INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXII

EDITORES:

Luis J. Rodríguez-Muñiz, Laura Muñiz-Rodríguez, Álvaro Aguilar-González, Pedro Alonso, Francisco Javier García García, Alicia Bruno

Gijón, 5-8 Septiembre 2018

Facultad de Comercio, Turismo y Ciencias Sociales "Jovellanos"

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática
Departamento de Matemáticas

gijón
Convention Bureau

SEIEM

SEIEM

ISBN: 978-84-DL

Investigación en Educación Matemática

XXII

Universidad de Oviedo

Investigación en Educación Matemática

XXII

Luis J. Rodríguez-Muñiz, Laura Muñiz-Rodríguez, Álvaro Aguilar-González,
Pedro Alonso, Francisco Javier García García y Alicia Bruno

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Gijón, 5, 6, 7 y 8 de septiembre de 2018

Universidad de Oviedo

Investigación en Educación Matemática XXII

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)

Dr. Luis J. Rodríguez Muñiz, Dra. Laura Muñiz-Rodríguez, Dr. Álvaro Aguilar-González,
Dr. Pedro Alonso, Dr. Francisco Javier García García, Dra. Alicia Bruno

Comité científico

Ediciones de la Universidad de Oviedo

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo

Campus de Humanidades. Edificio de Servicios. 33011 Oviedo (Asturias)

Tel. 985 10 95 03 Fax 985 10 95 07

http:// www.uniovi.es/publicaciones
servipub@uniovi.es

ISBN: 978-84-17445-11-9

ISSN: 1888-0762

DL AS 2636-2018

Cítese como:

L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (2018). Investigación en Educación Matemática XXII. Gijón: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la SEIEM.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Celebrados anteriormente veintiún simposios, resulta difícil añadir novedades a la organización de la vigésima segunda edición de un encuentro que goza de un alto grado de aceptación, como demuestra el número creciente de contribuciones y participantes. En la XXII edición del Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) la innovación se ha circunscrito al carácter internacional que se le ha dado a uno de los dos seminarios de investigación que se han organizado. Es una apuesta por la internacionalización de la Sociedad, tanto para reflejar en nuestro encuentro anual la investigación realizada fuera de nuestro ámbito natural, como para aumentar la proyección internacional de nuestra comunidad científica. Confiamos en que resulte un éxito, conscientes de que supone una apuesta, pero sabedores de que la inmensa mayoría de los socios han incorporado el inglés como herramienta de trabajo esencial en su quehacer diario. De este modo, se camina por la senda marcada por la Agenda para la acción 2018-2022, que recientemente aprobó la Sociedad.

El XXII Simposio de la SEIEM se ha celebrado del 5 al 8 de septiembre de 2018 en la Facultad de Comercio, Turismo y Ciencias Sociales "Jovellanos" de la Universidad de Oviedo. La Facultad se encuentra situada en el Campus de Gijón, con sede en un edificio emblemático de la región: la antigua Universidad Laboral, actualmente convertida en un centro que acoge e integra servicios docentes, culturales, de comunicación y de ocio. El apoyo del Ayuntamiento de Gijón, a través de la Oficina de Congresos Gijón Convention Bureau, ha resultado imprescindible para el desarrollo del Simposio y, desde estas líneas, queremos dejar patente el agradecimiento del Comité Organizador Local por esta ayuda material, técnica y profesional.

Aunque la Universidad de Oviedo había albergado con anterioridad algunas actividades organizadas por la SEIEM, es la primera vez que organiza un Simposio, por ello y porque el área de Didáctica de la Matemática es un área pequeña en la Universidad y ha estado sometida a una renovación casi total en los últimos años, pedimos disculpas por los posibles fallos que se hayan cometido en la organización. Nos gustaría, asimismo, agradecer la confianza que la SEIEM y, en particular, la Junta Directiva de la Sociedad (tanto la actual como la saliente) ha depositado en nosotros para coordinar los esfuerzos organizativos en este Simposio, permitiéndonos personalizar en las figuras de la presidenta Maite González Astudillo (Universidad de Salamanca) y del anterior presidente José Carrillo (Universidad de Huelva).

Además de las ponencias relativas a dos seminarios de investigación, de las que hablaremos a continuación, constituyen este volumen un total de 50 comunicaciones y 65 pósteres, lo que supone un importante incremento respecto a la anterior edición y da muestra de la vitalidad que está ganando el área de conocimiento a nivel nacional. Este aumento se ha hecho sentir también en el número de propuestas inicialmente enviadas para su consideración (75 para comunicaciones y 79 para pósteres), y da idea de la dificultad y de la cantidad de investigadores necesarios para realizar las tareas de revisión por pares. También aquí queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a todas las personas que han participado este proceso de evaluación, por lo general poco grato y escasamente reconocido en nuestra profesión, pero imprescindible para dotar de calidad la investigación que realizamos.

De modo particular, nos gustaría agradecer a los coordinadores del Comité Científico, Francisco Javier García García (Universidad de Jaén) y Alicia Bruno (Universidad de La Laguna), por su ingente labor y su disponibilidad prácticamente inmediata a la hora de resolver las dudas e inconvenientes que un trabajo tan arduo ha generado. Asimismo, los coordinadores de los distintos seminarios de investigación, la sesión de formación y docencia y la sesión de jóvenes investigadores han realizado una diligente labor que contribuye a que este volumen pueda estar realizado.

La sesión para jóvenes investigadores está ya consolidada como antesala del Simposio propiamente dicho. Este año ha contado con dos partes bien diferenciadas. En la primera de ellas, Miguel Ángel Montes (Universidad de Huelva) y Pere Ivars (Universidad de Alicante) han dirigido una sesión de trabajo grupal, mientras que en la segunda parte Matías Arce (Universidad de Valladolid) ha moderado una mesa redonda con editores de las revistas españolas especializadas en la publicación de investigaciones sobre educación matemática.

La sesión sobre formación y docencia universitaria, que se inició en el XXI Simposio, celebrado en Zaragoza, ha tenido continuidad en el presente año. Fue coordinada por el Comité Científico y llevada a cabo por Pablo Flores (Universidad de Granada). Se centró en el trabajo fin de máster, cuestión de actualidad mediática en los últimos tiempos, aunque por motivos opuestos a los que hemos tenido ocasión de comprobar. El Dr. Flores ha subrayado la importancia que este trabajo tiene en la formación como docente de matemáticas para Educación Secundaria.

El primero de los seminarios de investigación, coordinado por Ceneida Fernández (Universidad de Alicante), versó sobre "Conocimiento y competencia docente: Estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas". En él participaron cuatro ponentes: Vicenç Font (Universitat de Barcelona), Salvador Llinares (Universidad de Alicante), Luis Carlos Contreras (Universidad de Huelva) y Edelmira Badillo (Universitat Autònoma de Barcelona), quienes aportaron diferentes perspectivas teóricas respecto a este tema de investigación. El segundo seminario de investigación es, como se señaló arriba, el que introduce la novedad de los ponentes internacionales en los Simposios de la Sociedad. Coordinado por Francisco Javier García García (Universidad de Jaén), contó con la participación de Michiel Doorman (Universiteit Utrecht) y de Geoff Wake (University of Nottingham), y se denominó "International perspectives on design-oriented research in mathematics education".

Las comunicaciones se desarrollaron en 3 bloques, albergando hasta 6 sesiones paralelas, y los pósteres, dado el elevado número de propuestas recibidas, se distribuyeron en sendas sesiones, celebradas los días 6 y 7 de septiembre. Además, como es tradicional, se reunieron los 8 grupos de investigación reconocidos en la Sociedad: Conocimiento y desarrollo profesional del profesor, Investigación en educación matemática infantil, Didáctica de la matemática como disciplina científica, Historia de las matemáticas y de la educación matemática, Pensamiento numérico y álgebra, Didáctica del análisis, Aprendizaje de la geometría, y Didáctica de la estadística, la probabilidad y la combinatoria.

No podemos finalizar esta breve presentación sin mencionar a los patrocinadores del Simposio, además de la propia SEIEM: el Ayuntamiento de Gijón y la Universidad de Oviedo (a través del Vicerrectorado de Investigación y de los Departamentos de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática y de Matemáticas), a cuyos responsables hacemos llegar nuestro agradecimiento por su colaboración. A título personal, como Coordinador local de este XXII Simposio, quiero mencionar a las personas sin cuyo impulso, trabajo, dedicación y desvelos no habría sido posible abordar esta tarea: mis compañeros del Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática Álvaro Aguilar-González, Marlén Alonso-Castaño, Itzíar García-Honrado, Mª Esther Lorenzo, Laura Muñiz-Rodríguez y Ana Belén Ramos-Guajardo. Y, especialmente, a mi compañero Pedro Alonso, del Departamento de Matemáticas, apoyo constante e incondicional en los últimos años.

Confiamos en que los trabajos recogidos en este volumen sigan estimulando la curiosidad intelectual de los investigadores en educación matemática y consoliden el crecimiento de esta comunidad científica.

Gijón, septiembre de 2018

Luis J. Rodríguez Muñiz

Coordinador Local del XXII Simposio de la SEIEM

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I. CONOCIMIENTO Y COMPETENCIA DOCENTE: ESTABLECIENDO RELACIONES ENTRE PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Coordinadora:

Ceneidad Fernández (Universidad de Alicante)

Conocimiento y competenca docente: Estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas

Ponentes:

Vicenç Font (Universidad de Barcelona)

Análisis de una narrativa desde el modelo CCDM

Salvador Llinares (Universidad de Alicante)

Escribir narrativas: Dela experiencia de observar al desarrollo de competencia docentes

Luis Carlos Contreras (Universidad de Huelva)

Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa

Edelmira Badillo (Universidad Autónoma de Barcelona)

Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: Análisis del conocimiento y/o competencia docente

CONOCIMIENTO Y COMPETENCIA DOCENTE: ESTABLECIENDO RELACIONES ENTRE PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Knowledge and teaching competence: Establishing relationships between theoretical perspectives

Fernández, C.[a]

[a]Universidad de Alicante

Mirando atrás, y haciendo un recorrido por los seminarios de investigación con foco el profesor, en el primer simposio de la SEIEM celebrado en Zamora en 1997 se presentó el seminario “Profesor de matemáticas y contexto de investigación. ¿Cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Contextos y líneas”. El foco de este seminario fue caracterizar la idea de conocimiento de contenido matemático desde la perspectiva de la enseñanza y su relación con el conocimiento de contenido didáctico (Rico y Sierra, 1998). Siete años después, en el VIII Simposio de la SEIEM celebrado en A Coruña, también hubo un espacio de reflexión centrado en el profesor. En este seminario de investigación titulado “Investigación sobre formación de profesores” los trabajos se trasladaron hacia otros focos: la influencia del diseño de determinados procesos formativos en los que aprende el profesor, y la relación entre la actividad práctica de formar profesores y la actividad de investigar centrada en aspectos relativos al profesor (Llinares, 2004). De los trabajos presentados en este seminario se desprendían cuestiones dirigidas a clarificar cómo se estaba entendiendo el aprendizaje del profesor y qué es lo que se consideraban evidencias de dicho aprendizaje.

Recientemente, el foco ha derivado en el análisis del conocimiento y desarrollo de competencias profesionales en los programas de formación. Muestra de este nuevo interés es el “Seminario sobre la formación inicial del maestro como futuro profesor de matemáticas. Resultados del estudio TEDS-M de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achevement)” presentado en el XVIII Simposio de la SEIEM de Salamanca (Rico, 2014). Los trabajos aquí presentados se centraban en el conocimiento adquirido durante su formación inicial por los futuros profesores de matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria, y en particular, en la caracterización del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y la estructura de los planes de formación inicial.

Este interés por el conocimiento y competencias del maestro y profesor de matemáticas es reflejo de líneas de trabajo internacionales que revelan que aprender a ser profesor de matemáticas requiere del desarrollo de conocimientos y competencias profesionales (Ball, Phelps y Thames, 2008; Carrillo y Climent, 2011; Fernádez, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

Sin embargo, aunque la diversidad teórica es una fuente de enriquecimiento, un indicador de avance y madurez en el campo de investigación en Educación Matemática es la articulación de teorías (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010), y esto presenta un gran desafío. Algunos trabajos actuales en esta línea de investigación son la articulación entre el EOS y la Teoría de la Génesis Instrumental (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013), entre la teoría APOS y el EOS (Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016); o entre MKT y la competencia mirar profesionalmente (Thomas, Jong, Fisher y Schack, 2017). Desde esta perspectiva, desde el Grupo de Conocimiento y Desarrollo del Profesor de la SEIEM, se lanzó un reto para la Reunión Intermedia celebrada en enero de 2018 en Alicante:

Fernández, C. (2018). Conocimiento y competencia docente: Estableciendo relaciones entre perspectivas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 16-22). Gijón: SEIEM.

Analizar el grado de complementariedad y/o nexos comunes entre diferentes perspectivas teóricas (networking) que se centran en describir y explicar el conocimiento y procesos de aprendizaje de los estudiantes para maestro y profesores de matemáticas. Es en esta reunión intermedia donde surgió la idea del Seminario de este Simposio: Establecer relaciones entre diferentes perspectivas teóricas cuando se analizan unos mismos datos. En particular, cuando se analiza una narrativa escrita por una estudiante del Grado de maestro de Educación Primaria durante su periodo de prácticas de enseñanza, como una actividad formativa.

La narrativa está escrita por una estudiante del último curso del Grado en Educación Primaria durante su período de prácticas en el centro (nombre: Rosa), y en particular durante su período de observación en una clase de 1º de Educación Primaria. La instrucción que se les dio fue que tenían que identificar y describir una situación de enseñanza-aprendizaje en el aula en la que pensaran que se estuviera favoreciendo el desarrollo de algún aspecto de la competencia matemática. Se les proporcionó unas preguntas guía (Ivars, Fernández y Llinares, 2016; Tabla 1) para escribir la narrativa, que son las que va respondiendo Rosa cuando describe la práctica de una maestra. Estas preguntas guía están centradas en el desarrollo de las destrezas identificar, interpretar y decidir de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. La narrativa se muestra como anexo de esta presentación.

Tabla 1. Preguntas guía proporcionadas a Rosa para escribir la narrativa

Describe la situación	-¿Cuál es la tarea-actividad que están realizando los niños/niñas? Descríbela. Adjunta si es necesario la ficha/actividad del libro de texto o describe la explicación del docente. -¿Cuál/es son el objetivo/s de aprendizaje pretendidos en la actividad (qué es que se pretende conseguir con la realización de esta tarea-actividad)? -¿Cómo trabaja la actividad el/la maestro/a? ¿Cuáles son las respuestas del alumnado? -¿Qué dificultades presentan? (Puedes escribir ejemplos de las interacciones entre el alumnado y el/la maestro/a). -¿qué aspectos (recursos, dinámicas, estrategias, herramientas…) de la manera en la que se desarrolla la actividad parece que pueden favorecer el desarrollo de los objetivos de aprendizaje pretendidos?
Interpreta la situación	-¿Cómo crees que el alumnado ha alcanzado (o no) los objetivos de aprendizaje propuestos por el/la maestro/a? Proporciona algún tipo de evidencias que te permita justificar tu respuesta. -¿Qué comprende el alumnado de los conceptos matemáticos implicados? Muestra evidencias de esa comprensión -¿Qué dificultades parece que ha tenido el alumnado? Muestra evidencias de esas dificultades. ¿A qué pueden ser debidas esas dificultades?
Completa la situación	-Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que ha alcanzado el objetivo pueda seguir avanzando en su comprensión y/o consolide su aprendizaje. Justifica tu modificación. -Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que haya tenido dificultades para alcanzar el objetivo de aprendizaje previsto lo pueda alcanzar. Justifica tu modificación.

El Seminario está estructurado en cuatro ponencias. Las tres primeras ponencias analizan la narrativa de Rosa desde tres perspectivas teóricas con el objetivo de responder a la pregunta:

- ¿De qué manera las diferentes perspectivas teóricas permiten obtener información sobre el conocimiento y la competencia docente que ponen en juego los estudiantes para maestro cuando describen la práctica de una maestra?

En la primera ponencia, Vicenç Font de la Universitat de Barcelona, Adriana Breda de la Universidad Nacional de Educación de Ecuador, Belen Giacomone y Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada hacen un análisis de la narrativa de Rosa desde el modelo de

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM). En la segunda ponencia, Salvador Llinares de la Universidad de Alicante realiza el análisis desde la Mirada Profesional. En la tercera ponencia, Luis Carlos Contreras, José Carrillo y Nuria Climent de la Universidad de Huelva llevan a cabo el análisis desde el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de matemáticas (MTSK). Finalmente, en la cuarta ponencia Edelmira Badillo de la Universitat Autònoma de Barcelona y Ceneida Fernández de la Universidad de Alicante presentan un análisis de nexos entre las tres perspectivas teóricas que han abordado el análisis de la narrativa de Rosa discutiendo oportunidades que emergen de la relación entre estas.

Deseamos que el seminario cumpla con las expectativas generadas por los asistentes, que promueva un debate rico sobre el networking y la articulación entre diferentes perspectivas teóricas y que suscite interés a seguir profundizando en diferentes aspectos de los temas abordados. Para concluir esta presentación, agradecer a la Junta Directiva de la SEIEM la invitación a coordinar este seminario y, a los compañeros/as que han participado por su trabajo y dedicación.

Referencias

Ball, D. L., Phelps, G. C. y Thames, M. H. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). New York: Springer.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM*, *43*(6), 915-926.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 23-49.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics, 91*(1), 107-122.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 63-83.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Las narrativas y el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. *La matemática e la sua didattica, 24*(1-2), 79-96.

Jacobs, V. A., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*, 169-202.

Llinares, S. (2014). Aprendizaje del profesor y estrategias de formación. Características de una agenda de investigación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*. A Coruña: SEIEM.

Rico, L. (2014). Seminario de Investigación: La formación inicial del maestro como futuro profesor de matemáticas. Resultados del estudio TEDS-M de la IEA. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII.* Salamanca: SEIEM.

Rico, L. y Sierra, M. (1998). *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Granada: SEIEM.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H. y Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), 3-25.

Anexo. Narrativa de Rosa

a. Describe la situación

- ¿Cuál es la tarea-actividad que están realizando los niños/niñas? Descríbela. Adjunta si es necesario la ficha/actividad del libro de texto o describe la explicación del docente.

Cada niño tiene una ficha con los números hasta el 100 similar a la que se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Asimismo, en la pizarra hay otra tabla pero de mayor dimensión. Para la realización de la actividad, en primer lugar, el alumnado, haciendo uso de su tabla, cuenta cuántos números hay entre otros dos, respondiendo a preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b?* Seguidamente, resuelve restas sin llevar en la pizarra, pudiendo utilizar la tabla de la pizarra usando la estrategia de conteo que previamente han practicado para comprobar sus respuestas.

-¿Cuál/es son el objetivo/s de aprendizaje pretendidos en la actividad (qué es que se pretende conseguir con la realización de esta tarea-actividad)?

- Asimilar el procedimiento de conteo para realizar restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando.
- Resolver adecuadamente operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar).
- Utilizar la estrategia del conteo.
- Reconocer los números hasta el 100

- ¿Qué contenido/s se trabajan en la actividad?

- a+__=b como sinónimo de a-b.
- Operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar).
- Utilización de la estrategia del conteo.
- Números hasta el 100.
- Serie numérica.
- Identificación del valor posicional de las cifras y números de la resta.

-¿Cómo trabaja la actividad el/la maestro/a? ¿Cuáles son las respuestas del alumnado? ¿Qué dificultades presentan? (Puedes escribir ejemplos de las interacciones entre el alumnado y el/la maestro/a).

La actividad se divide en dos partes. En la primera de ellas, la profesora pregunta a los alumnos cuánto le falta a un número para llegar a otro, para lo cual, los alumnos, haciendo uso de su ficha, han de poner el dedo índice sobre el primer número mencionado y contar el número de "saltos" que dan hasta llegar al otro número. Por ejemplo, *¿Cuánto le falta al 5 para llegar al 9?* Los niños ponen entonces su dedo sobre el número 5 y van contando saltos hasta llegar al 9.

Algunos alumnos muestran dificultades en esta parte de la actividad, bien por no reconocer los números que dice la maestra (por ejemplo, una alumna confunde el 13 con el 30), no tener asentado el conteo o realizar el procedimiento contando, en lugar de los saltos entre los dos números dictados por la maestra, los números que hay entre estos dos (ej. *del 5 al 9 hay tres porque entre estos dos números hay uno (6), dos (7) y tres (8)*), o bien, comenzar a contar desde el primer número incluyéndolo (ej. *del 5 al 9 hay cinco porque cuento uno (5), dos (6), tres (7), cuatro (8) y cinco (9)*). Para solventar estos errores, la profesora pide al niño que coloque su dedo sobre el número que le diga y que cuente los movimientos que hace hasta llegar al otro número. En el caso de que el niño continúe sin hacerlo correctamente, la maestra coloca el dedo del niño sobre el número que le dice y a continuación, va moviendo con él el dedo contando hasta llegar al segundo número.

Una vez realizada esta parte de la actividad, la profesora plantea una serie de restas sin llevar en la pizarra que los alumnos han de resolver. Para resolverlas, los niños han de contar primero cuántos números le faltan al número de unidades del sustraendo para llegar al número de unidades del minuendo y luego, contar cuántos números le faltan al número de decenas del sustraendo para llegar al número de decenas del minuendo, pudiendo utilizar la tabla que tienen a su disposición en la pizarra.

- ¿qué aspectos (recursos, dinámicas, estrategias, herramientas…) de la manera en la que se desarrolla la actividad parece que pueden favorecer el desarrollo de los objetivos de aprendizaje pretendidos?

El uso previo de la ficha ayuda a que los niños entiendan que para restar pueden contar cuánto le falta a un número para llegar a otro. Asimismo, la repetición de preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b?* ayuda a que el niño identifique a+__=b como sinónimo de a-b=__.

b. Interpreta la situación

-¿Cómo crees que el alumnado ha alcanzado (o no) los objetivos de aprendizaje propuestos por el/la maestro/a? Proporciona algún tipo de evidencias que te permita justificar tu respuesta.

En la mayoría de casos los alumnos sí alcanzaron los objetivos propuestos. Por ejemplo, al salir a la pizarra y realizar 54-31, un alumno dijo *del 1 al cuatro van uno, dos y tres saltos, así que pongo 3 y del 3 al 5 van uno y dos saltos, así que pongo 2.* No obstante, otros alumnos tuvieron mayores dificultades y no lograron realizar las restas por no efectuar el procedimiento de conteo correctamente dado a que no reconocían algunos números de la serie numérica.

-¿Qué comprende el alumnado de los conceptos matemáticos implicados? Muestra evidencias de esa comprensión.

Al ser capaces de realizar el procedimiento de conteo, los niños demostraron conocer la serie numérica y números hasta el 100. Por otro lado, aquellos que fueron capaces de resolver correctamente las restas de la pizarra demostraron haber comprendido el valor posicional de las cifras y números de la resta y el significado de sustracción.

-¿Qué dificultades parece que ha tenido el alumnado? Muestra evidencias de esas dificultades. -¿A qué pueden ser debidas esas dificultades?

Algunos niños aún no conocen toda la serie numérica hasta el 100, por lo que al preguntarles la profesora: *¿Cuántos van del 13 al 17?*, por ejemplo, confundían el 13 con el 30 y no sabían cómo hacerlo. Otros, no realizaron correctamente el procedimiento de conteo por tener en cuenta únicamente los números intermedios entre los dos dados o contar todos los números, incluidos los dos dados.

c. Completa la situación

-Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que ha alcanzado el objetivo pueda seguir avanzando en su comprensión y/o consolide su aprendizaje. Justifica tu modificación.

Una vez los niños hayan asentado el procedimiento para realizar operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevada), podría utilizarse el mismo procedimiento para realizar restas con llevada. Si bien, para ello el alumnado deberá reconocer que los números están formados por decenas y unidades (números de dos cifras), por lo que antes de ello trabajaría las descomposiciones canónicas con los bloques multibase.

-Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/la que haya tenido dificultades para alcanzar el objetivo de aprendizaje previsto lo pueda alcanzar. Justifica tu modificación.

En primer lugar, para aquellos alumnos que presentan dificultades en el reconocimiento y el recitado de los números hasta el 100, considero que lo primordial sería, en primer lugar, trabajar dichos aspectos. Para ello, llevaría a cabo la tarea planteada por la maestra primero con números hasta el 10, a continuación hasta el 20, luego hasta el 30...

Por otra parte, para aquellos que aun siendo capaces de reconocer los números hasta el

100 y recitar de manera ordenada la serie numérica no han podido llevar a cabo la actividad de manera adecuada, considero que podrían utilizarse materiales manipulativos, como por ejemplo, las regletas. Empezaría primero por números de una sola cifra. Por ejemplo, para resolver 5-3 o 5-__= 3, en primer lugar, cogería la regleta del cinco. Seguidamente, con regletas de uno, primero les haría hacer que comprueben que el 5 está formado por cinco unidades. Luego, comprobarían lo mismo con la regleta del dos. A continuación, colocarían la regleta del dos sobre la del cinco y, con regletas de uno, contarían cuántas necesitan para llegar a cinco, o bien, buscarían qué regleta necesitan para llegar a 5. Luego, lo haría con números de una decena, por ejemplo, 18-9 o 18-__=9. Para ello, utilizaría una regleta de 10 y una de 8, colocadas una al lado de la otra formando el número 18. Después, pondrían la de 9 encima y buscarían qué regleta necesitan para tener 18.

ANÁLISIS DE NARRATIVAS DE FUTUROS PROFESORES CON EL MODELO DE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS (CCDM)

Prospective teachers' narrative analysis using the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences model (DMKC)

Font, V.[a], Breda, A.[b], Giacomone, B.[c] y Godino, J. D.[c]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidad Nacional de Educación de Ecuador, [c]Universidad de Granada

Resumen

El sistema de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas propuesto en el modelo CCDM se aplica al análisis de una narrativa para identificar los conocimientos y competencias de la futura maestra que la ha elaborado. También se presenta una herramienta, denominada Registro Tabular del modelo CCDM, que sintetiza el sistema de categorías y subcategorías de dicho modelo, y se aplica para valorar la pauta utilizada para guiar la elaboración de la narrativa e identificar posibles mejoras de la misma. Teniendo en cuenta las limitaciones de la pauta de evaluación usada y presumiblemente del proceso formativo implementado se revelan algunas carencias en los conocimientos y competencias profesionales del caso analizado.

Palabras clave: *conocimientos, competencias, profesor de matemáticas, narrativas, modelo CCDM, enfoque ontosemiótico.*

Abstract

The system of categories of knowledge and competences of the mathematics teacher in the DMKC model is applied to the analysis of a narrative, in order to identify the knowledge and competences of the pre-service teacher that wrote it. We also present a tool, called Tabular Register of the DMKC model, which synthesizes the system of categories and subcategories of this model, and it is applied to assess the guideline used to lead the writing of the narrative and identify possible improvements of it. Considering the limitations of the assessment guideline used and the presumable limitations of the implemented teacher's formative process, some lack of knowledge and professional competences are revealed in the case that we analyzed.

Keywords: *knowledge, competences, mathematics teacher, narratives, DMKC model, onto-semiotic approach.*

INTRODUCCIÓN

Para el diseño e implementación de programas de formación de profesores de matemáticas es necesario seleccionar un conjunto de conocimientos y competencias que se consideran necesarios para el desarrollo de la profesión docente (Chapman, 2014; Chapman y An, 2017; Potari y Ponte, 2017). Realizar esta selección no es una tarea fácil, ya que existen diversos modelos teóricos en el campo de investigación sobre formación de profesores que proponen diferentes sistemas de categorías de dichos conocimientos y competencias profesionales. Precisamente, el objetivo de este Seminario es mostrar y relacionar tres de dichos modelos mediante su aplicación al análisis de un caso: la narrativa de Rosa (anexada en la presentación). La cuestión específica que debemos abordar

Font, V., Breda, A., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 23-38). Gijón: SEIEM.

planteada por la Coordinadora del Seminario es esta: ¿De qué manera las diferentes perspectivas teóricas permiten obtener información sobre el conocimiento y la competencia docente que ponen en juego los estudiantes para maestro cuando describen la práctica de una maestra?

En este trabajo abordaremos esta cuestión aplicando el modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Breda, Font y Pino-Fan, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Font y Breda, 2017) del profesor de matemáticas basado en el sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). La realización de este trabajo ha llevado a la elaboración de una nueva herramienta, que denominamos Registro Tabular del modelo CCDM (RT-CCDM), mediante la cual se sintetizan el sistema de categorías y subcategorías de dicho modelo, y se aplica para valorar la pauta utilizada para guiar la elaboración de la narrativa.

Las herramientas teóricas del modelo CCDM permiten responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conocimientos y competencias docentes ponen en juego los profesores cuando describen, explican y valoran la práctica docente? Para responder a esta pregunta, las categorías teóricas del modelo CCDM permiten su descomposición en subpreguntas más específicas (que se explicitarán en la sección cuarta).

En la segunda sección se presenta un resumen del modelo CCDM y se presenta el Registro Tabular del modelo CCDM (RT-CCDM). En la tercera, se usa dicho registro tabular para valorar la pauta utilizada para realizar la observación de la clase (y considerar posibles mejoras). En la cuarta sección se hace un análisis de la narrativa con las categorías del modelo CCDM para inferir los conocimientos y competencia de la autora de la narrativa. Por último, se presentan unas consideraciones finales.

MODELO DE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MODELO CCDM)

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (CDM) (Godino, 2009; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). Una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo ha sido el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia. Además, en el marco del EOS, se han realizado investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Font, Breda y Sala, 2015; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016; Seckel y Font, 2015) las cuales han mostrado la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. Estas dos agendas de investigación han confluido generando el modelo llamado *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas* (modelo CCDM) (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Font y Breda, 2017).

La noción de competencia y competencias clave

El profesor de matemáticas debe estar capacitado para abordar problemas didácticos en la enseñanza de esta materia, para lo cual necesita una serie de competencias específicas. Aparecen así dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: 1) ¿cómo se entiende la noción de competencia? y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas? La competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, habilidades, disposiciones afectivas para la acción, herramientas de reflexión, etc. que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

Esta formulación de la competencia, para ser operativa, necesita una caracterización de su desarrollo (definición, niveles de desarrollo e indicadores). De acuerdo con Seckel y Font (2015), consideramos que la resolución de una tarea es el punto de partida para el desarrollo y/o evaluación de una competencia del profesor, dado que la tarea produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el profesor (o futuro profesor) moviliza habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica que intente solucionar el problema. Por otra parte, es de esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro), el cual se considera una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los indicadores de la competencia, que a su vez se asocia a un determinado nivel de desarrollo de la competencia.

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017): diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en la competencia de análisis e intervención didáctica.

Caracterización de la competencia de análisis e intervención didáctica

Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática – esta subcompetencia, en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), se descompone a su vez en dos (competencia de análisis de significados globales y competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas)–; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

Subcompetencia en el análisis de la actividad matemática

En Rubio (2012) se concluye que, si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos, no lo serán en la evaluación de competencias matemáticas. Dicho resultado nos señala una subcompetencia de la competencia de análisis e intervención didáctica que deben desarrollar los profesores de matemáticas: la competencia de análisis la actividad matemática. Este tipo análisis es importante en la formación de los profesores, pero también es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, en Stahnke, aSchueler y Roesken-Winter (2016) se realiza una revisión de la investigación empírica realizada sobre los profesores de matemáticas y se concluye que estas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos.

En el área de educación matemática no hay un paradigma que nos diga cómo se debe realizar el análisis de la actividad matemática. Desde el modelo CCDM se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Con estas nociones teóricas, cuando los significados son entendidos de manera pragmática en términos de prácticas, se puede responder en un primer momento a preguntas del tipo: ¿Cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos que se quieren enseñar? ¿Cómo se articulan entre sí? En un segundo momento se pueden analizar los objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permite comprender la progresión de los aprendizajes y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje

La noción de configuración didáctica se ha introducido en el EOS como herramienta para el análisis de las interacciones en los procesos de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006). Se trata de un constructo teórico para modelizar la articulación de las acciones del profesor y los alumnos en torno a una tarea y un contenido determinados (una configuración de objetos primarios y procesos) de enseñanza y aprendizaje, en donde el conocimiento emerge del propio proceso de interacción. El profesor de matemáticas debe tener competencia de diseño y gestión de configuraciones didácticas a fin y efecto de asegurar el aprendizaje de los estudiantes en un proceso de instrucción concreto.

Subcompetencia de análisis normativo

Los procesos de enseñanza y aprendizaje están apoyados y son dependientes de una trama compleja de normas y metanormas de distinto origen y naturaleza (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), cuyo reconocimiento explícito es necesario para poder comprender el desarrollo de los procesos de instrucción y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad. El profesor de matemáticas ha de desarrollar la *competencia de análisis normativo* de los procesos de instrucción matemática para responder a preguntas como las siguientes: ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas? ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para mejorar el aprendizaje? Etc.

Subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción

Para la valoración de procesos de instrucción, el EOS propone como herramienta esencial la noción de idoneidad didáctica. Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado la noción de idoneidad didáctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013) lleva a poder responder preguntas del tipo: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje implementado? ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de instrucción para incrementar su idoneidad didáctica en futuras implementaciones?

1. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Un proceso de instrucción logrará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular de forma coherente y sistémica, los seis criterios parciales de idoneidad siguientes, referidos a cada una de las seis facetas implicadas en dicho proceso: Idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas “buenas matemáticas”. Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.
2. Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.
3. Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
4. Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
5. Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6. Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, al entorno social, etc.

Para cada uno de estos criterios se propone un sistema de componentes e indicadores asociados que se pueden valorar en una escala. Se trata de un sistema de rúbricas que permite valorar (o autovalorar) de manera completa y equilibrada, los elementos que, en conjunto, conforman un proceso de instrucción idóneo en el área de matemáticas.

Conocimientos del profesor de matemáticas

El formador de profesores, para desarrollar en los procesos formativos las competencias profesionales requeridas ha de analizar las prácticas docentes que los profesores realizan para resolver las tareas profesionales propuestas por él y el conocimiento didáctico-matemático activado en ellas, de manera que pueda encontrar indicadores que justifiquen la asignación de grados de desarrollo de la competencia profesional que se pretende evaluar.

Existen diversos modelos respecto de los conocimientos que debería tener un profesor de matemáticas para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes (por ejemplo, Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En Pino-Fan, Assis y Castro (2015) se propone un modelo para caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) de los profesores, el cual considera, entre otros aspectos, los aportes y desarrollos de los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas, y los desarrollos teóricos y metodológicos del EOS. Así el modelo CDM (una parte del modelo CCDM) sugiere que el conocimiento del profesor se organiza en tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática.

La primera dimensión, matemática, refiere al conocimiento que permite a los profesores resolver problemas o tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que impartirán clase (conocimiento común), y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativos con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (conocimiento ampliado).

Los autores de los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas coinciden en que, además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimientos sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático. En este sentido, la dimensión didáctica del CDM propone seis subcategorías del conocimiento del profesor:

1. Faceta epistémica, que refiere al conocimiento especializado de la dimensión matemática (uso de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución de problemas y significados parciales de un objeto matemático), e incorpora nociones tales como conocer las matemáticas con profundidad y amplitud (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el “conocimiento especializado del contenido” (Hill, Ball y Schilling, 2008).

2. Faceta cognitiva, que refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (dificultades, errores, conflictos, aprendizaje, etc.).

3. Faceta afectiva, que refiere a los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes.

4. Faceta interaccional, conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (profesor-estudiantes, estudiante-estudiante, estudiante-recursos, etc.).

5. Faceta mediacional, conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza.

6. Faceta ecológica, conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes.

La tercera dimensión del CDM, la dimensión metadidáctica, se refiere al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica (Schön, 1983; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), que le permita al profesor valorar el proceso de instrucción y realizar un rediseño que, en futuras implementaciones, lo mejore. Las tres dimensiones descritas anteriormente están presentes en las diferentes fases del proceso de instrucción de un determinado contenido matemático: estudio preliminar, planificación, implementación y valoración (Pino-Fan, Godino y Font, 2018).

Competencia de análisis e intervención didáctica y su relación con el modelo de análisis de procesos de instrucción propuesto por el EOS

El EOS (Font, Planas y Godino, 2010), considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: 1) Identificación de prácticas matemáticas; 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) Identificación del sistema de normas y metanormas; y 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas hechas en un proceso de instrucción matemático. El segundo se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercer tipo de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas. Mientras que el cuarto estudia dicha trama. El quinto tipo se basa en los cuatro análisis previos y está orientado a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

El desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica permite a los profesores realizar estos tipos de análisis didáctico propuestos en el EOS y, a su vez, los dispositivos de formación para la enseñanza y aprendizaje de estos tipos de análisis didáctico contribuyen al desarrollo de dicha competencia y a la adquisición de los conocimientos del profesor contemplados en el modelo CCDM (Rubio, 2012; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo de análisis emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo. En los diferentes talleres implementados, con el objetivo acabado de comentar, se han observado las regularidades siguientes: 1) Los profesores o futuros profesores, cuando han de opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. 2) Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CMD) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM).3) Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva). 4) La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad. Estas tendencias se relacionan con el modelo CCDM ya que algunas de ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica. 5) Los niveles de profundidad del análisis realizado por los profesores varía desde análisis superficiales a expertos, en función de las herramientas teóricas usadas para realizarlos.

Registro Tabular del modelo CCDM (RT-CCDM)

En la Tabla 1 resumimos las categorías de conocimientos y competencias del modelo CCDM, distinguiendo cinco niveles e incluyendo en el primer nivel cinco supra categorías. La tabla está compuesta por 5 categorías de nivel 1: Tipo de análisis, Fases del proceso de estudio, Dimensiones del conocimiento, Profundidad de análisis y Competencias, las cuales se descomponen a su vez en sub-categorías de distintos niveles.

La primera supra categoría, *Tipo de análisis*, con tres valores o categorías de nivel 2 (descriptivo, explicativo y valorativo), ha sido sugerida por las regularidades observadas en los estudios empíricos comentados anteriormente. Dichas regularidades también han sugerido la supra categoría *Profundidad en el análisis*, con cuatro valores – Por ejemplo, para el caso de una narrativa, N0: Narrativa superficial (el lector no se hace una idea de lo que pasó en el episodio, N1: Narrativa que capta los elementos esenciales (el lector se hace una idea de lo que pasó en el episodio), N2: Análisis detallado de aspectos de la narrativa siguiendo un modelo de análisis (por ejemplo, si se hace una descripción de la actividad matemática se identifican algunas prácticas, objetos primarios y procesos), N3: Análisis experto de la narrativa de acuerdo con un modelo (por ejemplo, se hace una descripción pormenorizada de la actividad matemática se identifican exhaustivamente las prácticas, objetos primarios y procesos) –.

En este trabajo aplicaremos esta síntesis tabular de las diferentes categorías y subcategorías de conocimientos y competencias del modelo CCDM para analizar la pauta (conjunto de preguntas) dada a Rosa por los formadores para guiar la reflexión sobre su práctica.

ANÁLISIS DE LA PAUTA DE LA NARRATIVA

La estudiante para maestra, Rosa, elabora un informe sobre algunos aspectos de su experiencia durante las prácticas de enseñanza en un grupo de 1º de educación primaria, respondiendo a determinadas consignas (ver narrativa anexada en la presentación). La instrucción que se le dio fue que tenía que identificar y describir una situación de enseñanza-aprendizaje en el aula en la que pensara que se estuviera favoreciendo el desarrollo de algún aspecto de la competencia matemática. Se le proporcionaron unas preguntas guía para escribir la narrativa, que son las que va respondiendo Rosa en su narrativa.

El conjunto de dichas consignas se puede ver como un *instrumento* cuyas respuestas permiten inferir los conocimientos y competencias del profesor que las responde. Con el análisis detallado de las consignas propuestas se puede inferir qué parte de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas desarrolladas por los estudiantes, hasta ese momento de su formación, se quieren evaluar. A continuación, vamos a inferir estos conocimientos y competencias de la futura maestra que la pauta pretende hacer aflorar. Para ello, tendremos en cuenta el sistema de categorías del modelo CCDM recogido en la Tabla 1 – para acordar estas inferencias, cada uno de los cuatro autores analizó por separado la narrativa para, posteriormente, comparar y discutir con los otros autores las inferencias realizadas.

