(p) + \frac{1}{2} \phi(-p) J(p) \quad (238)$$

Esto se puede escribir como

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p) \left[\phi(-p) + \frac{J(-p)}{2\Delta(-p)} \right] \left[\phi(p) + \frac{J(p)}{2\Delta(p)} \right] - \frac{J(-p)J(p)}{4\Delta} \quad (239)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p) \left[\phi(-p) + \frac{J(-p)}{2\Delta(-p)} \right] \left[\phi(p) + \frac{J(p)}{2\Delta(p)} \right] - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{J(-p)J(p)}{4\Delta}} \quad (240)$$

Como la integral en $\mathcal{D}\phi$ corre en $\phi \in [-\infty, \infty]$, podemos reabsorver el desplazamiento finito $J/2\Delta$, de manera que

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(-p)J(p)}{4\Delta}} \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta(p) \phi(-p) \phi(p)} \quad (241)$$

Pero

$$\mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta(p) \phi(-p) \phi(p)} = 1 \quad (242)$$

Asi que

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{J(-p)J(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (243)$$

Transformando de Fourier de vuelta a espacio de posiciones

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) \left[\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{i p \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] J(y)} \quad (244)$$

Aqui reconocemos el propagador de Feynman, asi que

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (245)$$

Por lo tanto tomando la segunda derivada con respecto a las fuentes y poniendolas luego a cero tenemos que

$$\langle T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] \rangle = D_F(x-y) \quad (246)$$

Exactamente como esperabamos!!!

6.2 Funcional generador para diagramas conexos y accion efectiva 1PI

Acabamos de ver que, para campos libres

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (247)$$

El exponente representa la propagacion entre x e y , donde una fuente genera perturbaciones. Si expandimos la exponencial, a orden n tenemos

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y) \right)^n \quad (248)$$

que es un diagrama inconexo con $2n$ puntos (donde estan las J 's). El unico diagrama conexo es el caso $n = 1$ –que es simplemente la propagacion de la particula–, que se corresponde con el exponente. Esto motiva a construir el funcional $\mathcal{W}[J]$ en general (incluyendo en principio interaccion) como

$$\mathcal{W}[J] = \log \mathcal{Z}[J] \quad (249)$$

Siendo funcional de J , es natural pensar $\mathcal{W}[J]$ como un funcional generador. Para entender que calcula $\mathcal{W}[J]$ tomemos sus derivadas

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x)} \quad (250)$$

$$(251)$$

$$\frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1)} \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_2)} \quad (252)$$

$$(253)$$

$$\vdots \quad (254)$$

Evaluando en $J = 0$ tenemos

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x)} = \langle T[\hat{\phi}(x)] \rangle \quad (255)$$

$$(256)$$

$$\frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \langle T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] \rangle - \langle T[\hat{\phi}(x_1)] \rangle \langle T[\hat{\phi}(x_2)] \rangle \quad (257)$$

$$(258)$$

$$\vdots \quad (259)$$

Lo que subtrae es precisamente la contribucion de los diagramas inconexos.¹³ Es decir, $\mathcal{W}[J]$ es la funcion generadora de diagramas conexos.

Fijemonos en la funcion a un punto obtenida de $\mathcal{W}[J]$ sin poner la fuente a cero. Como el ordenado temporal para un solo punto es trivial, podemos escribir

$$\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x)} = \langle \hat{\phi}(x) \rangle \quad (260)$$

Ya que $\mathcal{W}[J]$ genera diagramas conexos, es natural interpretar esta expresion como en el teorema de Ehrenfest, es decir, como definiendo una cantidad clasica. Llamemos $\langle \hat{\phi}(x) \rangle = \phi_c(x)$. A la vista de que ϕ_c esta definido a traves de una derivada, de manera standard, podemos transformar de Legendre y obtener un funcional $\Gamma[\phi_c]$:

$$\Gamma[\phi_c] = J(x) \phi_c(x) - \mathcal{W}[J] \quad (261)$$

¹³En realidad para la funcion a dos puntos esto es basicamente irrelevante (porque $\langle \hat{\Phi}(x) \rangle = 0$). Para mayor numero de puntos es obvio que las funciones generadas por $\mathcal{W}[J]$ son solo las conexas.

donde debemos entender que, al transformar de Legendre, usamos la definicion de ϕ_c para escribir J como funcion de ϕ_c , de manera que $\Gamma = \Gamma[\phi_c]$.¹⁴

Notese que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = J(x) \quad (262)$$

Lo que es muy parecido a la ecuacion de movimiento clasica. Por eso es natural pensar $\Gamma[\phi_c]$ como una accion efectiva que incluye los efectos cuanticos. Si supiesemos $\Gamma[\phi_c]$, resolviendo la ecuacion de movimiento “clasica” tendríamos todos los efectos cuanticos de manera exacta.

Aunque no vamos a entrar en mas detalles aqui, hay dos aspectos muy importantes a destacar sobre $\Gamma[\phi_c]$. Primeramente, tambien tiene la interpretacion de funcional generador. Se puede ver que los diagramas que genera son diagramas 1PI (*one particle irreducible*). Estos diagramas son aquellos que no se descomponen en diagramas consistentes si cortamos un propagador. Estos diagramas juegan un papel importante al estudiar las correcciones a ordenes mas altos en teoria de perturbaciones. Segundo, es importante recalcar que esta accion cuantica no es una accion efectiva en el sentido de resumir efectos de alta energia. Solo si todas las particulas de la teoria tienen masa esta accion cuantica coincide con la accion efectiva en el sentido usual.

6.3 Campos en interaccion

La definicion de $\mathcal{Z}[J]$ nos permite *a priori* calcular funciones de correlacion en terminos del path integral en general, haya o no interaccion. En principio es posible calcular directamente el path integral (sea analiticamente o numericamente, en la *lattice*). Sin embargo en la practica, mas alla de simulacion numerica, es generalmente imposible calcular el funcional generador de manera exacta. Por eso debemos recurrir a la teoria de perturbaciones.

