

TAREAS PROPUESTAS POR LOS LIBROS DE TEXTO DE 1º DE BACHILLERATO PARA EL TEMA DE DERIVADA

Tasks proposed by the 1st grade of Bachillerato textbooks for the derivative topic

Vargas, M. F.^{a,b}, Fernández-Plaza, J. A.^b y Ruiz-Hidalgo, J. F.^b

^aUniversidad de Costa Rica, ^bUniversidad de Granada

Resumen

Este trabajo presenta un estudio del significado sobre derivada que se manifiesta en las tareas de libros de texto de 1º de Bachillerato. Para ello, establecemos un marco teórico que considera aspectos de significado, de enseñanza y de aprendizaje, pero, a diferencia de los estudios habituales sobre libros de texto que se centran en aspectos de aprendizaje, nosotros focalizamos el estudio en los dos primeros. Para ello, establecemos unas variables de análisis a priori y utilizamos el análisis de contenido como método de análisis de libros de texto de tres editoriales. Los resultados muestran el predominio, en los tres libros, de ciertas características de las tareas, por ejemplo la presencia de la derivada principalmente dentro de situaciones matemáticas y la importancia dada a las reglas de derivación frente a otros aspectos.

Palabras clave: *tareas, libros de texto, derivada, significado conceptos matemáticos escolares*

Abstract

This work presents a study of the meaning of the derivative manifested in the tasks of textbooks of the 1st year of "Bachillerato". To do this, we establish a theoretical framework that considers aspects of meaning, teaching and learning, but, unlike the usual studies about textbooks that focus on aspects of learning, we focus the study on the first two. To do this, we establish a priori analysis variables and used content analysis as method applied to textbooks from three publishers. The results show the predominance, in the three books, of certain characteristics of the tasks, for example the presence of the derivative mainly within mathematical situations and the importance given to the derivation rules in front of other aspects

Keywords: *tasks, textbooks, derivative, meaning of school mathematics concepts*

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto han ocupado un lugar importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde hace ya algunos años tanto en Educación Primaria como Secundaria. Esto debido a su papel como organizador del contenido, material de consulta, registro de las actividades de los alumnos, así como una guía de ejercicios y problemas a resolver (González y Sierra, 2004).

Su importancia e influencia en la Educación Matemática ha generado que las investigaciones basadas en los libros de texto hayan ido cobrando relevancia. Su notorio crecimiento generó que en el 2004, en el 10º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-10), se dedicara por primera vez un grupo de discusión a esta línea de investigación. Posteriormente, se incluyó también en el ICME-11 celebrado en el 2008; además se ha incorporado en otras actividades internacionales (Fan, 2013).

Particularmente en España, Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) mostraron como, solo en los trabajos presentados en la SEIEM durante el periodo 1997-2015, los estudios basados en los libros de texto representaban un 8,8% evidenciándose así su desarrollo. No obstante, pese al crecimiento de este tipo de investigaciones; esta área está apenas iniciando si se compara con otras líneas en Educación Matemática (Fan, 2013). De ahí la necesidad de ampliar el conocimiento en esta dirección.

Por ello, en este trabajo centramos nuestra atención en las tareas propuestas por tres libros de texto de 1º de Bachillerato para el tema de derivadas. El análisis aquí desarrollado forma parte de una investigación más amplia en la que estudiamos el significado que atribuyen los profesores al concepto de derivada; esto motivados en las dificultades puestas de manifiesto tanto por estudiantes como por docentes al trabajar este tópico (Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg, 2008; Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

Abordamos así una investigación de tipo cuantitativa y de naturaleza descriptiva, cuyos objetivos son los siguientes:

- Estudiar los aspectos descriptivos o estructurales de las tareas escolares propuestas por los libros de texto de 1º bachillerato para el tema de derivada.
- Estudiar algunos elementos del significado de derivada puesto de manifiesto por los libros de bachillerato mediante las tareas propuestas.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre libros de texto se pueden dividir en tres grandes grupos: (a) aquellas en las que los libros de texto son el objeto principal de la investigación, (b) trabajos en los que se analiza el modo en que otros factores influyen sobre los libros de texto y (c) por último las investigaciones en las que se analiza cómo los libros de texto influyen sobre otros factores (Fan, 2013). De las tres categorías, la mayoría de trabajos se encuentran en la primera de ellas y pese a que se destaca la necesidad de realizar trabajos más allá de lo descriptivo se reconoce su importancia como un primer paso.