Las consignas de la pauta se agrupan en tres bloques en los que se pide, describir, interpretar y completar (en el sentido de diseñar nuevas y mejores situaciones). Hay 5 cuestiones sobre describir, 3 sobre interpretar y 2 sobre completar. Se ha analizado cada una de estas preguntas identificando de manera sistemática las categorías teóricas del CCDM implicadas, tratando de responder a las siguientes cuestiones: ¿La pauta incluye las diferentes categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas? ¿Cómo podrían refinarse las preguntas propuestas?

A continuación, por cuestiones de espacio, mostramos solo un ejemplo de este análisis para una pregunta de cada bloque y en la Tabla 1 (RT-CCDM) se pone el resultado de todas las consignas (en la casilla correspondiente se halla el número de la consigna en cursiva). Se enumeran de la manera siguiente: las cinco primeras correspondientes al bloque de la descripción comienzan por 1.1 y terminan con el 1.5. El bloque interpretar va de la 2.1 a la 2.3 y el bloque completar está formado por la 3.1 y la 3.2.

Ejemplo de consignas descriptivas

1.1. ¿Cuál es la tarea-actividad que están realizando los niños/niñas? Descríbela. Adjunta si es necesario la ficha/actividad del libro de texto o describe la explicación del docente.

Se ponen en juego las siguientes categorías del CCDM: 1) Tipo de análisis: descriptivo. 2) Fase del proceso de estudio: implementación. 3) Dimensiones del conocimiento; matemática: componente conocimiento común; Dimensión didáctico-matemática: conocimiento de la faceta epistémica (situaciones problemas/tareas; argumentación, explicación). 4) Profundidad del análisis: Nivel 1 (componente tareas/problemas). 5) Competencia: subcompetencia de análisis de la actividad matemática.

Ejemplo de consignas interpretativas

2.1. ¿Cómo crees que el alumnado ha alcanzado (o no) los objetivos de aprendizaje propuestos por el/la maestro/a? Proporciona algún tipo de evidencias que te permita justificar tu respuesta.

1) Tipo de análisis: explicativo. 2) Fase del proceso de estudio: implementación. 3) Dimensión del conocimiento; didáctico-matemática: faceta cognitiva (aprendizaje logrado); faceta epistémica (interviene mediante la justificación). 4) Profundidad del análisis: Nivel 1 (o 2 en función de las herramientas teóricas que use el alumno) (análisis de las prácticas; análisis de los objetos movilizados en las prácticas de los alumnos). 5 Competencia: subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas (describir con detalle la interacción; los conflictos y su resolución; los patrones de interacción; los errores, dificultades y resultados de aprendizaje).

Ejemplo de consignas interpretativas

2.1. ¿Cómo crees que el alumnado ha alcanzado (o no) los objetivos de aprendizaje propuestos por el/la maestro/a? Proporciona algún tipo de evidencias que te permita justificar tu respuesta.

1) Tipo de análisis: explicativo. 2) Fase del proceso de estudio: implementación. 3) Dimensión del conocimiento; didáctico-matemática: faceta cognitiva (aprendizaje logrado); faceta epistémica (interviene mediante la justificación). 4) Profundidad del análisis: Nivel 1 (o 2 en función de las herramientas teóricas que use el alumno) (análisis de las prácticas; análisis de los objetos movilizados en las prácticas de los alumnos). 5 Competencia: subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas (describir con detalle la interacción; los conflictos y su resolución; los patrones de interacción; los errores, dificultades y resultados de aprendizaje).

Ejemplo de consignas constructivas: Completa la situación

3.2. Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que haya tenido dificultades para alcanzar el objetivo de aprendizaje previsto lo pueda alcanzar. Justifica tu modificación.

1) Tipo de análisis: valorativo (Justifica la modificación: se trata de una valoración previa del diseño didáctico que permita tomar decisiones para el rediseño/construcción de nuevas secuencias didácticas). 2) Profundidad del análisis: Nivel 1 (o 2 en función de las herramientas teóricas que use el alumno) (análisis de tareas, prácticas requeridas y objetos matemáticos movilizados por los alumnos con dificultades de aprendizaje). 3) Fase del proceso de estudio: valoración y rediseño. 4) Dimensión del conocimiento: matemática: componente conocimiento común; didáctico-matemática: faceta epistémica (conocimiento necesario para el diseño de secuencias didácticas); faceta cognitiva (reconocimiento de dificultades de aprendizaje y adaptaciones curriculares). También pueden intervenir las otras facetas del conocimiento según cual sea la respuesta dada; meta-didáctico-matemática: criterios de idoneidad cognitiva (también pueden intervenir los otros criterios en función de la respuesta dada). 5) Competencia: subcompetencia de valoración de la idoneidad matemática (idoneidad cognitiva).

Tabla 1. Registro tabular del modelo CCDM

Categorías de nivel l (supra categoría)	Categorías de nivel 2	Categorías de nivel 3	Categorías de nivel 4	Categorías de nivel 5
Tipos de análisis	Descriptivo 1.1; 1.2; 1,3; 1.4; 1.5; 2.3			
	Explicativo; 1.2; 1.5; 2.1; 2.2; 2.3			
	Valorativo 3.1; 3.2			
Fases del proceso de estudio	Análisis a priori	Significados de referencia Revisión de investigaciones (dificultades, etc.)		
	Diseño	Orientaciones curriculares Consulta de libros de texto y otras propuestas Recursos materiales-temporales 1.2		
	Implementación 1,1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 2.1; 2.2; 2.3			
	Valoración 3.1; 3.2	Criterios de idoneidad		
	Rediseño 3.1; 3.2			
Dimensiones del conocimiento	Matemática	Conocimiento común: 1.1; 1,2;1.3; 1.4; 3.1; 3.2		
		Conocimiento ampliado		
	Didáctico-matemática	Epistémica 1.1; 1,2; 1.3; 1.4; 1.5; 2.1; 2.3; 3.1; 3.2		
		Ecológica		
		Cognitiva 1.4; 1.5; 2.1; 2.2; 2.3; 3.1; 3.2		
		Afectiva		
		Interaccional 1.4; 1.5		
		Mediacional 1.5		
	Meta-didáctico-matemática	Normas		
		Meta-normas		
		Criterios de idoneidad 3.1; 3.2	epistémica 3.1; 3.2	
			cognitiva 3.1; 3.2	
			afectiva	
			interaccional	
			mediacional	
			ecológica	
Profundidad del análisis	N1: todas (desde la 1.1 hasta la 3,2)			
	N2 – N3			

Competencias	Competencia matemática	Comunicar; Matematizar, Representar; Razonar y argumentar; Elaborar estrategias; Usar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones		
	Competencia de análisis e intervención didáctica	Análisis de la actividad matemática 1.1; 1.2; 1.3	Análisis de significados globales (prácticas)	
			Análisis de configuraciones (objetos)	
			Análisis de procesos	
		Gestión de interacciones 1.4; 1.5; 2.1; 2.2; 2.3	Tipo de interacción	Magistral; dialógica; adidáctica; personal;
			Conflictos	Epistémicos; cognitivos; interaccionales
		Análisis normativo	Origen	
			Momento	
			Faceta	
			Tipo y grado de coerción	
		Valoración idoneidad 3.1; 3.2	Epistémica 3.1	Errores; Ambigüedades; Riqueza de procesos; Representatividad
			Ecológica	Sociedad; escuela; currículo
			Cognitiva 3.1; 3.2	Conocimientos previos; adaptaciones curriculares; aprendizajes
			Afectiva	Actitudes; emociones; motivaciones/intereses
			Interaccional	Diálogo; interacción; negociación; autonomía
			Mediacional	Recursos; tiempo; número de alumnos

Los resultados del análisis se recogen en cursiva en la Tabla 1 de acuerdo con los códigos propuestos para cada consigna. La lectura global permite inferir que la pauta que ha guiado la narrativa de Rosa contempla, con diferente ponderación, los tres tipos de análisis que propone el modelo CCDM (descriptivo, explicativo y valorativo), que está focalizada en la fase de implementación, que persigue conseguir análisis que no sean superficiales (como mínimo de nivel 1), que busca movilizar, con distinta ponderación, diferentes tipos de conocimientos (común; faceta epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional; criterios de idoneidad) y que se focaliza en tres de las subcompetencias de la competencia de análisis e intervención didáctica (epistémica, gestión de las interacciones y valoración de la idoneidad didáctica). También permite observar que esta pauta no pretende claramente que se pongan en juego el conocimiento de la faceta afectiva ni ecológica, ni el conocimiento de la dimensión meta-didáctica relacionado con normas y meta normas, lo cual también se refleja en la falta de desarrollo de la subcompetencia de análisis normativo. Por tanto, una mejora que se podría proponer a la pauta es que incorporase preguntas para facilitar respuestas en los estudiantes que relacionen con estas facetas de conocimientos y con esta subcompetencia.

Ahora bien, una cosa es lo que pretende evaluar a priori la lista de consignas y otra diferente es lo que se puede evaluar una vez se han contestado dichas respuestas, ya que se puede dar el caso que aspectos no contemplados a priori se puedan a posteriori inferir de las respuestas dadas. Para ello el siguiente paso es realizar el análisis de las respuestas dadas por Rosa a las diferentes consignas.

ANÁLISIS DE LA NARRATIVA DE ROSA

En esta sección se aborda nuestra respuesta a la pregunta planteada en el Seminario: ¿De qué manera el modelo CCDM permite obtener información sobre el conocimiento y la competencia docente que ponen en juego los estudiantes para profesor cuando describen la práctica de una maestra?

Las categorías teóricas del modelo CCDM permiten descomponer esta pregunta general en cuestiones más específicas como son las siguientes: ¿Qué tipo de análisis didáctico (descriptivo, explicativo o valorativo) se está promoviendo con las consignas propuestas y qué tipo de análisis efectivamente realiza Rosa al responderlas? ¿Qué nivel de profundidad se puede asignar a cada consigna (y a la respuesta de Rosa)? ¿Sobre qué fase del proceso de instrucción focaliza la atención el análisis didáctico realizado por Rosa en las diferentes consignas? ¿Cuál de las subcompetencias de la competencia de análisis e intervención didáctica se puede evaluar en la respuesta de Rosa a las diferentes consignas y qué nivel de desarrollo de la competencia se le puede asignar? ¿Cuáles son los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa a las diferentes consignas, con qué dimensión y faceta del CDM se pueden asociar?

Primero vamos a responder estas preguntas para las tres primeras consignas. Con ellas se pretende la realización de un análisis descriptivo (aunque en la pregunta 2 hay que hacer una inferencia sobre los objetivos previstos en el diseño), que es el que de hecho realiza Rosa. El nivel de profundidad que se pretende es de nivel uno, ya que lo que se le pide que describa son las tareas (para lo cual no se necesita un modelo teórico de análisis), y el análisis realizado por Rosa efectivamente se puede considerar de nivel uno, ya que en su respuesta capta los elementos esenciales (el lector se hace una idea de lo que pasó en el episodio). La atención se focaliza sobre todo en la fase de implementación.

En sus respuestas a las consignas descriptivas Rosa muestra un cierto nivel de competencia de análisis de la actividad matemática, una de las subcompetencias de la competencia de análisis e intervención didáctica. En concreto el nivel 1, ya que realiza una narración de la actividad matemática que realizan los niños en la que capta los aspectos esenciales y permite al lector hacerse una idea de lo que sucedió en el episodio descrito (por ejemplo, en su respuesta a la consigna uno, el lector entiende que la tarea realizada por los alumnos corresponde al aprendizaje de la secuencia numérica hasta el 100 y la sustracción de números en dicho intervalo sin llevadas, usando la técnica del conteo). En la descripción de la actividad matemática que realizan los niños muestra cierta capacidad de *generalización* al enunciarla usando las variables *a* y *b* para referir a los términos de las restas y el procedimiento de conteo para su resolución (objetos matemáticos intensivos):

> "Para la realización de la actividad, en primer lugar, el alumnado, haciendo uso de su tabla, cuenta cuántos números hay entre otros dos, respondiendo a preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b?*"

Rosa responde a la pregunta 2 (sobre objetivos de aprendizaje) considerando que el resultado del aprendizaje del alumno consiste en una lista de prácticas (que se supone el alumno podría realizar en el futuro) (líneas 29-34 de la narrativa). La segunda y la tercera de sus respuestas a esta consigna son prácticas que consisten en aplicar correctamente los procedimientos de conteo y de resta sin llevadas. La última se refiere al uso correcto de las representaciones simbólicas de los números hasta el 100 y la primera puede considerarse en cierta manera equivalente a la tercera. De su respuesta a la consigna 2 se infiere que Rosa tiene un conocimiento matemático común (CMC) que le permite realizar las prácticas que comenta (aunque esta inferencia hay que matizarla a partir de sus respuestas posteriores y ponerla en cuestión, por ejemplo, en la respuesta a la consigna 3 tiene una confusión con la definición de resta).

Por otra parte, se infiere que Rosa tiene un conocimiento didáctico-matemático que le permite identificar aspectos epistémicos en la actividad realizada por el alumno (en este caso prácticas) (CFE). También se puede considerar que Rosa muestra conocimientos correspondientes a la faceta cognitiva del modelo CDM (CFC) ya que la consigna 2 se refiere a los aprendizajes de los alumnos pretendidos; si nos fijamos en la primera de sus respuestas vemos que está manejando la idea de conocimiento previo; y también a la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal). En su respuesta a la consigna 3 (sobre contenidos) Rosa señala como contenidos aspectos epistémicos que ha identificado en la actividad realizada por el alumno—que en la terminología del EOS se pueden considerar objetos primarios, por ejemplo, en 36 y 41 tenemos conceptos/definición y en la 37 y 38 procedimientos. Conoce el significado de la resta como 'sumando desconocido'; no obstante, escribe mal la definición ya que debería haber escrito b-a, puesto que a (sustraendo) debe ser menor que b (minuendo).

En nuestra opinión las respuestas a las consignas 2 y 3 son evidencias de que Rosa podría llegar al nivel 2 de desarrollo de la competencia de análisis de la actividad matemática, si se le hubiese enseñado una técnica de análisis de la actividad matemática en términos de prácticas, configuración de objetos primarios y de procesos, como la que se propone en el EOS.

Con relación a la respuesta a las consignas 4 y 5, el análisis sigue siendo sobre todo descriptivo (aunque también explicativo ya que en la pregunta cinco Rosa explica qué acciones ayudan a conseguir el aprendizaje de los alumnos) y la profundidad del análisis sigue siendo de nivel 1 y la atención continúa focalizada en la fase de implementación.

Con relación a las competencias, inferimos que hay un nivel 1 de desarrollo de la subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas (describir con detalle la interacción; los conflictos y su resolución; los patrones de interacción; los errores, dificultades y resultados de aprendizaje). Por otra parte, los conocimientos inferidos, sobre todo de su respuesta a la consigna 4, se relacionan sobre todo con la faceta epistémica (CFE), interaccional (CFI) y cognitiva (CFC):

CFE: Reconoce las tareas propuestas por la maestra y reconoce los procedimientos que regulan la práctica que las resuelven y los compara con los que usan los alumnos en su práctica.

CFI: Describe un patrón de interacción donde la maestra plantea preguntas en las que se ha de aplicar el procedimiento (el conteo), recibe las respuestas de los estudiantes, evalúa, realiza un feedback y después continúa el proceso de la clase explicando un nuevo procedimiento (la resta sin llevadas) (no hay suficiente información para inferir que Rosa considere la interacción que describe como un caso particular de un patrón de interacción).

Describe con detalle algunas de las interacciones comunicativas del tipo: El profesor ordena la ejecución de una acción/tarea (por ejemplo, la profesora pregunta a los alumnos cuánto le falta a un número para llegar a otro); aclaración del docente con explicación corta (por ejemplo, Para solventar estos errores, la profesora pide al niño que coloque su dedo sobre el número que le diga y que cuente los movimientos que hace hasta llegar al otro número), etc. (No hay suficiente información para inferir que Rosa considere estas interacciones; describe como un caso particular de un tipo de interacción comunicativa).

CFC: Reconoce errores de los alumnos (prácticas de los alumnos que no son válidas desde la perspectiva de la institución matemática). No se infiere que distinga entre error y dificultad. Explica los errores/dificultades de los alumnos por el hecho de no dominar los conocimientos previos (una explicación de tipo neo-conductista basada en las jerarquías de aprendizaje). En su respuesta a la consigna 5 abunda en esta manera de entender la comprensión ya que dice que la repetición de preguntas ayuda a la comprensión de los alumnos.

CFM. Reconoce recursos: plantillas de números (Tabla 100, llamada ficha), dedos de los alumnos…

También se pueden inferir conocimientos relacionados con la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal).

Con relación a la sexta consigna (donde se le pide una interpretación/justificación/explicación de la consecución de los objetivos de la segunda consigna) y a la séptima, el tipo de análisis pasa a ser más explicativo, con una profundidad de nivel 1 y continúa focalizado en la implementación. En ambas respuestas inferimos un nivel 1 de la subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas. Los conocimientos que se infieren a la sexta pregunta son los siguientes:

CFE: Rosa responde a la pregunta 2 considerando que el resultado del aprendizaje de los alumnos consiste en una lista de prácticas (que se supone el alumno podría realizar en el futuro). Dos de las respuestas son prácticas que consisten en aplicar correctamente los procedimientos de conteo y de resta sin llevadas, la tercera es el uso correcto de las representaciones simbólicas de los números hasta el 100.

CFC: Rosa considera que la mayoría de los alumnos aprendieron a realizar las prácticas previstas y pone como evidencia un ejemplo en el que un alumno realiza una resta sin llevadas y explica cómo la realizó. Además, explica que algunos alumnos no pudieron realizar la resta por falta de conocimiento de los conocimientos previos.

También se pueden inferir conocimientos relacionados con la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal).

Los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa a la séptima consigna son los siguientes:

CFC: Rosa da una respuesta en la que se infiere que su idea de comprensión está relacionada con una visión neo-conductista sobre las jerarquías de aprendizaje (si el alumno puede realizar la práctica que se ha planificado como objetivo, entonces el alumno comprende los conocimientos que son previos en la jerarquía de aprendizaje).

También se pueden inferir conocimientos relacionados con la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal).

En la octava consigna, Rosa repite básicamente lo que ya ha respondido en la consigna 4. En la novena y décima consignas se observa un cambio del tipo de análisis ya que ahora se enfoca más a la valoración y el rediseño (en el sentido que se pide la construcción o diseño de nuevas tareas que mejoren el episodio observado). El nivel de profundidad sigue siendo 1 y el foco pasa de la fase de implementación a las fases de valoración y rediseño. Con relación a la novena y décima consigna se infiere un nivel uno de desarrollo de la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica, ya que hace una valoración utilizando de manera implícita algún criterio de idoneidad didáctica y hace una propuesta de mejora con cierto sentido. En la consigna 9 no modifica la tarea enriqueciéndola, sigue con su idea de jerarquía de aprendizaje ya que piensa en una actividad que lógicamente sigue a la que se le pide que modifique, parece que no tiene criterios para la mejora de la tarea (que es lo que se le pide) (nivel cero de la competencia de análisis didáctico). Pero en su respuesta a la consigna 10 mejora la idoneidad cognitiva (conseguir más aprendizaje trabajando los conocimientos previos);

también mejora la idoneidad interaccional (diseña tareas más simples) y mejora la idoneidad de recursos (incorpora el uso de les regletas). Por su respuesta a la consigna 10 es por lo que se infiere un nivel 1 de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica.

Los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa a la novena y décima consignas son de tipo epistémico (CFE) dado que diseña tareas más simples, de tipo cognitivo (CFC) ya que manifiesta la importancia del dominio de los conocimientos previos para conseguir el aprendizaje de los estudiantes y de tipo mediacional (FCM) pues se infiere conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (las regletas y los bloques de base 10 en este caso). También se puede considerar que hay conocimientos de la faceta interaccional (CFI) (las tareas propuestas implican un cambio en la interacción, que se explica con detalle) y de la faceta ecológica (CFE) (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal).

La evaluación final global de las competencias y conocimientos que se infieren de la narrativa de Rosa es la siguiente: a) Nivel 1 en el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica (si se le hubiesen enseñado modelos de análisis con sus herramientas, es plausible suponer que podría llegar al nivel 2), b) Con relación a los conocimientos, se infiere conocimiento común de la resta (aunque se podría cuestionar por algunos errores que comete, por ejemplo al definir la resta como "sumando desconocido"); conocimiento matemático-didáctico relacionado con la faceta epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional y se puede suponer también la faceta ecológica. Hay que señalar que no se infieren conocimientos relacionados con la faceta emocional; no se manifiestan conocimientos de la dimensión normativa y sí un conocimiento implícito de algunos componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos presentado las características del modelo CCDM sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas y lo hemos aplicado para inferir, a partir de una narrativa, conocimientos y competencias de una futura maestra. Las respuestas a nuestras preguntas de investigación se infieren de los comentarios de la futura maestra en la narrativa que ha elaborado con las respuestas a las consignas que se le han propuesto para promover su desarrollo profesional. Mediante un análisis cualitativo, inferimos las categorías del modelo CCDM presentes en las respuestas de la futura maestra, en particular el nivel de desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica y los diferentes tipos de conocimientos del profesor.

Consideramos que el análisis que presentamos ha servido para mostrar la potencia del modelo CCDM que hemos presentado en la segunda sección de este trabajo bajo dos direcciones. Por una parte, este modelo resulta una herramienta potente para inferir conocimientos y competencias de la autora de la narrativa y, por otra parte, mediante la presentación de sus categorías en el registro tabular (RT-CCDM) se puede evaluar la pauta usada para organizar la narrativa, mostrando sus limitaciones y orientando posibles mejoras de la misma.

Una cuestión que queda abierta es ¿cuál es el uso que se puede y debe hacer del modelo CCDM y, más en general, de las herramientas del EOS en la formación de profesores? En nuestra opinión aquí se ha mostrado la utilidad del uso del modelo CCDM para inferir conocimientos y competencias de la futura maestra que ha elaborado la narrativa, pero queda abierta la cuestión de qué herramientas del modelo CCDM y del EOS convendría enseñar a los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, si se les hubiese enseñado la técnica de análisis de la actividad matemática en términos de prácticas, objetos y procesos – tal como se hizo en Rubio (2012), con futuros profesores de secundaria – quizás el nivel de la subcompetencia de análisis de la actividad matemática de Rosa sería mayor.

En esta línea de incorporar nociones del modelo CCDM en la formación de profesores hay que destacar que la noción *de idoneidad didáctica* (y su desglose en criterios, componentes e indicadores) pueden ser utilizados como una potente herramienta para organizar la reflexión del profesor y para desarrollar la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica − tal como se está haciendo en diferentes procesos de formación en España, Ecuador, Chile y Argentina (Breda, Font y Lima, 2015; Giménez; Font y Vanegas, 2013; Pochulu, Font y Rodriguez, 2016; Seckel, 2016).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

Referencias

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Chapman, O. y An, S. (2017). A survey of university-based programs that support in-service and pre-service mathematics teachers' change. *ZDM Mathematics Education*, *49*(2), 171-185.

Font, V., Breda, A. y Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional*, *11*(19), 17-34.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *44*, 1-19.

Giménez, J.; Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39,* 372-400.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Font, V. y Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *19*(1), 71-98.

Potari, D. y Ponte, J. P. (2017). Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge. En G. Kaiser (Ed.), *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World* (pp. 3-15). Springer, Cham.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona.

Seckel. M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional*, *11*(19), 55-75.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B.. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 1-27. doi: 10.1007/s11858-016-0775-y

ESCRIBIR NARRATIVAS. DE OBSERVAR A MIRAR PROFESIONALMENTE

Writing narratives. From observing to noticing

Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este trabajo es caracterizar la competencia docente "mirar profesionalmente" de una estudiante para maestra cuando escribe una narrativa durante el periodo de práctica de enseñanza. Para ello hemos asumido dos ideas. La primera, que la narrativa es la elaboración formal de la descripción de una situación incorporando explicaciones de lo que sucede en forma de razones ("argumento práctico") y que concluye con una intención de actuar de una determinada manera. La segunda, que la competencia docente "mirar profesionalmente" es un proceso de razonar sobre la enseñanza basado en el conocimiento, cuya calidad está determinada por la estructura del argumento práctico generado sobre la situación, con la intención de actuar de una determinada manera.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, aprendizaje del profesor, argumento práctico.*

Abstract

The goal of this research is to characterize a primary pre-service teacher's professional noticing when she writes a narrative during her teaching practices at school, as a part of her initial teacher education program. We have assumed two ideas. First, the narrative is a formal description of a situation that incorporates reasons about what is observed to explain it ("practical argument"), and concludes with an action or intention to act. Secondly, professional noticing is a knowledge-based reasoning process about teaching situations, whose relevance is determined by the structure of the practical argument generated about the situation, with the purpose to act.

Keywords: *practical argument, professional noticing, teacher learning.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado diferentes perspectivas teóricas que proporcionan referencias para caracterizar el conocimiento de los profesores, y cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar este conocimiento (Putman y Borko, 2000). La aparición de estas perspectivas viene motivada por el reconocimiento de la enseñanza de las matemáticas como una profesión que implica la existencia de un conocimiento específico y por la caracterización del uso de este conocimiento en situaciones prácticas. Este reconocimiento de la enseñanza de las matemáticas como una profesión implica tener en cuenta las diferencias entre los noveles y los expertos en la realización de la práctica de enseñar matemáticas y en cómo se desarrolla la competencia docente para llegar a ser un experto. Una de las características que define el proceso de llegar a ser un experto es la manera en la que un profesor identifica lo que es relevante en una situación de enseñanza y lo que conocen para interpretarlo (Llinares, 2012).

En particular, una de estas perspectivas teóricas se centra en cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar su conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para dotar de sentido a las situaciones de enseñanza que les permita actuar de manera pertinente. Para dar cuenta de la manera en la que los profesores y los estudiantes para profesor usan el conocimiento generado

Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón: SEIEM.

por las investigaciones para interpretar y actuar en las situaciones de enseñanza (o aprenden a usarlo), en nuestro grupo de investigación de la UA usamos el término “mirar profesionalmente” como una traducción del termino en ingles “professional noticing” (Fernández, Sánchez-matamoros, Valls y Callejo, 2018; Llinares, 2013: Mason, 1998, 2002; Schack, Fisher y Wilhelm, 2017;). Con este término se intenta recoger la manera en la que los profesores piensan sobre su práctica (con un énfasis en la práctica reflexiva) para comprenderla y mejorarla. Pero, además permite centrar la atención sobre la manera en la que los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para comprender las situaciones de enseñanza y actuar como profesores. De esta manera “mirar profesionalmente” consiste en usar el conocimiento para determinar lo que es relevante en una situación de enseñanza y establecer relaciones con ideas teóricas (conocimiento teórico) para apoyar las decisiones en relación a qué hacer a continuación (Sherin, 2007). El adjetivo “profesional” intenta subrayar el hecho del uso de manera consciente de un conocimiento teórico que permite a los profesores comprender las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

El objetivo de nuestro trabajo es comprender cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas cuando interpretan las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Es decir, cómo aprenden a discernir los detalles relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en una situación de enseñanza y los dotan de significado relacionándolos con principios teóricos para generar una explicación de los hechos que observan. Es decir, es una manera de razonar sobre las acciones en una situación de enseñanza en relación a las evidencias identificadas y el objetivo de aprendizaje pretendido. Este proceso de razonamiento tiene que ver con la manera de pensar sobre una situación de enseñanza de las matemáticas anticipándose a lo que puede suceder o analizando/reflexionando sobre lo que ya ha sucedido como una forma de relacionar las ideas y principios teóricos con la acción. Además, este proceso de razonamiento se puede dar tanto mirando la propia enseñanza como la enseñanza realizada por otro. Es decir, la idea es desarrollar formas de razonar sobre la enseñanza de las matemáticas (propia o de otro), explicando las acciones que la constituyen como una manera de definir acciones futuras. Para ello hay que reconocer el objetivo pretendido, dar razones de por qué se actúa de una determinada manera, y en qué medida las acciones observadas y las evidencias recogidas de las estrategias usadas por los estudiantes son evidencias de logro del objetivo pretendido. Este proceso de dar razones, de por qué las cosas están sucediendo de la manera en que lo están haciendo, es el que puede evidenciar el uso que se hace del conocimiento.

Caracterizar cómo los estudiantes para maestro usan el conocimiento de matemáticas y el generado por las investigaciones en didáctica de la matemática cuando están intentando comprender una situación de enseñanza para decidir cómo actuar, implica dar cuenta de sus procesos de razonamiento. Este doble aspecto de nuestro objetivo (qué se ha aprendido, y cómo se aprende) en relación a la competencia docente “mirar profesionalmente” determina los datos que deben ser analizados en una investigación.

Un antecedente en el estudio de cómo los profesores /estudiantes para profesor aprenden a razonar sobre una situación de enseñanza es el constructo “argumento práctico” (Fenstermacher y Richardson, 1993). El término “argumento” se refiere al contenido y a la estructura de la explicación generada sobre una situación de enseñanza en las que las evidencias se conectan de alguna manera con principios más generales. La manera en la que el conocimiento teórico es integrado con las evidencias en el proceso de dar razones por parte de los estudiantes para maestro al construir un argumento práctico refleja el desarrollo (aprendizaje) de la competencia docente “mirar profesionalmente” en un momento determinado.

Narrativas como ejemplos de argumentos prácticos. El caso de Rosa

En un contexto de prácticas de enseñanza en la que los estudiantes para maestro deben escribir una narrativa siguiendo unas instrucciones (Cuadro 1), escribir una narrativa debe ser entendido como la elaboración de un informe que sirve para explicar la enseñanza observada y justificar una propuesta de acción futura. El hecho de escribir sobre una situación de enseñanza permite "cosificar" una manera de mirar dicha situación convirtiéndola en un objeto de conocimiento (Wells, 2002; Wenger, 1998).

Que los estudiantes para maestro registren destalles que consideran relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje para pensar un poco más, es una manera de ayudar a generar abstracciones (teorizaciones) desde los hechos observados que puede favorecer la transición desde el *conocimiento-sobre* al *conocer-para* (Mason, 2002; denominó estas formas de conocer como *knowledge about* y *knowing-to*). Es decir, permitiendo la transición consciente por parte del estudiante para maestro de tener un conocimiento sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (el conocimiento teórico) a usar este conocimiento para interpretar una situación y justificar cómo continuar la enseñanza. Desde esta perspectiva, la tarea de escribir narrativas sobre momentos observados de la enseñanza de las matemáticas durante el periodo de prácticas puede ser entendida como un contexto para favorecer esta transición (Ivars, Fernández, 2018; Ivars, Fernández, Llinares, 2017). Para permitir esta transición, la tarea de escribir narrativas está estructurada en tres partes: describir detalles, interpretarlos, y decidir cómo seguir la enseñanza (Tabla 1 de la presentación del Seminario).

La primera parte, descripción, pretende ser un informe lo más detallado posible e imparcial de lo que es observado. La cantidad y riqueza de los detalles proporcionados pueden permitir tener más evidencias sobre las que razonar y establecer relaciones con principios teóricos. En el contexto de observar la enseñanza de otros, como el caso de la tarea propuesta a Rosa, nosotros podemos considerar las cuestiones de la tarea relativas a *Describir*, como generar un informe lo más exacto posible e imparcial de lo observado. Por ejemplo, que pueda ser reconocido en un momento determinado por los participantes. En relación a este punto, Mason (2002) indica que para reconocer e identificar un fenómeno que valga la pena analizar hay que aprender a proporcionar el informe de la situación lo más imparcialmente posible.

En la segunda parte, la tarea de escribir una narrativa pide al estudiante para maestro razonar sobre los hechos identificados infiriendo causas para explicar lo observado considerando diferentes aspectos. Esta parte se refiere a indagar en los detalles y relacionarlos intentando inferir lo que subyace a la semejanza de lo observado. Por ejemplo, intentando inferir una posible causa a comportamientos aparentemente semejantes de los estudiantes ante actividades diferentes. Es esta exigencia de la tarea de escribir la narrativa la que permite mostrar en qué medida el estudiante para maestro usa el conocimiento teórico para inferir la comprensión de los estudiantes o para generar interpretaciones de las causas por las que está sucediendo lo que observa. Es decir, en qué medida aparece el conocimiento teórico para responder a preguntas del tipo *¿Po qué…?* Refinar las conexiones establecidas entre las evidencias (los datos, las premisas) y las interpretaciones (las conclusiones) permite mejorar los argumentos y en cierta medida exige tener una descripción detallada de la situación. Esta parte de la tarea de escribir narrativas se puede considerar como la posibilidad de explicar por qué sucede lo que se observa y por tanto teorizar sobre lo observado. En el caso de un profesor describiendo su propia práctica Fenstermacher y Richardson (1993) denominan *elicitar* un argumento práctico al proceso de dar razones de por qué se ha actuado de esa manera.

La tercera parte intenta dar cuenta de cómo las decisiones sobre cómo continuar la enseñanza, se apoyan en las interpretaciones realizadas. De esta manera, las interpretaciones generadas en el apartado anterior sirven de referencia para apoyar las decisiones de acción vinculadas a los hechos observados y, por tanto, como una forma de justificar las futuras acciones.

Esta manera de estructurar las narrativas subraya la relación entre la descripción de lo observado con los objetivos pretendidos (lo que se está haciendo en el aula responde a un motivo) y la generación de interpretaciones. Sin embargo, la separación entre la descripción y la interpretación puesta de manifiesto por la forma en la que se plantean las cuestiones permite al lector (formador de maestros o investigador) estar en mejores condiciones de valorar de alguna manera la "calidad" del argumento práctico y en particular las características de la competencia docente del estudiante para maestro (en el momento de escribir la narrativa). En este sentido, escribir una narrativa es una manera de "fotografiar" la competencia docente "mirar profesionalmente" del estudiante para maestro en un momento determinado mediante el argumento práctico descrito en la narrativa.

Esta separación entre la descripción y la generación de argumentos prácticos más formales también ha sido señalada por Mason (2002) al separar lo que él denomina *account-of* y *account-for*. Así, un *account-of* es la descripción de la situación evitando las evaluaciones, explicaciones y juicios de valor. La riqueza en detalles de las descripciones de lo que el estudiante para maestro considera una situación que vale la pena analizar es por tanto el primer paso. La decisión que toma el estudiante para maestro (en nuestro caso Rosa) sobre qué aspecto de la enseñanza centrar la redacción de la narrativa también pone de manifiesto de manera implícita lo que Rosa considera relevante. Por otra parte, en la segunda parte de la narrativa (Razonar sobre lo observado: Inferir e interpretar) es un *account-for* ya que el estudiante para maestro puede introducir explicaciones, y razones de por qué pasa lo que está pasando. La forma en la que se articulan las evidencias (lo observado) y las explicaciones consideradas ambas como premisas y conclusiones en el argumento generado viene apoyado por los ítems del conocimiento teórico usados cómo *garantías* de apoyo a dicha relación (Toulmin, 2007). Las garantías en un argumento son las interpretaciones teóricas del hecho observado que permite al estudiante para maestro relacionar la premisa con la conclusión. Esta relación es lo que nos puede permitir generar criterios de calidad del argumento generado, y por tanto de las características de la competencia docente "mirar profesionalmente" del estudiante para maestro (Roig, Llinares y Penalva, 2011).

Componentes del argumento práctico como características de la competencia docente "mirar profesionalmente"

Estamos asumiendo que escribir narrativas, como una actividad durante las prácticas de enseñanza, es una manera de explicitar los argumentos prácticos de los estudiantes para maestro. Es decir, la descripción detallada de lo observado en un contexto permite estar en disposición de razonar sobre ello. La interpretación de lo observado, generada por el proceso de razonamiento, emerge al relacionarse lo observado con algunos ítems de conocimiento teórico. De ahí que se considera que la competencia docente "mirar profesionalmente" es un proceso de razonamiento basado en un conocimiento teórico (Sherin, 2007).

Por otra parte, la tarea de escribir narrativas propuesta a Rosa (la estudiante para maestro) y considerada como la forma de un argumento práctico permite identificar sus focos de atención (lo que identifica como relevante) y la manera en la que establece las conexiones entre las evidencias (los datos) y sus conclusiones (sus interpretaciones) y cómo usa la teoría para apoyar esta conexión (una manera de considerar la garantías en un argumento).

- **Análisis de la narrativa: Componentes del argumento práctico de Rosa**

Para el análisis consideramos la estructura de las cuestiones planteadas en la tarea de escribir una narrativa. En primer lugar, entendiendo las cuestiones relativas a la Descripción situando el foco de atención sobre el primer paso en el proceso de elicitar el argumento práctico (el de describir con detalle una situación). En segundo lugar, considerando las cuestiones sobre Interpretar como correspondiendo al proceso de construir el argumento práctico. Es decir, donde la descripción de los hechos (actividad) se vincula a la razón de actuar de esa manera (los objetivos pretendidos). Así, la construcción se entiende como el proceso por el cual se valoran los hechos en relación explicita a una teoría (conocimiento teórico) en el sentido de que el razonamiento del estudiante para maestro hace uso explícito del conocimiento teórico. Es decir, la manera en la que se vinculan los hechos observados a algún ítem de conocimiento teórico que permite "verlo" desde una perspectiva diferente (lo observado visto como un ejemplo particular de un principio teórico más general) en el sentido de proporcionar una razón teórica (significado) para los hechos observados. Finalmente, en tercer lugar, consideramos la acción o intención de actuar de una determinada manera como parte final del argumento práctico expresado en la narrativa.

- **La descripción de la situación y las evidencias: Identificando elementos relevantes**

El contexto de la narrativa es una clase de 1º de Educación Primaria. Rosa describe la actividad que están realizando los alumnos como respuesta a la primera cuestión planteada para organizar la narrativa. Rosa proporciona detalles sobre las estrategias que los estudiantes deben desarrollar (procedimientos de contar como un medio para resolver diferencias entre números de un digito) y el recurso que la maestra usa (tablero/ficha con números hasta el cien en filas de 10) y lo vincula al objetivo pretendido (aprender a usar procedimientos de contar para calcular restas sin llevar).

Cada niño tiene una ficha con los números hasta el 100 similar a la que se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Asimismo, en la pizarra hay otra tabla, pero de mayor dimensión. Para la realización de la actividad, en primer lugar, el alumnado, haciendo uso de su tabla, cuenta cuántos números hay entre otros dos, respondiendo a preguntas del tipo: <u>¿Cuánto le falta a *a* para llegar a *b*?</u> Seguidamente, resuelve restas sin llevar en la pizarra, pudiendo utilizar la tabla de la pizarra usando la estrategia de conteo que previamente han practicado para comprobar sus respuestas.

La descripción de la situación que Rosa realiza muestra la relación entre lo que observa y la razón de por qué la maestra plantea esta actividad, es decir, el objetivo pretendido. Al responder a la cuestión sobre lo que parece pretender la maestra (el objetivo), identifica el foco sobre los procedimientos de contar como estrategia para resolver determinados tipos de operaciones de restar, pero introduce elementos de contenido matemático sobre el que no proporciona justificación (*identificación del valor posicional de las cifras y números de la resta*) y con algún error en el uso de la equivalencia de expresiones aritméticas (*a+__=b como equivalente a a-b*).

Objetivos	Contenidos
Asimilar el procedimiento de conteo para realizar restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando. Resolver adecuadamente operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar). Utilizar la estrategia del conteo. Reconocer los números hasta el 100.	a+__=b como sinónimo de a-b. Operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar). Utilización de la estrategia del conteo. Números hasta el 100. Serie numérica. Identificación del valor posicional de las cifras y

	números de la resta.

Las características de esta primera parte del argumento práctico de Rosa (la descripción) radican en considerar como un foco relevante el aprendizaje de un procedimiento de contar para realizar restas. En este sentido, la identificación de la estrategia de contar *¿cuánto le faltan a a para llegar a b?* muestra su capacidad para identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza.

En particular, pone como foco de atención el papel que pueden desempeñar las estrategias de contar en el desarrollo de la aritmética, y determinado tipo de actividades para apoyar este desarrollo. Es decir, la identificación del momento descrito en la narrativa subraya el reconocimiento de los procesos de contar como un aspecto relevante en el aprendizaje inicial de la aritmética (y en particular en la resolución restas). Además, y salvando el posible error en la descripción de la equivalencia aritmética entre la suma y la resta, pone de manifiesto la posibilidad de poder usar los diferentes procedimientos de contar (contar desde *a* hasta *b*, llevando pistas de los números contados) como estrategia válida para resolver situaciones de resta (b-a = □ como a + □= b) subrayando el uso de la "tabla de números" como recurso para apoyar el aprendizaje de las estrategias de conteo.