En nuestro ejemplo de $\lambda\phi^4$, tenemos que¹⁵

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS+fJ\phi} \quad S = \int \frac{1}{2} \partial\phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (263)$$

Supongamos λ pequeno. Expandiendo el trozo $e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int \phi^4}$ tenemos

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0+fJ\phi} - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \int \mathcal{D}\phi \phi(x)^4 e^{iS+fJ\phi} + \dots \quad (264)$$

donde

$$S_0 = \int \frac{1}{2} \partial\phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (265)$$

¹⁴Esto es completamente analogo a cuando vamos de lagrangiano a hamiltoniano.

¹⁵Asumamos que $\int e^{iS} = 1$.

Ahora bien, cada insercion de $\phi(x)$ la podemos cambiar por una derivada con respecto a $J(x)$. Es decir, esta claro que

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x)^4 e^{iS+fJ\phi} = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} e^{iS+fJ\phi} \quad (266)$$

Asi pues, podemos escribir que

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0+fJ\phi} - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} e^{iS+fJ\phi} + \dots \quad (267)$$

con lo que resumando la serie, al menos formalmente, podemos escribir

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0+fJ\phi} \quad (268)$$

Pero la integral con la accion libre la sabemos hacer, asi que podemos escribir

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}} e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (269)$$

Dado este resultado, podemos, al menos en principio, calcular las amplitudes de scattering al orden deseado.

6.3.1 $\lambda\phi^4$ hasta $\mathcal{O}(\lambda)$

Supongamos que nos contentamos con precision $\mathcal{O}(\lambda)$. Entonces podemos expandir la exponencial y escribir

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}(\lambda)}[J] \sim (1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}) e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \quad (270)$$

Para calcular el scattering de 2 particulas en 2 particulas necesitamos el correlador a 4 puntos, es decir, la 4 derivada de $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}(\lambda)}[J]$ con respecto a J . Del termino sin λ esta claro que vamos a encontrar dos propagadores, que, como explicamos, no son suficientes para cancelar los ceros de las patas externas en LSZ. Asi pues, para lo que queremos calcular es suficiente considerar el trozo con λ . Debemos pues calcular

$$-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \Big|_{J=0} \quad (271)$$

La manera mas sencilla de hacer esto es expandiendo la exponencial

$$e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} = \sum \frac{1}{2^n n!} \int dx_1 \cdots \int dx_n \int dy_1 \cdots dy_n J(x_1) \cdots J(x_n) J(y_1) \cdots J(y_n) D_F(x_1 - y_1) \cdots D_F(x_n - y_n) \quad (272)$$

Ya que el termino relevante es una derivada octava, esta claro que, una vez ponemos a 0 las J el unico termino relevante de la serie es $n = 4$. Tomando aqui derivadas salen un monton de terminos. Pero como sabemos debemos buscar aquellos que produzcan polos al poner las particulas externas *on shell*. Dichos terminos son cosas de la forma

$$D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x) \quad (273)$$

de hecho reproduciendo lo que ya habiamos calculado usando cuantizacion canonica.

7 Lo que nos falta por discutir

Hemos tenido un primer encuentro con la teoria cuantica de campos. Hemos visto como, de manera natural, en sistemas en los que el numero de particulas no esta fijo los campos cuanticos emergen de modo natural. Tras revisar el formalismo canonico para campos libres, hemos introducido las interacciones. El mensaje principal es que en teoria cuantica de campos las cantidades relevantes son ordenados temporales de operadores. De hecho, los observables fisicos mas directos –amplitudes de scattering– se escriben en terminos de dichos ordenados temporales.

En formalismo canonico es un tanto “engorroso” el calculo de funciones de correlacion. Hemos visto que el formalismo de path integral esta naturalmente adaptado a la teoria cuantica de campos. De hecho, parte del lagrangiano, asi que es eminentemente invariante Lorentz.

Hemos aprendido a calcular amplitudes de scattering. Al final, usando las reglas de Feynman, estos calculos son muy sencillos de plantear. A primer orden en teoria de perturbaciones son ademas muy sencillos de llevar a cabo.

Nos quedan sin embargo muy importantes asuntos que discutir. Por completitud nos vamos a contentar con enumerarlos y dar una muy breve descripcion de por donde van los tiros.

7.1 Loops, divergencias y renormalizacion

Hasta ahora nos hemos concentrado en calculos hasta $\mathcal{O}(\lambda)$ para el scattering de $2 \rightarrow 2$. Sin embargo, si vamos a mayores ordenes, existen tambien diagramas tipo (5)

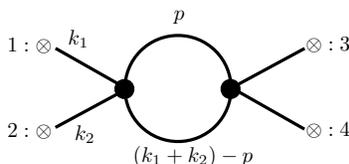


Figure 5: Correccion $\mathcal{O}(\lambda^2)$ al scattering $2 \rightarrow 2$ en $\lambda \phi^4$.

Estos diagramas que tienen un lazo cerrado se llaman *loops* ((5 es un diagrama a un *loop etc*). Por el contrario, los diagramas sin *loops* que hemos considerado hasta ahora se llaman *tree level*. Evidentemente cuantos mas ordenes en λ incluyamos, mas de estos diagramas conteniendo *loops* habra.

Las reglas de Feynman nos instruyen a integrar sobre los momentos corriendo en los loops. Por ejemplo, en el caso de (5) tendremos (ignoremos factores numericos y llamemos $s = k_1 + k_2$)

$$\lambda^2 \int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-s)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (274)$$

Esta claro que para momentos grandes esta integral va como

$$\lambda^2 \int d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-s)^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \int d^4p \frac{1}{p^4} \sim \int d|p| \frac{|p|^3}{|p|^4} \quad (275)$$

Evidentemente esto diverge. Poniendo un limite superior $|p| < \Lambda$ a la integral en momentos, esto va como $\sim \log \Lambda$. Esta claro que, al menos asi tal cual, el limite $\Lambda \rightarrow \infty$ no esta bien definido.