En el caso específico de España es posible hallar distintos trabajos en esta línea (p. e. Conejo y Ortega, 2014; González y Sierra, 2004). Concretamente para el caso de la derivada de una función se encuentra el trabajo de Aires y Esteves (2012) en el que analizan los problemas de optimización que se proponen en un libro del año 1974. El análisis se basa en las en cuatro fases de resolución de problemas propuestas por Polya; además, analiza la forma del enunciado, el contexto, el tipo de optimización y el tipo de resolución. Por otra parte, Conejo, Arce y Ortega (2014) analizan la justificación dada a las reglas de derivación en los libros de cuatro editoriales desde distintas legislaciones. Asimismo, Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017) comparan el concepto de derivada y contenidos relativos al cálculo diferencial en dos textos universitarios.

Ahora bien, tal como señala Fan (2013), dado que la investigación basada en libros de texto es algo relativamente reciente, aun no se dispone de un marco teórico unificado que especifique las herramientas disponibles. No obstante, la revisión de algunos trabajos realizados en esta línea permite identificar algunos marcos que han sido utilizados. Por ejemplo, para el caso particular del análisis de tareas en los libros de texto de Matemática, Brändström (2005) destaca el uso de la taxonomía de SOLO o la de Boom; la primera enfocada en clasificar respuestas dadas por los estudiantes, mientras que la segunda permite catalogar las tareas según lo que ésta pretende.

En nuestro caso, el marco teórico que utilizaremos para el análisis e interpretación de los datos será el desarrollado por Rico, Lupiáñez y Molina (2013) y Rico y Moreno (2016) que se denomina Análisis Didáctico. Este se estructura según cuatro tipos de análisis, cada uno con objeto de estudio

distinto, según las dimensiones del currículo de matemáticas. En el caso concreto de un contenido matemático escolar, se entiende como un método para estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación.

El primer método de análisis tiene como objeto el significado de los contenidos matemáticos escolares. El segundo contempla los aspectos cognitivos o de aprendizaje matemático escolar. El tercero se centra en las cuestiones relacionadas con la instrucción, su planificación e implementación. Por último, el análisis didáctico cuenta con un análisis de los aprendizajes logrados, es decir, de la evaluación. En el caso concreto de este trabajo, las tareas matemáticas escolares son uno de los organizadores del análisis de la instrucción escolar. Una de las partes primordiales del análisis de instrucción es el estudio y diseño de tareas, en particular, se ha de indagar en las variables de tarea, sus funciones y los distintos tipos existentes. Por tarea matemática escolar entendemos “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244).

Organizamos las variables propuestas por Moreno y Ramírez (2016) y Gómez y Romero (2015) para el análisis de las tareas en tres grandes bloques:

- Relacionadas con aspectos descriptivos de la tarea: la formulación de la tarea, el modo en que se presenta; los materiales y recursos necesarios; el tipo de agrupamiento, el cual indica cómo se dispondrán los alumnos; la situación de aprendizaje donde se propone la acción; y la temporalización, esto es, su duración estimada. Al tratarse de un análisis de libros de texto, para este trabajo nos centramos en la formulación y materiales.
- Relacionadas con aspectos de aprendizaje o cognitivos: esta categoría incluye la meta o finalidad, referida a la expectativa que se trabaja. Asimismo, podríamos considerar la variable complejidad de la tarea, pero la eliminamos a la vista de su desaparición en los nuevos marcos teóricos PISA (OCDE, 2016) y los problemas que planteó en anteriores trabajos (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).
- Relacionadas con el contenido matemático y su significado: utilizando el marco teórico basado en el significado de un concepto matemático escolar desarrollado por Rico (2012, 2013), Rico y Moreno (2016) o Fernández-Plaza, Castro-Rodríguez, Estrella, Martín-Fernández, Rico, Ruiz-Hidalgo y Vélchez-Marín (2016). El significado está determinado por tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso, este último incluye las situaciones y contextos en las que se involucra el contenido matemático. Por lo tanto, entendemos que en la matemática escolar comprender el significado de un concepto implica “conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (Rico, 2016, p. 94).