Finalmente, la descripción de lo que hace la maestra y los estudiantes (cómo responden y sus dificultades) permite poner de manifiesto la cantidad de detalles proporcionados. Proporcionar estos detalles implica reconocer la complejidad del aprendizaje de los procesos de contar, aunque el énfasis está colocado en la parte procedimental de los errores de los estudiantes. Rosa describe algunas respuestas de los estudiantes para mostrar las dificultades que estos afrontaban con la secuencia numérica y las estrategias de conteo. En particular sobre el reconocimiento de los números y en el procedimiento de llevar la "pista" para determinar los números contados *de a hasta b*.

> La actividad se divide en dos partes. En la primera de ellas, la profesora pregunta a los alumnos cuánto le falta a un número para llegar a otro, para lo cual, los alumnos, haciendo uso de su ficha, han de poner el dedo índice sobre el primer número mencionado y contar el número de "saltos" que dan hasta llegar al otro número. Por ejemplo, ¿Cuánto le falta al 5 para llegar al 9? Los niños ponen entonces su dedo sobre el número 5 y van contando saltos hasta llegar al 9.
> Algunos alumnos muestran dificultades en esta parte de la actividad, bien por no reconocer los números que dice la maestra (por ejemplo, una alumna confunde el 13 con el 30), no tener asentado el conteo o realizar el procedimiento contando, en lugar de los saltos entre los dos números dictados por la maestra, los números que hay entre estos dos (ej. del 5 al 9 hay tres porque entre estos dos números hay uno (6), dos (7) y tres (8)), o bien, comenzar a contar desde el primer número incluyéndolo (ej. del 5 al 9 hay cinco porque cuento uno (5), dos (6), tres (7), cuatro (8) y cinco (9)).
> Para solventar estos errores, la profesora pide al niño que coloque su dedo sobre el número que le diga y que cuente los movimientos que hace hasta llegar al otro número. En el caso de que el niño continúe sin hacerlo correctamente, la maestra coloca el dedo del niño sobre el número que le dice y a continuación, va moviendo con él el dedo contando hasta llegar al segundo número.

Rosa describe la segunda parte de la actividad identificando elementos matemáticos que no son relevantes para el tipo de actividad realizada (valor de posición y descomposición del número) (énfasis añadido).

> Una vez realizada esta parte de la actividad, la profesora plantea una serie de restas sin llevar en la pizarra que los alumnos han de resolver. Para resolverlas, los niños han de contar primero cuántos números le faltan al número de unidades del sustraendo para llegar al número de unidades del minuendo y luego, contar cuántos números le faltan al número de decenas del sustraendo para llegar al número de decenas del minuendo, pudiendo utilizar la tabla que tienen a su disposición en la pizarra.

Desde un punto de vista general, esta primera parte de la narrativa de Rosa responde a las características de una descripción rica en detalles e imparcial. Rica en detalles porque el lector puede llegar a imaginarse la situación observada, e imparcial ya que Rosa no introduce valoraciones de lo observado, limitándose a describir hechos.

- **La interpretación. La relación de las evidencias con el conocimiento teórico**

En la interpretación, Rosa relaciona los hechos a una teoría (conocimiento teórico) sobre el aprendizaje de la aritmética en estos niveles. El análisis de esta parte del argumento práctico de Rosa se centra en determinar, en primer lugar, qué items de conocimiento usa, o la falta de evidencia de uso de ítems de conocimiento que pueden ser considerados relevantes para interpretar la situación. En segundo, lugar el foco es sobre la coherencia lógica, mirando cómo las premisas (las evidencias) se conectan unas a otras y con la conclusión propuesta (la interpretación) mediante el uso de ítems de conocimiento teórico usados como garantías para apoyar la relación entre la premisa y la conclusión.

En primer lugar, Rosa destaca el papel del recurso usado por la maestra en el aprendizaje pretendido. El énfasis se sitúa en el potencial de la "tabla de números" junto con las preguntas que la maestra reitera para conseguir el aprendizaje de los estudiantes del *procedimiento de contar de a hasta b* manteniendo pista de los números contados. Desde este punto de vista, Rosa asume que estos dos aspectos de la enseñanza observada pueden favorecer el aprendizaje pretendido, pero no proporciona justificación a este vínculo entre la premisa (uso de la tabla y el tipo de preguntas de la maestra focalizadas en determinar *cuánto falta a a para llegar a b*) y la conclusión (se favorece el aprendizaje). Posiblemente porque se asume que el foco del aprendizaje es la técnica de contar, y no lo que significan los procesos de contar en el aprendizaje del concepto de número y las operaciones.

> El uso previo de la ficha ayuda a que los niños entiendan que para restar pueden contar cuánto le falta a un número para llegar a otro. Asimismo, la repetición de preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b? ayuda a que el niño identifique a+__=b como sinónimo de a-b=__.*

La falta de uso de ítems de conocimiento sobre el papel que desempeña los procesos de contar en el aprendizaje conceptual de los estudiantes, se pone de manifiesto cuando Rosa describe la realización de una actividad (la cuenta 54-31) en la que el énfasis está colocado sobre la técnica del conteo, y no sobre lo que significan los procesos de contar para la comprensión del número y las operaciones de los estudiantes. Rosa asume que lo que los estudiantes hacen es una evidencia de comprensión. Dos ideas ponen de manifiesto la falta de uso de ítems de conocimiento para interpretar la situación. En primer lugar, al no reconocer la diferencia entre lo que está observando y el uso de procesos de contar como "contar desde 31 a 40, que van 9, luego diez más hasta 50, que son 19 y luego de 50 a 54, cuatro más que son veintitrés". En segundo lugar, al no tener evidencias de la comprensión de los estudiantes de las diferentes unidades (decenas y unidades) en la estrategia observada.

> En la mayoría de casos los alumnos sí alcanzaron los objetivos propuestos. Por ejemplo, al salir a la pizarra y realizar 54-31, un alumno dijo del 1 al cuatro van uno, dos y tres saltos, así que pongo 3 y del 3 al 5 van uno y dos saltos, así que pongo 2. No obstante, otros alumnos tuvieron mayores dificultades y no lograron realizar las restas por no efectuar el procedimiento de conteo correctamente dado a que no reconocían algunos números de la serie numérica.
> (…)
> Una vez realizada esta parte de la actividad, la profesora plantea una serie de restas sin llevar en la pizarra que los alumnos han de resolver. Para resolverlas, los niños han de contar primero cuántos números le faltan al número de unidades del sustraendo para llegar al número de unidades del minuendo y luego, contar cuántos números le faltan al número de decenas del sustraendo para llegar al número de decenas del minuendo, pudiendo utilizar la tabla que tienen a su disposición en la pizarra.

Rosa identifica la comprensión de los estudiantes de otros aspectos como el reconocimiento de los números hasta el 100. Sin embargo, se pone de manifiesto la misma característica identificada anteriormente, la falta de uso de los ítems del conocimiento teórico para justificar la relación entre la premisa (lo estudiantes fueron capaces de resolver correctamente las restas de la pizarra) y la conclusión (los niños comprenden el valor posicional de las cifras y el significado de la sustracción). En este sentido Rosa genera un argumento (premisa y conclusión) sin el apoyo (sin las garantías) que permita asumir esta implicación. En particular ya que la manera en la que los niños usan la técnica de contar para establecer el resultado de las restas no pone de manifiesto su comprensión de la idea de agrupamiento y del valor de posición como elementos integrados para el desarrollo del algoritmo de la resta.

Al ser capaces de realizar el procedimiento de conteo, los niños demostraron conocer la serie numérica y números hasta el 100. Por otro lado, aquellos que fueron capaces de resolver correctamente las restas de la pizarra demostraron haber comprendido el valor posicional de las cifras y números de la resta y el significado de sustracción

Por otra parte, una secuencia de enseñanza para el desarrollo de la comprensión del número y las operaciones (Barrody, 1988), y que debería formar parte del conocimiento teórico de Rosa, subraya el papel de los concretos junto a los procedimientos de contar en la construcción del número. Por ejemplo, la posibilidad de construir las cantidades de objetos indicadas por los números (relativamente pequeños) para permitir el proceso de conteo y sus variaciones por parte de los niños, considerada como una fase en el modelo de desarrollo de la comprensión por parte de los niños. Además de cómo considerar la transición desde el uso de recursos concretos para apoyar el proceso de contar, a contar desde números diferentes de 1; contar desde a hasta b indicando los números que hay entre medio, al desarrollo de las estrategias mentales y el papel que puede desempeñar considerar números formados por otros números a través de las estrategias derivadas del recuerdo de hechos numéricos (por ejemplo, ante la resta 15 -7 =□; poder decir que la *respuesta es 8 ya que recuerda que 7+7=14, y como en esta cuenta tiene 15 debe ser uno más)*. Desde este punto de vista, el foco de la narrativa de Rosa se centra en considerar una técnica de conteo para resolver cuentas de restar, pero no el papel que pueden desempeñar los procesos de conteo en la comprensión del número (la secuencia numérica) y las operaciones.

Los aspectos que configuran las características del desarrollo de la comprensión del número y las operaciones, apoyados en el desarrollo de los procesos de contar siguen faltando en la construcción de la conexión entre las evidencias identificadas (la premisa) y la interpretación de dichas evidencias (la comprensión de los niños, considerada como conclusión del argumento). La relevancia de estos aspectos del argumento práctico de Rosa (la falta de referencia a características de un modelo de progresión del aprendizaje temprano del número y las operaciones) se ponen de manifiesto en la tercera parte de la narrativa (la conclusión del argumento práctico para actuar o apoyar la intención de actuar de una determinada manera). En la parte siguiente de la narrativa, Rosa vuelve a repetir las dificultades de algunos niños.

- **Una acción o intención de actuar como conclusión del argumento práctico**

El conocimiento de la progresión de la comprensión del número y las operaciones que puede ser movilizada en la parte de la interpretación del argumento práctico es la base de la conclusión de dicho argumento, es decir, actuar o tener la intención de actuar de una determinada manera. La estructura de la tarea propuesta a Rosa, separaba la propuesta de actividades según se tuviera evidencias de que los niños hubieran, o no, “comprendido”. Sin embargo, el significado del término “comprensión” en este momento viene determinado por el argumento práctico construido por Rosa y en particular la manera en la que ha interpretado lo observado. Por lo tanto, el análisis de esta parte de la narrativa considera las características identificadas en la parte anterior (Interpretación de la situación) cuando intentamos responder a la cuestión sobre cómo Rosa usa su interpretación de la situación (el conocimiento de la progresión de la comprensión del número y las operaciones) para proponer nuevas actividades a los niños.

En primer lugar, Rosa considera que el foco de atención de las actividades observadas es el uso de una técnica/procedimiento para resolver cuentas de restar. Desde este punto de vista la palabra "comprensión" se reduce aquí al manejo de una técnica para determinar *los números que hay entre a y b* (como un procedimiento para realizar restas). Lo que Rosa propone hacer a continuación se separa en dos focos, continuar con lo que viene a continuación en el currículo (las restas llevando) o potenciar los aspectos relativos al "procedimiento" de contar para aquellos niños con dificultades. Sin embargo, en este último foco se vuelve a poner de manifiesto el no reconocer los procesos de contar (de uno en uno, a partir de un número distinto de 1, o usando el diez como una unidad iterativa, por ejemplo) como aspectos relevantes en el proceso de comprender los números y las operaciones por parte de los niños.

Con relación a los niños que Rosa asume que no tienen dificultades, el foco de atención sobre lo que hacer a continuación adopta una perspectiva curricular. Así, el foco se sitúa en la realización de restas llevando y en el mecanismo del algoritmo (énfasis añadido).

> Una vez los niños hayan asentado el procedimiento para realizar operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevada), podría utilizarse el mismo procedimiento para realizar restas con llevada. Si bien, para ello el alumnado deberá reconocer que los números están formados por decenas y unidades (números de dos cifras), por lo que antes de ello trabajaría las descomposiciones canónicas con los bloques multibase.

Una vez centrado el objetivo, Rosa usa ítems de conocimiento para justificar el tipo de actividad a realizar, la comprensión de las descomposiciones canónicas de los números y el uso de los bloques multibase como recurso. Aunque esta decisión de acción, no es una tarea específica se apoya en la identificación de un nuevo objetivo de aprendizaje determinado por la organización del currículo.

Con relación a las decisiones para los niños que tienen dificultades el foco se sitúa en el reconocimiento de los números y en la repetición de las actividades centradas en destrezas para determinar cuántos números hay *de a hasta b*. En este momento el uso de recursos (las regletas) parece que están dirigidas a la comprensión de la resta (y posiblemente la relación aditivas y sustractivas entre los números) y no tanto sobre el desarrollo de los procesos de contar.

> En primer lugar, para aquellos alumnos que presentan dificultades en el reconocimiento y el recitado de los números hasta el 100, considero que lo primordial sería, en primer lugar, trabajar dichos aspectos. Para ello, llevaría a cabo la tarea planteada por la maestra primero con números hasta el 10, a continuación, hasta el 20, luego hasta el 30...
> Por otra parte, para aquellos que aun siendo capaces de reconocer los números hasta el 100 y recitar de manera ordenada la serie numérica no han podido llevar a cabo la actividad de manera adecuada, considero que podrían utilizarse materiales manipulativos como, por ejemplo, las regletas. Empezaría primero por números de una sola cifra. Por ejemplo, para resolver 5-3 o 5-__= 3, en primer lugar, cogería la regleta del cinco. Seguidamente, con regletas de uno, primero les haría hacer que comprueben que el 5 está formado por cinco unidades. Luego, comprobarían lo mismo con la regleta del dos. A continuación, colocarían la regleta del dos sobre la del cinco y, con regletas de uno, contarían cuántas necesitan para llegar a cinco, o bien, buscarían qué regleta necesitan para llegar a 5. Luego, lo haría con números de una decena, por ejemplo, 18-9 o 18-__=9. Para ello, utilizaría una regleta de 10 y una de 8, colocadas una al lado de la otra formando el número 18. Después, pondrían la de 9 encima y buscarían qué regleta necesitan para tener 18.

La propuesta de actividades de Rosa para los niños que tenían dificultades con los procedimientos de contar no considera diferentes fases del modelo de progresión de la comprensión de los niños. Aunque Rosa propone el uso de concretos para la resolución de operaciones, no continúa considerando otras fases en el desarrollo de los diferentes procedimientos de contar – hacia adelante, hacia atrás, … –, contar desde el mayor, recordar hechos numéricos y modificarlos para encajarlos en la actividad propuestas, el uso del 10 como una unidad iterativa para contar, así como maneras de comprender los números como formados por unidades múltiples desde una perspectiva parte-todo (como por ejemplo ver el 15 formado por 7+7+1, o 7+8 o 10+5). Desde esta perspectiva, Rosa no complementa el uso de manipulativos con iniciativas que permitan desarrollar a los niños construcciones mentales y estrategias más sofisticadas de contar al no apoyar sus decisiones sobre la enseñanza en un modelo de progresión de los procesos y estrategias de contar que apoyan el aprendizaje del número y las operaciones. Es posible que la falta de interpretación de las dificultades de los niños considerando un modelo de comprensión hace que Rosa intente reproducir las actividades vistas en la clase y propuestas inicialmente por la maestra como una manera de progresar desde los procedimientos de contar a las operaciones de sumar y restar.

OBSERVACIONES FINALES

El objetivo de este trabajo ha sido describir cómo caracterizar la competencia docente “mirar profesionalmente” de una estudiante para maestra cuando escribe una narrativa durante el periodo de práctica de enseñanza. Para ello hemos asumido dos ideas. La primera que la narrativa es el explicitación del argumento práctico de la estudiante para maestra al ser la elaboración formal de la descripción de una situación observada al incorporar explicaciones de lo que sucede en forma de razones de por qué sucede lo que se observa y que concluye con una intención de actuar de una determinada manera. La segunda, que la competencia docente “mirar profesionalmente” es un proceso basado en el conocimiento que se articula en el proceso de razonar sobre la enseñanza puesto de manifiesto en la narrativa como expresión del argumento práctico.

Desde estos supuestos previos, hemos tenido en cuenta que la narrativa de Rosa es respuesta a una actividad estructurada propuesta en el programa de formación, y por tanto está condicionada por las preguntas-guías planteadas por el formador. Estas preguntas –guías responden a las dos caras de la competencia docente “mirar profesionalmente” que reflejan la caracterización tanto del argumento práctico (elicitar y construir) como de la aproximación derivada de la perspectiva de Mason (2002) (*account-of* y *account-for*).

A partir de estos supuestos y las condiciones determinadas por el origen de la narrativa analizada hemos adaptado los estándares de valoración de un argumento práctico (Fenstermacher y Richardson, 1993) para generar una caracterización de la competencia docente “mirar profesionalmente” de Rosa según se reflejan en la narrativa. La adaptación de los estándares de valoración de la narrativa como argumento práctico que hemos considerado como esquema analítico integra en dos dimensiones, tres de los estándares considerados inicialmente por Fenstermacher y Richardson,

- Dimensión contextual y empírica[1]: se tiene en cuenta cómo se describe el contexto de manera completa y exacta (con riqueza de detalles) afectando de ese modo a la reconstrucción realizada (razonamiento sobre la situación usando ítems de conocimiento).
- Dimensión teórica: se valora cómo los ítems de conocimiento teórico (sobre la enseñanza, sobre el aprendizaje) se usan para interpretar los hechos observados considerando la estructura de los argumentos en el sentido de cómo los datos (evidencias) se vinculan a las conclusiones (interpretaciones) a través del uso del conocimiento teórico (las garantías en la estructura de un argumento). Esta dimensión se refiere al papel de la coherencia lógica del uso del conocimiento teórico en la interpretación de lo observado.

En el análisis realizado, nosotros no hemos considerado el cuarto estándar propuesto por Fenstermacher y Richardson relativo a la valoración de la premisa sobre las concepciones y/o creencias vinculadas a las consideraciones éticas y/o morales sobre la enseñanza.

El análisis de la narrativa de Rosa nos ha permitido identificar que Rosa describe con detalle las situaciones observadas, pero no usa los ítems de conocimiento teórico como garantías para apoyar la relación entre las premisas (las evidencias descritas) y la conclusión generada sobre la comprensión de los estudiantes. En particular, lo relativo al papel de los procedimientos de contar en la caracterización de la progresión del aprendizaje de los estudiantes en la construcción inicial del concepto de número y las operaciones. Esto puede ser debido a que Rosa asume el proceso de contar que la maestra intenta enseñar a sus alumnos como una técnica para realizar cuentas y no como parte de un modelo de progresión conceptual para apoyar el aprendizaje de los niños de la secuencia numérica, los números y las operaciones. Esta manera en la que Rosa dota de significado a lo que observa se refleja en el momento de decidir qué hacer con los estudiantes que considera tienen dificultades (repetición de lo observado sin justificar su decisión a partir de un modelo de progresión conceptual del número apoyado en los procesos de contar).

El resultado del análisis permite identificar focos de atención sobre los que el formador puede centrar la atención de Rosa en nuevos ciclos de observación y elaboración de narrativas. Por ejemplo, el cuestionamiento del formador centrado en explicitar los ítems de conocimiento relativo al papel de los procesos de contar en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes del concepto de número y los algoritmos podrá ayudar a Rosa a *reconstruir* su argumento práctico lo que puede permitirle generar una nueva comprensión de la situación.

Escribir narrativas con la estructura propuesta permite tener el contexto para mejorar los argumentos prácticos de los estudiantes para maestro al tener la posibilidad, en narrativas sucesivas, de mejorar las conexiones entre lo que es observado (los datos, las evidencias) y los ítems de conocimiento teórico que puedan ser pertinentes para interpretarlo. Vincular el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” a la mejora de los argumentos prácticos se justifica ya que se generan razonamientos más formales al aumentar la comprensión de los estudiantes para maestro de las situaciones de enseñanza vinculando lo observado (las acciones del maestro y las estrategias de los estudiantes) a principios teóricos.

Desde esta perspectiva asumimos dos cosas. En primer lugar, que al reconstruir su argumento práctico en una nueva situación, Rosa aumenta su comprensión de la situación y por tanto podrá justificar mejor su propia práctica. En segundo lugar, se proporciona un contexto para que Rosar integre el uso del conocimiento teórico en el desarrollo de su conocimiento práctico. Es por esto por lo que hemos colocado este tipo de análisis en el contexto del aprendizaje del estudiante para maestro y en particular en el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente”.

Agradecimientos

1. Este trabajo se ha hecho en parte con el apoyo de los proyectos EDU2017-87411-R, Agencia Estatal de Investigación, MINECO-Gobierno de España; y Prometeo2017/135 de la Generalitat Valenciana, España.
2. Una versión previa de este trabajo fue realizada conjuntamente con Pere Ivars y presentada en la reunión intermedia del grupo de investigación de la SIEM “Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de Matemáticas” celebrado en enero de 2018 en Alicante, España.

Notas

[1]Fenstermacher y Richardson (1993) consideran separados estos dos estándares para la valoración de los argumentos prácticos:

- The empirical premise is stated so that it is amenable to examination on the basis of available evidence, including findings from research.
- The situational premise describes the context or situation, and is appraised on the basis of how completely and accurately the context is described, and the degree to which it impinges on the particular action.

[2]Fenstermacher y Richardson (1993) definen este estándar de valoración de un argumento práctico como: “The stipulative premise is examined using theory or well-grounded conceptions of the learner, the subject-matter, and the form and manner of instruction” (p. 110).

Referencias

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor.

Fenstermacher, G. y Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies, 25*(2), 101-114.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matemática e la sua didáttica, 24*(1&2), 79-96.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The Role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Preservice Elementary Teachers.* London: Springer

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 53-70.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practices. SISYPHUS. *Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 243-267.

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice. The Disciplined of Noticing.* London: Routledge.

Putman, R. y Borko, H. (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking Have to Say about Research on Teacher Learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4-15.

Roig, A. I.; Llinares, S. y Penalva, M. C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Schack, E., Fisher, M. y Wilhelm, J. (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts and Frameworks*. London: Springer.

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Godman, R. Pea, B. Barron y S. J. Derry (Eds), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Peninsula.

Wells, G. (2002). *Dialogic inquiry. Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Pres.

APROXIMÁNDONOS AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA ESTUDIANTE PARA MAESTRO A PARTIR DE UNA NARRATIVA

Approaching to a student teacher's specialised knowledge from a narrative

Contreras, L. C.[a], Carrillo, J.[a] y Climent, N.[a]

[a]Universidad de Huelva

Resumen

Utilizaremos el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas para el análisis de una narrativa de una estudiante para Maestro. Comenzamos con una breve explicación del origen del modelo y de la finalidad con que se construyó, que permitirá comprender sus potencialidades y limitaciones, especialmente al aplicarlo al análisis de una narrativa. A continuación, haremos una presentación general de sus subdominios, utilizando ejemplos relacionados con la temática de fondo de la narrativa para una mejor comprensión en el análisis posterior. Este análisis mostrará evidencias del conocimiento de Rosa y de las relaciones entre los distintos subdominios de MTSK, así como indicios y oportunidades para profundizar en su conocimiento. Terminaremos reflexionando sobre la comprensión del conocimiento de Rosa que nos permite el modelo, donde los algoritmos convencionales de la resta parecen ocupar un lugar central.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, conocimiento especializado, estudiante para profesor, narrativa, sustracción.*

Abstract

We will use the analytical model of Mathematics' Teacher Specialized Knowledge Mathematics (MTSK) for the analysis of a narrative of a prospective teacher. We begin with a brief explanation of the origin of the model and the purpose for which it was built, which will allow understanding its possibilities and limitations, especially when applying it to the analysis of a narrative. Next, we will make a general presentation of their subdomains, using examples related to the background topic of the narrative to achieve a better understanding in the later analysis. This analysis will show evidence of Rosa's knowledge and the relationships between the different subdomains of MTSK, but also indications and opportunities. We will end up reflecting on the understanding of Rosa's knowledge that the model allows us, where the conventional algorithms of subtraction seems to have a central role.

Keywords: *teacher knowledge, specialized knowledge, prospective teacher, narrative, subtraction.*

INTRODUCCIÓN

Si bien nuestro interés por el conocimiento del profesor de matemáticas surge desde que decidimos indagar sobre las concepciones, para dar explicación a la escasa eficacia que parecían tener las estrategias convencionales de formación permanente del profesorado, es en realidad con la puesta en marcha de Proyectos de Investigación Colaborativa (PIC) cuando tomamos conciencia de la necesidad de explorar las características de los conocimientos que ponían en juego los profesores de Educación Primaria que participaban en el mismo.

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-65). Gijón: SEIEM.

Nuestra investigación sobre desarrollo profesional, especialmente en entornos colaborativos, se orientó hacia la mejora de nuestra comprensión sobre el conocimiento de los profesores con los que trabajábamos. Así, dimos el paso de investigar *sobre* profesores a investigar *con* profesores (Skott, Zoest y Gellert, 2013). En el PIC se diseñaban sesiones de aula que un profesor del grupo implementaba después con sus alumnos y fue en esos momentos cuando ellos nos mostraron la necesidad de profundizar en su conocimiento ante algunas carencias que se constituían en un obstáculo para seguir desarrollándose profesionalmente (Climent y Carrillo, 2003). Como investigadores tuvimos la necesidad de desarrollar un instrumento que nos permitiera realizar una reflexión profunda de la práctica de forma que posibilitara un análisis fino de los conocimientos implicados.

Nuestros trabajos se sitúan en una perspectiva interpretativa, por ello, es preciso destacar que nuestro interés en la comprensión de ese conocimiento no tiene un propósito evaluativo, sino comprensivo; no nos interesa, en general, etiquetar lo que los profesores conocen o no conocen, sino, desde una perspectiva interpretativa, comprender la estructura de su conocimiento y los elementos que lo conforman en el contexto de la práctica.

La observación del aula es nuestra fuente esencial de obtención de información acerca del conocimiento que el profesor pone en juego. Pero al analizar su aplicación o uso, a veces encontramos evidencias, a veces indicios del conocimiento que el profesor posee, filtrado, entre otros, por elementos del contexto y la propia interpretación del investigador-observador, y a veces oportunidades para seguir indagando. Es por ello que también nos apoyamos en la planificación del profesor, en cuestionarios y entrevistas (individuales y conjuntas con otros compañeros), en análisis de vídeos o situaciones de aula, entre otros escenarios (Flores-Medrano, Escudero-Ávila y Aguilar-González, 2013).

Los focos de interés en los que solemos aplicar el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, de sus siglas en inglés), que se expondrá más adelante, son todos aquellos que se corresponden con contextos (profesionales, en general, o de aula en particular) en los que el profesor desarrolla su actividad profesional. Por ello, nos interesa <u>acercarnos al conocimiento que un profesor pone en juego</u> cuando, por ejemplo, evalúa, planifica, diseña tareas, usa recursos, discute con pares, plantea preguntas a sus estudiantes o responde a las que recibe de estos, formula ejemplos, aborda los errores y obstáculos de sus estudiantes, introduce o define conceptos, justifica, argumenta o demuestra resultados, o resuelve problemas. Es en cada uno de estos contextos en los que la aplicación de MTSK tiene más sentido y los que organizarían nuestra pregunta de investigación (subrayado).

Es preciso indicar que los instrumentos de obtención de información convertible en datos están estrechamente vinculados a los instrumentos de análisis de dicha información, los cuales emergen o se relacionan íntimamente con el marco o el modelo teórico. Por ello, analizar con el MTSK la narrativa de Rosa, que no procede de un profesor sobre su propia práctica, requerirá incluir suposiciones o especulaciones y, probablemente, en ocasiones no será posible extraer unidades de información plausibles (evidencias) para apoyar la existencia de indicadores del MTSK. A veces estaremos ante una información que parece indicar un determinado tipo de conocimiento (indicio), a veces ante una oportunidad para seguir explorando, derivada de un fragmento o contexto donde surge la información. En una narrativa como la de Rosa estamos ante la interpretación que de la práctica de un profesor hace una estudiante en prácticas, lo que difiere sustancialmente del análisis de la práctica de un profesor (en sus fases enactiva, activa o postactiva). En este caso, el análisis se hace más complejo en la medida que conocemos cómo ha sido la sesión observada solo a través de los ojos de Rosa. Esto hace que resulte complejo responder a la pregunta de investigación antes señalada (ya que el acceso al conocimiento es diferido) y que, por tanto, de entrada, sea más probable obtener indicios y oportunidades que evidencias del conocimiento de Rosa. Por otro lado, las orientaciones que se dan a Rosa para narrar lo que ha visto están mediadas por las consignas que recibe, que no pretenden centrarse en su conocimiento, sino en su capacidad de interpretar la situación de aula descrita.

No obstante, en nuestro análisis nos aproximaremos al conocimiento especializado que evidencia Rosa en sus comentarios al exponer cómo comprende la situación que describe. Mostraremos evidencias, indicios y oportunidades de su conocimiento, diferenciándolos. Los indicios y oportunidades nos invitan a seguir indagando, lo que requeriría de una información complementaria, como por ejemplo una entrevista semiestructurada posterior a un primer análisis de la narrativa. El uso de entrevistas que permitan profundizar en el conocimiento del profesor es común en nuestras investigaciones con MTSK. Las oportunidades suponen, por su parte, una reflexión sobre los conocimientos que entendemos implicados en la comprensión de la situación que describe Rosa. Nuestro análisis, por tanto, intenta responder a la siguiente pregunta: ¿qué evidencias, indicios y oportunidades podemos extraer acerca del conocimiento que Rosa pone en juego en su narrativa?

En el apartado que sigue mostraremos el origen y el proceso de construcción del modelo analítico del conocimiento del profesor de matemáticas (MTSK), que utilizaremos después para realizar el análisis de la narrativa de Rosa. Terminaremos reflexionando sobre la comprensión que del conocimiento de Rosa nos permite MTSK a partir del análisis de la narrativa, destacando lo que aportan los resultados presentados a la investigación ya existente sobre conocimiento del profesor sobre la resta.

EL MODELO MTSK COMO MARCO DE ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En nuestras primeras investigaciones, la noción de *conocimiento didáctico del contenido* de Shulman fue fundamental en la medida en que enfatizaba el conocimiento del profesor específico de la materia que enseña. En ese mismo sentido, el modelo de *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), del grupo de Deborah Ball (Ball, Thames y Phelps, 2008) nos mostraba una organización en forma de dominios y subdominios del conocimiento específico para el profesor de matemáticas, incluyendo además un subdominio llamado *conocimiento especializado del contenido*, compuesto por el conocimiento matemático que solo tenía sentido para el profesorado de matemáticas.

En muchas ocasiones, cuando usábamos MKT para analizar el conocimiento del profesor, resultaba muy difícil diferenciar el *conocimiento especializado del contenido* del subdominio del *conocimiento de matemáticas y de los estudiantes*, a pesar de que el primero forma parte del dominio de conocimiento matemático y el segundo, del conocimiento didáctico del contenido. Otros investigadores han justificado dificultades similares en la generación de otros modelos de análisis (como el Conocimiento Didáctico-Matemático, de Godino y Pino-Fan, 2013). Por otro lado, en algunas ocasiones no nos era posible categorizar con MKT aspectos que, desde nuestra perspectiva, formaban parte del conocimiento del profesor y eran exclusivos del profesor de matemáticas, como el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas (que se asocia a la explicitación verbal -formal o informal- de elementos integrantes de una teoría de enseñanza; no se asocia a la opinión sobre cómo se debe enseñar matemáticas, lo cual pertenece al dominio de las concepciones). Asimismo, resultaba complejo diferenciar *conocimiento común* de *conocimiento especializado*, por la dependencia del contexto escolar o de las tradiciones de enseñanza de cada lugar o país. Saber, por ejemplo, qué orden de unidades tiene el resto en el algoritmo convencional de la división de números naturales una vez que hemos sacado decimales es conocimiento común o especializado, ¿lo necesitan en otras profesiones? ¿Debe o puede considerarse conocimiento escolar? Una dificultad añadida en la aplicación del modelo es que algunas definiciones de los subdominios del MKT están enunciadas en términos de la acción en la que se moviliza dicho conocimiento, más que en describir el conocimiento en sí. Este es el caso del conocimiento especializado, del cual se dice, en Ball, Thames y Phelps (2008, p. 400), que permite "encontrar patrones en los errores de los estudiantes, o valorar cuándo un procedimiento no estándar funciona en general".

Tras constatar que nuestras dificultades eran compartidas por otros investigadores que utilizaban MKT (e.g. Silverman y Thompson, 2008), decidimos modificar nuestra perspectiva hacia un modelo donde el conocimiento implicado, en su conjunto, tuviera sentido para el profesor de matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), independientemente de que partes de este conocimiento tuvieran sentido para otras personas.

En el MTSK, la especialización del conocimiento del profesor afecta a todos los subdominios, así como a la interrelación entre estos. Todo el conocimiento del profesor que nos interesa, tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del contenido, es especializado en el sentido de que se refiere de manera inequívoca a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017). Además, nos interesa definir el conocimiento matemático (MK) de forma intrínseca, aludiendo a la matemática en sí, más que en oposición a otros posibles usuarios de la matemática (de aquí que no distingamos entre conocimiento común y especializado).

Para organizar el conocimiento matemático del profesor nos inspiramos en la idea de Ma (1999) de conocimiento profundo de la matemática elemental. La base de este conocimiento profundo es el que denominamos *Conocimiento de los Temas* (KoT). Junto a este, el conocimiento de cómo se hace matemáticas (conocimiento sintáctico de la matemática, Schwab, 1978) es fundamental para que el profesor pueda generar nuevo conocimiento y enseñar a sus alumnos a hacer matemáticas (subdominio del *Conocimiento de la Práctica Matemática*, KPM). Por último, el conocimiento de conexiones interconceptuales entre contenidos matemáticos (Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernández y Deulofeu, 2011) recoge, entre otras, tanto las conexiones con contenidos más avanzados como con contenidos más elementales (*Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas*, KSM). Este subdominio también incluye el conocimiento sobre conceptos transversales, como el infinito o la proporcionalidad. Existen también las conexiones intraconceptuales, que se dan entre elementos o propiedades de un concepto; estas conexiones se consideran en el KoT. Estos tres subdominios configuran el conocimiento matemático descrito en el MTSK.

En relación con el PCK, definimos los subdominios de modo que el foco de todos ellos fuera la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático, sin que pueda entenderse como una yuxtaposición de conocimiento pedagógico y conocimiento del contenido matemático. De este modo, hablaremos de *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS). En los dos primeros subdominios tienen cabida las teorías del profesor (tanto personales como institucionales) sobre cómo se enseña y cómo se aprende el contenido matemático, respectivamente. Por su parte, el KMLS amplía la idea del conocimiento curricular de Shulman para incluir el conocimiento del profesor sobre qué puede enseñar y esperar que aprendan los alumnos en un nivel determinado, guiado por directrices curriculares, investigaciones y otras orientaciones profesionales relativas a la organización curricular.

Destacamos los siguientes rasgos de cara a la comprensión de la construcción y la aplicación del MTSK:

- Se apoya en las concepciones del equipo de investigación que lo ha diseñado (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva).
- Se incluye un dominio de creencias, en el centro del modelo, desde la perspectiva que estas permean todo el conocimiento. Este dominio contribuye a explicar las relaciones entre

elementos de los distintos subdominios y, de este modo, a explicar el conocimiento del profesor en la práctica.

- Interesa aquello que es específico del profesor de matemáticas, por eso entendemos que todo el conocimiento que organiza es especializado.
- En la organización del dominio del conocimiento didáctico del contenido se contemplan, entre otros, conocimientos de elementos teóricos (de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) y de estándares de aprendizaje.
- Busca la caracterización de cada dominio y subdominio a través de un sistema de categorías que contienen a la matemática de un modo intrínseco.
- Busca comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, desde la perspectiva del conocimiento que este usa en y para la práctica.
- La obtención de datos se realiza desde fuentes y contextos variados (observación, entrevistas, foros online…).

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas supone un cambio de perspectiva en algunos aspectos del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, como por ejemplo al considerar todo el conocimiento como especializado, caracterizar el dominio del conocimiento matemático de un modo intrínseco a la propia matemática, incluir elementos de conocimiento del profesor (antes referidos) en el dominio del conocimiento didáctico del contenido que no se habían contemplado en otros modelos o considerar el dominio de las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, el MTSK refina la descripción de sus subdominios desglosándolos en categorías, que serán usadas en el análisis de la narrativa de Rosa y que pasamos a presentar.

El *Conocimiento de los Temas* se compone del conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos (como saber que si se suma la misma cantidad a los dos términos de una resta, el resultado no varía), fenomenología y aplicaciones (como conocer el significado de la resta asociada a situaciones de comparación/igualamiento), registros de representación (saber expresar algebraicamente un problema de comparación), y procedimientos (incluyendo tanto el procedimiento como por qué se hace así, cuándo se puede hacer, y cómo es su resultado; por ejemplo, con relación a la resta, conocer distintas estrategias para resolverlas como “contar a partir de” o los algoritmos convencionales en situaciones con o sin llevada, incluyendo las bases o razones de dichos procedimientos).

En el conocimiento de las conexiones incluido en el *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* diferenciamos: conexiones de complejización (donde se relaciona un contenido con otro más avanzado), conexiones de simplificación (se conecta un contenido con otro más simple), conexiones auxiliares (un contenido sirve como herramienta para otro contenido) y conexiones transversales (un contenido se conecta como hilo conductor con varios contenidos). Por ejemplo, conocer que la división puede hacerse como resta repetida (simplificación, porque la resta puede ser un precursor de la división), que la suma y la resta de números enteros son operaciones inversas (complejización, porque se ven las operaciones desde un punto de vista más avanzado, dentro de la estructura algebraica de un conjunto numérico), conocer la relación de la resta (quitar uno) con la secuencia numérica descendente (simplificación, puede verse la secuenciación numérica como precursor), o conocer que la suma y la resta están vinculadas a la unión de partes como idea que se encuentra en diferentes núcleos matemáticos, como la aritmética o el álgebra (transversal, la idea de unión como idea que relaciona distintos contenidos matemáticos).

El conocimiento de las formas de hacer matemáticas, tales como definir, hacer conjeturas, demostrar, y resolver problemas, entre otros, forman parte del *Conocimiento de la Práctica Matemática*.

El *Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática* comprende el conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para enseñar un contenido, el conocimiento del potencial y limitaciones de distintos recursos (como los relativos a la tabla 100, las regletas, los ábacos o los bloques base 10, para enseñar la resta) y el conocimiento sobre teorías (personales o institucionales) de enseñanza (como el conocimiento de los métodos reglado, razonado, intuitivo u orientado a la estructura, en la enseñanza del cálculo- Gómez, s.f.).

Forman parte del *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de la Matemática* el conocimiento de las formas en que los estudiantes interactúan con un contenido matemático (por ejemplo, cómo suelen realizar una resta con objetos), el conocimiento de las motivaciones y expectativas que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a un contenido particular (por ejemplo, la resolución de problemas suele provocar rechazo), sus dificultades y errores (por ejemplo, relativos a los distintos tipos de los problemas aritméticos de enunciado verbal asociados a la resta), junto con el, conocimiento del profesor de teorías personales o institucionales sobre el aprendizaje (como el conocimiento de los niveles de dominio de la secuencia numérica, que explica cómo se aprende dicha secuencia, o la teoría de Sfard sobre cómo se aprenden nociones matemáticas abstractas).

Por último, el conocimiento de expectativas de aprendizaje por parte del profesor (como con qué números es adecuado trabajar en primer ciclo), del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (si es esperable que un alumno de 2º de primaria use como herramienta propia la multiplicación en lugar de la suma repetida, una vez aprendida), y de la secuenciación de temas anteriores y posteriores (por ejemplo, si se debe tratar antes la suma que la resta) forman parte del KMLS.

Descripciones más extensas de los subdominios del MTSK y su generación pueden encontrarse en Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) (donde se presenta también un análisis detallado del conocimiento de un profesor empleando el MTSK) o en Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro y Muñoz-Catalán (2018).

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO QUE MOVILIZA ROSA EN SU NARRATIVA CON MTSK

Hemos realizado un análisis de la narrativa en dos fases. En la primera, hecha desde una perspectiva lineal (cronológica), unidad por unidad, hemos identificado unidades referidas a diferentes categorías de diferentes subdominios de MTSK que hemos ido asociando a un tópico concreto (la resta, procedimientos asociados, relaciones con los algoritmos convencionales, sistema de numeración decimal y recursos para la resta; ver ejemplo en Tabla 1), diferenciando entre evidencias, indicios y oportunidades. Después, y dado que los indicadores de estas categorías emergían en varios momentos de la narrativa, hemos reorganizado la información desde esos mismos tópicos (Tabla 2). Así, el primer análisis (Tabla 1) refleja el carácter holístico del conocimiento (una unidad, diferentes subdominios) al que podemos acceder con MTSK, y está ligado al propio discurso de Rosa, mostrando las categorías de los diferentes subdominios asociados a un determinando fragmento de este. En el segundo nivel de análisis (Tabla 2), el organizador es el contenido específico que asociamos al conocimiento que moviliza Rosa, que conjuga los diferentes fragmentos en los que ha ido apareciendo y muestra el potencial de MTSK para reflejar la complejidad del conocimiento asociado a un tema.