Este fenomeno, es decir, el que los diagramas conteniendo loops generalmente son divergentes es universal. A la vista de ello uno debe asumir que la teoria cuantica de campos es valida solo por debajo de la escala Λ . En tal caso, cortando las integrales en momentos para $p > \Lambda$, podemos decir, esquematicamente, que nuestro scattering $2 \rightarrow 2$ tiene el elemento de matriz¹⁶

$$\lambda + c \lambda^2 \log \frac{k}{\Lambda} \quad (276)$$

donde c es un numero. Ahora bien, en un experimento este elemento de matriz –el scattering $2 \rightarrow 2$ – es medido a cierta energia obteniendo tal o cual resultado. Supongamos que medimos a la energia μ –es decir, las particulas entrantes tienen energia en centro de masas $k^2 = \mu^2$. Supongamos que a la escala $k = \mu$ el valor que medimos para λ es λ_μ . Entonces

$$\lambda_\mu = \lambda + c \lambda^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} \quad (277)$$

Esto nos muestra que el valor del acoplo en el lagrangiano **NO** es el valor fisico de la constante de acoplo.¹⁷ Invirtiendo la relacion obtenida, resulta que hasta $\mathcal{O}(\lambda_\mu^2)$ tenemos que

¹⁶Esta claro que $\log \Lambda$ a secas no tiene sentido, ya que el logaritmo de una cantidad con dimensiones como es Λ no tiene sentido. Por este motivo esta claro que la correccion debe de ser $\log \frac{\Lambda}{k}$, ya que k es la unica cantidad con dimensiones apropiadas para dar un logaritmo de algo adimensional. Uno puede hacer el calculo explicito y ver que en efecto esto es lo que sale.

¹⁷De hecho que significa valor fisico de la constante de acoplo es un poco dependiente de la convencion: a que energia medimos. . . Por valor fisico entenderemos el valor medido dada una prescripcion: a tal energia, tal proceso. . .

$$\lambda \sim \lambda_\mu - c \lambda_\mu^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} \quad (278)$$

asi que enchufando esto en la expresion original tenemos que el scattering $2 \rightarrow 2$ esta dado por

$$\lambda_\mu + c \lambda_\mu^2 \left(\log \frac{k}{\Lambda} - \log \frac{\mu}{\Lambda} \right) + \mathcal{O}(\lambda_\mu^4) = \lambda_\mu + c \lambda_\mu^2 \log \frac{k}{\mu} + \mathcal{O}(\lambda_\mu^4) \quad (279)$$

Notese que la dependencia en Λ hasta orden λ_μ^2 ha desaparecido!!! Evidentemente el limite $\Lambda \rightarrow \infty$ esta ahora bien definido!!! A esto se le llama *renormalizacion*. Lo que ha ocurrido es que hemos re-absorbido en el acoplo en el lagrangiano (que a veces se le llama *bare coupling*, o acoplo desnudo) la dependencia infinita en Λ cambiandolo por un *renormalized coupling* (acoplo renormalizado).

Si hubiesemos hecho lo mismo con $\lambda \phi^6$ hubiesemos visto que no hay manera de eliminar el Λ a un determinado orden. Esto se debe a que la teoria es *no renormalizable*, en oposicion a $\lambda \phi^4$ que es *renormalizable*.

Podemos entender de manera fisica por que esto es asi. Recordemos que $\lambda \phi^6$ es un acoplo irrelevante en el IR, pero muy importante en el UV. Es por eso que las propiedades UV –evidentemente $\Lambda \rightarrow \infty$ es UV!– dependen crucialmente de este coupling que es dimensional. Sin embargo, en $\lambda \phi^4$, la interaccion es marginal y el acoplo adimensional. Eso sugiere que a altas energias este acoplo no sera muy importante y por lo tanto podemos separar los efectos de altas energias –y mandarlos arbitrariamente lejos– sin problema.

La “renormalizacion” que hemos hecho aca es un tanto pedestre. Hay tecnicas estandar, descritas en la bibliografia, que permiten de manera sistematica renormalizar teorias renormalizables.

Un concepto crucial que sigue como corolario a la renormalizacion es la idea del *grupo de renormalizacion*. En cierto modo, la clave de la renormalizacion esta en que uno debe definir los acoplos a traves de cantidades medidas a cierta energia. Esto sugiere que toda teoria cuantica de campos es en realidad una teoria efectiva valida alrededor de esa energia donde esta definida. Las teorias renormalizables son especiales en tanto que los efectos de los grados de libertad de mas altas energias se pueden codificar en un numero finito de otros acoplos: cambiando λ absorbimos Λ . Estudiar como “cambia” la teoria al cambiar dicha escala nos dice como cambian los grados de libertad relevantes al cambiar la escala. Esto es de central importancia en fisica, si bien aqui no vamos a entrar mas en ello.

7.2 Simetrias

La idea de simetria es central en fisica. Una simetria cuya aparicion es obvia es la simetria bajo transformaciones de Poincare –es decir, invariancia relativista–. De hecho, el path integral hace esta simetria completamente evidente, haciendolo por lo tanto el punto de inicio mas natural para construir una teoria cuantica de campos. Pero en general podemos tener mas simetrias. Se puede demostrar¹⁸ que la unitariedad de la matriz S solo es

¹⁸S.Coleman and J.Mandula, *All possible symmetries of the S-matrix*, Phys.Rev. 159 (1967) 1251-1256

compatible con la simetria de Poincare y un grupo de simetria interno que conmute con el grupo de Poincare. Estas simetrias internas pueden ser locales o globales.

7.2.1 Simetrias globales

Supongamos la teoria mas sencilla del mundo: un boson escalar real sin masa. La accion es

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial\phi^2 \quad (280)$$

Esta teoria es invariante bajo la transformacion $\phi \rightarrow \phi + a$, con a una constante.

Hay simetrias mas interesantes. Consideremos por ejemplo un escalar complejo

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} |\partial\phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 \quad (281)$$

Esta teoria es invariante bajo

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (282)$$

Esta es una rotacion $U(1)$, que es un grupo abeliano. Podemos tambien tener simetrias no abelianas. Por ejemplo, consideremos un conjunto de N escalares reales con los que formaremos el vector $\vec{\phi}^T = (\phi_1, \dots, \phi_N)$. La accion es

$$S = \int \frac{1}{2} \partial\vec{\phi}^T \cdot \partial\vec{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \vec{\phi}^T \cdot \vec{\phi} - \lambda (\vec{\phi}^T \cdot \vec{\phi})^2 \quad (283)$$

Evidentemente esta accion es invariante bajo

$$\vec{\phi} \rightarrow M \vec{\phi} \quad (284)$$

con M una matriz satisfaciendo $M^T \cdot M = \mathbb{1}$, que es la definicion del grupo $O(N)$. Haciendo los escalares complejos, el grupo de invariancia seria $U(N)$.