MARCO METODOLÓGICO

En el presente trabajo se consideraron los libros de texto de 1º de bachillerato de las editoriales Anaya (Colera, Oliveira, García, y Santaella, 2008), Edelvives (Cardona y Rey, 2015a, 2015b) y SM (Vizmanos, Hernández, Alcaide, Moreno y Serrano, 2008). La elección de estos se basa en una consulta realizada a algunos centros educativos de Granada sobre los libros de texto utilizados. Resultando ser estos tres los de mayor frecuencia.

De cada uno de los libros tomamos el capítulo en el que se introduce el concepto de derivada y analizamos tanto las tareas propuestas dentro del texto (conforme de desarrollan los contenidos),

como las incluidas en el apartado de ejercicios. En la tabla 1 se muestra el número de tareas e ítems analizadas. Entendiendo por ítem a cada uno de los apartados de la tarea, generalmente numerados o enlistados utilizando letras *a*), *b*), *c*)...

Tabla 1. Numero de tareas e ítems por libro de texto

Posición de la tarea	SM		Anaya		Edelvives	
	Tareas	Ítems	Tareas	Ítems	Tareas	Ítems
En el desarrollo del contenido	31	67	33	45	-	-
En un apartado específico de ejercicios	72	148	106	205	73	200
Total	102	215	139	250	73	200

En el caso de libro de la editorial Edelvives los ejercicios vienen en un libro aparte por lo que se analizó también el capítulo correspondiente. Así en total se analizaron 314 tareas equivalentes a 665 ítems. Para su respectivo análisis se empleó el análisis de contenido, mediante el cual se definió una serie de variables y categorías, el cual se detalla a continuación.

Análisis de contenido

Para Rico y Fernández-Cano (2013), el análisis de contenido es uno de los métodos más extendidos para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas y cualitativas en los contenidos de la comunicación; además, dicho análisis “se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas” (p. 11).

El análisis de contenido se efectúa por medio de la codificación que nos permite destacar las características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En nuestro caso, las unidades de información están constituidas por cada uno de los apartados independientes (o ítems) de cada tarea, considerada en su sentido en el que aparece en los libros de texto de ejercicio o actividad.

Sistema de categorías para el análisis

Basados en nuestro marco teórico contamos con algunas categorías iniciales de análisis; no obstante, mediante el análisis de contenido pudimos definir otras categorías de manera inductiva. Finalmente analizamos aspectos de la categoría descriptiva y de la relacionada con el significado.

De la categoría descriptiva:

- Estructura de la tarea (abierta/cerrada): Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta es la que involucra cierto grado de indeterminación en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas. Ponte (2004) señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones. Este tipo de tareas demandan que el estudiante indague sobre la temática para poder abordar el problema pues no basta con diseñar o emplear algún método de resolución. Por ejemplo, una tarea en la que se le solicite al alumno determinar los extremos relativos de una función que modela cierto fenómeno (hasta este punto sería una tarea cerrada) y que posteriormente se le pida comparar los resultados obtenidos con lo que señalan las estadísticas sobre dicho fenómeno para los últimos cinco años. Realizar esto requiere que el estudiante busque estos datos, luego, compare sus resultados y los interprete a la luz de lo investigado.
- Planteamiento de la tarea (directo/inverso): un último aspecto descriptivo que observamos en los ítems tiene que ver con un planteamiento directo o inverso de la tarea. Para Groestch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un

resultado, el cual es único. Por el contrario, en las tareas inversas, lo que se desconoce son los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o bien ser insolubles. Un ejemplo de tarea inversa es cuando se pide hallar una función cuya derivada sea tal, o cuando se dan ciertas condiciones y a partir de ellas se pide graficar.