Para promover una lectura fluida del análisis no hemos usado en el mismo las siglas que representan los distintos subdominios de MTSK que aparecen en las Tablas 1 y 2; en su lugar, hemos mostrado en cursiva el nombre de la categoría o subdominio.

Tabla 1. Ejemplo de análisis por unidades

Unidad	MTSK	Observaciones (tópico)
[22-27][a] […] Para la realización de la actividad, en primer lugar, el alumnado, haciendo uso de su tabla, cuenta cuántos números hay entre otros dos, respondiendo a preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b?* Seguidamente, resuelve restas sin llevar en la pizarra, pudiendo utilizar la tabla de la pizarra usando la estrategia de conteo que previamente han practicado para comprobar sus respuestas.	*KoT- Fenomenología y aplicaciones*. Conoce el significado de la resta como cuánto falta [evidencia]	LA RESTA
	KoT- Procedimientos ¿cómo se hace? Identifica como estrategia el conteo para calcular restas en situaciones de cuánto falta [evidencia]	PROCEDIMIENTO de cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor
	KMT- Recursos. Conoce el uso de la tabla para ver cuántos hay desde un número a otro [evidencia]	
	KoT - Procedimientos ¿cómo se hace? Diferencia entre cómo proceder en restas con y sin llevar [indicio]	PROCEDIMIENTO algoritmos convencionales de resta
	KoT - Procedimientos ¿cuándo se puede hacer? ¿Asocia el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor a restas sin llevada? ¿Qué relación establece entre la llevada y la resta? [oportunidad]	PROCEDIMIENTO de cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor
	KoT - Procedimientos ¿por qué se hace así? ¿Qué relación establece entre los algoritmos convencionales y la resta? [oportunidad]	RELACIONES ENTRE LA RESTA Y LOS AGORITMOS CONVENCIONALES DE RESTA
	KMT- Recursos. ¿Cuál es el papel de la estructura del recurso? ¿Por qué puede interesar esta tabla frente a una recta numérica? (KFLM) [oportunidad]	PROCEDIMIENTO de cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor

Nota. [a][22-27] indica que la unidad, que se reproduce literalmente en la primera columna, se sitúa entre las líneas 22 y 27 de la transcripción.

Tabla 2. Ejemplo de análisis por temas[a]

Tópico	MTSK
LA RESTA	*KoT- Fenomenología y aplicaciones*. Conoce el significado de la resta como cuánto falta [evidencia 22-27; 47-52[b]] [indicio – 28-35; 36-43; 76-79] *KMLS- Secuenciación*. Se debe trabajar primero la resta sin llevada y después la resta con llevada [indicio –28-35] *KoT Registros de representación*. Conoce la forma de expresar algebraicamente el problema asociado a la resta como cuánto queda [evidencia 36-43; 76-79; 120-132]
PROCEDIMIENTO de cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor	*KoT- Procedimientos ¿cómo se hace?* Identifica como estrategia el conteo para calcular restas en situaciones de cuánto falta [evidencia 22-27; 28-35; 36-43] *KoT - Procedimientos ¿cuándo se puede hacer?* ¿Asocia el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor a restas sin llevada? ¿Qué relación establece

	entre la llevada y la resta? [oportunidad 22-27] *KMT- Recursos*. Potencialidad de la tabla para el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor [evidencia 76-79] *KMT- Recursos*. ¿Cuál es el papel de la estructura del recurso? ¿Por qué puede interesar esta tabla frente a una recta numérica? ¿De qué sirve el agrupamiento en decenas? ¿Por qué así y no la primera solo unidades del 1 al 9, la segunda del 10 al 19…? ¿Cómo se construiría? ¿Qué ventajas tendría? ¿Qué ventajas o inconvenientes tiene respecto de la representación en la recta? [oportunidad 22-27; 47-52] *KMT- Recursos*. Uso de la tabla para el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor [oportunidad 104-112] ¿Cómo se usaría en el caso de restas con llevada? *KFLM –Fortalezas y dificultades*. Los alumnos cuentan los números (incluyendo primero y último o ninguno de los dos), en lugar del número de saltos, cuando responde a cuánto le falta a *a* para llegar a *b* [evidencia 55-61; 96-102] *KFLM –Fortalezas y dificultades*. ¿Qué dificultades tendría trabajar con números que se diferencien en más de diez unidades? (KFLM) [oportunidad 22-27; 47-52]

Nota. [a]En el ejemplo mostrado se han seleccionado solo algunos elementos con carácter ilustrativo del procedimiento. [b]En este caso se indican las distintas unidades en las que se encuentran evidencias, indicios u oportunidades en relación con el conocimiento que se identifica.

En la primera parte de su narrativa Rosa describe cómo en el aula se usa la tabla de números 10x10 para responder a la pregunta "¿Cuánto le falta a *a* para llegar a *b*?":

> [22-27] […] Para la realización de la actividad, en primer lugar, el alumnado, haciendo uso de su tabla, cuenta cuántos números hay entre otros dos, respondiendo a preguntas del tipo: *¿Cuánto le falta a a para llegar a b?* Seguidamente, resuelve restas sin llevar en la pizarra, pudiendo utilizar la tabla de la pizarra usando la estrategia de conteo que previamente han practicado para comprobar sus respuestas.

Rosa muestra conocer el *significado de la resta* como cuánto falta (distancia), el *uso de la tabla como recurso* para resolver restas con este significado y reconocer el *conteo como estrategia* de resolución de la situación. Lo anterior evidencia *conocimiento de fenomenología* del tema resta (utilización de la resta en situaciones en las que se plantea *cuánto falta*), así *como conocimiento de recursos* para la enseñanza y de *procedimientos* asociados a la resta como cuánto falta.

En el mismo fragmento, asocia el *procedimiento* descrito (ligado al recurso) a la resolución de restas *sin* llevada. Parece, pues, que diferencia el modo de proceder ante la resta *con* y *sin* llevadas[1] (hablaremos en este caso de un indicio de conocimiento, más que de una evidencia) y en este punto emerge su *conocimiento de los algoritmos convencionales* de la resta como eje transversal en toda su narrativa. El análisis de la narrativa de Rosa nos lleva a pensar que en su conocimiento de la resta ocupan un lugar central los algoritmos convencionales o más usuales de la resta (bien sea "llevadas" o "tomar prestado", Maza, 1991, en los que cabe diferenciar restas *con* y *sin* llevada).

En un primer momento pareciera que asocia el *procedimiento* de ir de *a* a *b* con la tabla, exclusivamente, a situaciones de resta sin llevada. Así, los dos primeros objetivos que enuncia asociados a la actividad descrita son [30-33]:

- O1. Asimilar el procedimiento de conteo para realizar restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando.
- O2. Resolver adecuadamente operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar).

En el primer objetivo cabe la duda de cómo este procedimiento preparará para la resta con llevada, y si considera que será válido con este tipo de restas. Más adelante encontramos indicios de que considera adecuado este procedimiento también para restas con llevada:

> *Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que ha alcanzado el objetivo pueda seguir avanzando en su comprensión y/o consolide su aprendizaje. Justifica tu modificación.*
>
> Una vez los niños hayan asentado el procedimiento para realizar operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevada), podría utilizarse el mismo procedimiento para realizar restas con llevada. Si bien, para ello el alumnado deberá reconocer que los números están formados por decenas y unidades (números de dos cifras), por lo que antes de ello trabajaría las descomposiciones canónicas con los bloques multibase. [104-112]

Rosa no hace explícito cómo se usaría la tabla en el caso de situaciones de resta con llevada. Esto ofrece una oportunidad para seguir indagando, a través de entrevistas, en su conocimiento especializado en torno a este tema, para acercarnos a cómo comprende las situaciones de resta, entendida como distancia, ligadas al uso de la tabla y el papel de los algoritmos convencionales en estas. Nos preguntamos si realizaría la resta por cifras, aplicando la llevada o "pedir prestado", y efectuaría la resta correspondiente a cada cifra por el procedimiento antes descrito.

En su interpretación de la situación a través del tamiz de los algoritmos convencionales de la resta, Rosa considera (evidencia) que cuando se introduce la resta, primero deben trabajarse restas *sin* llevada para pasar después a las restas *con* llevada (como se observa en el primer objetivo reproducido arriba). Lo asociamos a *conocimiento sobre la secuenciación de contenidos* en Educación Primaria.

Esto vuelve a observarse cuando se le pide que modifique la tarea inicial para que los alumnos avancen en su aprendizaje, donde propone el uso de regletas:

> Empezaría primero por números de una sola cifra. Por ejemplo, para resolver 5-3 o 5-__= 3, en primer lugar, cogería la regleta del cinco. Seguidamente, con regletas de uno, primero les haría hacer que comprueben que el 5 está formado por cinco unidades. Luego, comprobarían lo mismo con la regleta del dos. A continuación, colocarían la regleta del dos sobre la del cinco y, con regletas de uno, contarían cuántas necesitan para llegar a cinco, o bien, buscarían qué regleta necesitan para llegar a 5. Luego, lo haría con números de una decena, por ejemplo, 18-9 o 18-__=9. Para ello, utilizaría una regleta de 10 y una de 8, colocadas una al lado de la otra formando el número 18. Después, pondrían la de 9 encima y buscarían qué regleta necesitan para tener 18. [123-132]

Después de proponer restas con números de una cifra (sin llevada), propone una resta con llevada. Nos gustaría saber (oportunidad para seguir investigando) si Rosa es consciente de que el ejemplo que escoge (18-9), además de ilustrar una resta con números de dos cifras (como expresa –"números de una decena"), corresponde a una resta con llevada. En su resolución, coherentemente con el uso del material, no influye la llevada. Este fragmento muestra su *conocimiento de otro recurso* (las regletas) para representar y resolver situaciones del tipo cuánto falta y su conocimiento del propio recurso en cuanto a su estructura y uso. Asimismo, nos ofrece una oportunidad para preguntar a Rosa sobre por qué funcionan las regletas para ilustrar la situación de resta como cuánto falta y si hay procedimientos de resta (como el ilustrado con las regletas) en los que no tenga sentido la estructura de los algoritmos convencionales (en relación con la diferencia entre situaciones con y sin llevada). Su respuesta nos permitiría enlazar con la relación que establezca entre el uso de la tabla y los algoritmos convencionales.

En el fragmento anterior [123-132] se observa cómo Rosa *representa* numéricamente la situación de cuánto falta (5-3 o 5-__= 3, 18-9 o 18-__=9). También lo expresa algebraicamente de modo general (- *¿Qué contenido/s se trabajan en la actividad?* a+__=b como sinónimo de *a-b* [36-37]). En otra ocasión usa la misma expresión algebraica a+__=b como sinónimo de *a-b* ([76-79]). No sabemos si Rosa es consciente de las implicaciones matemáticas que tiene el uso de las mismas letras en las dos expresiones, y de que de este modo de la primera expresión no se llega a la segunda sino a *b-a*.

Rosa incluye entre los objetivos y contenidos de la sesión: “Reconocer los números hasta el 100” [O3 35], aprender la “serie numérica” [C5 42] y la “Identificación del valor posicional de las cifras y números de la resta” [C6 43]. Aquí observamos de nuevo, además de la influencia de los algoritmos convencionales de la resta (en [43]), cómo influye su conocimiento del *sistema de numeración decimal* en su comprensión de la situación. Rosa parece reconocer (indicio) la posicionalidad como uno de los *fundamentos* de los algoritmos convencionales de la resta, lo que llevaría a asociar el *procedimiento* de la tabla para la resolución de situaciones de cuánto falta a la posicionalidad. En lo anterior, identificamos también que Rosa parece conocer *objetivos de aprendizaje propios del primer ciclo* de Primaria ligados a la numeración. Más adelante encontramos otros indicios de que identifica la posicionalidad (el reconocimiento del valor posicional) como base de los algoritmos de la resta (el citado antes [104-112], en el que señala que trabajaría las descomposiciones canónicas previamente a las restas con llevada, y el que sigue).

¿Qué comprende el alumnado de los conceptos matemáticos implicados? Muestra evidencias de esa comprensión.

> Al ser capaces de realizar el procedimiento de conteo, los niños demostraron conocer la serie numérica y números hasta el 100. Por otro lado, aquellos que fueron capaces de resolver correctamente las restas de la pizarra demostraron haber comprendido el valor posicional de las cifras y números de la resta y el significado de sustracción. [90-95]

En las líneas [67-72] Rosa explica cómo se realiza una resta por cifras (columnas en el algoritmo convencional) usando en cada columna la tabla para contar cuántos faltan del menor al mayor (en restas sin llevada). Se ve clara la relación entre la posicionalidad y el uso de la tabla:

> Una vez realizada esta parte de la actividad, la profesora plantea una serie de restas sin llevar en la pizarra que los alumnos han de resolver. Para resolverlas, los niños han de contar primero cuántos números le faltan al número de unidades del sustraendo para llegar al número de unidades del minuendo y luego, contar cuántos números le faltan al número de decenas del sustraendo para llegar al número de decenas del minuendo, pudiendo utilizar la tabla que tienen a su disposición en la pizarra.

Además de la *posicionalidad*, Rosa identifica la base diez como otro de los pilares de los algoritmos convencionales de la resta (como puede apreciarse en el fragmento [104-112] reproducido anteriormente) y evidencia conocer que la *descomposición canónica* de un número natural refleja *el valor posicional y la base 10* (igualmente en [104-112]). Preguntaríamos a Rosa, como oportunidad para acercarnos a cómo comprende esta situación, si considera que las regletas y el uso de la tabla se basan en el valor posicional.

La estudiante para maestro muestra conocer algunas *dificultades de los alumnos con el procedimiento de uso de la tabla para resolver cuánto falta*: en el uso de la secuencia numérica (con los nombres de algunos números o con el orden de estos) o en contar los números en lugar del número de saltos (incluyendo primer y último número o ninguno de los dos) [56-61, 96-102]. Lo anterior son evidencias del conocimiento de *fortalezas y dificultades en el aprendizaje del contenido*. Por otro lado, las dificultades asociadas al aprendizaje de la secuencia numérica se corresponden con los *niveles de dominio de la secuencia numérica*, lo que identificamos como un indicio de que pudiera conocer esta referencia como *teoría de aprendizaje*. Los *bloques multibase son un recurso* que Rosa sabe que sirven para representar la descomposición canónica de un número natural [104-112].

En el aprendizaje de la numeración, Rosa considera que se debe trabajar por decenas (primero se deben trabajar los números hasta la primera decena, luego hasta la segunda, hasta la tercera…), lo que mostraría *conocimiento de expectativas de aprendizaje*:

> *Modifica la tarea-actividad inicial propuesta por el/la maestro/a para que el/la alumno/a que haya tenido dificultades para alcanzar el objetivo de aprendizaje previsto lo pueda alcanzar. Justifica tu modificación.*
>
> En primer lugar, para aquellos alumnos que presentan dificultades en el reconocimiento y el recitado de los números hasta el 100, considero que lo primordial sería, en primer lugar, trabajar dichos aspectos. Para ello, llevaría a cabo la tarea planteada por la maestra primero con números hasta el 10, a continuación, hasta el 20, luego hasta el 30...

El análisis anterior muestra nuestra interpretación del conocimiento especializado movilizado por Rosa en su narrativa. Esta sería la base para plantear otras cuestiones, además de las ya citadas, para indagar más sobre su conocimiento. Por ejemplo, sería interesante comprender si, para Rosa, la estructura de la tabla puede condicionar el uso del procedimiento (¿Sería igual usar una recta numérica? ¿De qué sirve, si es el caso, el agrupamiento en decenas? ¿Presentaría alguna dificultad añadida restar números que se diferencian en más de diez unidades?).

Como hemos ido señalando, el conocimiento de Rosa de las situaciones de distancia con el uso de la tabla parece estar mediado por su conocimiento de los algoritmos convencionales de la resta y por el del Sistema de Numeración Decimal. El uso del recurso que protagoniza la narrativa (la tabla 100), de los demás recursos que muestra conocer (bloques multibase, regletas) y los demás conocimientos evidenciados, parecen estar subordinados al aprendizaje de los citados algoritmos y, en su caso, de las características del sistema de numeración decimal, no por su interés intrínseco, sino por la dependencia que del mismo tienen los algoritmos. Se evidencia, por tanto, un conocimiento marcadamente procedimental. Con la narrativa de Rosa no podemos diferenciar si el peso que atribuye a los algoritmos convencionales de la resta corresponden a un conocimiento de los estándares de aprendizaje del contenido (sabe que se diferencia entre la resta sin y con llevada y se trabajan los algoritmos convencionales correspondientes) o a conocimiento matemático (que como ya dijimos, puede identificarse con el conocimiento matemático escolar). Sería interesante diseñar instrumentos de recogida de información complementarios para indagar sobre ello.

CONCLUSIONES

Conviene subrayar la necesidad de más información para concluir sobre el nivel de profundidad del conocimiento de Rosa; nos gustaría saber, por ejemplo, si conoce ventajas y limitaciones del uso de la tabla, cómo la usaría para restas con llevada, si sabe por qué funcionan la regletas para ilustrar la situación de resta como cuánto falta, si las regletas se fundamentan en el valor posicional, si conoce las dificultades que tendría trabajar la tabla 100 con números que se diferencian en más de diez unidades, si conoce el papel de la estructura del recurso, si sabe por qué puede interesar esta tabla frente a una recta numérica, de qué sirve el agrupamiento en decenas. Como se ha indicado más arriba, los instrumentos de obtención de información convertible en datos están estrechamente vinculados a la finalidad de la investigación. Por ello, analizar con el MTSK la narrativa de Rosa ha implicado incluir suposiciones, en términos de indicios y oportunidades, que requerirían ser complementadas con otras fuentes de información. No obstante, este análisis (con MTSK) nos ha permitido, a través del uso de las herramientas que el modelo propone (indicadores, categorías, y subdominios), identificar elementos de conocimiento que trascienden el propósito investigador para alcanzar su aplicación en contextos formativos, como el contexto en el que se ha producido la narrativa. En este contexto cabe preguntarse, por ejemplo, cómo podríamos seguir indagando sobre el conocimiento de Rosa de modo que, a su vez, pudiera ser una vía de enriquecimiento de su conocimiento especializado y de su mirada profesional de la práctica (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018). En este sentido, las aquí señaladas como oportunidades de investigación podrían convertirse en oportunidades formativas para Rosa.

Episodios, extractos o unidades de información como las que hemos analizado (con las correspondientes suposiciones añadidas) son un buen ejemplo de la complejidad del conocimiento.

El MTSK pretende captar esa complejidad a partir de la combinación de un análisis detallado con una mirada global. El ser humano es complejo. El profesor, como tal, lo es, así como su conocimiento. Cualquier intento por captar la complejidad de dicho conocimiento debe ser consciente de sus limitaciones, al tiempo que procurar aportar elementos para acercarse a entenderlo. El mapa conceptual de la Figura 1[2] intenta mostrar dicha complejidad junto con las relaciones entre subdominios y el núcleo central que parece dirigir el discurso de la narrativa.

En nuestra interpretación, como ya se ha señalado, el conocimiento de los algoritmos convencionales de la resta vertebra todo el conocimiento que Rosa muestra en su narrativa. Los procedimientos que muestra el análisis (cómo restar, por qué se puede restar así, cuándo se puede efectuar la resta de esa forma), que, junto con los principios del sistema de numeración decimal y los registros algebraicos de representación, componen los únicos elementos del conocimiento matemático (del subdominio de *conocimiento de los temas*), parecen estar sostenidos por su relación con el uso de los citados algoritmos, en situaciones con y sin llevadas, algoritmos que suelen ocupar un espacio importante en la enseñanza de la resta. Los elementos que emergen del conocimiento didáctico del contenido, como son las dificultades de aprendizaje de la secuencia numérica, sus niveles de dominio o las dificultades en el uso de la tabla “cien” (todos ellos del subdominio de *características del aprendizaje de las matemáticas*), el conocimiento sobre potencialidades y limitaciones de los recursos (la propia tabla “cien”, los bloques base 10 o las regletas -del subdominio del *conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas*) y el conocimiento del paso de la resta sin llevada a la resta con llevada o los conocimientos sobre secuenciación de contenidos o expectativas de aprendizaje (del subdominio del conocimiento de los *estándares de aprendizaje de las matemáticas*), parecen tener como referente los citados algoritmos convencionales de la resta, un aspecto que se ha descrito en algunos estudios con maestros en formación o en ejercicio (Blanco, 1996; Salinas, 2003). MTSK nos permite comprender el conocimiento puesto en juego y su organización interna, lo que a su vez nos ayuda a entender aquellos aspectos que para Rosa pueden ser claves en su enseñanza.

Rosa muestra conocimiento del contenido a la vez que de cómo los niños se relacionan con ese contenido matemático. Podría parecer que el conocimiento del contenido está subordinado al conocimiento que se moviliza en relación directa con los estudiantes, como el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas o de las características de aprendizaje de las matemáticas. No es así; es obvio que existen relaciones entre ellos, pero esas relaciones no son de jerarquía. MTSK ayuda en la comprensión de esas relaciones.

La fuerza del conocimiento de los algoritmos convencionales de la resta en la interpretación de la situación por parte de Rosa abre una interesante vía de discusión en un contexto formativo: analizar con los estudiantes para maestro los límites y las implicaciones de procedimientos, conceptualizaciones, recursos y estrategias de enseñanza. En este caso, ¿la llevada que se asocia a la resta es natural de las situaciones de resta, del concepto en sí, de determinados procedimientos para resolverlas, para su enseñanza? En el mismo sentido, los bloques que son útiles para representar la llevada, ¿son un buen recurso para representar y aprender la resta por procedimientos diferentes de los algoritmos convencionales? Destacamos cómo se puede usar MTSK para reflexionar sobre los posibles elementos de conocimiento que se ven inmersos en dichas situaciones. En ocasiones, estos elementos de conocimiento y sus relaciones proceden de indicios observados en las situaciones analizadas.

Como ha podido verse, no hemos entrado en valorar si los conocimientos detectados son correctos o incorrectos. Coincidimos, por ello, con la perspectiva de Schoenfeld (2010), asociando el conocimiento a la disponibilidad de habilidades de uso en momentos determinados. Esta perspectiva, además, es respetuosa con el profesorado con el que trabajamos, especialmente con los que forman parte del trabajo colaborativo, que no se sienten evaluados por los investigadores. Sin embargo, en el contexto formativo, sí nos proponemos elaborar una propuesta de logro en relación con el conocimiento, incluyendo en su evaluación un análisis de su corrección. Lo anterior conlleva una reflexión profunda para poder pasar de conocimiento deseable a contenidos del programa de formación, lo cual, obviamente, no es inmediato.

Notas

[1]Pensamos que al menos los diferencia curricularmente, como dos contenidos diferentes a enseñar a los alumnos de Primaria a los que corresponden algoritmos diferentes. No sabemos si considera esa diferenciación desde el punto de vista matemático, lo que sería posible porque en ocasiones la matemática que conocen los estudiantes para maestro es la matemática escolar (Santos, 1994).

[2]En la Figura 1, hemos utilizado las elipses para mostrar el conocimiento de los temas (KoT), los rectángulos para el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), los rombos para el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y los romboides para el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Asimismo, cuando el borde de la figura es continuo indica una evidencia, cuando es discontinuo, un indicio, y cuando se trata de una oportunidad utilizamos un globo. De la misma forma, las flechas de trazo continuo indican una relación evidenciada y las de trazo discontinuo un indicio de relación.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2013-44047-P y cofinanciado por el Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Blanco, L. J. (1996). Resolución de problemas aritméticos y formación práctica de los maestros. *Educación Matemática*, *8*(1), 53-64.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L.C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *22*, 185-205.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education* (en prensa).

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(3), 387-404.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM*, *13*, 39-61.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S. y Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: A response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Gómez, B. (s.f.). *Desarrollo histórico de la enseñanza de la Aritmética: el caso de los algoritmos de cálculo*. Universidad de Valencia. Recuperado de https://www.uv.es/gomezb/12Desarrollohistoricode.pdf

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching: a view from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 3325-3326). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marks, R. (1991). When should teachers learn pedagogical content knowledge? *Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, IL.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Salinas, M. (2003). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática VII: Actas de las VII SEIEM* (pp. 339-348). Granada: Universidad de Granada.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2017 online first). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi: 10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Routledge.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education: Selected essays* (pp. 229-272). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Silverman, J. y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511.

Skott, J., van Zoest, L. y Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM*, *45*(4), 501-505.

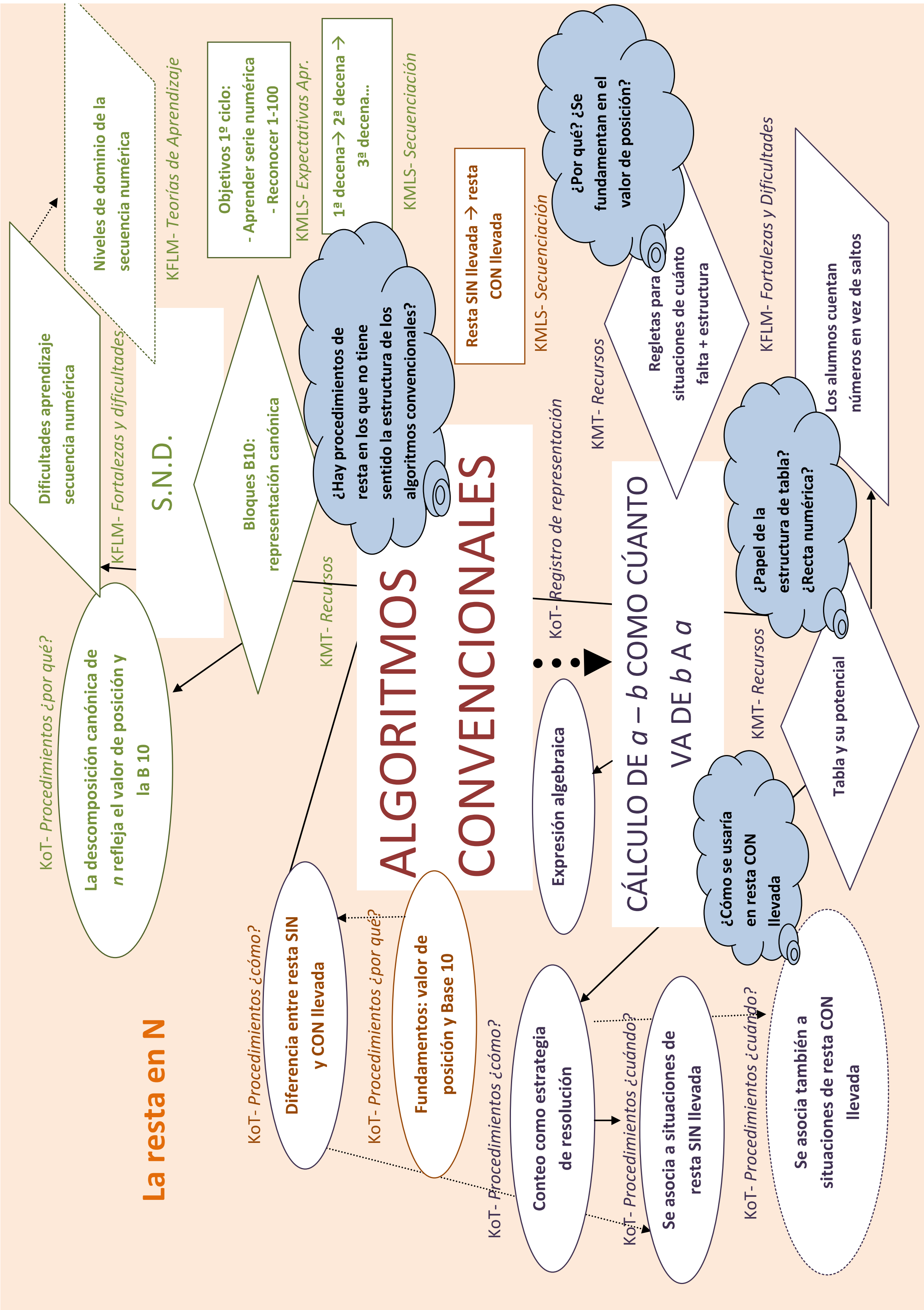


Figura 1. Mapa conceptual del conocimiento de Rosa (Evidencias, indicios y oportunidades)

OPORTUNIDADES QUE EMERGEN DE LA RELACIÓN ENTRE PERSPECTIVAS: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO Y/O COMPETENCIA DOCENTE

Opportunities that emerge from the relationship between perspectives: analysis of knowledge and/or teaching competence

Badillo, E.[a] y Fernández, C.[b]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universidad de Alicante

Resumen

La evolución de la investigación en Educación Matemática en las dos últimas décadas muestra una riqueza de perspectivas teóricas. En particular, en la investigación sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, las diferentes perspectivas teóricas proporcionan herramientas conceptuales, teóricas y metodológicas para abordar la complejidad del análisis del conocimiento, creencias, competencias e identidad profesional del profesor. Esta comunicación analiza nexos y diferencias entre las tres perspectivas teóricas que han abordado el análisis de la narrativa de Rosa (i) Conocimiento Especializado del Profesor (MTSK), (ii) Mirada Profesional y (iii) Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM). Finalmente se discuten las oportunidades que emergen de la relación entre éstas.

Palabras clave: *nexos y diferencias, perspectivas teorías, oportunidades, profesor de matemáticas.*

Abstract

The evolution of research in Mathematics Education in the last two decades shows a wealth of theoretical perspectives. Particularly, in the field of research on mathematics teacher's knowledge and professional development, the theoretical perspectives provide conceptual, theoretical and methodological tools to address the complexity of the analysis of knowledge, beliefs, competencies and professional identity of the teacher. This communication is focused on analyzing links and differences between the three theoretical perspectives that have analyzed Rosa's narrative (i) Specialized Teacher Knowledge (MTSK), (ii) Professional Noticing and (iii) Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies (CCDM). Finally, opportunities that emerge from the relationship between these theoretical perspectives are discussed.

Keywords: *links and differences, theoretical perspectives, opportunities, mathematics teacher.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas han pasado de centrarse en el estudio de la complejidad del alumnado y la epistemología de los tópicos matemáticos al estudio del profesorado, otorgándole un papel protagónico y determinante en la relación didáctica (Artigue, 2013). Las investigaciones centradas en el profesor, inicialmente se interesaron en el análisis de sus creencias, concepciones, conocimientos y práctica profesional, caracterizándolos para comprender sus interrelaciones, cómo se construyen y cómo se desarrollan (Even y Ball, 2009).

Recientemente, la investigación en el análisis del conocimiento y las competencias profesionales del profesor de matemáticas en formación, ha aumentado de forma considerable. Esto puede estar influenciado por la madurez y el avance de los resultados de las investigaciones sobre el profesor, con las aportaciones de las diferentes perspectivas teóricas, que muestran que la tarea de enseñar

Badillo, E. y Fernández, C. (2018). Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: Análisis del conocimiento y/o competencia docente. L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). Gijón: SEIEM.

matemáticas requiere del desarrollo de conocimientos y competencias profesionales específicas para el profesor de matemáticas (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo y Climent, 2011; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Llinares, 2012; Mason, 2002; Shulman, 1986; van Es y Sherin, 2008).

Por otra parte, se constata el incremento de espacios de discusión sobre la comparación y articulación de marcos teóricos (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013; Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016; Haspekian, Bikner-Ahsbahs y Artigue, 2013; Radford, 2008; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017; Weber, Walkington y McGalliard, 2015). Concretamente, uno de los grupos de trabajo del CERME ha dedicado sesiones a reflexionar sobre "Diferentes aproximaciones teóricas y perspectivas de investigación en Educación Matemática" (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger, Arzarello, Bosch y Lenfant, 2008). Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) consideran que la articulación de teorías para dar respuesta a problemas de investigación complejos, es un indicador de avance y madurez del campo de investigación en Educación Matemática. Estos autores resaltan que la diversidad teórica es una fuente de enriquecimiento y un gran desafío para la Educación Matemática, al tiempo que ven la articulación entre teorías como un punto de partida para avanzar en el desarrollo de los cuerpos teóricos de nuestra disciplina científica.

En esta comunicación nos centraremos en analizar relaciones entre tres perspectivas teóricas sobre el conocimiento y aprendizaje del profesor de matemáticas, con amplias aportaciones a nivel nacional e internacional: Competencia docente mirar profesionalmente (*Professional noticing*), Conocimiento Especializado del Profesor (*MTSK*) y Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (*CCDM*).

NETWORKING ENTRE TEORÍAS: UNA OPORTUNIDAD PARA AVANZAR EN LA INVESTIGACIÓN CENTRADA EN EL PROFESOR

Una condición necesaria para promover una red entre las teorías es proporcionar nuevos espacios conceptuales donde las teorías y sus conexiones se convierten en objetos de discurso e investigación (Radford, 2008). Estos espacios de diálogo entre teorías permiten la objetivación y referencia a nuevas entidades conceptuales que se conectan, a través del "combinar" o "sintetizar" constructos teóricos o herramientas analíticas, para dar cuenta con mayor rigor y profundidad de un fenómeno didáctico o de un problema de investigación (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). En el caso de la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro, el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra en la fase de observación durante el periodo de prácticas de enseñanza desde tres perspectivas teóricas, permite generar puntos de encuentros, de divergencia y de complementariedad que pueden enriquecer la línea de investigación sobre la caracterización del conocimiento y competencias profesionales del profesor, y sobre cómo se desarrollan en entornos de formación inicial y permanente.

Raford (2008) señala que el papel del lenguaje y, de manera particular, del metalenguaje al conectar dos o más teorías no es el de borrarlas a través de la asimilación uniforme. Por el contrario, el *networking* entre teoría es una estrategia que debe asegurar posibles formas de conexiones de los diferentes elementos o constructos heterogéneos de cada perspectiva para enriquecer el análisis del problema abordado. En este sentido, Prediger et al. (2008) resaltan dos características de las estrategias de red a la hora de vincular marcos teóricos. Por un lado, consideran que es necesario respetar el pluralismo y/o modularidad de enfoques teóricos autónomos; y, por otro lado, resalta la necesidad de reducir la multiplicidad desconectada de enfoques teóricos en la disciplina científica. Como una forma de comenzar la interconexión de teorías proponen tres estrategias, dependiendo del objetivo: (1) comprender cada teoría y hacer que las propias teorías sean comprensibles; (2) comparar y contrastar, que implica caracterizar similitudes y diferencias entre ellas; y, (3) hacer una coordinación local de los elementos de diferentes teorías de una manera más o menos armoniosa para investigar un cierto problema de investigación.

Somos conscientes de que incluso la conexión más simple entre teorías requiere diálogo. Sin embargo, un diálogo entre teorías es mucho más complejo de lo que puede parecer a primera vista. Raford (2008) afirma que el diálogo entre teorías requiere de un esfuerzo para ser entendidas y para entender lo que dice la otra teoría. Al menos en principio, la estrategia de *networking* de "comparación" y "contraste" entre teorías es siempre posible, puesto que es factible y accesible buscar similitudes y/o diferencias. Sin embargo, se considera que son más complicadas las estrategias de "coordinación entre teorías" en la búsqueda de la "coordinación local" de los elementos conceptuales o para "sintetizar teorías" (Prediger et al., 2008).

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, en esta comunicación proponemos un espacio de diálogo entre tres teorías usadas para analizar un mismo conjunto de datos: Competencia docente mirar profesionalmente (*Professional noticing*), Conocimiento especializado del profesor (*MTSK*) y Conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (*CCDM*). Para ello, partimos del análisis de las herramientas que ofrecen estas tres perspectivas teóricas, intentando explicitar nexos y divergencias que emergen del uso de las herramientas en el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra cuando describe e interpreta una situación de aula (narrativa de Rosa). A continuación, en primer lugar, nos centraremos en las relaciones entre los constructos y herramientas del MTSK y la Competencia Mirar Profesionalmente. Posteriormente, abordaremos las relaciones entre el MTSK y el CCDM. Finalmente, se relacionan los constructos y herramientas del CCDM y la Competencia Mirar Profesionalmente.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR (MTSK) Y COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

Sherin (2007) describe "profesional visión" (mirar profesionalmente) como dos principales procesos: atender selectivamente y razonar basándose en el conocimiento (*knowledge-based reasoning*). El primer proceso requiere la habilidad de atender a los aspectos relevantes de una situación de enseñanza-aprendizaje. El segundo proceso requiere razonar sobre los aspectos identificados para interpretarlos. En este sentido, la competencia mirar profesionalmente implica el uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de la matemática para determinar lo que es relevante de una situación de enseñanza-aprendizaje e interpretar la situación estableciendo relaciones con ideas teóricas (conocimiento teórico). Por tanto, la competencia mirar profesionalmente implica que los profesores/maestros usen su conocimiento (Stürmer, Könings y Seidel, 2013) y que conecten el conocimiento y la práctica profesional (Seidel, Stürmer, Prenzel, Jahn y Schäfer, 2017).

En particular, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, implica tres destrezas: atender a las estrategias de los estudiantes; interpretar su comprensión; y, decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Para atender a las estrategias de los estudiantes es necesario identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes. Interpretar la comprensión requiere coordinar lo que se ha identificado (atender) con lo que se conoce sobre la comprensión matemática de un concepto particular (es decir, establecer relaciones con ideas y principios teóricos). Por tanto, se requiere de un conocimiento que permita explicar los procedimientos usados por los estudiantes diferenciando e interpretando su corrección, explicar el origen de los errores y distinguir diferentes niveles de comprensión (conocimiento sobre cómo un concepto matemático se desarrolla a lo largo del tiempo y sus conexiones con otros conceptos matemáticos). Desde la perspectiva del MTSK, este conocimiento estaría relacionado con el *Conocimiento de los temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* (KSM), *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM) y *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM).

Finalmente, decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes implica usar conocimiento sobre qué aspectos del concepto son más fáciles o más difíciles para los estudiantes, sobre los modelos de progresión del aprendizaje (conocimiento sobre cómo un concepto matemático se desarrolla a lo largo del tiempo) y sobre materiales y recursos. Desde la perspectiva del MTSK, este conocimiento estaría relacionado con el *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), el *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) y el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS). Cabe mencionar que, aunque se han relacionado algunos subdominios de conocimiento del MTSK con las diferentes destrezas, no significa que el resto de subdominios no estén implicados en las diferentes destrezas de atender, interpretar y decidir.

Por tanto, la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica la habilidad de usar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido (MTSK) para atender, interpretar y decidir; por lo que las perspectivas teóricas MTSK y Mirada Profesional muestran relaciones (Figura 1). En el estudio de Thomas, Jong, Fisher y Schack (2017) se muestran relaciones entre MKT (Ball et al., 2008) y la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos autores concluyen que hay muchas superposiciones entre la construcción de estos marcos teóricos ya que para hacer interpretaciones del pensamiento matemático de los estudiantes se requiere de un conocimiento matemático especializado -concretamente implica una fuerte conexión con el conocimiento de contenido pedagógico que es uno de los dominios del marco MKT (por ejemplo, *Conocimiento del contenido y estudiantes*; *Conocimiento de contenido y enseñanza*). Sin embargo, afirman que tal conocimiento matemático especializado es necesario, pero, en última instancia, no es suficiente para desarrollar una mirada profesional eficazmente, ya que la mirada profesional no implica solo tener este conocimiento sino usarlo en situaciones prácticas como interpretar y decidir.