7.2.2 Simetrias locales (*gauge*)

Las simetrias discutidas arriba son simetrias globales, ya que la transformacion es igual en todos los puntos del espacio. Sin embargo un principio fundamental es la invariancia de las leyes fisicas bajo transformaciones locales. Esto sugiere promover las simetrias anteriores a simetrias locales (tambien llamadas *simetrias gauge*). Por sencillez, concentremonos en el campo escalar complejo. Promoviendo la transformacion $U(1)$ a simetria local, tenemos la transformacion infinitesimal

$$\phi \rightarrow \phi + i\alpha(x)\phi \quad (285)$$

Es evidente que la accion discutida arriba no es invariante bajo esta transformacion. Sin embargo si lo es si introducimos un nuevo campo cuya transformacion compense la de del escalar. Consideremos

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 \quad D_\mu \phi = \partial_\mu - i A_\mu \phi \quad (286)$$

Esta accion es invariante bajo

$$\phi \rightarrow \phi + i \alpha(x) \phi \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (287)$$

Esta transformacion se conoce como *transformacion gauge*. Guiados por el principio de invariancia gauge hay un termino mas con dimension 4 que podemos agnadir a la accion

$$S = \int d^4x -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 \quad D_\mu \phi = \partial_\mu - i A_\mu \phi \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (288)$$

Esto es una version con escalares del electromagnetismo (por eso a veces se le llama *scalar QED*).

Las simetrias locales *-gauge-* son intrinsecamente diferentes de las simetrias globales. Mientras que las primeras clasifican el espectro de una teoria, las segundas eliminan estados. Esto es porque una cantidad no invariante gauge se puede poner al numero que queramos *-en particular a 0-* haciendo transformaciones locales. Asi pues, las simetrias gauge en realidad reflejan redundancias en la descripcion del sistema, y por eso sirven para eliminar dichas redundancias. Es por eso que **todas** las cantidades con interpretacion fisica *-es decir, lo que se mide-* deben ser invariantes gauge.

Volvamos a nuestro ejemplo de arriba. Para describir una partícula sin masa de spin 1 *-el A_μ de arriba-* hemos usado un vector en el espacio de Minkowski. Esto son en principio 8 grados de libertad (4 campos y 4 momentos), aunque el hecho de tener una partícula sin masa lleva a que en realidad tengamos 6 grados de libertad (3 campos y 3 momentos). Sin embargo argumentos generales sobre las representaciones del grupo de Lorentz dictan que una partícula sin masa de spin 1 debe tener 4 grados de libertad (2 campos y 2 momentos). La manera de reconciliar estos dos numeros es a traves de la simetria gauge, que permite eliminar uno de los 3 campos (y su momento) dejando los grados de libertad deseados.

Es difícil de sobreestimar la importancia de las interacciones gauge en fisica. No en vano, el *modelo estandar* es un ejemplo particular de teoria gauge.

7.2.3 Ruptura espontanea de simetria

Consideremos de vuelta nuestro modelo con simetria global $U(1)$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial^2 \phi + m^2 \phi + 4 \lambda |\phi|^2 \phi = 0 \quad (289)$$

Es evidente que las soluciones de vacio son aquellas en las que $\partial \phi = 0$. Por lo tanto tenemos que

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{4\lambda} \quad \text{o} \quad \phi = 0 \quad (290)$$

Es evidente que si $\frac{m^2}{4\lambda} > 0$ la unica solucion es $\phi = 0$. Sin embargo si $\frac{m^2}{4\lambda} < 0$ –lo que ocurre si $m^2 < 0$. El signo de λ ha de ser positivo para que a gran ϕ el potencial sea acotado por abajo– resulta que la solucion con $|\phi| \neq 0$ no solo es valida sino que es de menor energia. Escribiendo $\phi = \sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} e^{i\theta}$ esta claro que cualquier θ soluciona la ecuacion. En ese sentido es una *direccion plana*, ya que esta claro que el potencial es igual para cualquier θ_0 . Podemos escoger pues un θ_0 a nuestro antojo y tomar como vacio

$$\phi_0 = \sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} e^{i\theta_0} \quad (291)$$

A esto se le conoce como ruptura espontanea de la simetria. El modelo original tenia la simetria global $U(1)$ que vimos. Pero el vacio resulta que no es invariante bajo dicha simetria (ya que hay que escoger un θ_0), por lo que el vacio rompe la simetria de manera espontanea. Esto es en contraste a una ruptura explicita, que seria por ejemplo agnadir a la accion un termino digamos $\int \phi^4$. Esta claro que agnadiendo a la accion esto, esta de entrada no es invariante $U(1)$.

Expandamos alrededor del vacio que rompe espontaneamente la simetria haciendo

$$\phi_0 = \left(\sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} + \rho \right) e^{i(\theta_0+p)} \quad (292)$$

Para ρ, p pequengos encontramos

$$S \sim \int d^4x \frac{1}{2} \partial\rho^2 - 4\lambda \phi_0^2 \rho^2 + \frac{\phi_0^2}{2} \partial p^2 \quad (293)$$

es decir, la fluctuacion a lo largo de la direccion plana no tiene masa mientras que la fluctuacion a lo largo de la direccion no plana si tiene una masa. Este es un fenomeno universal y exacto: cuando tenemos una simetria espontaneamente rota, por cada direccion plana original que teniamos que resulta rota por el vacio tenemos una particula escalar con masa exactamente cero. Esto se conoce como *teorema de Goldstone* y a la particula escalar sin masa se le llama *boson de Goldstone*. Es una “firma” universal de ruptura espontanea de simetria.