- Materiales: en esta categoría analizaremos el material o recurso didáctico empleado para resolver la tarea. Aunque de antemano prevemos que la mayoría serán resueltos utilizando papel y lápiz, cabe la posibilidad de que el libro sugiera el uso de algún otro material.

De la categoría de significado:

- Sistemas de representación empleados en la formulación de la tarea: en este caso prestaremos atención a los distintos sistemas de representación que aparecen en la formulación de la tarea. Estos pueden ser: verbales, gráficos, numéricos, simbólicos y/o tabulares. Debemos aclarar que no consideraremos las representaciones verbales que por defecto aparecerán en una tarea escrita (redacción general), sino entenderemos el uso de representaciones verbales cuando estas hagan alusión a aspectos propios de la matemática. Además adelantamos que una tarea puede hacer uso de varios tipos de sistemas de representación.
- Situación: esta categoría nos permitirá agrupar las tareas según en la situación que se presentan. Estas pueden ser, atendiendo al marco teórico PISA (OCDE, 2016): personales (si se enmarcan en una situación cotidiana del estudiante), sociales (si se relacionan con actividades o aspectos de la sociedad como la contaminación, la pobreza...), laborales (si se relacionan con aspectos empresariales o de mercado) o científicas (si tienen que ver con situaciones presentadas en alguna ciencia).
- Contexto de la derivada: con base en nuestro marco teórico, tomamos en cuenta los distintos contextos matemáticos, funciones o necesidades a las que la derivada atiende en cada uno de los ítems de las tareas.
- Tipo de función involucrada: el tipo de función involucrada en la tarea es un factor que influye en la complejidad de la misma. Es por ello que en los casos en los que aplique nos detendremos a mirar la función que se involucra. Para ello, basados en el trabajo desarrollado por Jiménez (2017), consideraremos los siguientes rasgos de la función: polinómico, potencia de exponente negativo, radical, función algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, producto, cociente, composición de funciones, función a trozos y valor absoluto. De este modo, entenderemos como función simple a aquella que presente solo uno de los siguientes rasgos: polinomio, trigonométrico, trigonométrica inversa, logarítmico, exponencial o radical. De lo contrario será no simple con n rasgos. Asumiendo que aquellas funciones no simples conllevan un mayor nivel de dificultad.

RESULTADOS

A continuación detallamos los resultados obtenidos al analizar cada una de las tareas haciendo uso de las categorías descritas anteriormente. Presentamos los aspectos descriptivos de manera conjunta, mientras que los relativos al significado de manera individual.

En cuanto a los aspectos descriptivos de la tarea

Respecto a la *estructura de la tarea*, es decir, si su planteamiento era abierto o cerrado, predomina la tarea cerrada. De hecho, solo dos tareas planteadas por Anaya y una de las propuestas por

Edelvives pueden ser consideradas preguntas abiertas. Adicionalmente, el libro de SM propone al final un proyecto en el que se le pide al estudiante analizar ciertos datos y funciones respecto al Sida. Aquí el alumno debe buscar datos en internet además de hacer uso de otras herramientas gráficas para su solución. No obstante, en términos generales, este tipo de tareas no son usuales.

En cuanto a los *materiales*, la mayoría de tareas son propuestas para ser resueltas empleando papel y lápiz, de hecho solo en el libro SM se da la indicación de usar calculadora en 8 tareas. No obstante, en ese mismo libro se detectaron 3 ítems más que aunque no explicitan el uso de la calculadora, dado los valores numéricos con los que se trabaja, es probable que lo requieran.

Ahora bien, el libro de Edelvives dedica un par de páginas para explicar “paso a paso” cómo representar gráficamente una función, su derivada y la recta tangente a una curva haciendo uso tanto de GeoGebra como de Wiris. Posteriormente no propone tareas exclusivas para utilizar dichos software, pero en cada tarea de cálculo de derivadas plantea la sugerencia de comprobar los resultados empleando alguno de ellos.

Finalmente, en cuanto al planteamiento *inverso/directo*, predominan las tareas directas. En el caso de Anaya, solo 19 ítems son planteados de forma inversa, en SM solo 12 y en el libro de Edelvives únicamente 11.