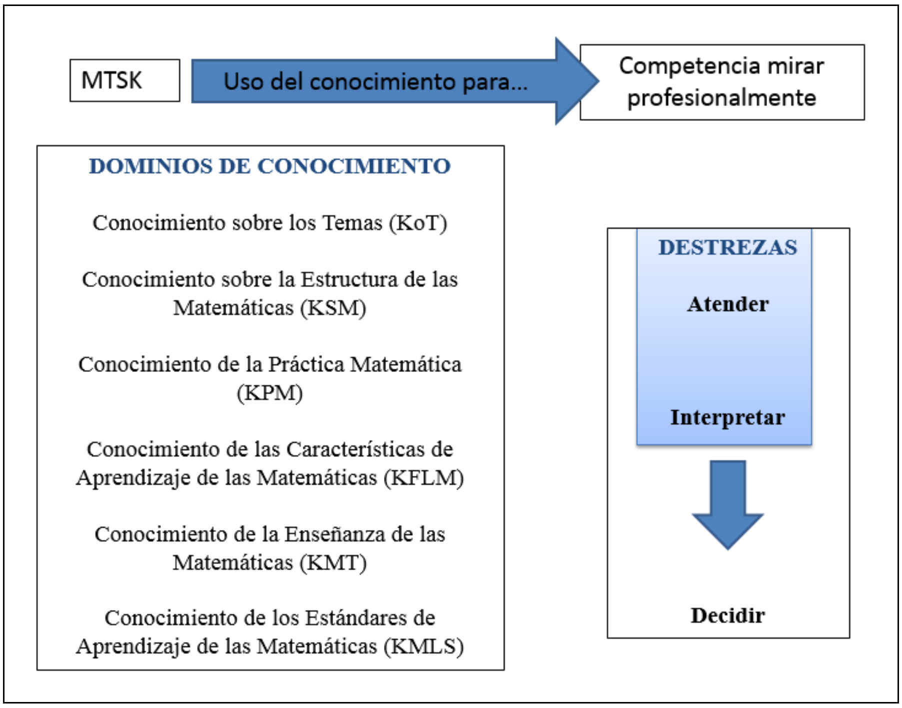


Figura 1. MTSK y la Competencia Mirar Profesionalmente el Pensamiento Matemático de los Estudiantes

Mostramos a continuación ejemplos de estas relaciones utilizando el análisis realizado a la narrativa de Rosa desde ambas perspectivas teóricas (Contreras, Carrillo y Climent, 2018; Llinares, 2018).

En el fragmento de narrativa de la Figura 2, se observa que Rosa tiene el conocimiento de algunas dificultades de los alumnos en el uso de la secuencia numérica (nombres de algunos números) o en contar los números en lugar del número de saltos. Esto correspondería a conocimiento de fortalezas y dificultades en el aprendizaje del contenido que es parte del *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (MTSK). Además, las dificultades de la secuencia numérica identificadas por Rosa se corresponden con los niveles de dominio de la secuencia numérica, lo que puede indicar que tiene el conocimiento de esta teoría de aprendizaje. Esto correspondería con el conocimiento sobre Formas de Aprendizaje que es parte también del *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM). Desde la mirada profesional, Rosa identifica respuestas de estudiantes que muestran dificultades y las interpreta identificando que “no tienen asentado el conteo (confusión de los números)” y “no son capaces de llevar la pista para determinar los números contados de *a* hasta *b*”. Desde esta perspectiva, Rosa usa su conocimiento sobre el aprendizaje del conteo (*Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM)) para poder identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

<table>
<tr><td colspan="2">Fragmento de la narrativa de Rosa. “La actividad se divide en dos partes. En la primera de ellas, la profesora pregunta a los alumnos cuánto le falta a un número para llegar a otro, para lo cual, los alumnos, haciendo uso de su ficha, han de poner el dedo índice sobre el primer número mencionado y contar el número de "saltos" que dan hasta llegar al otro número. Por ejemplo, ¿Cuánto le falta al 5 para llegar al 9? Los niños ponen entonces su dedo sobre el número 5 y van contando saltos hasta llegar al 9.
Algunos alumnos muestran dificultades en esta parte de la actividad, bien por no reconocer los números que dice la maestra (por ejemplo, una alumna confunde el 13 con el 30), no tener asentado el conteo o realizar el procedimiento contando, en lugar de los saltos entre los dos números dictados por la maestra, los números que hay entre estos dos (ej. del 5 al 9 hay tres porque entre estos dos números hay uno (6), dos (7) y tres (8)), o bien, comenzar a contar desde el primer número incluyéndolo (ej. del 5 al 9 hay cinco porque cuento uno (5), dos (6), tres (7), cuatro (8) y cinco (9))”</td></tr>
<tr><th>MTSK</th><th>Mirada profesional</th></tr>
<tr><td>“La estudiante para maestro muestra conocer algunas dificultades de los alumnos con el procedimiento de uso de la tabla para resolver cuánto falta: en el uso de la secuencia numérica (con los nombres de algunos números o con el orden de estos) o en contar los números en lugar del número de saltos (incluyendo primer y último número o ninguno de los dos). Por otro lado, las dificultades asociadas al aprendizaje de la secuencia numérica se corresponden con los niveles de dominio de la secuencia numérica, lo que identificamos como un indicio de que pudiera conocer esta referencia como teoría de aprendizaje” (Contreras et al., 2018)</td><td>“Rosa describe algunas respuestas de los estudiantes para mostrar las dificultades que estos afrontaban con la secuencia numérica y las estrategias de conteo. En particular sobre el reconocimiento de los números y sobre el procedimiento de llevar la “pista” para determinar los números contados de a hasta b” (Llinares, 2018)</td></tr>
</table>

Figura 2. Ejemplo de uso del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (dominio KFLM del MTSK) para interpretar el pensamiento de los estudiantes (destreza interpretar-noticing)

En el fragmento de narrativa de la Figura 3, se observa que Rosa tiene el conocimiento sobre una secuenciación de contenidos en Educación Primaria (primero las restas sin llevar y después las restas con llevadas). Este conocimiento es parte del *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (dominio KMLS del MTSK). Desde la mirada profesional, Rosa, teniendo en cuenta que los alumnos no habían tenido dificultades con la actividad propuesta, propone continuar con las restas con llevadas. Aunque no propone una actividad específica que ayude a los estudiantes a seguir progresando en su comprensión, define un nuevo objetivo de aprendizaje determinado por la organización del currículum. En esta ocasión, Rosa está usando el conocimiento sobre la organización del currículum para decidir cómo continuar.

<table>
<tr><td colspan="2">Fragmento de la narrativa de Rosa. “Una vez los niños hayan asentado el procedimiento para realizar operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevada), podría utilizarse el mismo procedimiento para realizar restas con llevada”.</td></tr>
<tr><th>MTSK</th><th>Mirada profesional</th></tr>
<tr><td>“Rosa parece considerar (indicio) que cuando se introduce la resta, primero deben trabajarse restas sin llevada para pasar después a las restas con llevada. Lo asociamos a conocimiento sobre la secuenciación de contenidos en Educación Primaria” (Contreras et al., 2018)</td><td>“Con relación a los niños que Rosa asume que no tienen dificultades, el foco de atención sobre lo que hacer a continuación adopta una perspectiva curricular. Así el foco se sitúa en la realización de restas llevando y en el mecanismo del algoritmo […] Aunque esta decisión de acción, no es una tarea específica se apoya en la identificación de un nuevo objetivo de aprendizaje determinado por la organización del currículum” (Llinares, 2018)</td></tr>
</table>

Figura 3. Ejemplo de uso del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (dominio KMLS del MTSK) para decidir cómo continuar (destreza decidir-noticing)

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR (MTSK) Y CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS (CCDM)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), ha desarrollado una perspectiva teórica de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticos (CCDM) para analizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018). Esta perspectiva permite el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Sin embargo, para buscar nexos con la perspectiva del MTSK nos centraremos en la parte de los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM), que según esta perspectiva pueden organizarse de acuerdo a las dimensiones *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico-matemática*. La dimensión *matemática* hace referencia a los conocimientos que necesita construir un profesor sobre las matemáticas escolares a enseñar (Figura 4). Es decir, al conocimiento que permite a los profesores resolver tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que impartirán clase (conocimiento común-CMC) y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativo con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (conocimiento ampliado). La dimensión *didáctica* de los conocimientos necesarios para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, requieren un conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos. Así proponen seis subcategorías para caracterizar el conocimiento *didáctico-matemático* que usa el maestro/profesor al describir y explicar las prácticas docentes: (1) *Faceta epistémica* (CFE), relacionada con el conocimiento especializado de la dimensión *matemática* (uso de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución de problemas y significados parciales de un objeto matemático); (2) *Faceta cognitiva* (CFC), relacionada con el conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (dificultades, errores, conflictos, aprendizaje, etc.); (3) *Faceta afectiva* (CFA), se refiere a los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes; (4) Faceta *interaccional*, relacionada con el conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (profesor-estudiantes, estudiante-estudiante, estudiante-recursos, etc.); (5) *Faceta mediacional* (CFM), relacionada con el conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza; y, (6) *Faceta ecológica* (CFEC), relacionada con el conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes. Finalmente, la dimensión *meta didáctico-matemática* se focaliza en los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su propia práctica o sobre la práctica de otros.

Por su parte, la perspectiva teórica del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propone herramientas y constructos teóricos para caracterizar el conocimiento que un maestro/profesor pone en juego en el diseño, gestión, evaluación y análisis de la práctica. El MTSK asume que el conocimiento de los profesores de matemáticas es especializado en su globalidad y no se puede separar del contexto del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el que emerge (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017). El grado de especialización del conocimiento afecta a todos los subdominios y las relaciones entre ellos. Así, definen dos dominios del conocimiento especializado: (1) Conocimiento profundo de la matemática elemental (KM) que incluye *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la Práctica Matemática (*KPM) y *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* (KSM); y, (2) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), entendido como una yuxtaposición de conocimiento pedagógico y conocimiento del contenido matemático, incluye *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS).

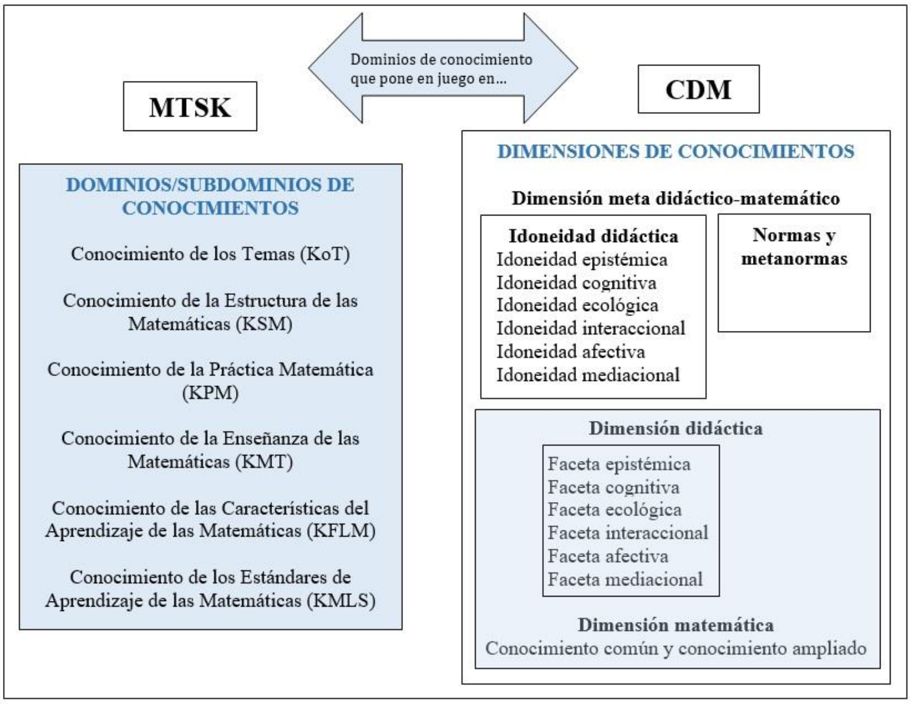


Figura 4. Dominios y subdominios del conocimiento del MTSK y el CDM para describir y explicar el conocimiento que usa Rosa en la Narrativa

En el fragmento de narrativa de la Figura 5, desde del CDM, se considera que Rosa tiene un *Conocimiento Común* (CMC) relacionado con la definición de resta que le ayuda a asociar los objetivos de aprendizaje con la realización de un conjunto de prácticas (implícitamente *conocimiento ampliado*). Igualmente considera que evidencia un conocimiento *didáctico-matemático* que le permite identificar aspectos epistémicos en las prácticas; por tanto, muestra evidencias de la *faceta epistémica* (CFE) que relaciona con el conjunto de prácticas, centradas en la aplicación correcta de los procedimientos de conteo, la resta sin llevadas y el uso de las representaciones simbólica de los números hasta el 100. También consideran que Rosa muestra aspectos de la *faceta cognitiva* (CFC) cuando hace referencia explícita al aprendizaje de los alumnos en relación a la resta; y, de la *faceta ecológica* (CFEC) cuando habla de la secuenciación de los contenidos a partir de su conocimiento sobre el currículo y la progresión de aprendizaje de los contenidos.

Desde el MTSK, se considera que Rosa pone en juego su conocimiento sobre *procedimientos* relacionados con el *Conocimiento de los Temas* (KoT). Por una parte, se señala que Rosa evidencia conocimiento de *procedimientos* cuando identifica la estrategia del conteo para calcular restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando, al tiempo que resaltan que hay indicios de que propone como adecuado este *procedimiento* también para restas con llevada. Por otro lado, consideran que la definición que hace Rosa del segundo objetivo es una oportunidad para seguir indagando en su conocimiento sobre *procedimientos*, ya que permitiría profundizar en si realmente asocia el cálculo de la diferencia entre dos números del menor al mayor a restas sin llevar y sobre el tipo de relaciones que se establece entre la llevada y la resta (Contreras et al, 2018). En relación con el conocimiento de Rosa de los *fundamentos*, hay indicios tanto de la influencia del algoritmo convencional de la resta, cuando identifica el valor posicional de las cifras y números de la resta y cuando reconoce la posicionalidad como base de dicho algoritmo; como de su conocimiento sobre el sistema de numeración decimal. Este tipo de *Conocimiento de los Temas* del MTSK, se puede relacionar con las componentes del conocimiento matemático del CDM (conocimiento común y conocimiento ampliado). Sin embargo, una diferencia en este dominio del conocimiento del profesor es que el marco del MTSK no distingue entre el conocimiento común y el ampliado, puesto que consideran que la naturaleza del conocimiento del profesor es especializado al referirse de manera directa a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, y Pino-Fan, 2017). En cuanto a la caracterización del conocimiento didáctico del contenido, desde el MTSK consideran que hay indicios de su *Conocimiento de las Características del aprendizaje de Matemática (*KFML*)*, más concretamente de las *Expectativas de aprendizaje* y de la *Secuenciación de temas*, cuando Rosa parece reconocer la posicionalidad como uno de los *fundamentos* del algoritmo convencional de la resta, lo que llevaría a asociar el procedimiento de la tabla para la resolución de situaciones de cuánto falta a la posicionalidad. Igualmente, evidencia conocimiento de los *Estándares de Aprendizaje de las matemáticas (*KMLS*)* cuando relaciona la definición de las expectativas del aprendizaje con la secuenciación de los temas anteriores y posteriores. En el análisis del fragmento (Contreras et al., 2018), consideran que la naturaleza de este conocimiento especializado es propio de la maestra en cuanto que emerge en el contexto de análisis de una situación de enseñanza y aprendizaje de matemática. Estos subdominios de conocimiento del dominio didáctico del contenido del MTSK que usa Rosa en la Narrativa, se podrían relacionar con algunas de las componentes de la dimensión *didáctica* del CDM. Concretamente, en el análisis realizado por Font et al. (2018), se usan explícitamente algunas herramientas de la faceta *epistémica*, de la faceta *cognitiva* y de la faceta *ecológica*.

<table>
<tr><td colspan="2">Fragmento de la narrativa de Rosa. ¿Cuál/es son el objetivo/s de aprendizaje pretendidos en la actividad (qué es lo que se pretende conseguir con la realización de esta tarea-actividad)? [• Asimilar el procedimiento de conteo para realizar restas sin llevar y prepararles para el de la resta llevando. • Resolver adecuadamente operaciones de sustracción en las que las cifras del minuendo sean mayores que las del sustraendo (restas sin llevar). • Utilizar la estrategia del conteo. • Reconocer los números hasta el 100]”.</td></tr>
<tr><th>MTSK</th><th>CDM</th></tr>
<tr><td>“Rosa incluye entre los objetivos y contenidos de la sesión: “Reconocer los números hasta el 100” [O3 35], aprender la “serie numérica” [C5 42] y la “Identificación del valor posicional de las cifras y números de la resta” [C6 43]. Aquí observamos de nuevo, además de la influencia del algoritmo convencional de la resta (en [43]), cómo influye su conocimiento del sistema de numeración decimal en su comprensión de la situación. Rosa parece reconocer (indicio) la posicionalidad como uno de los fundamentos del algoritmo convencional de la resta, lo que llevaría</td><td>“Rosa responde a la pregunta 2 (sobre objetivos de aprendizaje) considerando que el resultado del aprendizaje del alumno consiste en una lista de prácticas (que se supone el alumno podría realizar en el futuro) (líneas 29-34 de la narrativa). La segunda y la tercera de sus respuestas a esta consigna son prácticas que consisten en aplicar correctamente los procedimientos de conteo y de resta sin llevadas. La última se refiere al uso correcto de las representaciones simbólicas de los números hasta el 100 y la primera puede considerarse en cierta manera equivalente a la tercera. De su respuesta a la consigna 2 se infiere que Rosa tiene un conocimiento matemático común (CMC) que le permite realizar las prácticas que comenta (aunque esta inferencia hay que matizarla a partir de sus respuestas posteriores y ponerla en cuestión, por ejemplo, en la respuesta a la consigna 3 tiene una confusión con la definición de resta).</td></tr>
</table>

a asociar el procedimiento de la tabla para la resolución de situaciones de cuánto falta a la posicionalidad. En lo anterior, identificamos también que Rosa parece conocer objetivos de aprendizaje propios del primer ciclo de Primaria ligados a la numeración. Más adelante encontramos otro indicio de que identifica la posicionalidad como base del algoritmo de la resta:" (Contreras et al., 2018)	Por otra parte, se infiere que Rosa tiene un conocimiento didáctico-matemático que le permite identificar aspectos epistémicos en la actividad realizada por el alumno (en este caso prácticas) (CFE). También se puede considerar que Rosa muestra conocimientos correspondientes a la faceta cognitiva del modelo CDM (CFC) ya que la consigna 2 se refiere a los aprendizajes de los alumnos pretendidos; si nos fijamos en la primera de sus respuestas vemos que está manejando la idea de conocimiento previo; y también a la faceta ecológica (CFEC) del modelo CDM (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal)" (Font et al., 2018)

Figura 5. Ejemplo de la caracterización del Conocimiento que Rosa manifiesta en el fragmento de la Narrativa desde el MTSK y el CDM

COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE Y CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS (CCDM)

Tal y como expone Font et al. (2018) en su trabajo, las herramientas teóricas del modelo CCDM permiten responder a la pregunta: ¿qué conocimientos y competencias docentes ponen en juego los profesores cuando describen, explican y valoran la práctica docente? Este modelo considera dos competencias clave del profesor, la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Con relación al conocimiento, este modelo tiene en cuenta tres grandes dimensiones: (i) matemática que refiere al conocimiento que permite a los profesor resolver problemas o tareas matemáticas (común) y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativos con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (ampliado), (ii) didáctica del CDM que se desglosa en seis categorías: *faceta epistémica*, *cognitiva*, *afectiva*, *interaccional*, *mediacional* y *ecológica*, y (iii) metadidáctica que se refiere al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica, valorar el proceso de instrucción y realizar un rediseño. El núcleo fundamental de la competencia de análisis e intervención didáctica es diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros mediante técnicas de análisis didácticos y criterios de calidad, y está formada por varias subcompetencias: (i) subcompetencia en el análisis de la actividad matemática, (ii) subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje (articulación de las acciones del profesor y los alumnos en torno a una tarea y un contenido determinado), (iii) subcompetencia de análisis normativo y (iv) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción que tiene seis facetas implicadas: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica. "La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza) teniendo en cuenta la circunstancias y recursos disponibles (entorno)" (Font et al., 2018). Un alto grado de idoneidad didáctica implica articular de forma coherente y sistémica los seis criterios de idoneidad comentados anteriormente.

Desde la mirada profesional, se responde a la pregunta cómo usan el conocimiento (matemático y de didáctica de la matemática) los estudiantes para maestro/profesor en tareas profesionales como la de interpretar la comprensión de los estudiantes y la de proponer actividades que ayuden al estudiante en su progreso conceptual. Por tanto, desde esta perspectiva "no se responde al qué conocimiento o qué competencias tienen los maestros", sino responde "al cómo usan el conocimiento para hacer una tarea profesional". Esta perspectiva teórica (competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes) está centrada en desarrollar en los estudiantes para profesor las destrezas de identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes e interpretar la comprensión para proponer futuras actividades que ayuden al estudiante a seguir progresando en su comprensión. Analizando los constructos de ambas perspectivas teóricas, parece que la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene cierta similitud con algunas de la subcompetencias de análisis e intervención didáctica que trata de "valorar" (reflexionar sobre) la propia práctica o la de otros: subcompetencia en el análisis de la actividad matemática, subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje y subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de los proceso de instrucción (en particular, *facetas epistémica* y *cognitiva*) (Figura 6). Así, para poder atender a las estrategias de los estudiantes, los estudiantes para maestro necesitan analizar los elementos matemáticos implicados en la actividad y los que están usando los estudiantes (subcompetencia en el análisis de la actividad matemática). La destreza de interpretar se centra "en el aprendizaje del estudiante", es decir, qué comprensión tiene el estudiante sobre el concepto matemático (subcompetencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas y su efecto sobre el aprendizaje). La destreza decidir implica proponer una decisión centrada en el progreso conceptual del estudiante (subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción– *facetas epistémica* y *cognitiva*; aunque también podrían estar implicadas la *faceta ecológica* –aspectos del currículo y *mediacional* –recursos).

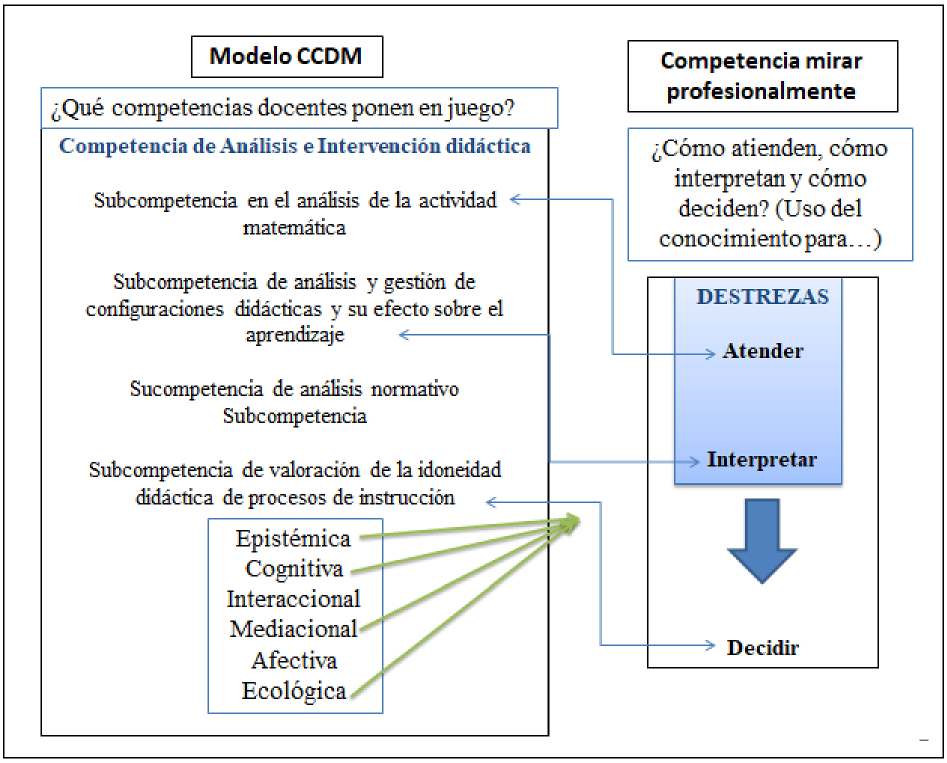


Figura 6. Relaciones entre la perspectiva teórica mirar profesionalmente y el CCDM

En el fragmento de narrativa de la Figura 7, desde el modelo CCDM se infiere que Rosa tiene un nivel 1 de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica ya que en su propuesta mejora la *idoneidad cognitiva* (conseguir más aprendizaje trabajando los conocimientos previos), la *idoneidad interaccional* (diseña tareas más simples) y la *idoneidad de recursos* (incorpora el uso de regletas). Desde esta perspectiva, para estar en nivel 2 debería haber realizado un análisis detallado de aspectos siguiendo un modelo de análisis. Desde la mirada profesional, se ha inferido que aunque Rosa propone el uso de material concreto (regletas), no considera diferentes fases del modelo de progresión de la comprensión de los niños con relación a los procedimientos de contar para decidir cómo continuar (faceta cognitiva desde el CCDM). Es decir, no usa conocimiento sobre cómo los niños aprenden los procesos de contar ni cómo el material concreto puede apoyar este progreso conceptual para decidir cómo continuar.

<table>
<tr><td colspan="2">Fragmento de la narrativa de Rosa. “En primer lugar, para aquellos alumnos que presentan dificultades en el reconocimiento y el recitado de los números hasta el 100, considero que lo primordial sería, en primer lugar, trabajar dichos aspectos. Para ello, llevaría a cabo la tarea planteada por la maestra primero con números hasta el 10, a continuación, hasta el 20, luego hasta el 30...
Por otra parte, para aquellos que aun siendo capaces de reconocer los números hasta el 100 y recitar de manera ordenada la serie numérica no han podido llevar a cabo la actividad de manera adecuada, considero que podrían utilizarse materiales manipulativos, como, por ejemplo, las regletas. Empezaría primero por números de una sola cifra. Por ejemplo, para resolver 5-3 o 5-__= 3, en primer lugar, cogería la regleta del cinco. Seguidamente, con regletas de uno, primero les haría hacer que comprueben que el 5 está formado por cinco unidades. Luego, comprobarían lo mismo con la regleta del dos. A continuación, colocarían la regleta del dos sobre la del cinco y, con regletas de uno, contarían cuántas necesitan para llegar a cinco, o bien, buscarían qué regleta necesitan para llegar a 5. Luego, lo haría con números de una decena, por ejemplo, 18-9 o 18-__=9. Para ello, utilizaría una regleta de 10 y una de 8, colocadas una al lado de la otra formando el número 18. Después, pondrían la de 9 encima y buscarían qué regleta necesitan para tener 18”.</td></tr>
<tr><th>Mirada profesional</th><th>CCDM</th></tr>
<tr><td>“Con relación a las decisiones para los niños que tienen dificultades, el foco se sitúa en el reconocimiento de los números y en la repetición de las actividades centradas en destrezas para determinar cuántos números hay de a hasta b. En este momento el uso de recursos (las regletas) parece que están dirigidas a la comprensión de la resta (y posiblemente la relación aditivas y sustractivas entre los números) y no tanto sobre el desarrollo de los procesos de contar.
La propuesta de actividades de Rosa para los niños que tenían dificultades con los procedimientos de contar no considera diferentes fases del modelo de progresión de la comprensión de los niños. Aunque Rosa propone el uso de concretos para la resolución de operaciones, no continúa considerando otras fases en el desarrollo de los diferentes procedimientos de contar – hacia adelante, hacia atrás, …-, contar desde el mayor, recordar hechos numéricos y modificarlos para encajarlos en la actividad propuestas, el uso del 10 como una unidad iterativa para contar, así como maneras de comprender los números como formados por unidades múltiples desde una perspectiva parte-todo (como por ejemplo ver el 15 formado por 7+7+1, o 7+8 o 10+5). Desde esta perspectiva, Rosa no complementa el uso de manipulativos con iniciativas que permitan desarrollar a los niños construcciones mentales y estrategias más sofisticadas de contar al no apoyar sus decisiones sobre la enseñanza en un modelo de progresión de los procesos y estrategias de contar que apoyan el aprendizaje del número y las operaciones.” (Llinares, 2018)</td><td>“Los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa […] son de tipo epistémico (CFE) dado que diseña tareas más simples, de tipo cognitivo (CFC) ya que manifiesta la importancia del dominio de los conocimientos previos para conseguir el aprendizaje de los estudiantes y de tipo mediacional (FCM) pues se infiere conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (las regletas). También se puede considerar que hay conocimientos de la faceta interaccional (CFI) (las tareas propuestas implican un cambio en la interacción, que se explica con detalle) y de la faceta ecológica (CFE) (conocimiento de los contenidos del currículo y su programación temporal)”.
“se infiere un nivel uno de desarrollo de la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica, ya que hace una valoración utilizando de manera implícita algún criterio de idoneidad didáctica y hace una propuesta de mejora con cierto sentido [...] En su respuesta a la consigna 10 mejora la idoneidad cognitiva (conseguir más aprendizaje trabajando los conocimientos previos); también mejora la idoneidad interaccional (diseña tareas más simples) y mejora la idoneidad de recursos (incorpora el uso de les regletas).” (Font et al., 2018)</td></tr>
</table>

Figura 7. Relación entre la Mirada Profesional y el Modelo CCDM desde el análisis de la narrativa de Rosa

OPORTUNIDADES QUE EMERGEN DE LA RELACIÓN ENTRE LAS TRES PERSPECTIVAS

En el ejercicio de *networking* que hemos realizado, se ha implementado una estrategia de diálogo entre tres teorías desde un posicionamiento neutral y externo a ellas (Prediger et al., 2008), con el propósito de explicitar nexos y divergencias que emergen del uso de las herramientas que ofrece cada perspectiva para el análisis de una narrativa escrita por una futura maestra cuando describe una situación de enseñanza de las matemáticas. La tarea no ha sido fácil y estamos convencidas que diferentes usuarios de las teorías podrían dar visiones complementarias o divergentes al análisis que hemos realizado (Radford, 2008; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010).

Un aspecto clave que hemos encontrado con relación a los nexos entre las tres perspectivas es que todas coinciden en considerar que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente para abordar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (Thomas et al., 2017; Llinares, 2012, entre otros). Igualmente, las tres perspectivas consideran que hay una yuxtaposición entre las componentes del conocimiento del profesor necesarios para enseñar matemática y para reflexionar sobre situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido). Sin embargo, en este foco hay aproximaciones diferentes para abordar la relación entre estos dos dominios de conocimientos cuando los maestros/profesores se enfrentan a tareas profesionales concretas (dominios de conocimiento-MTSK, dimensiones de conocimiento y competencias-CCDM y estructura del argumento práctico-Mirada profesional).

Desde el MTSK, se caracterizan los dominios de conocimiento que moviliza Rosa en su narrativa. La mirada profesional permite comprender cómo Rosa usa el conocimiento de matemáticas y didáctica de las matemáticas para interpretar las situaciones de enseñanza considerando la estructura de sus argumentos prácticos. En este sentido, Rosa interpreta la situación de enseñanza mostrando las características de sus procesos de razonamiento sobre lo relevante de la práctica usando su conocimiento teórico.

Finalmente, el modelo CCDM, propone constructos para identificar qué conocimientos y competencias docentes ponen en juego los profesores cuando describen, explican y valoran la práctica docente. Por tanto, si bien es cierto que este modelo propone una relación entre competencias y conocimientos, esta relación está encaminada en la caracterización de conocimientos y competencias implícitas en el rediseño de la práctica y no entra en el desarrollo de las competencias docentes necesarias para la toma de decisiones fundamentas, tal y como propone la mirada profesional. La Figura 8, presenta posibles preguntas y objetivos que se podrían abordar usando las herramientas teóricas y analíticas desde cada una de las tres perspectivas, teniendo como contexto el análisis de la narrativa de Rosa.

MTSK	**Mirada profesional**	**CCDM**
¿Qué evidencias, indicios y oportunidades se pueden extraer acerca del conocimiento que Rosa pone en juego en su narrativa? Comprender el conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva del conocimiento que este usa en y para la práctica.	¿Cómo Rosa usa el conocimiento de matemáticas y el generado por las investigaciones en didáctica de la matemática cuando describe e interpreta una situación de enseñanza para decidir cómo actuar? Caracterizar cómo los estudiantes para maestro usan el conocimiento de matemáticas y el generado por las investigaciones en didáctica de la matemática cuando están intentando comprender una situación de enseñanza para decidir cómo actuar.	¿Qué conocimientos y competencias docentes pone en juego Rosa cuando describe, explica y valora la práctica docente? En particular ¿cuáles de las subcompetencias de la competencia de análisis de intervención didáctica se pueden evaluar? ¿Cuáles son los conocimientos que se infieren de la respuesta de Rosa, con qué dimensión y faceta del CDM se pueden asociar? Analizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica

Figura 8. Cuadro comparativo de preguntas y objetivos de investigación que se pueden responder con las herramientas de las tres perspectivas teóricas

En este contexto de nexos y diferencias nos surgen preguntas, que podrían ampliarse en un debate con actores principales de las diferentes perspectivas, que pueden ayudar a avanzar a la línea de investigación sobre conocimiento y competencias profesionales, al tiempo que podrían tener implicaciones directas en la formación inicial y permanente del profesorado.

- ¿Qué pueden aportar las herramientas del MTSK y del CCDM en el diseño de experimentos de enseñanza que busca el desarrollo de la competencia mirada profesional?
- ¿La competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático aporta descriptores/niveles de desarrollo que permitirían hacer un análisis más fino de la competencia de análisis e intervención didáctica?
- ¿Cómo se complementan la Faceta Epistémica de la dimensión didáctica del CDM y los subdominios del conocimiento matemático del modelo MTSK? ¿Los procesos de rediseño de la práctica a partir de las herramientas del CCDM y del MTSK se podría considerar como experimentos de enseñanza que busca el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica en la misma dirección que la competencia mirar profesionalmente?

Para concluir este ejercicio, sería interesante implicar en el debate a los diferentes grupos de investigación que participan de este seminario formulando la siguiente pregunta: ¿Ven la necesidad de articular otras herramientas provenientes de los otros modelos para realizar análisis finos del conocimiento y/o las competencias profesionales del profesor de matemáticas en diferentes contextos y demandas profesionales?

Agradecimientos

Este trabajo se ha hecho en parte con el apoyo de los proyectos EDU2017-87411-R y EDU2015-65378-P, Agencia Estatal de Investigación, MINECO-Gobierno de España; Prometeo2017/135 de la Generalitat Valenciana, España; y SGR-2017-101. GIPEAM-AGAUR.

Referencias

Artigue, M. (2013). La educación matemática como un campo de investigación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 43-59.

Ball, D. L., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*, *4* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Phelps, G. C. y Thames, M. H. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories - an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). New York: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*. Switzerland: Springer International Publishing.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM*, *43*(6), 915-926.

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-68). Gijón: SEIEM.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 23-49.

Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics*. New York, NY: Springer.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122.

Font, V., Breda, A., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 23-38). Gijón: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 63-83.

Haspekian, M., Bikner-Ahsbahs, A. y Artigue, M. (2013). When the fiction of learning is kept: A case of networking two theoretical views. En A. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 9-16). Kiel, Germany: PME.

Jacobs, V. A., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*, 169-202.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 53-70.

Llinares, S. (2018). Escribir narrativas. De observar a mirar profesionalmente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 39-50). Gijón: SEIEM.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Londres, Reino Unido: Routledge-Falmer.

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. y Lenfant, A. (2008). Comparing, combining, coordinating-networking strategies for connecting theoretical approaches. Editorial for ZDM-issue 39 (2008) 2. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 163-164.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). How can networking strategies for connecting theoretical approaches help to develop theories in mathematics education? First reflections. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 317-327.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2017). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.

Seidel, T., Stürmer, K., Prenzel, M., Jahn, G. y Schäfer, S. (2017). Investigating pre-service teachers' professional vision within university-based teacher education. En D. Leutner et al. (Eds.), *Competence Assessment in Education, Methodology of Educational Measurement and Assessment* (pp. 93-109). Springer.

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. J. Denny (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383-395). Mahwah, N.J.: LEA.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stürmer, K., Könings, K. D. y Seidel, T. (2013). Declarative knowledge and professional vision in teacher education: Effect of courses in teaching and learning. *British Journal of Educational Psychology, 83*(3), 467-483.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H. y Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), 3-25.

Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*, 244-276.

Weber, E., Walkington, C. y McGalliard, W. (2015) Expanding Notions of "Learning Trajectories". *Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning*, *17*(4), 253-272. doi: 10.1080/10986065.2015.1083836

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II. INTERNATIONAL PERSPECTIVES ON DESIGN–ORIENTED RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

Coordinador:

Francisco Javier García (Universidad de Jaén)

Ponentes:

Michiel Doorman (Utrecht University)

Design-based research and local instruction theories in mathematics education

Geoff Wake (University of Nottingham)

A case study of theory-informed task design: What might we, as designers, learn?

INTERNATIONAL PERSPECTIVES

García, F. J.[a]

[a]Universidad de Jaen

García, F. J. (2018). Título. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 82-83). Gijón: SEIEM.

DESIGN-BASED RESEARCH AND LOCAL INSTRUCTION THEORIES IN MATHEMATICS EDUCATION

Doorman, M.[a]

[a]Utrecht University

Abstract

This paper sketches the approach of design-based research in mathematics education with results of two innovation-oriented projects. The projects investigated how students can be involved in the development of mathematical concepts and skills by using design tools related to guided reinvention and emergent modelling. Both studies combine design-based research with a prominent role for the hypothetical learning trajectory as a research instrument in the three phases of design research (design, teaching experiment, retrospective analysis). Each of the phases of the research cycles is addressed: the preliminary phase in which a hypothetical learning trajectory and instructional activities are designed, the teaching experiment phase and the phase of the retrospective analysis. I conclude with a reflection on design-based research as an approach to study innovative teaching approaches that offers researchers to take into account contextual factors and that create opportunities for others to adapt the results to their research or teaching practice.

INTRODUCTION

One of the salient characteristics of learning mathematics is being introduced in a world full of symbols. This is not merely an external characteristic, as mathematical symbols are an integral part of mathematics. It is hard to think about measurement without the use of unit measures, or to understand calculus without pointing to rates of change in graphs. This intertwinement of meaning and visual representations poses a problem for mathematics education. Experts - like teachers and instructional designers - tend to see these symbols as carriers of meaning. For them, symbols and graphs are transparent; they can "see the mathematics through it", so to speak. Students, however, often do not have the necessary mathematical background to interpret those symbolic representations in that manner. As a consequence, teachers will have to explain to the students what there is to see, and how to reason with those symbolic representations. This, Cobb et al. (1992) point out, leads to proceduralising and algorithmetising and the loss of meaning - or to, as van Oers (2000) calls it, "pseudo mathematics".

To find a way out of this dilemma, one may consider the history of mathematics to investigate how meaning and symbols emerged. It turns out that mathematical symbols did not arrive ready-made, with full-fletched meaning. Instead, one can discern a reflexive process in which symbolising and the development of meaning co-evolve (Meira, 1995). Symbolising, here, refers to inventing and using a series of symbols. In relation to this, Latour (1990) and others (e.g. Roth y McGinn, 1998) speak of a "cascade of inscriptions". This notion of a cascade of inscriptions has its counterpart in semiotic concepts as "chain of signification" (Walkerdine, 1988; Whitson, 1997).

A challenge for mathematics educators is to develop mathematics education that is in line with this dynamic conception of symbolising and development of meaning. The task of researchers is to shed light on the key elements of this type of mathematics education. In order to investigate the possibilities of such a new and innovative approach to mathematics education is that the instructional materials are not available yet. Moreover, research into the topic requires a process in which the design of instructional activities and teaching experiments are intertwined with the development of instructional theories for specific topics in mathematics. In this paper I will discuss a project on the introduction of the basic principles of calculus with the aim to illustrate the

Doorman, M. (2018). Design-based research and local instruction theories in mathematics education. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 84-93). Gijón: SEIEM.

characteristics of such a design-based research approach. This approach tries to ensure a systematic process of design and analysis that offers opportunities to generalize findings over specific contexts. This project has a dual goal:

- on the one hand, answering the question on how to develop and investigate an innovative teaching and learning process for calculus, and
- on the other hand, investigating the reflexive relations between symbol use and the development of meaning.

Given these goals, design-based research or developmental research (Gravemeijer, 1994, 1998) seems to be an appropriate research method. Following Brown (1992), Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer and Schauble (2003) refer to this type of research as design experiments, which they elucidate in the following manner:

> Prototypically, design experiments entail both "engineering" particular forms of learning and systematically studying those forms of learning within the context defined by the means of supporting them. This designed context is subject to test and revision, and successive iterations that result play a role similar to that of systematic variation in experiment (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003, p. 9).