Cuando la ruptura espontanea de la simetria ocurre en una teoria donde la simetria es local ocurre un fenomeno enormemente interesante: podemos escoger un gauge tal que el boson de Goldstone esta puesto a cero –en ese sentido esta “comido por el campo gauge”– al precio de que, ya que hemos fijado el gauge, ahora los 3 grados de libertad del campo vectorial son fisicos: el campo vectorial se ha vuelto masivo! Este es el celebrado *mecanismo de Higgs*.

7.2.4 Simetrias anormales

Hasta ahora no hemos discutido fermiones. Evidentemente, los campos fermionicos son parte esencial. Su naturaleza anticonmutante (es decir, el hecho de que satisfacen el principio de exclusion de Pauli) hace que experimenten fenomenos distintivos.

En principio, la cuantización de los campos fermiónicos es similar a la de los campos bosónicos: se puede escribir un path integral para la acción de Dirac e integrar sobre los campos Grassman. Sin embargo, una distinción fundamental aparece cuando hablamos de simetrías. Debido a la naturaleza fermiónica, simetrías clásicas pueden no serlo a nivel cuántico. Es decir, si bien clásicamente una teoría tiene una corriente conservada j^μ , es decir, tal que $\partial_\mu j^\mu = 0$, a nivel cuántico puede ocurrir que $\partial_\mu j^\mu \neq 0$. A estas simetrías –que no lo son en realidad– se las llama *simetrías anómalas*.

Un ejemplo canónico son las simetrías de sabor quirales. Como es bien sabido, en 4d fermiones sin masa se representan por spinores de Weyl. Estos satisfacen que $\gamma^5 \psi = \pm \psi$, siendo los que tienen autovalor $+$ fermiones *left* y los que tienen autovalor $-$ fermiones *right*. Podemos en principio escribir una teoría con solo fermiones *left*. De hecho, si tenemos más de un fermión *left*, digamos N_f de ellos, podemos escribir dicha teoría con simetría $U(N_f)$. Como la simetría solo afecta a spinores de una quiralidad se llama simetría quiral. Resulta que esta simetría, a nivel cuántico, es anómala. Esto tiene una importancia capital en QCD, ya que en particular permite decaimientos de otro modo prohibidos (en particular $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$).

7.3 Efectos no perturbativos

Hasta ahora hemos estudiado la teoría cuántica de campos en una aproximación perturbativa. Sin embargo pueden existir importantes efectos no perturbativos. En general, dichos efectos no se pueden capturar a ningún orden en teoría de perturbaciones, sino que necesitan de una solución exacta –sin perjuicio de que dicha solución exacta, por algún argumento típicamente topológico, aparezca por ejemplo a primer orden en teoría de perturbaciones–. Un ejemplo a tener en cuenta es la función seno. Expandiendo en serie de Taylor alrededor de cualquier punto, truncando a cualquier orden es imposible detectar la periodicidad de 2π . Para ver dicha periodicidad necesitamos la serie completa. Del mismo modo, hay efectos en teoría de campos que son exactos y que necesitan de una solución exacta. Uno de los ejemplos más relevantes es el de las teorías gauge no abelianas. En el electromagnetismo el grupo de gauge es $U(1)$, pero uno puede imaginar parientes con grupos de gauge mayores y no abelianos, como por ejemplo $SU(N)$. El caso particular de $N = 3$ es especialmente importante, ya que describe la interacción fuerte. Se llama *QCD*. Al igual que para el electromagnetismo, la constante de acoplamiento para una teoría gauge $SU(N)$ no tiene dimensiones en 4d. Sin embargo, mientras que para el electromagnetismo los efectos cuánticos hacen que la constante de acoplamiento se haga más y más débil en el IR, para teorías gauge no abelianas ocurre al revés.¹⁹ Es decir, la constante de acoplamiento crece más y más al ir al IR. Esto se llama *libertad asintótica*. Eventualmente la constante de acoplamiento se hace tan fuerte que la teoría de perturbaciones no es válida. De hecho, lo que ocurre es que los quarks (como electrones pero para $SU(3)$) están interactuando tan fuertemente que no se pueden separar. Esta es la propiedad de *confinamiento* que explicaría la existencia –y

¹⁹Esto es heurísticamente porque mientras que en $U(1)$ el fotón no interactúa consigo mismo, en $SU(N)$ sí lo hace.

estabilidad– del proton. El problema es que confinamiento es un fenomeno no perturbativo cuyo origen en realidad no se entiende. Este es uno de los mayores problemas abiertos en fisica!

El vacio en teoria cuantica de campos es en realidad un “ente” muy interesante. De hecho, es posible que haya mas de un vacio etiquetado por alguna caracteristica topologica. Es posible tunelear entre vacios debido a *instantones*. Esto es particularmente importante en teorias gauge no abelianas. De hecho, los instantones son responsables de la anomalia mencionada arriba. Se piensa tambien que los instantones pueden tener una importante relacion con el mecanismo de confinamiento.

Todas estas apasionantes cuestiones son objeto de investigacion hoy en dia!

A Campos clasicos

Un sistema clasico esta determinado por las ecuaciones de movimiento. En general, podemos pensar un sistema clasico como un conjunto de particulas. Las ecuaciones de movimiento nos permiten determinar las posiciones y velocidades de cada particula en cualquier instante de tiempo a partir de una configuracion inicial. Si el numero de particulas es muy grande es util pasar a una descripcion continua, donde en lugar de dar para cada particula su posicion y velocidad $\{q_i(t), \dot{q}_i(t)\}$, codificamos esta informacion en un campo continuo –por ejemplo los desplazamientos con respecto a una posicion de equilibrio– $\phi(\vec{x}, t)$. La dinamica de dicho campo esta determinada por una ecuacion de movimiento en derivadas parciales segundas –para causalidad– que solo involucra productos del campo en el mismo punto –localidad–.