En cuanto a los sistemas de representación

La mayoría de las tareas empleaban más de un sistema de representación en su formulación; en la figura 1 se presenta el porcentaje de ítems que empleaba cada uno de los sistemas de representación.

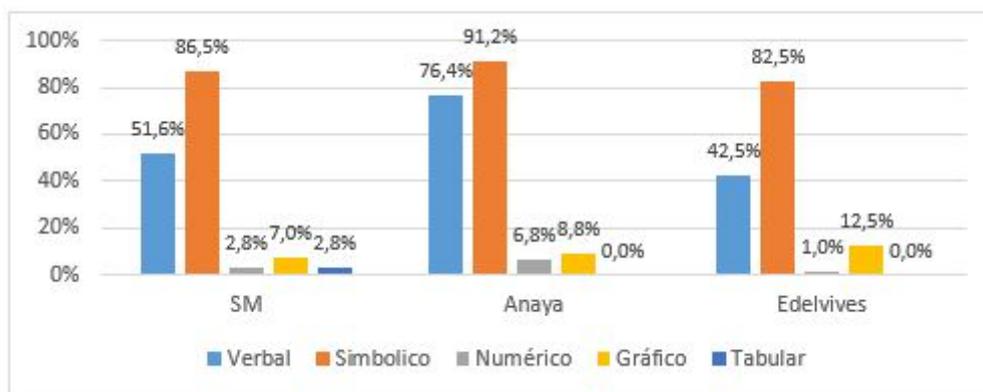


Figura 1. Sistemas de representación utilizados en cada ítem

En términos generales, se aprecia que el simbólico es el sistema de representación más utilizado. El verbal ocupa el segundo lugar aunque debe destacarse que la mayoría de veces este fue acompañado de la representación simbólica. Es importante señalar que adicionalmente en el libro SM y Edelvives se aprecian algunas tareas con ilustraciones cuya función es solo decorativa. En el libro de Edelvives 3 tareas incluyen una imagen alusiva a la situación, mientras que en el de SM 4 tareas usan este tipo de ilustración.

En cuanto a la situación de la tarea

En este caso predomina la situación matemática, desligándose la derivada de su aplicabilidad en el mundo real. En la tabla 2 se presenta el porcentaje de ítems en cada una de las situaciones descritas. Es importante mencionar que en el caso de ser científica, se especifica la rama a la que se refiere.

Tabla 2. Situación en la que se presentan las tareas

Porcentaje (%) de ítems en cada situación

Situación	SM	Anaya	Edelvives
Personal	-	-	3.5
Laboral	2.4	2	7
Social	1.4	0.4	2
Científica-Matemática	91	97.6	85.5
Científica-Física	5.2	-	2

Resulta interesante que pese a que los tres libros incluyen tareas en situaciones distintas a la matemática, estas ocupan un papel mucho menor, pues en ninguno de los casos suponen un porcentaje significativo.

En cuanto al contexto

Analizar el contexto de la tarea nos permite de cierta manera profundizar en el significado que cada uno de los libros transmite respecto a la derivada, poniéndose de manifiesto su utilidad o aplicabilidad. En la tabla 3 se muestra el porcentaje de veces que aparece cada uno de los contextos en los diferentes ítems.

Tabla 3. Contextos en los que se presentan las tareas

Contexto	Porcentaje (%) de ítems en cada contexto		
	SM	Anaya	Edelvives
Calcular TVM-TVI	4.6	5.2	5
Calcular la derivada en un punto	8.4	18	2
Determinar función derivada	41.4	27.2	56.5
Ecuación de recta tangente o normal	10.2	8.4	7.5
Hallar intervalos de monotonía	4.1	4.4	6
Hallar extremos relativos	8	10.8	6
Estudio y representación gráfica de funciones	-	17.2	-
Resolver problemas (optimización)	14	2.4	13.5
Geométrico	9.3	6.4	3.5

Creemos que los contextos son bastante claros; sin embargo, queremos señalar que en el contexto *geométrico* agrupamos aquellos ítems en los que se presentan distintas propiedades o resultados de la derivada para que sean analizados o interpretados desde la gráfica de una función.