In this description, the two central aspects of this paper come to the fore in (a) the design of means of support for particular forms of learning, and (b) the study of those forms of learning. In the research project under discussion, the backbone of the design is formed by the design, development and revision of a hypothetical learning trajectory.

DESIGN-BASED RESEARCH

The design-based research approach has a cyclic character in which thought experiments and teaching experiments alternate. A cycle consists of three phases: the preliminary design phase, the teaching experiment phase, and the phase of retrospective analysis. A second characteristic of design-based research is the importance of the development of a learning trajectory that is made tangible in instructional activities. The design of instructional activities is more than a necessity for carrying out teaching experiments. The design process forces the researcher to make explicit choices, hypotheses and expectations that otherwise might have remained implicit. The development of the design also indicates how the emphasis within the theoretical development may shift and how the researcher's insights and hypotheses develop. As Edelson argues, design is a meaningful part of the research methodology:

> (...) design research explicitly exploits the design process as an opportunity to advance the researchers understanding of teaching, learning, and educational systems. Design research may still incorporate the same types of outcome-based evaluation that characterise traditional theory testing, however, it recognizes design as an important approach to research in its own right. (Edelson, 2002, p.107)

This is particularly the case when the theoretical framework involved is under construction.

Hypothetical learning trajectory

Within each macro level research cycle, three phases are distinguished: the preliminary design phase, the teaching experiment phase, and the phase of retrospective analysis. The first phase of preliminary design includes two related parts, the development of a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) and the design of instructional activities. The notion of a "Hypothetical learning trajectory" is taken from Simon (1995). Originally, Simon used the HLT for designing and planning short teaching cycles of one or two lessons. In our study, however, a HLT is developed for teaching experiments that lasted for a longer sequences of lessons. As a consequence, the HLT comes close to the concept of a local instruction theory (Gravemeijer, 1994).

The development of an HLT involves the choice or design of instructional activities in relation to the assessment of the starting level of understanding, the formulation of the end goal and the conjectured mental activities of the students. Essential in Simon’s notion of a HLT is that it is hypothetical; when the instructional activities are acted out, the teacher – or researcher in our case – will be looking for evidence of whether these conjectures can be verified, or should be rejected.

For the design of the student activities, their motivation and the estimation of their mental effects, the designer makes full use of his domain specific knowledge, his repertoire of activities and representations, his teaching experience, and his view on the teaching and learning of the topic. After a field test by means of a teaching experiment, the HLT will usually be adapted and changed. These changes, based on the experiences in the classroom, start a new round through the mathematical teaching cycle, and, in terms of the design research approach, the next research cycle.

The concept of the HLT may seem to suggest that all students follow the same learning trajectory at the same speed. This is not how the HLT should be understood. Rather than a rigid structure, the HLT represents a learning route that is broader than one single track and has a particular bandwidth.

With an emphasis on the mental activities of the students and on the motivation of the expected results by the designer, the HLT concept is an adequate research instrument for monitoring the development of the designed instructional activities and the accompanying hypotheses. It provides a means of capturing the researcher’s thinking and helps in getting from problem analysis to design solutions.

Design of instructional activities

The preliminary design phase of the design research cycles includes the development of the HLT and the instructional activities. The expectations of the students’ mental activities established in the HLT are elaborated into specific key activities in the instructional materials.

The design of instructional activities in these studies included the development of student text booklets and teacher guides. While designing these materials, choices and intentions were captured and motivated, to inform the teacher and to keep track of the development of the designer’s insights. When the materials were about to be finalised, these aims and expectations were described at the task level. Key items, that embodied the main phases in the HLT, were identified. These items reflected the relevant aspects of the intended learning process and were based on the conceptual analysis of the topic. The identification of key items guided observations and prepared for the retrospective data analysis. Finally, teacher guides as well as observation instructions were written, to make intentions and expectations clear to teachers and observers. During the design phase, products were presented to colleagues, teachers and observers. This led to feedback that forced the researcher to become explicit about goals and aims, and that provided opportunities for improving all the materials.

While designing instructional activities, the key question is what meaningful problems may foster students’ cognitive development according to the goals of the HLT. Three design principles guided the design process: guided reinvention, didactical phenomenology and emergent models.

The design principle of *guided reinvention* involves reconstructing the natural way of developing a mathematical concept from a given problem situation. A method for this can be to try to think how you would approach a problem situation if it were new to you. In practice, this is not always easy to do, because as a domain expert it is hard to think as if you were a freshman. The history of the domain can be informative on specific difficulties concerning concept development (e.g. Gravemeijer y Doorman, 1999).

The second design principle, *didactical phenomenology*, was developed by Freudenthal (Freudenthal, 1983). Didactical phenomenology aims at confronting the students with phenomena that "beg to be organised" by means of mathematical structures. In that way, students are invited to build up mathematical concepts. Meaningful contexts, from real life or "experientially real" in another way, are sources for generating such phenomena (de Lange, Burrill, Romberg, y van Reeuwijk, 1993; Treffers, 1987). The question, therefore, is to find meaningful problem contexts that may foster the development of the targeted mathematical objects. The context should be perceived as natural and meaningful, and offer an orientation basis for mathematisation.

The last remark leads to the third design principle, the use of *emergent models* (Gravemeijer e.a., 2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). In the design phase we try to find problem situations that lead to models that initially represent the concrete problem situation, but in the meantime have the potential to develop into general models for an abstract world of mathematical objects and relations.

Teaching experiments

The second phase of the design research cycle is the phase of the teaching experiment, in which the prior expectations embedded in the HLT and the instructional activities are confronted with classroom reality. The term "teaching experiment" is borrowed from Steffe (Steffe y Thompson, 2000). The word "experiment" is not referring to an experimental group – control group design. In this section we explain how the teaching experiments were carried out; in particular, we pay attention to the data sampling techniques used during the teaching experiments.

The research questions share a process character: they concern the development of understanding of mathematical concepts. Therefore, we focussed on data that reflected the learning process and provided insight into the thinking of the students. The main sources of data were observations of student behaviour and interviews with students. The observations took place on three levels: classroom level, group level and individual level. Observations at classroom level concerned classroom discussions, explanations and demonstrations that were audio and video taped. These plenary observations were completed by written data from students, such as handed in tasks and notebooks.

Observations at group level took place while the students were working on the instructional activities in pairs or small groups. Short interviews were held with pairs of students. In addition to this, the observers made field notes.

The lessons were evaluated with the teachers. In particular, the organisation of the next lesson and the content of the plenary parts were discussed. Also, decisions were taken about skipping (parts of) tasks because of time pressure. Such decisions were written down in the teaching experiment logbook.

Retrospective analysis

The third phase of a design research cycle is the phase of retrospective analysis. It includes data analysis, reflection on the findings and the formulation of the feed-forward for the next research cycle.

The first step of the retrospective analysis concerned *elaborating on the data*. A selection from video and audiotapes was made by event sampling. Criteria for the selection were the relevance of the fragment for the research questions and for the HLT of the teaching experiment in particular. Data concerning key items was always selected and these selections were transcribed verbatim. The written work from the students was surveyed and analysed, especially the work on key items, tests and hand-in tasks. Results were summarised in partial analyses. This phase of the analysis consisted of *working through the protocols* with an open approach that was inspired by the constant comparative method (Glaser y Strauss, 1967; Strauss y Corbin, 1988). Remarkable events or trends were noted as conjectures and were confronted with the expectations based on the HLT and the instructional activities.

The second phase of analysis concerned *looking for trends* by means of sorting events and analysing patterns. The findings were summarised illustrated by prototypical observations. These conjectures were tested by surveying the data to find counterexamples or other interpretations, and by data triangulation: we analysed the other data sources, and in particular the written student material, to find instances that confirmed or rejected the conjectures. Analysis of the written materials often evoked a reconsideration of the protocols. Analysis was continued in this way until saturation, which meant that no new elements were added to the analysis and no conclusions were subject to change.

The third phase in analysing the data was the *interpretation of the findings* and the comparison with the preliminary expectations of the HLT. Also, explanations for the differences between expectations and findings were developed. These conclusions and interpretations functioned as feed-forward for the formulation of new hypotheses for the next cycle in the research.

AN EXEMPLARY CASE: THE BASIC PRINCIPLES OF THE MATHEMATICS OF CHANGE[1]

Background and design of HLT

The aim of this project is to find out how students can learn the basic principles of calculus and kinematics by modelling motion. Nowadays, graphs are used in calculus and kinematics education as representations for describing change of velocity or distance travelled during a time interval. Students are expected to give meaning to the relation between distance travelled and velocity through characteristics of these graphs such as area and slope. The use of such instructional materials is based on a representational view (Cobb et al., 1992), which assumes that instructional materials can represent scientific knowledge, and that scientific concepts can be made accessible without fully taking into account the limitations of the knowledgebase of the students into which they have to be integrated.

Cobb et al. oppose this view. In line with their reasoning, we claim that symbolisations and knowledge of motion can co-evolve in a learning process. Theories on symbolising give rise to heuristics for designing a learning route within which the mathematical and scientific knowledge emerges from the activity of the students (Gravemeijer et al. 2000). In this route, the creation, use and adaptation of various graphical representations are interwoven with learners' activities in a series of science-practices, from modelling discrete measurements to reasoning with continuous models of motion. Our focus is on students' contributions during these practices, and how we can build upon their contributions towards the intended attainment targets. Consequently, for understanding their reasoning we use the design-based research approach of planning and testing the envisioned trajectory in classroom situations for investigating *how* a trajectory works and can be improved, instead of trying to decide *whether* it works.

The learning route – inspired by the domain history – is tried out and revised during teaching experiments in three tenth-grade classes. We collected data by video and audio taping whole class discussions and group work. The videotapes were used to analyse students' discourses and students' written materials with respect to the conjectured teaching and learning process.

Teaching experiment phase

We illustrate the change in how students think and talk about a model with the following episode. The trajectory starts with questions about a weather forecast. The teacher discusses the change of position of a hurricane with students: when will it reach land? This problem is posed as a leading question throughout the unit as a context for the need of grasping change. After the emergence of time series as useful tools for describing change of position, students work with situations that are described by stroboscopic photographs. The idea is that students come up with measurements of displacements, and that it makes sense to display them graphically for finding and extrapolating patterns. Two types of discrete graphs are discussed: graphs of displacements (distances between successive positions) and graphs of the total distance travelled. Note that discrete graphs are not introduced as an arbitrary symbol system, but emerge as models of discrete approximations of a motion, that link up with prior activities and students' experiences. By using the computer program Flash students are able to investigate many situations. During these activities their attention shifts from describing specific situations to properties of these discrete graphs and the relation with kinematical concepts.

Our findings confirm such a change in reasoning. In the beginning students refer to distances between successive positions. After a while they reason using the global shapes and properties of graphs and motion. An example of such reasoning concerns an exercise about a zebra that is running at constant speed and a cheetah that starts hunting the zebra. The question is whether the cheetah will catch up with the zebra. In the graphs the successive measurements of the zebra and the cheetah are displayed. The following discussion takes place between an observer and two students (Rob and Anna).

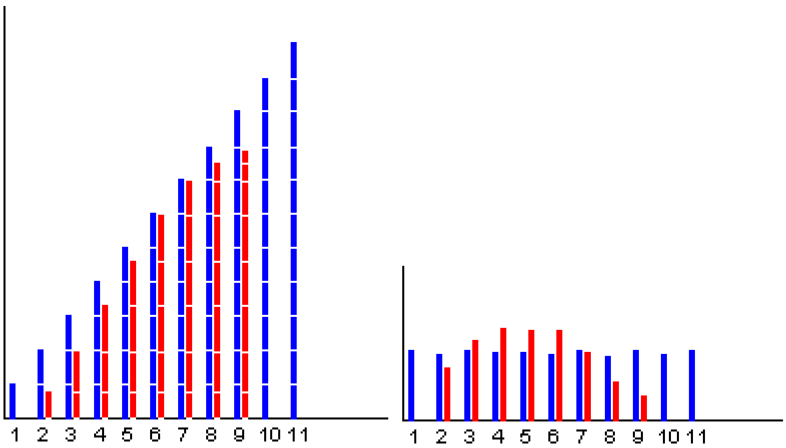


Figure 1. Distance-travelled and displacement graphs in Flash

Observer: Oh yes. So why did you choose the one for the total distance [left graph in Fig. 1]?

Rob: Because it's the total distance that they cover and then you can-

Anna: Then you can see if they catch up with each other.

Observer: And can't you see that in the other [right graph]? There you can also see that the red [grey] catches up with blue [dark grey]?

Rob: Yes, but -

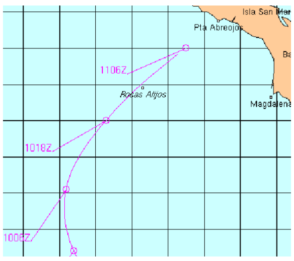
Anna: Yes, but that's at one moment. That only means that it's going faster at that moment but not that it'll catch up with the zebra.

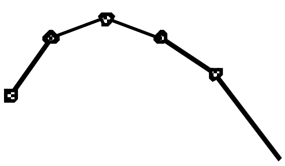
Retrospective analysis

A difference between the displacements graph and the distance-travelled graph is the difference between the interpretations of the horizontal (time) axis. A value in the distance-travelled graph represents a distance from the start until the corresponding time, while a value in the displacements graph represents a distance in the corresponding time interval. Anna's last observation is an important step in the process of building the model of a velocity-time graph (and everything that comes with it).

The qualitative analyses show that during the practices students re-invent and develop graphical symbolisations, as well as the language and the scientific concepts that come with them. However, these inventions only became explicit after interventions by an observer or by the teacher. Additionally, we found that the teacher had a crucial role during the classroom discussions. It was not always easy to organise the discussions in line with the intended process. Sometimes the teacher reacted to students' contributions in terms of the inscriptions or concepts aimed at. In those cases students awaited further explanation. The discussions appeared to be especially productive when the teacher organised classroom discussions about students' contributions in such a way that the students themselves posed the problems that had to be solved, and reflected on their answers. In a second teaching experiment we arranged a setting where the teacher had more information about the possible contributions of the students and the way in which they could be organised. Additionally, we designed activities for classroom discussions. The HLT for the second teaching experiment is summarized in Figure 2. This summary shows the development of the tools that students used in their reasoning about change and how the transparency of the tools, the image that students have, is created by previous activities with preliminary representations. Furthermore, the figure illustrates the interaction between the development of these tools and the development of meaning related to the mathematical concepts of change.

In this approach the construction and interpretation of graphs and the scientific concepts are rooted in the activities of the students through emerging models. This ensures that the mathematical and physical concepts aimed at are connected to students' understanding of everyday phenomena. On the basis of our findings we conclude that classroom discussions where students discuss their solutions and pose new problems to be solved, are essential for a learning process during which symbolisations and knowledge of motion co-evolve.

<table>
<tr><th>Tool</th><th>Imagery</th><th>Activity</th><th>Concepts</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

time series (e.g. satellite photos y stroboscopic pictures)</td><td rowspan="2">real world representations signify real world situations</td><td>predicting motion (e.g. in the context of weather predictions)</td><td>displacements in equal time intervals as an aid for describing and predicting change</td></tr>
<tr><td colspan="2">should result in a feeling that the ability to predict motion with discrete data is an important issue</td></tr>
<tr><td rowspan="2">trace graphs of successive locations
</td><td rowspan="2">signifies a series of successive displacements in equal time intervals</td><td>compare, look for patterns in displacements and make predictions by extrapolating these patterns</td><td>displacements as a measure of speed, of changing positions, but difficult to extrapolate</td></tr>
<tr><td colspan="2">resulting in a willingness to find other ways to display displacements for viewing and extrapolating patterns in them</td></tr>
</table>

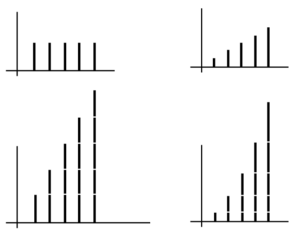
discrete 2-dim graphs 	signifies patterns in displacements of trace graphs (and cumulative)	compare patterns and use graphs for reasoning and making predictions about motion (also at certain moments: interpolate graphs) refine your measurements for a better prediction: displacements decrease	displacements depicting patterns in motion; linear line of summit in graph of displacements or graph of distances traveled; problems with predictions of instantaneous velocity
		should result in the need to know more about the relation between sums and differences, and in the need to know how to determine and depict velocity	

Figure 2: The HLT for the second teaching experiment

DISCUSSION

With this case study I tried to illustrate how an innovative approach for a topic in mathematics can be investigated. The use of semiotic theories turned out useful for analysing the relationship between symbolising and development of meaning. Mathematics education asks for a careful design of teaching-learning trajectories involving an intertwined process of symbol introduction and meaning making. During that process, students get opportunities for creating their own constructions and reflecting on them. Realistic contexts proved important in that.

With respect to the methodology of design-based research, the Hypothetical Learning Trajectory appeared to be a useful instrument in all phases of design research. During the design phase it is the theoretically grounded vision of the learning process, which is specified for concrete instructional activities. During the teaching experiments, the HLT offers a framework for decisions during the teaching experiment and guides observations and data collections. In the retrospective analysis phase, the HLT serves as a guideline for data selection and offered conjectures that could be tested during the analysis. The final HLT is a reconstruction of a sequence of concepts, tools and instructional activities, which constitute the effective elements of a learning trajectory. In this manner, the result is a well-considered and empirically grounded local instruction theory for the basic principles of calculus. The HLT, together with a description of the cyclic process of design and research, enables others to retrace the learning process of the research team. Understanding the how and why of the specified steps makes it possible to let that learning process become your own and to adapt findings to your own context.

With this example I illustrated design-based research as a systematic approach for innovation-oriented studies. The close connections between design and theory development offer teachers and researchers opportunities to translate the results to their own teaching or researching practice.

The intertwinement of teaching experiments and theoretical reflections guided by a HLT emphasize the contribution to theory development within design-based research. This process, as presented in this paper, is intrinsically different from what tries to be achieved with lesson studies.

Notes

This paper is an adaption from: Bakker, A., Doorman, M. y Drijvers, P. (2003*). Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education*. Paper presented at the Onderwijs Research Dagen (ORD), Kerkrade, The Netherlands.

[1] This case is based upon: Doorman y Gravemeijer (2009).

References

Bakker, A. y Smit, J. (2016). Theory development in design-based research: An example about scaffolding mathematical language. En S. Doff y R. Komoss (Eds.), *How does change happen? Wandel im Fachunterricht analysieren und gestalten* (pp. 109-124).Wiesbaden: Springer.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2*, 141-178.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1992). A constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 2-33.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A. A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Gravemeijer, K. P. E., Yackel, E., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Mathematizing and Symbolizing: The Emergence of Chains of Signification in One First-Grade Classroom. En D. Kirshner y J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives* (pp. 151-233). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

de Lange, J., Burrill, G., Romberg, T. y van Reeuwijk, M. (1993). *Learning and Testing Mathematics in Context: The Case: Data Visualization*. Madison, WI: University of Wisconsin, National Center for Research in Mathematical Sciences Education.

Doorman, L. M. y Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 41*(1), 199-211.

Edelson, D. C. (2002). Design Research: What We Learn When We Engage in Design. *Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105-121.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Glaser, B. G. y Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory; Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine Publishing Company.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). Educational Development and Developmental Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 443-471.

Gravemeijer, K. P. E. (1998). Developmental Research as a Research Method. En J. Kilpatrick y A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity (An ICMI Study)* (Vol. 2, pp. 277-295). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. y Doorman, L. M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, vol 39(1-3)*, pp. 111-129.

Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb y E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Latour, B. (1990). Drawing Things Together. En M. Lynch y S. Woolgar (Eds.), *Representation in Scientific Practice* (pp. 19-68). Cambridge, MA: MIT Press.

Meira, L. (1995). Microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*, *13*(2), 269-313.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J. y Baptista, M. (2018). Designing lesson studies to support teachers’ professional development. *Educational Designer, 3*(11).

Roth, W.-M. y McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a Theory of Representing as Social Practice. *Review of Educational Research, 68*(1), 35-59.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiments Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Strauss, A. y Corbin, J. (1988). *Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.

van Oers, B. (2000). The Appropriation of Mathematics Symbols: A Psychosemiotic Approach to Mathematics Learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms; perspectivies on discourse, tools, and instructional design* (pp. 133-176). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics 54*(1), 9-35.

Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason*. London: Routledge.

Whitson, J. A. (1997). Cognition as a Semiotic Process: From Situated Mediation to Critical Reflective Transcendence. En D. Kirshner y J. A. Whitson (Eds.), *Situated Cognition Theory: Social, Semiotic, and Neurological Perspectives* (pp. 97-150). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

A CASE STUDY OF THEORY-INFORMED TASK DESIGN: WHAT MIGHT WE, AS DESIGNERS, LEARN?

Wake, G.[a]

[a]University of Nottingham

Abstract

Task design plays a very important role in the day-to-day classroom experiences of both students and teacher: it comes to define their fundamental understanding not only of mathematical concepts but also their experience of mathematics as a practice. It is essential, therefore, that those of us who design tasks for others to use, often deliberately innovative in nature, consider carefully how our work might best be informed by underpinning theory. That is not to imply that there is one best approach to task design but rather here I provide insight into how theoretical considerations can provide insight into our activity as task designers and further to this how such considerations might, through our reflections, help inform our future work. This argument is illustrated with reference to a recent design research informed development of curriculum resources and an accompanying programme of teacher learning.

Keywords: *Design research, Communities of practice, Boundary objects, Dialogic learning, Professional learning.*

Resumen

El diseño de tareas juega un papel muy importante en las experiencias diarias en el aula, tanto para el alumnado como para el profesorado, llegando a definir la comprensión fundamental no sólo de los conceptos matemáticos, sino también de su experiencia de las matemáticas como práctica. Por consiguiente, es esencial que todos los que diseñamos tareas para que otros las usen, a menudo de naturaleza deliberadamente innovadora, consideremos cuidadosamente cómo nuestro trabajo podría estar informado por una teoría subyacente. Esto no implica que exista una mejor aproximación al diseño de tareas, sino más bien se pretende proporcionar un mejor conocimiento sobre cómo consideraciones de tipo teórico pueden ofrecer una mejor compresión de nuestra actividad como diseñadores y, más allá, entender cómo estas consideraciones podrían informar nuestro trabajo en el futuro, a partir de nuestra propia reflexión. Este argumento se ilustra con referencias a un reciente diseño de recursos curriculares y de un programa de aprendizaje para el profesorado que los acompaña, basados en la investigación.

Palabras clave: *investigación basada en el diseño, comunidades de práctica, objetos frontera, aprendizaje dialógico, aprendizaje profesional.*

INTRODUCTION

As designers of educational resources for mathematics I wish here to consider what we might learn from our consideration of theory.

First, I wish to situate our design work firmly in the paradigm of educational design research: that is, it is committed “to developing theoretical insights and practical solutions simultaneously, in real world (as opposed to laboratory) contexts, together with stakeholders” (McKenney y Reeves, 2012). That is, the focus of our work is on engineering research-informed solutions for practical use in education – primarily in the classroom. The work of our group in Nottingham, that is the work of the Shell Centre, situated in the Centre for Research in Mathematics Education has, for over fifty years sought to provide practical solutions for teachers in their day-to-day work in classrooms to support young people in learning mathematics (Burkhardt y Swan, 2017). Over this time, many

Wake, G. (2018). A casy study of theory-informed task design: What might we, as designers, learn? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). Gijón: SEIEM.

resources have been produced all of which have been research-informed, drawing on prior underpinning knowledge drawn from the research literature appropriate to the context of the mathematics. In addition, our group has undertaken its own design research as indicated above, seeking to develop both theory and practical solutions. This primarily involves iterative cycles of inquiry led by the design team, involving multiple test sites in close collaboration with teachers providing rich data / feedback from their classroom trials.

This process has been important throughout our work and will to some extent be exemplified in the illustrative examples described here. I also want to draw attention to some theoretical considerations that I have found of increasing importance in informing the development of our work.

SITUATING DESIGN RESEARCH

Theories provide models or schema for understanding the nature and causes of (observable) phenomena: they help us make sense of the world. Importantly, they are developed over time, often being expanded, refined, modified as our understanding develops, is further informed by new insights, and so on. I would like to call upon a schema that will help us situate design research in education in the complex world that is that of research more generally. Figure 1 was first used by Stokes (Stokes, 1997) to consider the roles that different forms of research (primarily in the sciences) can be considered to play. This provides a two-dimensional matrix: the horizontal axis considers the use associated with the research (whether research has as its focus application as central or otherwise); the vertical axis considers how the research is situated with respect to its expectation of informing fundamental understanding.

		Consideration of use	
		No	Yes
Quest for fundamental understanding?	Yes	Pure basic research (Bohr)	Use-inspired basic research (Pasteur)
	No		Pure applied research (Edison)

Figure 1. Pasteur's quadrant as proposed by Stokes (1997)

Thus, as Stokes intimated:

- the research of Bohr that sought to understand atomic structure sits in the top left quadrant, i.e. it was pure basic research seeking to provide fundamental understanding by developing a model of atoms as the building blocks of matter;
- the research of Edison, that sought to inform how we might have generally available and commercially successful electric lighting, on the other hand, focused on applied goals without seeking to add to more general understanding of the phenomena of electricity as a scientific field, and consequently sits in the bottom right quadrant;
- the top right quadrant is where research sits that seeks to add to our fundamental understanding but also has as central considerations of applications. This quadrant has become known as Pasteur's quadrant after Pasteur who in his work both sought to understand the micro-biological processes he investigated as well as harness them to improve the health of humans and animals.

- The bottom left quadrant provides space for research that neither seeks to add to our general understanding nor has a focus on immediate application. Maybe a more recent type of activity that might be considered to sit within this quadrant is that of data mining, where data scientists explore large data sets in the hope of maybe being able to contribute to either or both of knowledge and/or application.

Research that informs the design of educational resources, often considered as design research (see for example, McKenney y Reeves, 2012), is ideally, focused on the interaction of students, teachers and designed resources. This can prove very effective in the development of a better product set for use in learning settings, often classrooms. Here I will illustrate a case of such detailed design research that we have undertaken as part of a project run by our research and design group in the UK. However, before doing so I wish to further situate this particular work referring to some theoretical ideas that we use to inform our design at tactical and in detail at technical levels. As an aside, at this point, I raise an issue that a colleague Burkhardt (2009) draws to our attention. He helpfully identifies three major levels of educational design—strategic, tactical and technical—with the first, strategical design, being "concerned with the overall structure of the product set and how it will relate to the user-system". Tactical design is at the level of the internal structure of the product: that is, it is focused on specifying the core design principles of the product, the different aspects and how these are structured in a way that will ensure they will bring about the desired change they are designed to effect. The technical level of design is that which focuses on the development of individual, often material resources of the product: for example, the classroom materials such as tasks to be used with students, elements of the professional development programme, lesson plans and so on. It is our work at this latter level with which we talk directly to teachers and students, clearly an important aspect of our work as designers.

THE ARCHITECTURE OF TACTICAL DESIGN

Here I wish to initially focus at the tactical design level and consider how theoretical considerations can inform such design. Fundamental to such work, in our experience, is having an underpinning theory of learning that helps us define our whole approach as to the experiences of learning we would hope result from our carefully engineered products.

Our recent work, draws on Wenger's theory of learning that considers learning to be fundamentally experienced socially and involves the learner being engaged in practice, identity development, making meaning, and becoming a participant in a community of practice. Figure 2, provides a schematic overview of this and is reproduced from Wenger's seminal work on *communities of practice* (Wenger, 1988) in which he considers human behaviour as being social with individuals as members of multiple communities of practice. Foremost in *our* work as designers for teachers working in classrooms and in their interactions with colleagues is to design artefacts that support both student and teacher learning. Fundamental in this regard is our understanding of "teachers as learners", that is, in Wenger's terms developing their community of practice with individuals and the community as a whole involved in developing their practice in ways that support development of each of practice, identity, meaning and community.

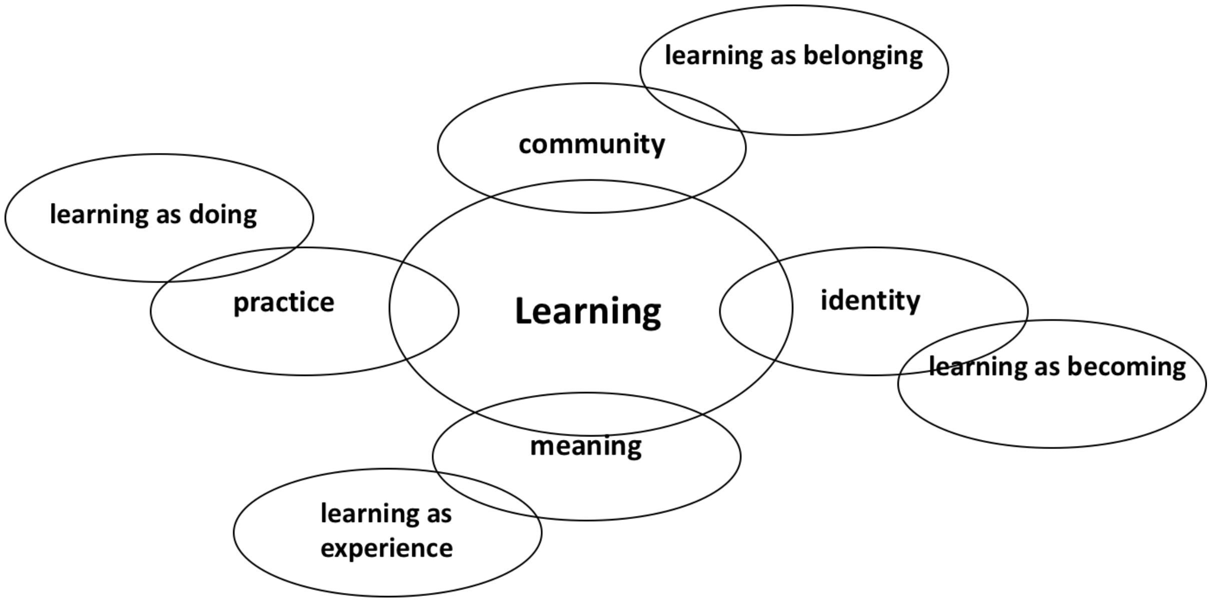


Figure 2. Wenger's components of a social theory of learning (Wenger, 1998. p.5).

What are the implications for us as designers? This is a question that Wenger raises and addresses by pointing to how architects and computer software developers, amongst others as designers, frame their designs by reference to conceptual architectures that capture relevant and appropriate aspects of human behaviours that are mediated by physiological and cultural factors. He goes on to argue that in design for learning we need to consider four dimensions and that these present four dualities that challenge the efficacy and effectiveness of our designs.

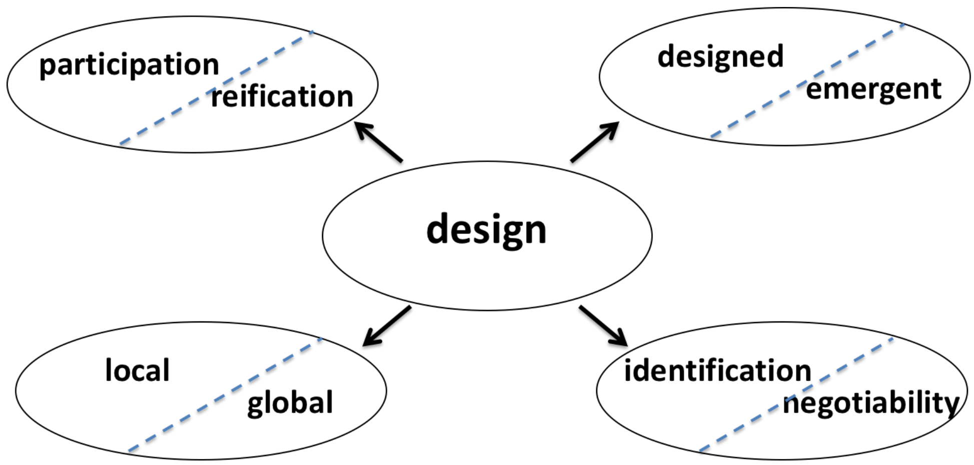


Figure 3. Wenger's four dimensions of design for learning (Wenger, 1988. p. 232)

First, he considers that in developing their *practice* teachers, at various stages of their induction into, and participation in, teaching negotiate their *meaning* of this professional practice. Wenger unpacks his use of the term *meaning* at some length considering its fundamental importance in his view to our participation in communities of practice. In essence, he sees this constantly ongoing and evolving process as involving the duality of participation and reification, with the latter term being used to capture how aspects of our activity are captured in the artefacts that embody the history and culture of the practices at the heart of the community of practice. Classroom tasks are examples of just such artefacts and help come to define, for users, day-to-day teaching and learning practices and importantly how members of the community of practice, including students, make meaning of the very nature of what it means to learn and do mathematics. Consequently, it behoves us as designers of tasks to consider what we reify in our tasks and what our designs for participation reveal in relation to their negotiation of *meaning* of what they engage with.

The second duality we need to consider is that of what is designed and what is left to be emergent: more practically in our design we need to consider what is fundamental to our design and that we desire to be central to the practice we wish to support and how we ensure that the emergent practice is 'designed for' in relation to such essential features. As Wenger, succinctly puts it: "practice is not the result of design but rather a response to it." (Wenger, 1988. p.233).

The third duality is that of the local and the global. This highlights how in our design we need to be aware that each community of practice will need to make the intended practice its own, that is, in adopting the *global* aspects of the design they will *localise* aspects that ensure their practice develops in ways that are compatible with their usual social practice whilst having fidelity to the main design intentions. Again, careful design will be sensitive to such issues.

Finally, Wenger draws attention to the duality of identification and negotiability: how our design can prompt/facilitate identification or non-identification with the proposed participatory activity. This draws our attention to how as individuals, and a community, we have the agency to negotiate and shape the meaning associated with the activity of the group's social enterprise.

Perhaps we might summarise, even if perhaps a little simplistically, as educational designers we need to develop a tactical design that is constructed around our core principles but also serves to facilitate much scope for adaptability to the different ecologies of learning in which our products will be used.

EXAMPLES OF AN ARCHITECTURE OF TACTICAL DESIGN

Change in teacher practice is often fundamental to our design of new products for classroom use. This we know, from experience, is unlikely to be facilitated by the production of classroom materials on their own and we have, particularly more recently, developed professional development (Swan et al., 2013) programmes alongside our materials (see for example, http://www.bowlandmaths.org.uk/pd/). This professional development is ideally informed by the design research programme that accompanies the development of the classroom materials.

We know from a synthesis of research that addresses issues of teacher professional development that it is effective when

- Experiential: stimulating and drawing on teachers' experiences.
- Sustained: involving cycles of planning, predicting, enactment & reflection.
- Grounded: involving practical, and well-resourced, experiences; related to context & culture.
- Safe: ensuring teachers are able to speak their minds, permission to take risks.
- Collaborative: involving networks of teachers & administrators.
- Informed: by outside expertise and research.
- Provocative: involving both pressure and support.
- Focused: attentive to the development of the mathematics itself.

(for example, Guskey, 2002; Joubert and Sutherland, 2009; Villegas-Reimers, 2003; and many others…)

It is our further experience that professional development that is designed in line with principles of lesson study as practised in Japan meets all of the above criteria and we have increasingly used such programmes as part of our work; most significantly in the funded Lessons for Mathematical Problem Solving (LeMaPS: https://www.nottingham.ac.uk/research/groups/crme/projects/lemaps/index.aspx) project funded by the Nuffield Foundation in the UK. Our analysis of such programmes points to boundary objects as being most significant in helping to support learning that transcends the different communities of classroom and teacher research group in which teachers operate. Lesson Study as a boundary crossing experience (Wake et al., 2016) is central to our design at a tactical level. This conceptualises the learning architecture associated with our learning materials design as supporting developing expertise in the two settings of classroom and teacher research group. It is this architecture that is at the focus of our design.

I now illustrate this in the particular case of the project Maths-for-Life which has just completed a development phase in the UK in which design research has informed both the tactical aspects of the programme and the technical level design of boundary objects that facilitate practice across the communities involved. There are two aspects of the architecture of tactical design that here I characterise as being (i) *structural* (concerned with the pragmatics of time, place, organisational structures and dynamics of social interactions) and (ii) *conceptual* (the frameworks, schemas and theories that inform intellectual engagement).

Central to the structural aspects of our design of Maths-for -Life is the development of teacher inquiry communities/groups led by a “Lead Teacher” who had been part of the design research phase. These Lead Teachers had experienced working with drafts of materials as well as participating in exploratory inquiry research groups working with two or three others from a total cadre of 20 lead teachers.

The Maths-for-Life project professional development programme is designed to improve student examination re-sit grades in mathematics. The students involved follow a “resit” course for one year, post-16, in attempt to improve outcomes in the mathematics examination taken at the end of compulsory schooling (GCSE). The majority of these students attend post-16 “Further Education” colleges and their course in mathematics is taken alongside a range of other academic, and often vocational, studies. The context is such that this is an intensive experience often running for only seven or eight months from September/October through to April/May in the following year. Consequently, and pragmatically, the Maths-for-Life programme focuses on just five lessons spread throughout this period: teacher’s collaboratively work with the Lead Teacher on considering the “research lesson” in some considerable detail before teaching it themselves, often to multiple classes of students, and collaborating in small inquiry groups, to observe one of them teach the lesson and in a post-lesson discussion focus on a carefully framed “research question”. The five lessons are timetabled throughout the period so that the professional development has opportunities for cycles of planning, predicting, enactment & reflection.

The conceptual framework is summarised by the pentagons of Figure 3. These illustrate (a) the five principles of dialogic learning that we are seeking to develop in classrooms defining the behaviours that we expect teachers, teaching assistants and students to develop over the course of the programme (b) the five key aspects of pedagogy that we consider underpin such learning, and (c) mathematical content associated with the five lessons.

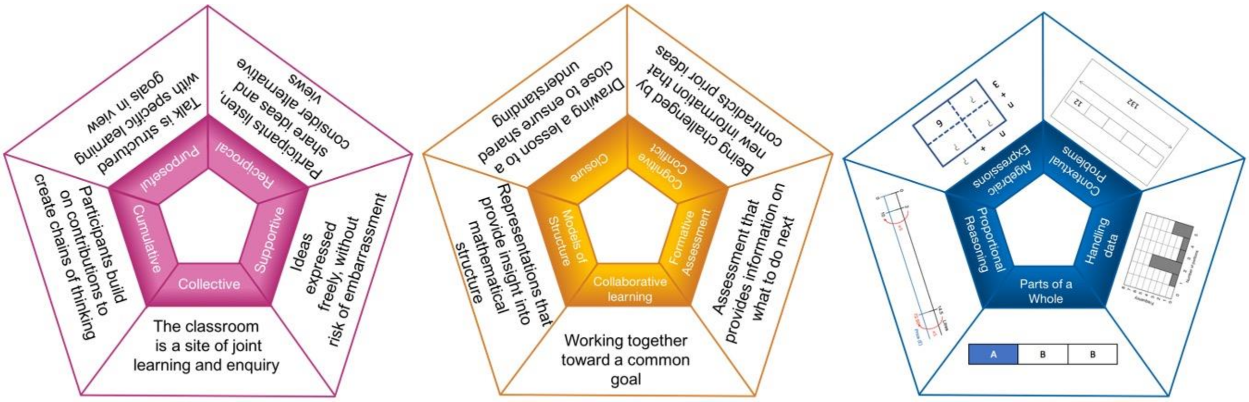


Figure 3. The conceptualisation of dialogic learning, pedagogies and mathematical content central to the Maths-for-Life programme.

The project builds on the earlier work of Swan who, working at a smaller scale with students in a similar context, designed classroom materials that facilitated dialogic talk in their classrooms (Swan, 2006).

The dialogic classroom encourages talk that Alexander (2006) and Mercer (1995, 2000) identify as being:

- Collective - teachers and children address learning tasks together, as a group or as a class, rather than in isolation
- Reciprocal - teachers and children listen to each other, share ideas and consider alternative viewpoints
- Cumulative - teachers and children build on their own and each others' ideas and chain them into coherent lines of thinking and enquiry
- Supportive - children articulate their ideas freely, without fear of embarrassment over 'wrong' answers and they help each other to reach common understandings
- Purposeful - teachers plan and facilitate dialogic teaching with particular educational goals in view

Such practices, as suggested earlier, and will be illustrated later, have to be designed for at a technical level: likewise, the associated pedagogies:

- Collaborative learning: where teachers and students work jointly towards a common goal;
- Models of structure are central: with representations that provide insight into these models;
- Cognitive conflict is prompted: materials provide challenge to students' thinking if they, as many do, hold conceptual understanding at odds with 'scientific understanding' (Vygotsky, 1986);
- Formative assessment practices (Black y Wiliam, 2009) are used to provide teachers with insight into students' thinking throughout lessons
- Closure: lessons are carefully brought to a close in ways that understanding is shared and further opportunities provided for understandings to be clarified.