La ecuacion de movimiento ha de ser covariante con respecto a las simetrias adecuadas. Supongamos un campo escalar bajo las transformaciones de Lorentz, y supongamos que el campo es libre, es decir, que no interactua con nadie. La ecuacion de movimiento debe transformarse pues como un escalar –i.e. no transformarse– y ser lineal en el campo –de ser no lineal, por definicion, habria interaccion!–. Teniendo en cuenta que solo podemos tener como mucho dos derivadas, la unica posibilidad es la ecuacion de Klein-Gordon

$$(\partial^2 + m^2) \phi(\vec{x}, t) = 0 \tag{294}$$

Con α, β dos numeros. Actuemos sobre la ecuacion con ∂^μ . Nos queda

$$(\alpha + \beta) = 0 \tag{295}$$

Supongamos que estamos interesados en campos vectoriales libres sin masa. La ecuacion de movimiento debe transformarse como un vector, asi pues, dado que como mucho ha de tener dos derivadas, en general tendríamos

$$\alpha \partial^2 A_\mu + \beta \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \tag{296}$$

Con α, β dos numeros. Actuemos sobre la ecuacion con ∂^μ . Nos queda

$$(\alpha + \beta) \partial^2 \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (297)$$

Asi pues, en general debemos tener que $\alpha = -\beta$, con lo que la ecuacion de movimiento es

$$\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (298)$$

Notese que esta ecuacion es invariante bajo

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (299)$$

para cualquier α . Es decir, ha aparacido la invariancia gauge como consecuencia de que el campo vectorial tenga las propiedades adecuadas bajo las transformaciones de Lorentz.

Es natural preguntarse si estas ecuaciones de movimiento vienen, como en el caso de una partícula libre, de un principio variacional. Si tal cosa ocurriese debería ser posible escribir una acción que es un funcional del campo. Consideremos ahora el caso más general, donde no necesariamente tengamos campos libres. Denotemos el conjunto de todos los campos como Φ_i (por ejemplo, para el escalar real $\Phi_i = \{\phi\}$, para el campo vectorial $\Phi_i = \{A_\mu\}$ o para *scalar QED* $\Phi_i = \{\phi, A_\mu\}$). Entonces

$$S[\Phi_i] = \int d^4x \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i] \quad (300)$$

Variando la acción con respecto a los campos tenemos

$$\delta S = \int d^4x \sum_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \delta \partial_\mu \Phi_i \quad (301)$$

Dado que $\delta \partial_\mu \Phi_i = \partial_\mu \delta \Phi_i$, podemos integrar por partes el segundo término. Descartando el término de superficie –una derivada total²⁰– queda que

$$\delta S = \int d^4x \sum_i \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \right\} \delta \Phi_i \quad (302)$$

Asi pues, en general la ecuacion de movimiento es

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} = 0 \quad (303)$$

Es fácil ver que la ecuacion de movimiento para el campo escalar real y para el campo vectorial se sigue respectivamente de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial \phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (304)$$

Notese que, si bien en nuestros ejemplos si lo es, el lagrangiano no tiene por que ser invariante Lorentz. Por lo tanto, en general podemos señalar t como “especial”. Igual

²⁰Notese que esto en general es sutil. Por ejemplo, en un espacio con bordes descartar estos términos requiere que los bordes tengan las propiedades adecuadas!

que en la mecanica de una sola particula, definimos el momento (mejor dicho, la densidad de momento) como

$$\pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t \Phi_i} \quad (305)$$

Notese que esto es un campo! El Hamiltoniano es

$$H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H} \quad \mathcal{H} = \pi_i \partial_t \Phi_i - \mathcal{L} \quad (306)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\partial_t \pi_i = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \partial_t \Phi_i} \quad \partial_t \Phi_i = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \partial_t \pi_i} \quad (307)$$

A.1 Simetrias y corrientes conservadas

En muchos casos ocurre que un sistema descrito por una accion admite transformaciones que dejan la accion invariante. El ejemplo mas sencillo es un escalar real libre sin masa

$$S = \int d^4 x \partial \phi^2 \quad (308)$$

Esta accion es evidentemente invariante bajo $\phi \rightarrow \phi + a$ con a un numero real cualquiera.

En general, supongamos una transformacion

$$\delta \Phi_i = \alpha_{ij} \Phi_j + \beta_i \quad (309)$$

En general α_{ij} y β_i podrian ser incluso funciones de x . Por lo tanto

$$\delta \partial_\mu \Phi_i = \partial_\mu \alpha_{ij} \Phi_j + \alpha_{ij} \partial_\mu \Phi_j + \partial_\mu \beta_i \quad (310)$$

Entonces

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \delta \partial_\mu \Phi_i \quad (311)$$

queda

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} \alpha_{ij} \Phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} \beta_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \partial_\mu \alpha_{ij} \Phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \alpha_{ij} \partial_\mu \Phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \partial_\mu \beta_i \quad (312)$$

Integrando por partes y usando las ecuaciones de movimiento

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \alpha_{ij} \Phi_j + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \beta_i \right) \quad (313)$$

Supongamos ahora el caso global, es decir, cuando ni α_{ij} ni β_i dependen de x . Entonces, la transformacion de la accion es

$$\delta S = \int d^4x \alpha_{ij} \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \Phi_j \right) + \beta_i \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \quad (314)$$

Pero ya que esta transformacion es una simetria –asi empezamos suponiendo!– $\delta S = 0$, con lo que definiendo las corrientes

$$j_{ij}^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \Phi_j \quad j_S^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_i} \quad (315)$$

Tenemos que son conservadas –usando las eqs. de movimiento!–, es decir

$$\partial_\mu j_{ij}^\mu = 0 \quad \partial_\mu j_S^\mu = 0 \quad (316)$$

Esto suele ir bajo el nombre de *Teorema de Noether*, ya que fue descubierto por Emmy Noether.

Para ejemplificar esto, tomemos el caso estrella de un escalar complejo con simetria $U(1)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (317)$$

Esta teoria es invariante bajo $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$. La version infinitesimal es

$$\delta \phi = i \alpha \phi \quad (318)$$

Por lo tanto la corriente conservada es

$$j_\mu = \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^* \quad (319)$$

B El grupo de Lorentz

Dejando de lado gravedad, la relatividad especial establece que culaquier fenomeno ocurre en el espacio de Lorentz. Dicho espacio es un espacio vectorial de 4 dimensiones con metrica

$$ds^2 = dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1) \quad (320)$$

Las transformaciones que dejan invariante ds^2 forman el *grupo de Poincare* –en realidad dicho “grupo” contiene el grupo de Lorentz junto con las translaciones–. El postulado fundamental es que las leyes de la Fisica son covariantes bajo transformaciones del grupo de Poincare.