Por otra parte, debe aclararse que el libro de Anaya incluía en su capítulo sobre la derivada la aplicación sobre el estudio y representación de funciones, mientras que los libros de las editoriales SM y Edelvives lo hacían en un capítulo aparte, los cuales para efectos de este trabajo no fueron considerados.

En términos generales, se aprecia que en los tres libros se presentan diversos contextos en los que se involucra la derivada; no obstante, tal como puede observarse su presencia en los libros de texto no es homogénea. Se puede ver claramente que en los tres casos el determinar la función derivada ocupa un papel predominante. La aplicación y manejo de las reglas de derivación es sin duda uno de los contenidos más reforzados en los tres casos. De hecho son muy pocas las tareas en las que se señala el uso de la definición de derivada.

En cuanto a la función involucrada

Un primer análisis permite ver cuál de los rasgos es más o menos frecuente en las tareas propuestas por los libros. En la tabla 4, presentamos el porcentaje de tareas que empleó cada uno de los rasgos.

Tabla 4. Rasgos de funciones presentes en las tareas

Rasgo	Porcentaje (%) de ítems en los que aparece		
	SM	Anaya	Edelvives

Polinómica	55.3	54.8	59
Trigonométrica	0.9	8	21
Trigonométrica inversa	-	2.4	6
Logarítmica	-	6	17.5
Exponencial	1.8	6.4	13
Exponente negativo	0.9	-	-
Radical	15.3	8.8	13
A tozos	1.8	-	1
Valor absoluto	0.4	-	-
Algebraica	13.4	24.4	9
Cociente	3.2	3.6	5
Producto	1.5	4.8	9
Composición	19	19.6	40.5

Cabe señalar que en el libro Edelvives dos tareas involucraban cónicas en su planteamiento. Estas se contabilizaron dentro del rasgo polinómico, por su similitud al derivarlas y operar con ellas; pero es un aspecto interesante que debe ser mencionado pues en los otros dos libros esto no se presentó.

En términos generales, destaca la frecuencia de la función polinómica en las tareas asignadas. Se puede observar que la función polinómica y la composición son los rasgos más frecuentes tanto en el libro de SM y Edelvives, mientras que en Anaya sobresalen la función polinómica y algebraica. Llama la atención; además, que en el libro de Edelvives se involucra bastante las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, las cuales tienen poca presencia en los otros dos libros.

Ahora bien, al clasificar las funciones como simples o no simples con n rasgos, los resultados fueron los que se muestran en la figura 2:

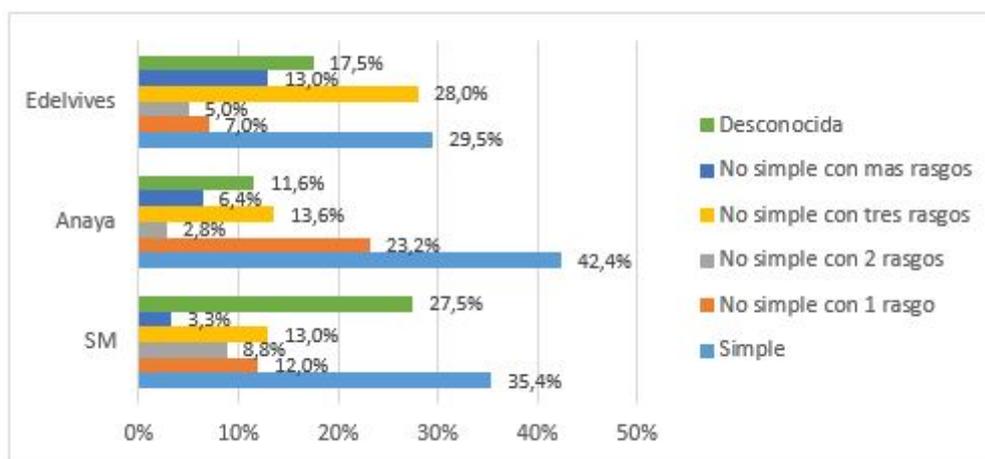


Figura 2. Tipo de función empleada en cada ítem

Se incorporó la opción *desconocida*, para aquellas tareas en las que o bien no se especificaba, se daba de forma gráfica o el alumno debía definirla. Sobresale en los tres casos la función simple.