These five key aspects of dialogic classrooms and five signature pedagogies are designed to be part of all five lessons but the professional development programme has been designed to focus on pairs of these in turn in one of five individual lessons focused on topics that have significant importance in the examinations. These are:

- Parts of a whole (ratios and fractions);
- Proportional reasoning;
- Algebraic expressions;
- Contextual problems;
- Handling data.

We bring together these three key features of our conceptual design of the professional development in ways that permeate the two different communities that teachers engage in as part of the programme: the teacher inquiry group meetings and the "lesson study" process. Because of pressures of time we allocate only half a day to the introduction of each lesson led by a Lead Teacher and in which the five maths topics, pedagogies and aspects of dialogic learning are discussed facilitated by a number of materials both written and video (developed during the design research process of the first year of the project). A further half day is dedicated to the "lesson study" which is facilitated by a "research question" designed to focus observations of the lesson which is taught by one of the teachers, and reflected upon in a discussion immediately following the lesson. Table 1 summarises key aspects of the conceptual design across the five lessons at central to the structural design of the Maths-for-Life project together with the research questions associated with each.

The modified lesson study structure follows, to as great an extent as possible, the key principles of lesson study (Wake et al, 2014) distilled from the work of our LeMaPS project (da Ponte and Wake, forthcoming). Namely the teacher inquiry group incorporated:

1. A **research focus**, that informs the 'bigger picture', that is the overall context of the endeavour. In the Maths-for-Life project this research focus was explicit for each lesson (see table 1) but also primarily the overall focus for all lessons is dialogic learning.
2. A **detailed lesson plan** that anticipates how students will respond to the task and how the teacher might respond.
3. The **research lesson** being taught by one of the team with the lesson being observed carefully by all members of the lesson study group.
4. The **post-lesson discussion** involving the teacher and all observers in analysis of the lesson with an outside expert (the Lead Teacher).

The two aspects of the architectural design of the Maths-for-Life programme, the structural and the conceptual, are made material in the artefacts that we design as *boundary objects*, designed and produced to stimulate both student and teacher learning in the sense of Wenger (1988) as explicated above.

THE DESIGN OF BOUNDARY OBJECTS

Fundamental to the design of our professional development programme, as I signal above, are the two communities of the teacher inquiry group and the classroom. The deliberate design of these two communities results in a distinct a boundary. This we consider is important in teacher learning and requires facilitating by carefully designed boundary objects, or what we might consider as boundary artefacts. A boundary object in the terms used by Star and Griesemer (1989) is made 'material' as a single device that has different meanings in two or more different communities, while retaining a common essence in each. In their consideration of the importance of boundaries in learning Akkerman and Bakker (2011) note that Star and Griesemer point to how "such artefacts are seen as potential 'bridges' or 'anchors' across different 'intersecting social worlds as they allow cooperation and communication across sites." (Star y Griesemer, 1989). It is important to note that such devices may include easily discernible material artifacts such as classroom materials through to what might seem less tangible or more abstract devices such as the five signature pedagogies.

Important in the design of such artefacts is that they are effective in facilitating the desired boundary work that is envisaged as part of the learning process: and to ensure that this is feasible the design must be cognisant of the detailed activity that will occur in each community. Drijvers and Trouche (2008) in their contribution to the development of the theory of instrumental orchestration as elaborated by Drijvers et al. (2010) make the distinction between an artefact as having only the potential to support actions, whereas it becoming instrumental in its use when the user has a mental scheme that supports both technical and conceptual abilities to realise this potential in a specific situation. An example I often use to exemplify this idea is that of a graphing calculator. As an artefact it can be considered as a material object incorporating graphing facilities that has the potential to be used, for example, to plot a function and give the area enclosed by this, certain limits, and the x-axis, or its gradient at a specific point. For this to become instrumental in use in a particular situation, the user must understand both the potential and the appropriateness of doing so and have the technical expertise and conceptual understanding to do this.

The designer's role, then, is to design such artefacts, perhaps not as complex in potential and technical sophistication as graphing calculators, but the designer does require a detailed understanding of the contexts in which the artefact is required to be instrumentally used. The artefacts are designed so that, in Drijver et al.'s terms it becomes an instrument that both shapes the thinking of the user, in this case the teacher, (the instrumentation process) and is in itself shaped by the user (the instrumentalisation process), see Figure 4, below. The dual participatory communities in which we involve our teachers, classroom and teacher inquiry group, provide multiple opportunities for them to engage in such practices in relation to the artefacts we organise in line with our conceptual design.

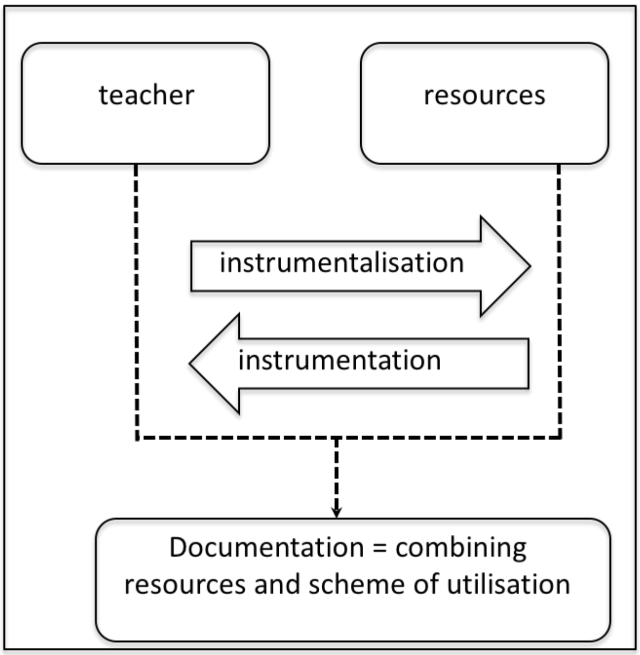


Figure 4. The documentation process (Drijver's et al., 201).

CLASSROOM TASKS AS BOUNDARY OBJECTS IN TEACHING LEARNING

It is this particular approach that I now wish to elaborate in the design of our classroom materials, with additional reference as to how these particular artefacts articulate with our work with teachers in the professional development programme. Here I draw on just one artefact central to the first lesson in our programme. This lesson focuses on the mathematical topic of "parts of a whole". Figure 5, brings together in a single schema, the important features of our conceptual design elements: maths content, pedagogy and feature of dialogic learning, as addressed by this particular lesson.

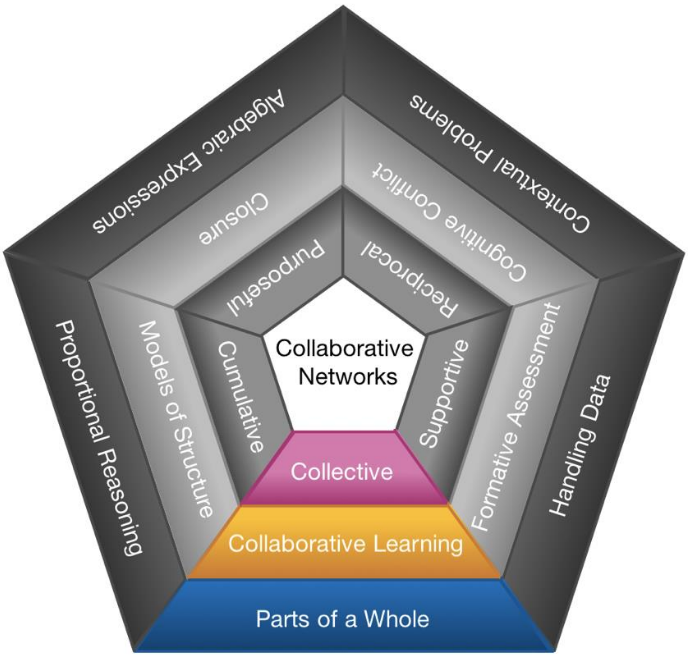


Figure 5. The conceptualisation of dialogic learning, pedagogies and mathematical content central to the Maths-for-Life programme.

As elaborated below (Table 1), the lesson focuses on *collaborative learning* with students working together in both pairs or small groups, and as a whole class, toward a common goal in a *collective classroom* in which both the students and the teacher see their lessons as being based around joint learning and enquiry. To facilitate reflection and boundary work the research question for this lesson is: "*How does collaborative learning (through the design of resources and the actions of the teacher) promote collective endeavour?*"

Table 1. The five Maths-for-Life lessons

	Topic	Pedagogy	Dialogic learning	Research question
1	Parts of a whole	Collaborative learning	Collective	How does collaborative learning (through the design of resources and the actions of the teacher) promote collective endeavour?"
2	Proportional reason	Models of structure	Cumulative	How do models of structure help to facilitate cumulative dialogue and insight into mathematical structure?
3	Algebraic expressions	Closure	Purposeful	How does purposeful dialogue contribute to student understanding during the

				closure phase of the lesson?
4	Contextual problems	Cognitive conflict	Reciprocal	How can cognitive conflict provide the opportunity to develop reciprocal dialogue?
5	Handling data	Formative assessment	Supportive	How does the use of formative assessment help to develop an environment of **supportive** dialogic learning?

The main task of the lesson was very much informed by the design research phase of the project. Initially it was a minor redesign of resources available as part of resulted in the 'Standards Unit Box' (DfES, 2005) resources. In its initial design it consisted of a card matching activity which provides two sets of cards that indicate how money earned by two students, Ali and Blair, might be divided expressed as either a fraction or a ratio. As Figure 6a illustrates most students (working in pairs) have the misconception that a ratio of 1:2 corresponds to the fraction 1/2, when faced with the initial design of the task. Having allowed students' understanding to have been expressed in this initial card matching activity the teacher is then asked to introduce the third set of cards which they are asked to match to the cards already paired up so that all three cards are consistent in being representative of the same splitting of the money. Figure 6b shows a typical pair of students' work at this point.

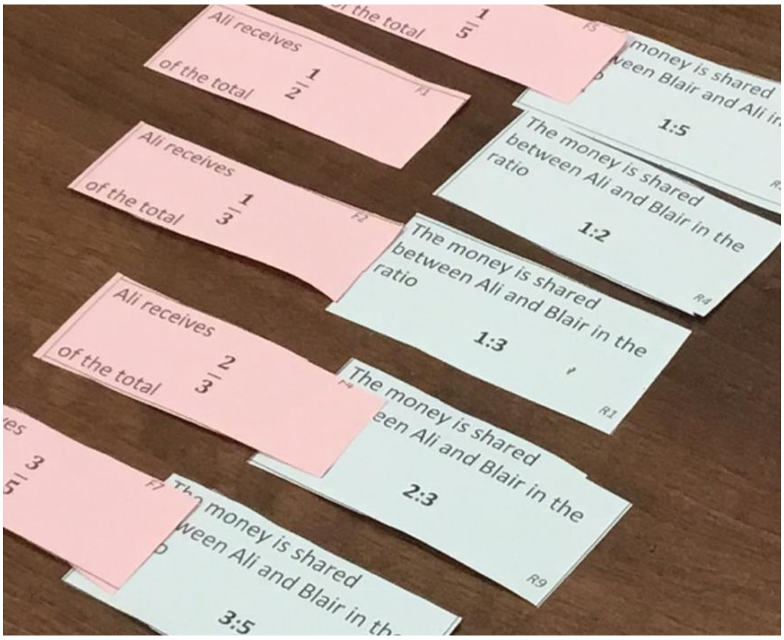


Figure 6a. Materials for lesson 1 of the Maths-for-Life programme.

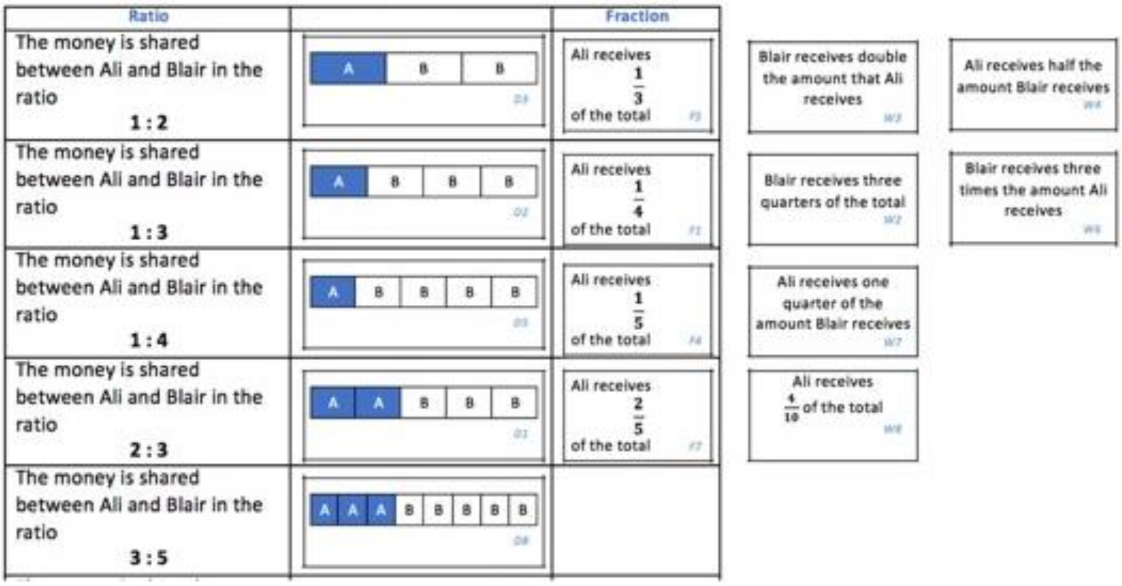


Figure 6b. Redesign of the materials for lesson 1 of the Maths-for-Life programme.

The design research process identified that as it stood students often worked individually in matching the cards with little effort to come to collective/shared decisions. Bringing about a change in the socio-mathematical norms (Yackel and Cobb, 1996) or the didactique contract (Brousseau, 1997) of the classroom is something that needs a more significant design input than this card-matching activity as it stood was able to bring about. The lesson re-design is apparent in Figure 5b. Important changes include:

i. Students are provided with a template structure that can be used in their student-to-student discussion which the teacher initiates around expected behaviours, for example, to signal when justification of thinking might be expected.

ii. The use of a template helps the teacher more quickly identify student thinking, thus supporting formative assessment.

iii. The positioning of representations on the template encourages resolution of the task in its totality.

iv. The planned gradual hand out of cards ensures that the task isn't overwhelming in the first instant.

The design of the task for the 'parts of a whole' lesson in its current form, consequently, embodies and encapsulates the key aspects of the conceptual design of the programme. In a little detail:

Maths topic. The topic that is central to the task here is that of 'parts of a whole', perhaps more often referred to as fractions. The term 'parts of a whole' is used here so that teacher discussion can focus around conceptual understanding of notation/representation of part to part and part to whole. As illustrated above this is central to the first task of the lesson.

Pedagogy. This being the first lesson of the programme the pedagogy chosen for discussion is that of collaborative learning, in the sense of encouraging joint endeavour with a shared understanding of what individuals, pairs/groups and the class as a whole aim to achieve.

Aspect of dialogic learning. The aim is to encourage collective work with students and teacher focusing their collaborative enquiry/talk around their shared and collaborative work.

The task as a boundary artefact has been designed to best facilitate these particular important features of the conceptual design whilst also paying attention to all other important aspects of pedagogy and aspects of dialogic learning.

For example, the 'bar model' representation that provides insight into issues surrounding 'part-to-part' and 'part-to-whole' provides a representation of mathematical structure that has potential uses beyond that illustrated here. This and similar representations are explored in further lessons in the programme (for example, in the lesson focussed on contextual problems). Not only does it aim to provide such insight, but also in its use here it is designed to provoke cognitive conflict or dissonance (Limon, 2001). That is, the representation provides a new/alternative insight which cannot be matched successfully to ensure consistency across the row when the students have already aligned representations that are not compatible in terms of their representation of both 'part-to-part' and part-to-whole. Discussion of how students resolved the discrepancy in their initial matching can form part of meaningful discussion of the whole group at closure of the lesson.

DISCUSSION AND CONCLUSION

As the single case above illustrates, design of innovative classroom materials that seek to support and develop teachers' practices, in ways that might improve student learning, is a complex endeavour. Perhaps, much of what has been achieved in the Maths-for-Life development so far might have been achieved without reference to any theoretical underpinning. Maybe such considerations could perhaps have been left almost entirely unspoken, and with potentially little loss to the eventual outcomes in terms of its "products". What, then, might we as educational designers learn from this theory-informed approach? The schematic overview in Figure 7 attempts to help clarify / organise the theoretical underpinnings referred to throughout the article as they apply to the Maths-for-Life project in particular, but also to much of our work in general.

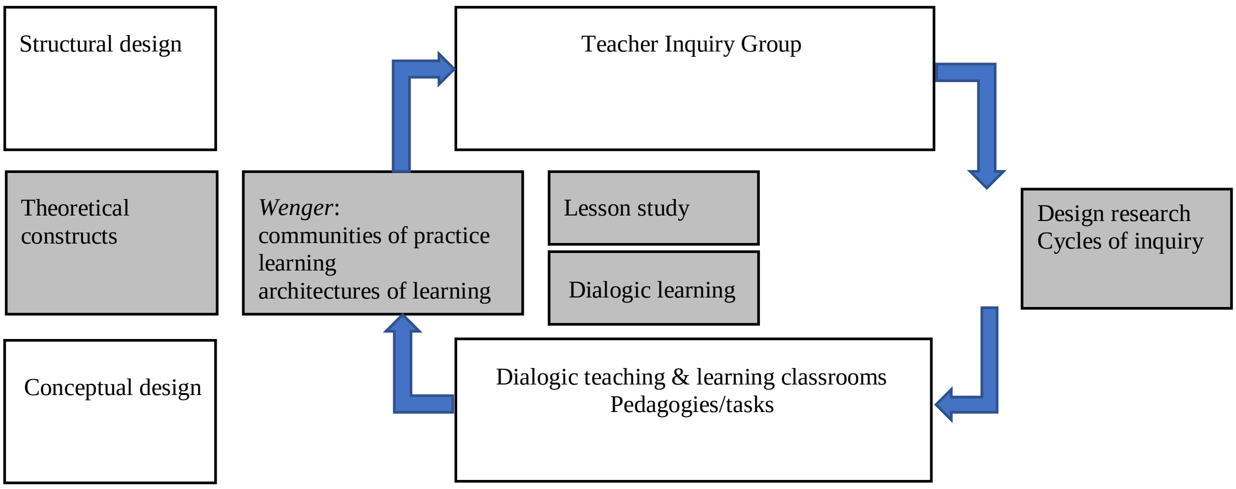


Figure 7. Schematic overview showing the articulation of theory with practical design considerations in the maths-for-Life programme.

Figure 7 highlights the thread of theoretical constructs that are brought together to inform design of the Maths-for-Life intervention that seeks to improve student learning in mathematics for students who need to improve their grade in the end-of-compulsory school examinations in England.

Fundamental to our model of change is recognition of the need to involve the teachers of these students in a process of teacher learning that will support them with the immediacy of day-to-day lessons and also provide them with new modes of working that might support the expected changes to become much more deeply embedded in their practice. Consequently, we draw on Wenger's theoretical stance in relation to *communities of practice* and in particular draw on how such communities support learning, that in taking a social view, considers how this involves much more than “knowing that”. Wenger’s view fundamentally considers how learning engages the individual and the community of which they become part in a symbiotic relationship in which they develop together with each adapting in their accommodation of the other. Helpfully, Wenger points to how as designers our designs might be informed by the metaphor of ‘architectures of learning’ which are sensitive to the aspects of learning that he identifies as involving practice, identity development, making meaning and community participation. This expanded notion of learning provides constructs that we find helpful in considering both structural and conceptual aspects of our design of a new community of practice, that of the teacher inquiry group, and informing how this needs to articulate with the day-to-day, bread and butter, work of the teacher that focuses on day-to-day student learning.

These may appear at first as rather abstract constructs but in the project they can be seen made real in practical aspects of design of the structure such as in how we ensure cycles of enquiry that are spread throughout the time allotted to the project and how these are scheduled so that a sense of community is engendered from the outset and supported by a lead teacher who has access to a set of materials designed to facilitate meaningful professional discussions. Further, our support materials include video sequences, developed during the first ‘pilot’ year in which the materials underwent a design research cycle of improvement. These can be used to signal expected behaviours of the teacher inquiry groups (for example, in their new practice of post-lesson discussion).

As indicated above the new communities of teacher inquiry groups have been informed by Japanese Lesson Study practices and what we have learned through our prior work in this field about how this approach might be effectively adopted in the UK context.

Our model of classroom teaching and learning is informed by the work of Mercer (1995, 2000) and Alexander (2006) who researched student-student and teacher-student talk in classrooms and in line with our philosophy of developing learning as a social activity provide insights into how we might design for classrooms that support their dialogic approach. In seeking to develop and support the different aspects of such classroom talk we consider carefully how our design of tasks might facilitate such outcomes whilst also supporting the aspects of teacher learning and the new communities of teacher inquiry groups we wish to establish and have just outlined. It is the design of these tasks that are central to the whole dialogic approach as they embody the very essence of what we advocate. However, as designers, who have been involved in task design for very many years, we recognise that conveying the essentials of how a task might be effectively made instrumental in line with our design intentions in a classroom requires considerable expertise. Hence, our understanding of tasks and their accompanying material support as boundary objects that need to facilitate both classroom activity and community involvement in professional reflection and learning is important. Fundamental then, are these professional questions that as boundary artefacts support professional collaborative growth. Such aspects of our design are perhaps best exemplified in the video sequences that we have been designing that draw on classroom use of the tasks by Lead Teachers and their students’ responses in relation to the key aspects of our conceptual design. These video sequences are framed in terms of the research questions (Table. 1), that we have crafted in light of our design research experiences during the first year of the project, to support teacher discussions.

We find that the theoretical constructs, which I highlight as a central thread to our design process in Figure 7, provide us as a research team, with insights to the important and multiple aspects of our design work to which we need to be sensitive. In many ways, this not only points to the complexity of our undertaking in such projects, but also provides us with a language and emerging discourse around which we ourselves might effectively become a community of practice of designers of tasks. It sits comfortably with our efforts to make meaning of our own work in ways in which support communication both within our own group and in the wider design community. It allows us to probe / critique each other’s work in language that allows for some neutrality, rather than perhaps appearing rather personal. As designers we can use such theoretical constructs to help us develop our sense of identity, come to an understanding of design as a practice, assist us in making meaning of the work in which we engage and fundamentally develop a community of practice of designers. For these reasons I recommend designers/ design communities explore such theoretical considerations as they seek to firmly establish their work as a valued activity in Pasteur's Quadrant.

Referencias

Akkerman, S. F. y Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132-169.

Alexander, R. (2006). *Towards dialogic thinking: Rethinking classroom talk*. York: Dialogos.

Black, P. y Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational. Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5-31. doi: 10.1007/s11092-008-9068-5.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactiques des mathematiques*, 1970–1990. Dordrecht: Kluwer.

Burkhardt, H. (2009). On Strategic Design. *Educational Designer, 1*(3). Recuperado de http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue3/article9.

Burkhardt H. y Swan M. (2017) Design and Development for Large-Scale Improvement. In: Kaiser G. (eds) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham

Da Ponte, J. P. y Wake, G. (forthcoming). Lesson study as a learning context in mathematics education.

DfES (2005). *Improving Learning in Mathematics*. London: Standards Unit, Teaching and Learning Division. Recuperado de http://www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/collection/282/improving-learning-in-mathematics

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213-234.

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics (Cases and perspectives)* (Vol. 2, pp. 363-392). Charlotte: Information Age.

Guskey, T. R. (2002). Does it make a difference? *Educational Leadership, 59*(6), 45-51.

Limon, M. (2001) On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*, 357-380.

McKenney, S. y Reeves, T.C. (2012). *Conducting Educational Design Research*. Routledge.

Mercer, N. (1995). *The Guided Construction of Knowledge: Talk amongst Teachers and Learners*. Clevedon: Multilingual Matters.

Mercer, N. (2000). *Words and Minds: How We Use Language to Think Together*. London: Routledge

Star, S. L. y Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, "translations" and boundary objects: Amateurs and professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907–39. *Social Studies of Science, 19*(3), 387-420.

Stokes, D. E. (1997). *Pasteur's Quadrant – Basic Science and Technological Innovation*. Brookings Institution Press.

Swain, J. y Swan, M. (2007). *Thinking Through Mathematics: Research Report*. London: NRDC

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices*. London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).

Swan, M., Pead, D., Doorman, M. y Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education, 45*(7), 945-957. doi: 10.1007/s11858-013-0520-8

Villegas-reimers, E. (2003). *Teacher professional development: an international review of the literature.* Paris: UNESCO. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001330/133010e.pdf

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language (A. Kozulin, Trans.)*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Wake, G., Swan, M. y Foster, C. (2016). Professional learning through the collaborative design of problem-solving lessons. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2), 243-260.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. New York: Cambridge University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

COMUNICACIONES

ALFABETIZACIÓN ALGEBRAICA A PARTIR DE 3 AÑOS: EL CASO DE LOS PATRONES

Algebraic literacy from 3 years: The case of patterns

Acosta, Y.[a] y Alsina, À.[a]

[a]Universitat de Girona

Resumen

En los últimos años los currículos de matemáticas de diversos países, como por ejemplo Estados Unidos, han empezado a incorporar la enseñanza del álgebra a partir de los 3 años. Desde este prisma, se ha realizado una investigación basada en el diseño con 24 alumnos de 3-4 años para analizar sus conocimientos acerca de los patrones, a partir de una trayectoria de aprendizaje que contempla diversos contextos de enseñanza-aprendizaje: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, recursos literarios (cuentos), recursos tecnológicos y recursos gráficos. Los resultados obtenidos indican que los participantes en el estudio son capaces de identificar, reconocer y representar patrones que siguen una estructura simple en estos contextos de enseñanza, reforzando de esta manera la base de una futura alfabetización algebraica. Se concluye que la trayectoria de aprendizaje diseñada puede favorecer la orientación y el tratamiento de los patrones al profesorado de Educación Infantil, con el propósito de que puedan llevar a cabo una intervención educativa especializada que permita fomentar la iniciación del pensamiento algebraico.

Palabras clave: *educación matemática infantil, alfabetización algebraica, trayectoria de aprendizaje, patrones.*

Abstract

Over the last few years, the mathematics curriculums from several countries, such as the United States, have begun to incorporate the teaching of algebra at the age of 3. From this perspective a study has been created with 24, 3-4 year old, students to analyze their knowledge about patterns, based on a learning trajectory that includes different teaching-learning contexts: daily life situations, manipulative materials, games, literary (stories), technological and graphical resources. The obtained results indicate that the participants are able to identify, recognize and represent patterns that follow a simple structure in these teaching contexts, reinforcing the basic algebra knowledge in the future. It is concluded that the designed learning process can favor the orientation and the treatment of the patterns of early childhood teachers, with the intent of them constructing an educational intervention, focused on fomenting the initiation of algebraic thinking.

Keywords: *infant mathematics education, algebraic literacy, learning trajectory, patterns*.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre los patrones como una forma de pensamiento que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas sigue siendo una temática poco tratada, sobre todo en la primera infancia (Perry y Dockett, 2008; Clements y Sarama, 2015), a pesar de que configuran la base para el comienzo de la representación algebraica (Clements y Sarama, 2015).

Desde este prisma, se realiza una investigación basada en el diseño con 24 alumnos de 3-4 años para analizar sus conocimientos acerca de los patrones, a partir de una trayectoria de aprendizaje que contempla diversos contextos de enseñanza-aprendizaje. Con ello, se pretenden ofrecer

Acosta, Y. y Alsina, À. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). Gijón: SEIEM.

orientaciones didácticas y disciplinares al profesorado de Educación Infantil sobre el tratamiento de los patrones, con el propósito de que puedan favorecer que los alumnos de las primeras edades se inicien en el pensamiento algebraico.

El pensamiento algebraico y los patrones en Educación Infantil

Como se ha indicado, existe poca investigación sobre el pensamiento algebraico infantil en general y los patrones en particular, razón por la cual la presencia de este tipo de conocimientos en el currículo es todavía escasa. Kaput (2000) ya hace alusión a este aspecto cuando propone una "algebraización del currículo" desde edades tempranas y el *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2003) apuesta por una introducción temprana del álgebra a partir de los 3 años. La finalidad que se persigue es construir una base sólida de aprendizajes que favorezca la adquisición y tratamiento de un conocimiento más sofisticado del álgebra en niveles posteriores del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El pensamiento algebraico temprano se desarrolla a través de la conciencia estructural de los patrones y más tarde en la estructura de la aritmética (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest 2006; Mason, Stephens y Watson, 2009). Además, este tipo de pensamiento permite "[…] analizar las relaciones entre cantidades, ser consciente de la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir" (Kieran, 2004, p. 149).

En esta línea, la exploración de patrones se puede considerar como una especie de trampolín útil para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático. De acuerdo con Rittle-Johnson, Zippert y Boice (2018), los alumnos primero aprenden a trabajar con patrones simples del tipo AB y luego aprenden a identificar patrones con tres y cuatro unidades (patrones ABB y AABB). Desde este prisma, compartimos la idea de que "crear patrones es buscar regularidades y estructuras matemáticas [...] los patrones son más que un contenido: son un proceso, un dominio de estudio y un hábito de la mente" (Clements y Sarama, 2015, p. 304).

Basándonos en estos precedentes, es imprescindible articular un tratamiento minucioso del pensamiento algebraico durante los primeros años, para que a partir de buenas preguntas y propuestas adecuadas con patrones, se pueda ayudar a los alumnos a iniciar una alfabetización algebraica. En este sentido las trayectorias de aprendizaje conforman una estrategia idónea para vehicular el proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones.

Clements y Sarama (2015) proponen construir trayectorias de aprendizaje que "[...] describen las metas del aprendizaje, los procesos de pensamiento y aprendizaje de los niños en diferentes niveles, y las actividades de aprendizaje en las que ellos podrían participar "(p. 12). Para estos autores, las metas del aprendizaje son las grandes ideas matemáticas que incluyen agrupaciones de conceptos y capacidades matemáticas primordiales que fomentan el pensamiento de los niños y que construyen las bases idóneas para el aprendizaje futuro, mientras que los procesos de pensamiento y aprendizaje se refieren a los niveles de pensamiento que vehiculan el logro de la meta matemática, es decir, "[...] la progresión del desarrollo describe una ruta típica que los niños siguen durante el desarrollo del entendimiento y las habilidades necesarias en torno al tema matemático" (Clements y Sarama, 2015, p. 11). Finalmente, las actividades de aprendizaje son un conjunto de tareas instructivas diseñadas para ayudar a los niños a adquirir ideas y habilidades necesarias, para así promover el desarrollo del pensamiento desde un nivel particular a otro superior. Por tanto, es imprescindible adquirir el compromiso de diseñar propuestas que sean coherentes con el proceso natural de desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, en las que se potencie el uso del contexto con finalidades didácticas. Todos estos condicionantes facilitan la concreción y creación de itinerarios didácticos.

> La palabra itinerario invita a pensar y a plantear la enseñanza de las matemáticas en infantil como una secuencia, un recorrido de lo concreto hacia lo abstracto en el que se usan diversos contextos de aprendizaje. (Alsina, 2015, p. 13)

En este sentido, se asume la secuencia didáctica propuesta por Alsina (2010) para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades. Este autor plantea un diagrama piramidal en el que indica de forma sencilla el tipo de contextos de enseñanza-aprendizaje necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable: en la base se encuentran las situaciones de vida cotidiana, los materiales manipulativos y los juegos; en un nivel intermedio los recursos literarios (cuentos) y tecnológicos; y en el último nivel los recursos gráficos. Posteriormente, este mismo autor establece itinerarios de adquisición en los que secuencia los contextos desde la parte inferior a la superior de la pirámide (Alsina, 2011).

Se considera a su vez la visión del NCTM sobre la necesidad de articular "[...] contextos que promuevan la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, y el diseño y análisis de representaciones" (NCTM, 2006, p. 12). Desde este prisma, nuestro itinerario didáctico pretende potenciar la enseñanza-aprendizaje de los patrones a través de los procesos matemáticos propuestos por el NCTM (2003, 2006).

Considerando estos antecedentes, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo planificar y gestionar la enseñanza de los patrones para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de 3-4 años?

De esta pregunta derivan los objetivos de nuestro estudio:

1. Diseñar una trayectoria de aprendizaje y un itinerario didáctico de los patrones para alumnos de 3-4 años.
2. Aplicar la trayectoria de aprendizaje y el itinerario didáctico en un grupo de 24 alumnos de 3-4 años.

MÉTODO

Nuestro estudio sigue las líneas de una investigación basada en el diseño (*Design-based research* [DBR]), que se trata de un método metodológico emergente, con carácter básicamente cualitativo, que persigue la comprensión y mejora de la realidad educativa a partir del estudio de la complejidad y singularidad de contextos naturales de aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011; *Design-Based Research Collective*, 2003). Núñez del Río, de Castro, del Pozo, Mendoza y Pastor (2010) constatan que dicho método es capaz de promover el diseño de innovaciones curriculares fundamentadas en teorías que, mediante un ciclo reflexivo de análisis, implementación y rediseño, aportan un enriquecimiento al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Desde la perspectiva de *Design-Based Research Collective* (2003), Reeves (2006) y los antecedentes teóricos expuestos, presentamos el siguiente diagrama de flujo que refleja el proceso metodológico que enmarca nuestro estudio.

Figura 1. Diagrama de flujo sobre la línea metodológica DBR que orienta la investigación

Siguiendo el diagrama de flujo anterior, se ha diseñado una trayectoria de aprendizaje inspirada en las aportaciones de Clements y Sarama (2015) que consta de dos apartados donde se especifica por un lado la progresión del aprendizaje, y por otro, las finalidades que se pretenden alcanzar. Desde esta óptica, se ha optado por concretar un itinerario didáctico que permita establecer una relación entre la teoría y la práctica que favorezca tanto el proceso de enseñanza-aprendizaje como el inicio del desarrollo del pensamiento algebraico. Dicho itinerario consta de nueve propuestas, que pueden ser ampliadas siguiendo una frecuencia ajustada a la pirámide de Alsina (2010).

Contextualización y participantes en el estudio

El estudio se ha llevado a cabo en un grupo de 24 alumnos (12 niños y 12 niñas) de 3-4 años de un colegio público de Girona, España. En general presentan un nivel madurativo óptimo que se adecua a su edad evolutiva. La metodología de aula se basa en el trabajo por proyectos, donde el niño es el protagonista de sus descubrimientos y se fortalecen los vínculos familia-escuela.

Diversos autores, como Molina (2011), proponen que en un estudio DBR es necesario evaluar el conocimiento previo de los alumnos a partir de una prueba específica, por lo que se ha aplicado el Test de Competencia Matemática Básica 3 (*Test of Early Mathematics Ability* -TEMA3-) diseñado por Ginsburg y Baroody (2003). Los datos obtenidos muestran una media de 93,54 de Índice de Competencia Matemática (ICM), lo que significa que el grupo clase presenta un nivel medio de ICM, ya que en la escala interpretativa del Tema3 un ICM muy pobre se sitúa en valores menores de 70 y uno muy elevado por encima de 130 (Ginsburg y Baroody, 2003).

Técnicas de recogida de información

La recogida de datos cualitativos se ha realizado a través de notas de campo, de observaciones participantes y del registro audiovisual y fotográfico de todas las intervenciones. De acuerdo con Quecedo y Castaño (2002) las notas de campo se registran de manera descriptiva captando una perspectiva interna pero sin intención de ser evaluativas. Estos registros en el diario de campo nos han permitido conservar expresiones, razonamientos, diálogos de los alumnos e incluso reflexiones extraídas de la praxis. Por su parte, la observación participante ha facilitado a los investigadores aprender y reflexionar sobre las actividades que se implementan con los participantes en un escenario natural, haciendo uso de la observación y de la participación activa (Kawulich, 2006), propiciando así una interacción directa en el contexto real del aula. Finalmente, a través de la grabación audiovisual de las sesiones y del registro fotográfico, se ha analizado en diferido, de manera crítica y reflexiva, el proceso y desarrollo de las propuestas del itinerario didáctico.

Datos cualitativos obtenidos tras la articulación del itinerario didáctico

Con la intención de garantizar una intervención educativa de calidad y priorizar la atención individualizada, todas las sesiones se han desarrollado con dos docentes en el aula y ocho de las nueve sesiones se han articulado partiendo el grupo en dos.

Tabla 2. Itinerario didáctico diseñado a partir de la secuencia didáctica de Alsina (2010)

Situaciones de vida cotidiana	Se muestran a los alumnos dos imágenes sobre situaciones de vida cotidiana (un paso de peatones en una sesión y un enjardinado que sigue el patrón AB en la otra) y se les invita a representar la seriación observada.
Recursos manipulativos	Se ponen al alcance de los alumnos diversos recursos manipulativos (policubos en una sesión y hueveras con tapas de plástico en la otra) con la intención de que construyan una seriación sencilla a partir de la manipulación libre del material propuesto.
Recursos lúdicos	A través de dos juegos se pretende promover la anticipación de hechos a partir de la interiorización de la secuencia presente en los dos recursos lúdicos.
Recursos literarios	Utilizando el cuento como recurso literario se pretende que los alumnos identifiquen la secuencia temporal del la historia: *La ratita presumida*, siendo capaces de predecir lo que sucederá en el relato.
Recursos tecnológicos	Se invita a los alumnos a introducir en los robots educativos programables (*Bee-bots*) los comandos secuenciados correctos con la intención de conseguir el reto propuesto.
Recursos gráficos.	Los alumnos a través de la técnica de estampación representan el recorrido de las *Bee-bots*, después de visualizar un vídeo donde han quedado registradas las acciones llevadas a cabo en la sesión anterior.

A continuación, se exponen las evidencias más relevantes categorizadas de acuerdo con la técnica que ha permitido recoger la información. Se utiliza (NC) en las notas de campo, (OP) para las observaciones participantes, (RA) en registro audiovisual y (RF) para el registro fotográfico. Todas las evidencias recogidas han permitido ajustar el itinerario didáctico a partir de un proceso de reflexión retrospectivo donde se ha analizado la planificación y gestión de las propuestas.

Tabla 2. Sesión 1: Paso de peatones

OP **RA**	- Docente: Si ahora tenemos una franja negra, una blanca y una negra. ¿Qué franja colocaremos a continuación? - Alumno1: Una blanca y después una negra y después otra blanca y después una blanca. - Alumno2: No, después otra negra. - Docente: ¿Y por qué colocaremos después de la negra una blanca? - Alumno3: Para hacer bien el paso de cebra.

A partir de la observación realizada, se considera necesario priorizar una dinámica semidirigida que se acompañe de buenas preguntas que ayuden a conseguir la finalidad propuesta.

Tabla 3. Sesión 2: Enjardinamiento de una vía

OP **RA**	- Docente: ¿Cómo son los árboles que hay en la foto? - Alumno1: De otoño. - Docente: Pero, ¿cómo son, qué forma tienen? - Alumno: De triángulo. - Docente: ¿Y cómo es este? – señalando un árbol de la foto. - Todos: Pequeño. - Docente: Mirad que hay aquí – mostrando el interior de una caja de madera. - Alumno2: ¡Son piezas! - Docente: Y si queremos hacer un árbol grande y uno pequeño con estas piezas, ¿cómo lo podemos hacer? - Alumno1: Las podemos pegar. - Docente: Una pieza, ¿qué árbol representaría? - Alumno3: El grande. - Docente: ¿Este sería el grande? - Alumno1: No. El pequeño. - Docente: Bien, este sería el pequeño. Pero, ¿cómo hacemos el grande? - Alumno4: Con muchos. - Docente: Si ahora tenemos un árbol pequeño, un árbol grande, ¿cuál pondremos ahora?

	- Todos: ¡Uno de pequeño!

En la transcripción de la Tabla 3 se aprecia que la docente formula una pregunta sobre la forma y usa nociones como "grande" y "pequeño", cuando la finalidad real es incidir en la altura del árbol (alto-bajo). Este hecho ha contribuido a añadir de manera específica en el itinerario que es necesario utilizar un lenguaje matemático preciso y adaptado al nivel de los alumnos.