El grupo de Poincare contiene translaciones, boosts y rotaciones. En lo que sigue nos olvidaremos de las translaciones y solo consideraremos boosts y rotaciones, es decir, el *grupo de Lorentz*.

B.1 Rotaciones en 3d

La definicion del grupo de Lorentz como aquel que deja invariante el intervalo es muy reminiscente de algo muy familiar: el grupo de rotaciones. Consideremos un vector \vec{x} en \mathbb{R}^3 . La norma –longitud– de dicho vector es

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x}^T \cdot \vec{x} = x^i x^j \delta_{ij} \quad (321)$$

Por definicion, una rotacion es una transformacion $x^i \rightarrow U_j^i x^j$ tal que la norma del vector se mantiene constante. Esto se parece mucho a la definicion del grupo de Lorentz, solo que en lugar de usar la metrica de Minkowski usamos la metrica euclidea δ^{ij} . Esta claro que la matriz M debe satisfacer que

$$U^T U = \mathbb{1} \quad \iff \quad M \in SO(3) \quad (322)$$

Supongamos una transformacion infinitesimal, es decir $U = \mathbb{1} + M$. La matriz M satisface pues que

$$M^T = -M \quad (323)$$

Es decir, M es una matriz antisimetrica. Como M actua en \mathbb{R}^3 , tiene 3 entradas independientes. Es decir, podemos encontrar 3 matrices M^I independientes satisfaciendo ser antisimetricas en \mathbb{R}^3 .

Supongamos ahora la accion de una rotacion en mecanica cuantica. Supongamos una funcion de onda $\psi(\vec{x})$. Bajo una rotacion $x^i \rightarrow x^i + M_j^i x^j$ tenemos

$$\psi \rightarrow \psi(x^i) + M_j^i x^j \partial_i \psi + \delta \psi \quad (324)$$

Usando la forma de las matrices M escritas como combinaciones de M^I 's, esta claro que podemos escribir esto como

$$\psi \rightarrow \psi(x^i) - \alpha^3 [x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1] \psi + \alpha^2 [x^1 \partial_3 - x^3 \partial_1] \psi - \alpha^1 [x^2 \partial_3 - x^3 \partial_2] \psi + \delta \psi \quad (325)$$

donde α^i son los parametros de la rotacion particular. Introduciendo los generadores de rotaciones actuando sobre funciones como

$$L_{ij} = -(x^i \partial_j - x^j \partial_i) \quad (326)$$

tenemos pues que

$$\delta \psi = \alpha^i \epsilon_{ijk} L_{jk} \psi \quad (327)$$

Los generadores L_{ij} satisfacen que

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{ik} L_{jl} - \delta_{il} L_{jk} - \delta_{jk} L_{il} + \delta_{lj} L_{ik} \quad (328)$$

Este algebra es el algebra de $SO(3)$. Definiendo $J^i = -2i \epsilon^{ijk} L_{jk}$ es facil ver que el algebra se convierte en $[J^i, J^j] = 2i \epsilon^{ijk} J^k$, es decir, tenemos el isomorfismo de algebras $\mathfrak{so}(3) \sim \mathfrak{su}(2)$.

Ya que las representaciones de $SU(2)$ son sencillas –es el algebra de momento angular en mecanica cuantica!–, construir representaciones de $SO(3)$ tambien lo es: son las mismas reps. que las de $SU(2)$!

B.2 Rotaciones en 4d

Supongamos ahora el mismo ejercicio en 4d. Evidentemente de vuelta encontraremos que el generador de rotaciones en 4d satisface que $M^T = -M$. En este caso hay pues 6 generadores. Colocando esos generadores en una matriz L_{ij} –donde ahora $i, j = 1, \dots, 6$ –, podemos repetir exactamente el mismo calculo de arriba, y encontraremos que el algebra que los generadores satisfacen ahora es

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{ik} L_{jl} - \delta_{il} L_{jk} - \delta_{jk} L_{il} + \delta_{lj} L_{ik} \quad (329)$$

Es decir, el mismo algebra que para las rotaciones en 3d solo que en una dimension mas. Evidentemente esto continua siendo cierto en un numero arbitrario de dimensiones. Por lo tanto, hemos encontrado el algebra para $SO(d)$ con d arbitrario.

En 3d, usando el simbolo de Levi-Civita ϵ^{ijk} encontramos que $\mathfrak{so}(3) \sim \mathfrak{su}(2)$. En 4d –u otras dimensiones– esto no sera cierto. Para empezar el simbolo de Levi-Civita tendra d indices! Sin embargo si podemos hacer lo siguiente. Tomemos los generadores L_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$ y construyamos el vector

$$J^a = -2i \epsilon^{abc} L_{bc} \quad a, b, c \in \{1, 2, 3\} \quad (330)$$

Evidentemente estos J^a satisfaran un algebra de $SU(2)$, ya que si eliminamos la entrada x^4 en $SO(4)$ lo que tenemos es el caso conocido de $SO(3)$. Por otra parte, construyamos el vector

$$K^a = -2i L_{4a} \quad (331)$$

Podemos ahora formar las combinaciones

$$N_+^a = \frac{1}{2} (J^a + K^a) \quad N_-^a = \frac{1}{2} (J^a - K^a) \quad (332)$$

Con un poco de paciencia se puede ver que

$$[N_+^a, N_+^b] = 2i \epsilon^{abc} N_+^c \quad [N_-^a, N_-^b] = 2i \epsilon^{abc} N_-^c \quad [N_+^a, N_-^b] = 0 \quad (333)$$

Es decir, encontramos dos algebras de $SU(2)$ que conmutan. Esto quiere decir que $\mathfrak{so}(4) \sim \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$. Debido a esto, construir representaciones de $SO(4)$ es muy sencillo: simplemente tenemos dos copias del algebra de momento angular, por lo que las representaciones de $SO(4)$ seran dos copias de representaciones de $SU(2)$.