CONCLUSIONES

Este trabajo nos permitió analizar algunos aspectos descriptivos y del significado en las tareas propuestas por tres libros de texto de 1º de bachillerato respecto al concepto de derivada de una función. Somos conscientes que los aspectos cognitivos constituyen un análisis importante (Brändström, 2005); sin embargo, por cuestión de espacio no pudo abordarse en esta comunicación.

Sin duda alguna, los resultados obtenidos llaman la atención. Se puede destacar el predominio o la tendencia de los tres libros de plantear tareas cerradas y directas, en las cuales pareciera que su objetivo principal es el dominio y manejo de procedimientos algorítmicos, pues la mayoría de las tareas requieren de un proceso bastante conocido para su resolución. Lo anterior es algo que requiere cuidado, ya que es importante plantear tareas que promuevan un aprendizaje más analítico y menos algorítmico o mecánico.

Otro aspecto que requiere reflexión es el desarrollo del concepto de derivada como un elemento meramente matemático. Así lo deja ver el hecho de que casi todas las tareas son planteadas dentro de una situación matemática y escasas veces dentro de un contexto de resolución de problemas. Esto es relevante pues no se promueve la visión de la matemática como una herramienta útil en el abordaje de situaciones reales, colocándola más bien como un conjunto de procesos mecánicos que se deben aprender.

A modo de conclusión, creemos que aún es necesario que los libros de texto involucren tareas que permitan al alumnado ver realmente la utilidad e importancia que tiene el concepto de derivada, asimismo, que exploten otras herramientas y recursos que permitan estudiar el significado de la derivada de manera más enriquecedora y haciendo uso de diversos sistemas de representación.

Finalmente, aunque lo aquí presentado es solo una parte del análisis que perseguimos y pese a que de momento es solo un trabajo descriptivo, creemos que estos primeros resultados son bastante interesantes tanto por los resultados mostrados como por lo novedoso del enfoque. Tal como lo señala Fan (2013) consideramos que es un primer paso para en el futuro poder indagar en el efecto que estos resultados pueden tener en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del Proyecto Nacional I+D+I EDU2015-70565-P, titulado “Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares” y el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). También agradecemos a la Universidad de Costa Rica por la beca otorgada a la autora Vargas, lo que le permitió trabajar en esta investigación

Referencias

- Aires, A. y Esteves, A. (2012). Las derivadas: análisis del libro de texto de la enseñanza secundaria en Portugal con sus primeras aplicaciones. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 29(3), 9–22.
- Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. y Presmeg, N. (2008). Students’ verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Tesis de licenciatura). Lulea University of Technology, Lulea, Sweden.
- Cardona, S. y Rey, J. (2015a). *Bachillerato I. Matemáticas. Práctica*. Zaragoza, España: Editorial Edelvives.
- Cardona, S. y Rey, J. (2015b). *Bachillerato I. Matemáticas. Teoría*. Zaragoza, España: Editorial Edelvives.
- Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Bachillerato I. Matemáticas I*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en los libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257–266). Salamanca, España: SEIEM.

- Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números*, 87, 5–23.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45, 765–777.
- Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vilchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 259-268). Málaga, España: SEIEM.
- Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 61-88). Madrid, España: Pirámide.
- González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389–408.
- Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematica*, 24(1), 89-94.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). México, D.F.: McGraw Hill.
- Herrera, M. E. (2017). *Análisis de las tareas de las pruebas de acceso a la universidad: Matemáticas II, 2016* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.
- Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280–306.
- Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.
- Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325–334). Málaga, España: SEIEM.
- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 243-257). Madrid, España: Pirámide.
- OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. París, Francia: OECD Publishing.
- Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, online.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25–34). Barcelona, España: Graó.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39–63.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11–27.
- Rico, L. (2016). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85–100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1–22). Granada, España: Comares.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Editorial Comares.
- Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato. Ciencias y tecnología*. Madrid, España: Ediciones SM.