B.3 El grupo de Lorentz

Estamos ahora preparados para pasar al grupo de Lorentz. Dada la similitud formal con $SO(d)$, es obvio que el algebra que los generadores satisfaran sera muy parecida a $\mathfrak{so}(d)$. La diferencia estriba en que los generadores satisfacen que $U^T \eta U = \eta$, lo que contiene signos – extras con respecto a $SO(d)$. Repitiendo lo mismo que antes, es facil ver que el algebra es

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i \eta_{ik} L_{jl} - i \eta_{il} L_{jk} - i \eta_{jk} L_{il} + i \eta_{lj} L_{ik} \quad (334)$$

De vuelta, esto es independiente de la dimension, de manera que encontramos el algebra de $SO(1, d-1)$ –el $(1, d-1)$ hace referencia a que es como un grupo SO pero con una signatura con $d-1$ direcciones con igual signo y una con el opuesto. Evidentemente esto se puede generalizar de manera obvia y obtener $SO(p, q)$ –.

Repitiendo las mismas manipulacines de antes podemos ahora definir

$$N_+^a = \frac{1}{2} (J^a + i K^a) \quad N_-^a = \frac{1}{2} (J^a - i K^a) \quad (335)$$

tales que

$$[N_+^a, N_+^b] = 2i \epsilon^{abc} N_+^c \quad [N_-^a, N_-^b] = 2i \epsilon^{abc} N_-^c \quad [N_+^a, N_-^b] = 0 \quad (336)$$

Por lo tanto, tambien el grupo de Lorentz es basicamente $SU(2)_L \times SU(2)_R$ (se suelen llamar a los dos $SU(2)$ como *left* y *right* respectivamente). Las representaciones se construyen de nuevo como productos de representaciones de $SU(2)$. Ya que tenemos dos $SU(2)$ denotaremos las representaciones como (\cdot, \cdot) , poniendo en cada factor la correspondiente representacion de $SU(2)_{L,R}$.²¹

- $(0, 0)$: esto es un campo escalar de Lorentz
- $(\frac{1}{2}, 0)$: esto es un spinor de Weyl *left* –transforma solo bajo $SU(2)$ left–.
- $(0, \frac{1}{2})$: esto es un spinor de Weyl *right* –transforma solo bajo $SU(2)$ right–.
- $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$: esto es un spinor de Dirac.
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: esto es una particula vectorial –spin 1–.

Hay sin embargo una diferencia crucial: la i en la definicion de N_{\pm}^a hace que

$$N_+^a = (N_-^a)^\dagger \quad (337)$$

es decir, ambos $SU(2)$ no son independientes, ya que conjugacion compleja nos lleva de uno a otro. Notese que las particulas de spin entero son invariantes bajo esto, pero no asi los spinores: los spinores Weyl left y right se intercambian. Aqui no vamos a elaborar mucho mas en la teoria de las representaciones del grupo de Lorentz –y su parte discreta, que aqui no hemos discutido para nada–. Para todo ello, consular la bibliografia.

²¹Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se refiere a la representacion de spin $\frac{1}{2}$ de $SU(2)$.

C Normalizaciones relativistas

Muchas veces nos aparecen cantidades que no parecen para nada tener propiedades definidas bajo transformaciones de Lorentz. De cara a entender dichas propiedades, fijemonos en la siguiente integral

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \quad (338)$$

Esto no parece para nada invariante Lorentz. Sin embargo, si lo es de manera obvia la siguiente integral

$$\int d^4p \delta(p^2 - m^2) \quad (339)$$

ya que esta escrita en terminos de escalares de Lorentz. Explicitamente, aqui $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$. Hagamos explicitamente la integral sobre p_0 . Para ello necesitamos hacer una integral tipo

$$\int dx \delta(f(x)) \quad (340)$$

Haciendo el cambio de variables $f(x) = y$, como $f' dx = dy$, tenemos que

$$\int dx \delta(f(x)) = \int dy \frac{1}{f'(x)} \delta(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x/f(x)=0} \quad (341)$$

Asi pues, en nuestro caso $f(p_0) = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2$, que tiene los ceros en $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm \omega_{\vec{p}}$. Como podemos escoger de manera invariante la solucion con $+\omega_{\vec{p}}$, que es como haber instertado en la integral un $\theta(p_0)$, resulta que

$$\int d^4p \delta(p^2) \Big|_{p_0>0} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} \quad (342)$$

Es decir, la integral de (338) es invariante Lorentz.

Ya que (338) es invariante Lorentz, esta claro que constituye una medida apropiada para normalizar las funciones de onda de los estados. Obviamente ocurre que

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{2\omega_{\vec{p}}} (2\omega_{\vec{p}}) \delta(\vec{p} - \vec{q}) = 1 \quad (343)$$

asi que si normalizamos nuestros estados de manera que $\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = (2\pi)^3 (2\omega_{\vec{p}}) \delta(\vec{p} - \vec{q})$ es evidente que su normalizacion sera invariante Lorentz. Ademas ocurre que

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 1 \quad (344)$$

Ahora bien, un estado de una partícula es basicamente $|\vec{p}\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$. Sin embargo, a la vista de los requerimientos de normalizacion, es evidente que los estados de una partícula correctamente normalizados seran

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad (345)$$

Notese que el operador campo actuando sobre estados de una partícula correctamente normalizado satisface que

$$\langle 0|\hat{\phi}(\vec{x}, t)|\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \langle 0|[\hat{a}_{\vec{q}}e^{-iq\cdot x} + \hat{a}_{\vec{q}}^{\dagger}e^{iq\cdot x}]\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad (346)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{q})e^{-iq\cdot x} = e^{-ip\cdot x} \quad (347)$$

D Cálculo diferencial funcional

El cálculo diferencial funcional se puede definir de manera rigurosa discretizando las funciones y usando las definiciones usuales de derivada e integral, tomando al final el límite continuo. De hecho así definimos en particular el path integral para campos. De modo práctico las derivadas funcionales satisfacen que

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \delta(x-y) \quad (348)$$

Por lo tanto, por ejemplo tenemos que

$$S[J] = \int J(x)\phi(x) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\delta S}{\delta J(y)} = \phi(y) \quad (349)$$