Tabla 4. Sesión 3: Jugamos con material reciclado

NC **RF**	Las hueveras tienen algunas hileras pintadas siguiendo un patrón AB en correspondencia con el color de los tapones proporcionados. Algunos niños colocan los tapones haciendo la correspondencia adecuada y se han sentido motivados para hacer otras seriaciones en las hileras que no estaban pintadas o incluso en el suelo.  Figura 2. Evidencia fotográfica captada durante la sesión 3

Tabla 5. Sesión 4: *Multilink*

NC **OP** **RF**	- Alumno1: ¡Una torre! Ahora toca el verde. - Docente: ¿Por qué toca el verde? - Alumno1: Porque es verde, naranja, verde, naranja… - Docente: Pero en el lugar de una pieza naranja has puesto una de color amarillo. - Alumno1: Sí, no hay más naranjas.  Figura 3. Evidencia fotográfica captada durante la sesión 4

En las Tablas 4 y 5 se pone de manifiesto que es necesario que el docente actúe como incitador del conocimiento a través de la planificación y estructuración del espacio y del material, para suscitar de manera indirecta una acción determinada. En este sentido se introducen en el itinerario didáctico estrategias organizativas en el momento de ofrecer el material, por ejemplo, se sugiere agrupar los policubos en dos colores para que la variedad de aspectos cualitativos de la colección no sea un elemento distorsionador para conseguir el objetivo. De esta manera, se evita plantear actividades dirigidas donde el alumno pierda su protagonismo e iniciativa.

Tabla 6. Sesión 5: El juego del tren

NC **OP** **RF**	Se ha establecido una dinámica muy cooperativa entre los alumnos, ya que los niños que cogen el elemento incorrecto los compañeros le han ayudado. Una vez hecho el tren los alumnos han dejado el elemento en un rincón del aula, pero en el segundo medio grupo un alumno propuso realizar de manera cooperativa un tren en el suelo con los elementos. Esta oportunidad se ha aprovechado y ha servido para consolidar y representar la seriación vivida siguiendo un patrón AB.


Figuras 4 y 5. Evidencia fotográfica captada durante la sesión 5

En esta ocasión se considera pertinente incluir en el itinerario la propuesta espontánea de los alumnos de representar el tren en el suelo.

Tabla 7. Sesión 6: 1, 2, 3 pica pared

NC	Ha sido complicado que los alumnos respetaran la norma dada, pero a medida que ha ido avanzado el juego han interiorizado la secuencia temporal del patrón (quietos como estatuas-caminar-quietos como estatuas-caminar) ejecutándolo correctamente.
NC	Durante el recreo un grupo reducido de alumnos ha jugado al “1, 2, 3 pica pared”: - Alumno1: ¿Jugamos al 1, 2, 3? - Alumno2: Yo paro. - Alumno3: Nosotros somos estatuas. - Alumno1: No se vale moverse. - Alumno2: El que se mueva pierde. - Alumno1: No pierde, vuelve a empezar. - Alumno4: Primero paras, después miras, paras, miras y si alguien se mueve, vuelve a empezar.

Como se muestra en la Tabla 7, se ha podido constatar la dificultad y, a la vez, la capacidad de los alumnos para seguir pautas con una determinada secuencia. También se ha observado como los alumnos han transferido de manera espontánea la dinámica del juego a otro momento educativo siendo capaces de recordar las normas, repartir los roles y seguir la secuencia del juego de forma autónoma.

Tabla 8. Sesión 7: Cuento infantil "La ratita presumida"

NC **RF**	Algunos alumnos se han animado a escenificar de manera espontánea el suceso anticipado y la docente ha aprovechado la oportunidad para animar al resto de la clase a participar.

Figura 6. Evidencia fotográfica captada durante la sesión 7

A partir de los datos observados, se considera oportuno incluir en el itinerario la propuesta de los alumnos de representar alguna secuencia del cuento ya que ha sido una buena estrategia para invitar al grupo a anticipar hechos y acciones.

Tabla 9. Sesión 8: *Bee-Bots*

OP **RA**	- Alumno1: ¡La abeja se paró en las tres flores! - Docente: ¿Y cómo lo conseguisteis? - Alumno1: Apretando adelante-adelante-pausa muchas veces.
OP **RA** **RF**	- Docente: ¿Cuántas veces tenemos que marcar la tecla "pausa"? - Alumno1: Tres veces - Docente: ¿Y por qué 3 veces? -pregunta la docente- - Alumno1: Porqué hay 1, 2 y 3 flores.

Figura 7. Evidencia fotográfica captada durante la sesión 8.

Tabla 10. Sesión 9: Representando el recorrido de las *Bee-Bots*

OP **RA**	- Docente: Las abejas ya no se acuerdan del camino que hacían para llegar a las flores. ¿Vosotros os recordáis? - Alumno1: Siii, un, dos, pausa. - Docente: Muy bien, dos pasos hacia adelante y pausa. ¿Y la pausa donde la hacían las abejas? - Todos: En las flores. - (…) - Docente: Tenemos estos dos tapones para hacer el camino. ¿Cómo lo podemos hacer? - Alumno2: Pintando, primero uno y después otro. - Docente: ¿Les parece bien esta propuesta? - Todos: ¡Sí! - Docente: ¿Pero con cuál marcaremos los dos pasos hacia adelante? - Alumno3 y 4: Con este –señalando el tapón con la flecha- - Docente: Muy bien, los dos pasos lo haremos con el tapón de la flecha. ¿Y la pausa? - Todos: Con la flor.

De acuerdo con las transcripciones de las Tablas 9 y 10 se evidencia como a través de buenas preguntas se fomentan los procesos matemáticos relacionados con el razonamiento, la comunicación, la resolución de conflictos y la representación, lo que reafirma la necesidad imperante del apartado “preguntas de desarrollo” del itinerario.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De manera general el estudio realizado ha permitido: a) observar como los alumnos de manera natural tienden a ordenar las colecciones de objetos siguiendo un criterio, normalmente cualitativo, establecido por ellos mismos; b) detectar que el tratamiento del concepto patrón con alumnos de 3-4 años resulta complicado de asumir. El termino seriación ha sido más concreto y no tan abstracto como el de patrón. Por este motivo se pone mayor énfasis en la seriación y no tanto en el reconocimiento e identificación de la unidad de repetición. En este sentido, Rittle-Johnson, Fyfe, Loehr y Miller (2015) confirman en su estudio que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón y que este hecho se evidencia de manera exitosa a partir de los 4-5 años; y c) constatar que el maestro en este tipo de actividades ha de actuar como incitador del conocimiento a través de la formulación de buenas preguntas adecuando el vocabulario a la edad de los alumnos sin dejar de potenciar el lenguaje matemático.

A partir de la documentación obtenida y de la reflexión posterior se han rediseñado y reajustado la trayectoria de aprendizaje y el itinerario didáctico, con la intención de ofrecer orientaciones sobre la planificación y gestión de la enseñanza de los patrones en alumnos de 3-4 años. Estas orientaciones siguen los principios estructurales sobre las trayectorias de aprendizaje que plantean Clements y Sarama (2015), aunque los resultados obtenidos en nuestra investigación han permitido realizar algunas adaptaciones tanto en la progresión del aprendizaje como en las finalidades. En concreto, a partir de los datos obtenidos en nuestro estudio proponemos la siguiente progresión del aprendizaje: a) Reconocimiento de patrones presentes en situaciones de vida cotidiana y juego; b) Construcción de seriaciones sencillas con material diverso alternando colores, formas o medidas; y c) Lectura y representación de seriaciones que siguen patrones simples (AB). Y en relación a las finalidades para el tratamiento de los patrones con alumnos de 3-4 años, proponemos las siguientes: a) Identificar seriaciones que siguen patrones simples (AB); b) Iniciarse en la construcción de seriaciones con patrón simple; c) Anticipar acciones a partir de la identificación de una determinada secuencia; y d) Leer y representar seriaciones formadas por un patrón (AB).

Tal y como expone Rittle-Johnson et al. (2018), las habilidades relacionadas con la repetición de patrones son un vaticinador del conocimiento y el crecimiento matemático. Por consiguiente, compartimos con Papic y Mulligan (2007) la necesidad de continuar explorando el impacto que produciría en el desarrollo de la primera infancia la introducción de cambios significativos en el currículo que hicieran posible implementar una pedagogía docente que abogue por la representación, la abstracción y la generalización de patrones repetitivos y crecientes en los primeros años.

De igual manera es importante poner en valor el papel del docente como guía que acompaña e invita a los alumnos a reconocer, transferir y representar patrones en diferentes contextos educativos, haciendo uso de buenas preguntas y de una planificación minuciosa, conectada con la teoría y sustentada desde la práctica, que contribuya a iniciar el camino del pensamiento algebraico.

Referencias

Alsina, À. (2010). La "pirámide de la educación matemática": una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189*, 12-16.

Alsina, À. (2011*). Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, À. (2015). Factores clave para una educación matemática infantil de calidad. *Aula Infantil, 79*, 11-14.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 87-115.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Great Britain: Learning Tools LLC.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability- Third Edition*. Austin, TX: Pro Ed.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kawulich, B. (2006). La observación participante como método de recolección de datos. *Forum: Qualitative Social Research, 6*(2). Recuperado de http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0502430

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 2*(2), 10-32.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: a quest for coherence*. United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Núñez del Río, C., de Castro, C., del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

Papic, M. y Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice* (Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide, Australia: MERGA.

Perry, B. y Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2da ed., pp. 75-108). New York: Routledge.

Quecedo, R. y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, (14), 5-39.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M. y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31*, 101-112.

Rittle-Johnson, B, Zippert, E. L. y Boice, Katerine, L. (2018). The Roles of Patterning and Spatial Skills in Early Mathematics Development. *Early Childhood Research Quarterly*. doi: 10.1016/j.ecresq.2018.03.006.

Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. En J. V. D. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 52–66). New York: Routledge.

LA MATEMÁTICA PURA Y APLICADA EN LOS RESULTADOS DE PISA

The pure and applied mathematics in PISA results

Álvarez-Morán, S.[a], Aguilar-González, A.[a], Corral-Blanco, N. O.[a] y Carleos-Artime, C. E.[a]

[a]Universidad de Oviedo

Resumen

La competencia matemática se considera imprescindible para el desenvolvimiento de las personas en su vida social, personal y profesional. Su evaluación es uno de los principales objetivos de PISA. En la edición del año 2012 en los cuestionarios de contexto se plantearon preguntas sobre el tipo de ejercicios y problemas objeto de trabajo en el aula, la seguridad de los estudiantes en su resolución, los agrupamientos en matemáticas, etc. En este artículo se analiza, sobre la muestra representativa de España, la negativa o nula relación de la experiencia que dicen tener los estudiantes en matemática aplicada con su rendimiento en matemáticas. La asociación sigue siendo nula cuando el estudio se hace únicamente en los estudiantes de los centros en los que no hay ningún agrupamiento. Se concluye que la experiencia en matemática pura o aplicada no es específica de la enseñanza de las matemáticas sino del rendimiento general del estudiante.

Palabras clave: *matemáticas puras, matemáticas aplicadas, ejercicios, problemas.*

Abstract

Mathematical skill is considered essential for development of people in their social, personal and professional life. Its evaluation is one of the main goals of PISA. In 2012 edition by means of context´s questionnaires several questions were posed about type of task and problems that are most frequently dealt with in the classroom, the security they have when solving them, the grouping or streaming at mathematic's lessons, etc. This article analyzes, using the representative sample of Spain, the negative or null relationship of the experience that students reported in applied mathematics with their performance in mathematics. The association does not exist when the study is done only with students of schools in which there is no grouping. It is concluded that the experience in pure or applied mathematics is not specific to the mathematics' teaching but to the general performance of the student.

Keywords: *pure mathematics, applied mathematics, task, problems.*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de las matemáticas en la vida de las personas se ha hecho más patente en este momento de cambios vertiginosos debidos, entre otros factores, a la evolución tecnológica. La idea tradicional de matemáticas se amplía (Gal y Tout, 2014) para incluir constructos como la *alfabetización matemática*, entendida como la capacidad de las personas para hacer frente a tareas que aparecerán en el mundo de los adultos y que contienen información matemática, y su importancia para el funcionamiento de las personas, así como para el bienestar de los ciudadanos, las sociedades y las economías (Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson y Kent, 2002).

Así, las matemáticas han recibido y continúan recibiendo una atención significativa por parte de los legisladores y todos los países europeos han revisado el currículo de matemáticas en la última década; además, en la inmensa mayoría, se han introducido modificaciones a gran escala desde el año 2007 (Eurydice, 2012). Una de las razones fundamentales para renovar el currículo durante esta década ha sido la incorporación de un nuevo modelo educativo basado en los resultados de

Álvarez-Morán, S., Aguilar-González, A., Corral-Blanco, N. O. y Carleos-Artime, C. E. (2018). La matemática pura y aplicada en los resultados de PISA. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 121-130). Gijón: SEIEM.

aprendizaje, definidos en sentido amplio como los conocimientos y destrezas necesarias para preparar a una persona para la vida activa, a nivel social y laboral, y para alcanzar un nivel adecuado de bienestar personal (Psifidou, 2009).

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes PISA (Programme for International Student Assessment) en su edición del 2012, donde la competencia principal objeto de evaluación es la matemática, planteó una serie de preguntas en el cuestionario de contexto del estudiante, ejemplificándoles determinados ejercicios de matemáticas, para conocer si la enseñanza de las matemáticas estaba más orientada hacia la matemática *aplicada* o la *pura* y cómo era su relación con los resultados que obtienen en la prueba.

Tras el análisis de las relaciones entre las respuestas de los estudiantes y su rendimiento en la competencia matemática en el Informe "Equations and Inequalities, Making Mathematics accessible to all" (OECD, 2016, p.14) se señala que una mayor exposición a ejercicios y conceptos de matemáticas *puras* tiene una fuerte relación con los buenos resultados de los estudiantes, mientras que una exposición a *problemas simples* de matemáticas *aplicadas* tiene poca relación con los resultados. Es de destacar que el calificativo *simple* no aparece en la definición del índice (OECD, 2014, Thecnical Report), ni tampoco en los resultados o conclusiones del informe PISA 2012 Results. Volume I, es decir se trata de una interpretación muy posterior al diseño de los cuesstionarios de contexto que se utilizaron en el estudio.

En el informe se sugiere que simples ejercicios rutinarios no se convierten en buenos problemas sólo por hacer referencia a la vida real y que la forma en que se formulan y presentan los problemas a los estudiantes puede marcar diferencias en los resultados.

En consecuencia, se hará, en primer lugar, una aproximación sobre lo que se entiende por matemáticas puras frente a matemáticas aplicadas.

MATEMÁTICAS PURAS Y MATEMÁTICAS APLICADAS

Existen diversos autores en la literatura de investigación que se han encargado de diferenciar entre los aspectos de matemática pura y matemática aplicada (Steiner, 1976; Pollak, 1979; Blum, 1985; Philips y Rose, 1988). Cuando hablamos de matemática pura y matemática aplicada, hay que hacerlo desde una perspectiva de resolución de problemas, pues ambos aspectos están intrínsecamente ligados a este procedimiento.

Por problema se entiende “una situación que conlleva ciertas preguntas abiertas que desafían intelectualmente a alguien que no está en posesión inmediata de métodos, procedimientos, algoritmos directos, etc. suficientes para responder a las preguntas” (Blum y Niss, 1991).

Estos autores distinguen 4 tipos de problemas matemáticos, dos de ellos directamente relacionados con el objeto de este estudio:

- “Es característico de un *problema matemático aplicado* que la situación y las preguntas que la definen pertenezcan a algún segmento del mundo real y permitan que algunos conceptos matemáticos, métodos y resultados lleguen a ser involucrados” (p. 38).
- En contraste, en un *problema puramente matemático*, “la situación definitoria está enteramente incrustada en algún universo matemático. Esto no impide que los problemas puros surjan de los problemas aplicados pero, tan pronto como son sacados del contexto extra-matematico que los generó, ya no se aplican.” (p. 39).

Ponte y Canavarro (1994) también señalan que los problemas pueden estar en el contexto de la realidad (problema matemático aplicado) o bien formulados en términos puramente matemáticos, e inciden en que el alumnado cuando tiene que resolver problemas apenas focaliza su atención en las propiedades de los mismos, alejándose por tanto del mundo real, por eso, en ocasiones, un problema matemático aplicado puede ser entendido en un contexto casi tan abstracto como el contexto de las matemáticas puras.

La denominación de problema matemático aplicado, según la literatura al respecto, es “la resolución de tareas de matemáticas basadas en el contexto *(context-based mathematics tasks)”* y requiere una interacción entre el mundo real y las matemáticas (Schwarzkopf, 2007), que a menudo se describe como un proceso de modelado (Maass, 2010) o matematización (OCDE, 2003). El proceso de modelado comienza con un problema del mundo real y finaliza con una solución del mundo real (Maass, 2010) y se considera que se lleva a cabo en siete pasos (Blum y Leiss, 2007).

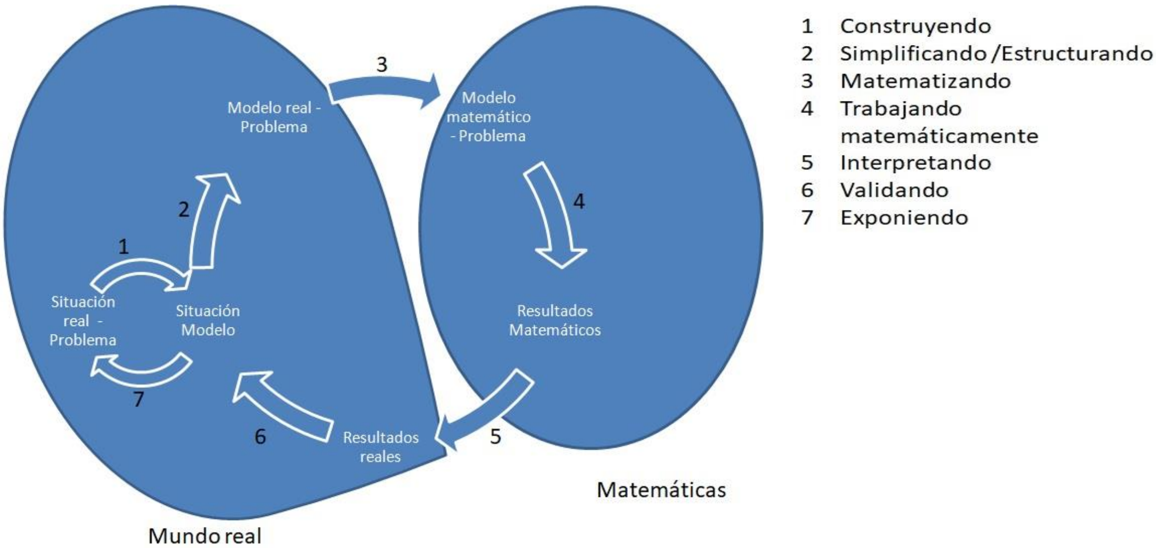


Figura 2. Esquema de Blum y Leiss (2007)

Por su parte Schoenfeld (1985) describe cuatro enfoques que, en su opinión, han seguido los trabajos sobre resolución de problemas a nivel internacional, siendo dos de ellos los que tienen una relación clara con la matemática pura y la matemática aplicada, puesto que se señala cómo interaccionan los problemas con el mundo real:

- *Problemas presentados en forma escrita*, a menudo problemas muy sencillos pero que colocan la Matemática en el contexto del “mundo real”.
- *Matemáticas aplicadas o modelos matemáticos*, es decir, el uso de matemáticas sofisticadas para tratar los problemas que reflejan el “mundo real”.

Los trabajos mencionados ponen de manifiesto la dificultad para diferenciar ambos aspectos.

El tratamiento de las matemáticas puras y aplicadas en PISA

En el informe "PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do" (OECD, 2014) se define la competencia matemática como (p. 9):

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

En esta definición se incluyen tanto los problemas matemáticos aplicados como los problemas matemáticos puros. PISA remarca la importancia en la capacidad de los individuos para “formular, emplear e interpretar las matemáticas en diferentes contextos” (PISA, 2012, p. 9).

El estudiante tiene que *formular* un problema del mundo real en el contexto de un universo matemático y *emplear* en su resolución las herramientas matemáticas que haya adquirido (conceptos, capacidades, estrategias, etc.). Finalmente, al *interpretar* el resultado y dar una respuesta al problema inicial se produce un cambio entre lo que PISA define como pasar de "resultados matemáticos" a "resultados en contexto". Esto sigue en la línea de lo que Blum y Niss (1991) afirman ante los problemas puros que surgen de problemas aplicados.

En el siguiente esquema se presenta un resumen del planteamiento anteriormente señalado a partir del marco teórico de la Competencia Matemática en PISA y se refleja con claridad la complejidad del tratamiento de los conceptos involucrados y, por consiguiente, la dificultad para catalogar las diferentes tareas que PISA establece en sus pruebas.

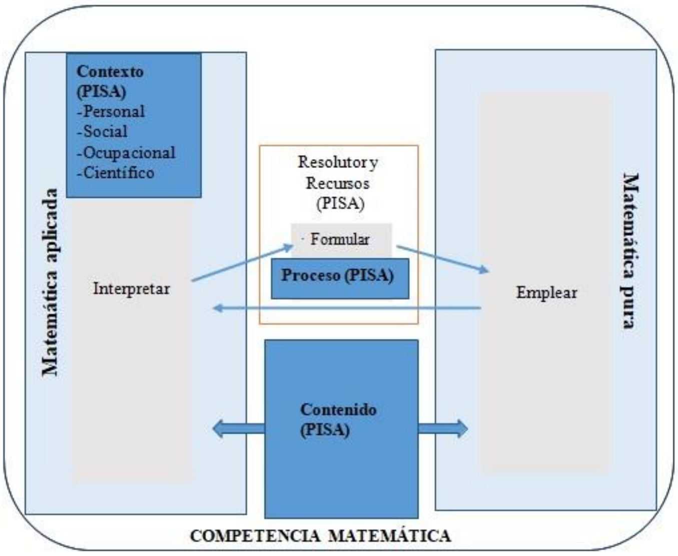


Figura 1. Esquema relaciones Contexto-Proceso con Matemática pura y aplicada

Ejercicios y problemas PISA identificados como matemática Pura y como matemática Aplicada

En los cuestionarios de contexto del estudiante en 2012 se les presentaban ejemplos de diferentes ejercicios que podrían realizar, que PISA identifica como matemática *aplicada* o matemática *pura* y se les preguntaba sobre la frecuencia en que suelen trabajarlos en el aula, su seguridad en la resolución de los mismos, etc.

Tabla 1. ¿Con qué frecuencia te has encontrado los siguientes tipos de **ejercicios** de Matemáticas en clase?

Ejercicios de matemáticas **aplicadas**
1) Calcular a partir de un horario de trenes cuánto tiempo se necesita para ir de una ciudad a otra.
2) Calcular cuánto aumenta el precio de un ordenador al sumarle los impuestos.
3) Calcular cuántos metros cuadrados de baldosas necesitarás para embaldosar un suelo.
4) Entender tablas científicas que aparezcan en un artículo de periódico.
5) Calcular la distancia real entre dos lugares en un mapa con una escala de 1:10.000.
6) Calcular el consumo de energía por semana de un aparato electrónico.
Ejercicios de matemáticas **puras**
7) Resolver una ecuación como la siguiente: $6x^2 + 5 = 29$
8) Resolver una ecuación como la siguiente: $2(x+3) = (x + 3) (x - 3)$
9) Resolver una ecuación como la siguiente: $3x+5=17$.

En los cuestionarios de contexto de PISA 2012 también se plantean ejemplos de diferentes tipos de problemas de matemáticas para que los estudiantes señalen su experiencia en clase con cada uno, pero no diferencia los problemas en matemáticas puras y aplicadas, como puede observarse en la Tabla 2.

Tabla 2. Queremos saber cuál es tu experiencia en clase con estos tipos de **problemas**. ¡No los resuelvas!

Problemas algebraicos de texto
1) Ana es dos años mayor que Isabel, e Isabel tiene cuatro veces la edad de Dani. Cuando Isabel tiene 30, ¿cuántos años tiene Dani?
2) El señor Herrero ha comprado una televisión y una cama. La televisión costaba 625 €, pero ha conseguido un descuento del 10%. La cama costaba 200 €. Por el transporte a casa ha pagado 20 €. ¿Cuánto dinero se gastado el señor Herrero?
Problemas matemáticos de procedimiento
1) Resuelve $2x + 3 = 7$.
2) Halla el volumen de una caja cuyos lados miden 3 m, 4 m y 5 m.
Problemas de matemáticas puras
1) Calcular la altura de una pirámide (se presenta el dibujo)
2) Si n es un número cualquiera: ¿puede ser $(n+1)^2$ primo?
Problemas contextualizados de matemáticas
1) Se presenta un gráfico que hay que interpretar.
2) Durante años, la relación entre el ritmo cardíaco máximo recomendado para una persona y su edad se expresó mediante la siguiente fórmula: Ritmo cardíaco máximo recomendado= 220 - edad   Recientes investigaciones han mostrado que había que modificar esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es como sigue: Ritmo cardíaco máximo recomendado= 208 - (0,7 × edad)   ¿A partir de qué edad aumenta el ritmo cardíaco máximo recomendado como consecuencia de la introducción de la nueva fórmula? Justifica tu respuesta.

Un aspecto que se ha de señalar es que en tales cuestionarios se habla de *ejercicios (task)* en determinadas preguntas y de *problemas matemáticos (problem)* en otras.

Tal clasificación es relevante porque PISA evalúa la experiencia en matemática *aplicada* y en matemática *pura* utilizando solamente lo que califica como ejercicios (tasks) y por lo tanto las conclusiones de PISA en este tema se basan sólo en una parte del trabajo que realizan los estudiantes en las clases. A la vista de las Tablas 1 y 2 se constata una notable confusión sobre lo que PISA etiqueta como ejercicio y problema. En la Tabla 2, el primer problema matemático de procedimiento, coincide con el ejercicio 9) de matemáticas *puras* y el segundo de los problemas de procedimiento tiene la misma naturaleza que el ejercicio 3) de matemáticas aplicadas.

A pesar de estos inconvenientes parece razonable esperar que la experiencia en matemática *pura* y la experiencia en matemática *aplicada*, tal como las evalúa PISA, estén relacionadas con el rendimiento en Matemáticas y que esa relación sea más fuerte en esa competencia que con Ciencias o Lectura.

En este estudio se trabajará también con el índice denominado en PISA autoeficacia en matemáticas (Maths Self – Efficacy) y que se construye a partir de las preguntas que se muestran en la Tabla 3. La autoeficacia es (MECD, 2015, p. 1)

> la creencia que tiene un alumno de que, a través de sus acciones, puede producir los efectos deseados. Esta creencia alimenta su motivación para actuar o perseverar ante las dificultades. En 2012, PISA analizó la autoeficacia reseñada por los propios estudiantes, es decir, la convicción que tienen de que pueden resolver satisfactoriamente problemas de matemáticas cuando se encuentran con ellos.

Tabla 3. ¿En qué medida te sientes seguro de ti mismo al hacer las siguientes **tareas** de Matemáticas?

1) Deducir a partir de un horario de trenes cuánto tiempo se necesita para ir de una ciudad a otra.
2) Calcular cuánto bajará de precio de una televisión si se hace un descuento del 30%.
3) Calcular cuántos metros cuadrados de baldosas necesitarás para embaldosar un suelo.
4) Comprender gráficos que aparecen en los periódicos.
5) Resolver una ecuación como la siguiente: 3x+5= 17.
6) Calcular la distancia real entre dos lugares en un mapa con una escala de 1:10.000.
7) Resolver una ecuación como la siguiente: 2(x+3) = (x + 3) (x - 3)
8) Calcular el consumo de gasolina de un coche.

Para medir la autoeficacia se utilizan prácticamente las mismas situaciones que se señalan en la Tabla 1. Sin embargo, nótese, por un lado, que PISA en este caso habla de *tareas* y no de *ejercicios*. Por otro lado, aquí no se tiene en cuenta si los ejercicios son de matemática pura o de matemática aplicada.

La percepción de los estudiantes de sus habilidades en matemáticas condiciona su actitud hacia las mismas (Bandura, 1977); así la importancia de las actitudes, creencias y sentimientos sobre las matemáticas va más allá que el contexto inmediato de aprendizaje, y las diferentes elecciones educativas que los estudiantes hacen podría depender de la confianza que muestran en resolver *tareas* de matemáticas (Hackett y Betz, 1995), entendiéndose por *tarea* tanto los ejercicios como los problemas anteriormente mencionados.

A la luz de los estudios teóricos, la relación del índice de autoeficacia debería tener asociación positiva con el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

OBJETIVO DEL ESTUDIO

De acuerdo con lo planteado en la introducción de este trabajo se formula el siguiente objetivo, referido a la muestra española de PISA:

Constatar si tiene relación la experiencia percibida por los estudiantes en matemática pura y en matemática aplicada con los resultados que obtienen en la prueba de la competencia matemática. En caso afirmativo comprobar si esa asociación es específica para el Rendimiento en Matemáticas o se cumple también para Ciencias y Lectura.

MUESTRA

El estudio se basa en los datos de España en PISA 2012 CBA, con una muestra total de 10175 individuos que son representativos del colectivo de estudiantes de 15 años en España. Las variables e índices que se van a utilizar en el presente estudio son las que se reseñan:

- CURSO es el curso en que se encuentra un estudiante. Resulta de recodificar la variable GRADE en las categorias -2 = 2º ESO, 1 = 3º ESO y 0 = 4º ESO.
- ESCS. Se trata del índice creado por PISA para medir el índice sociocultural.
- EXPUREM. Se trata del índice creado por PISA para medir la experiencia en matemáticas puras a patir de los ítems 1) a 5) de la Tabla 1.
- EXAPPLM. Se trata del índice creado por PISA para medir la experiencia en matemáticas aplicadas usando los ítems 7) al 9) de la Tabla 1.
- MATHEFF. Es el índice creado para la autoeficacia con las preguntas de la Tabla 3. En este caso la gradación de las respuestas se presentaba en orden inverso.
- PVMATH: Rendimiento en la competencia matemática.
- PVREAD: Rendimiento en la competencia lectora.

- PVSCIE: Rendimiento en la competencia científica.

El rendimiento del estudiante es entendido como la capacidad del individuo para dar respuesta a las preguntas PISA en Matemáticas, Lectura y Ciencias (Technical Report 2012, p. 146).

INSTRUMENTOS

Se ha utilizado el entorno estadístico R (R Language Environmet for Statistical computing. Viena Austria. R Core Team (2017). http://www.r-project.org) para manejar las bases de datos de PISA 2012 CBA tanto para estudiantes como para centros, que la OECD presenta con las denominaciones de *Student questionnaire data file* y *School questionnaire data file*.

MÉTODO

En primer lugar, se analiza la correlación de los índices relacionados con la experiencia en matemática aplicada (EXAPPLM), mateática pura (EXPUREM) y la autoeficacia (MATHEFF), con el rendimiento de los estudiantes en la competencia matemática (PVMATH).

Tabla 4. Correlación entre los índices que son objeto de análisis en este estudio

	EXAPPLM	EXPUREM	MATHEFF	PVMATH	ESCS
EXAPPLM	1.00	0.32	0.22	0.01	0.04
EXPUREM	0.32	1.00	0.21	0.26	0.14
MATHEFF	0.22	0.21	1.00	0.51	0.26
PVMATH	0.01	0.26	0.51	1.00	0.39
ESCS	0.04	0.14	0.26	0.39	1.00

Resulta llamativa la escasa relación entre la experiencia en matemática aplicada y el rendimiento en matemáticas y, como era de esperar, la alta correlación entre la auto-eficacia que perciben los estudiantes y su rendimiento.

Para analizar con más detalle estas asociaciones y controlar el efecto de algunas variables que pueden inducir a una relación espuria se realizarán regresiones lineales múltiples. El nivel de significación de los contrastes individuales es 0.001 para obtener una significación global de 0.05.

En el informe PISA "Equations and Inequalities, Making Mathematics accessible to all" (OECD, 2016) se señala que uno de los factores que podrían influir en el rendimiento de matemáticas es la forma en que se agrupan los estudiantes según su habilidad en matemáticas (Ps. 14 y 73). Tal información la obtenemos de las cuatro respuestas de las direcciones al Cuestionario de Centro.

Las dos primeras preguntas se refieren a la asignación de los estudiantes a las diferentes clases en los centros educativos basándose en la habilidad que tienen en matemáticas (streaming según PISA). Las dos últimas preguntas se refieren a la metodología de trabajo que utilizan los docentes dentro de las clases de matemáticas (*withing - class grouping* en PISA).

Tabla 5. Ítems sobre la agrupación de los alumnos de 4º de ESO en las clases de Matemáticas

Alternativas de respuesta: Todas las clases En algunas clases En ninguna clase
1) En las clases de Matemáticas se estudian contenidos similares, aunque con diferentes niveles de dificultad.
2) En clases diferentes se estudian contenidos diferentes o un conjunto distinto de temas de Matemáticas que tienen diferentes niveles de dificultad.
3) Se agrupa a los estudiantes según su aptitud dentro de sus propias clases de Matemáticas.
4) En las clases de Matemáticas, los profesores utilizan una pedagogía adecuada para grupos de alumnos con aptitudes heterogéneas (es decir, no se les agrupa por su aptitud).

Al analizar la frecuencia de las respuestas se observa que en un 81% de los centros hay agrupación por niveles de habilidad, en un 53% de los centros hay agrupación por contenidos y habilidad y en un 56% de los centros no hay ningún tipo de agrupación.

RESULTADOS

Ya vista la correlación entre las distintas variables se plantea una regresión lineal múltiple en que se analiza la relación de la matemática pura y aplicada con el rendimiento, además se plantean aspectos de los estudiantes referidos al ESCS, al sexo, si la escuela es privada o pública y al curso en que se encuentran. Señalar que la puntuación cuando llevan un año de retraso o están en el curso modal se refiere al aumento respecto a la situación en que llevan dos años de retraso.

Tabla 6. Resultados del análisis multinivel para el Rendimiento en Matemáticas (PVMATH)

	Intercepto	ESCS	EXAPPLM	EXPUREM	Ser chico	Centro Privad	- 1 AÑO	C_ MOD	R^2
Coefic.	381,37	16,09	-3,89	12,47	21,86	14,59	40,82	115,53	0,43
P_Valor	<2e-16	<2e-16	3,51e-5	<2e-16	<2e-16	<2e-16	<2e-16	<2e-16	

Una vez que se tienen en cuenta los diferentes factores ya mencionados se observa que la experiencia en matemática aplicada tiene relación negativa con el rendimiento en matemáticas y esto carece de sentido. En el caso de las matemáticas puras su coeficiente es superior a 12 puntos.

Para conocer la verdadera influencia de trabajar la matemática aplicada se va a estudiar este modelo cuando no se establece ningún tipo de agrupamiento de los estudiantes por su capacidad en matemáticas. En la Tabla 8 se aprecia que la experiencia en matemática aplicada (EXAPPLM) no influye en el rendimiento en matemáticas (PVMATH) en aquellos casos en que, todos los estudiantes reciben el mismo tipo de enseñanza.

Estos resultados exigen un análisis más detallado en dos aspectos muy importantes:

- La fiabilidad de las respuestas de los centros en cuanto al agrupamiento de los estudiantes.
- EXAPPLM y EXPUREM miden realmente aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas.

En lo que se refiere a la fiabilidad es de destacar que el 32% de los centros respondió de forma contradictoria a las preguntas 3 y 4 de la Tabla 5, al indicar simultáneamente que se hacía y no se hacía separación dentro del aula.

Para tratar de conocer mejor lo que representan los índices EXAPPLM y EXPUREM analizamos la dependencia del índice MATHEFF con la Experiencia en matemática Pura y Aplicada cuando no se producen agrupamientos del alumnado.

Tabla 7. MATHEF en función de la experiencia en matemática pura y aplicada en clases sin agrupamientos.

	Intercepto	ESCS	EXAPPLM	EXPUREM	Ser chico	- 1AÑO	C.MOD	Privado	R^2
Coeficiente	-1,08	0,08	0,16	-0,04	0,67	0,40	0,89	0,34	0,43
P-Valor	<2e-16	0,16	0,0001	0,4365	6,36e-15	0,0015	2,10e-10	0,0009	

Se observa que MATHEF no depende de la experiencia en matemática pura y apenas hay dependencia en el caso de matemática aplicada cuando se trabaja con grupos en los que no se establece agrupamiento alguno por capacidad de los estudiantes.

Resulta sorprendente este resultado ya que, aparentemente, la confianza que tiene un estudiante en resolver una tarea de matemáticas no está relacionada con la frecuencia con la que realiza ejercicios de matemáticas.

En el siguiente paso se pretende conocer si los índices EXAPPLM y EXAPURE miden realmente alguna característica específica de matemáticas, para ello vamos a ver su relación con el rendimiento en la Competencia lectora (PVREAD) y en la Competencia científica (PVSCIE) con las que a priori no habría de tener relación alguna.

Tabla 8. Comparación entre los resultados del análisis multinivel sobre PVMATH, PVREAD y PVSCIE cuando los estudiantes no están agrupados (heterogeneidad)

	PVMATH		PVREAD		PVSCIE	
	Coeficiente	P_Valor	Coeficiente	P_Valor	Coeficiente	P_Valor
Intercepto	350,73	<2e-16	409,02	<2e-16	409,37	<2e-16
ESCS	9,44	0,0052	10,15	0,0005	15,28	3,18e-6
EXAPPLM	1,92	0,5304	-6,43	0,0142	0,18	0,9501
EXPUREM	12,88	0.0003	28,21	<2e-16	19,70	2,32e-8
Ser chico	26,50	8.9e-07	-20,93	5,73e-6	15,13	0,0035
Centro Privado	32,00	1,12e-6	19,73	0,0004	28,60	6,51e-6
Retardo de un año	50,06	1,97e-9	40,98	9,62e-9	23,25	0,0035
Estar en el curso modal	139,27	<2e-16	96,78	<2e-16	86,60	<2e-16
R^2	0,54		0,51		0,45	

En la Tabla 8 se aprecia una estructura muy similar en los modelos del rendimiento en Matemáticas, Lectura y Ciencias, con respecto a todas las variables explicativas. En particular, EXAPPLM no influye significativamente en ninguna de las variables de rendimiento y EXPUREM tiene un coeficiente de regresión siempre positivo, aunque el valor menor se obtiene en Matemáticas. Dado que estas variables pretenden medir la enseñanza de matemáticas estos resultados plantean serias dudas acerca de que tanto EXAPPLM como EXPUREM midan realmente aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas.

Otro hecho que puede ayudar a entender estos resultados es el alto grado de respuestas que se pueden considerar "no coherentes" en la percepción de los estudiantes a la experiencia en Matemáticas. Así, por ejemplo, al analizar conjuntamente las respuestas al segundo problema algebraico de texto (Tabla 2) con el ejercicio 2 (Tabla 1) se obtiene que el 67% de los estudiantes respondían en categorías diferentes.

CONCLUSIONES

A partir de los análisis que se han ido presentando a lo largo de todo el trabajo las conclusiones que se pueden extraer del mismo son las siguientes:

- No hay asociación entre la experiencia de los estudiantes en matemática *aplicada* y su rendimiento en matemáticas, cuestión que no parece razonable según los modelos teóricos presentados.
- La asociación sigue siendo nula cuando el estudio se restringe a los estudiantes sobre los que no se hace ningún tipo de agrupamiento.
- No hay asociación entre la experiencia en matemática *pura* y *aplicada* con la seguridad en la resolución de tareas matemáticas, cuando todo el alumnado recibe la misma enseñanza, lo cual resulta completamente inesperado.
- La asociación de la experiencia en matemática *pura* y *aplicada* con el rendimiento en Lectura y en Ciencias tienen el mismo patrón de comportamiento que para el rendimiento en matemáticas. Este resultado parece indicar que la experiencia en matemática pura o aplicada no reflejan una característica específica de la enseñanza de las matemáticas sino algo relativo al rendimiento general del estudiante.

El resultado general del trabajo es que los índices EXAPPLM y EXPUREM no reflejan adecuadamente la experiencia en Matemáticas y que las recomendaciones que aparecen en el informe PISA 2012 Results. Volume 1; sobre la exposición a la matemática pura y aplicada deben ser tomadas con mucha cautela, al menos, en lo referente a los estudiantes españoles.

Referencias

Bandura, A. (1977). *Social Learning Theory*. New York, NY. General Learning Press.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". En Haines et al. (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12): *Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Eurydice. (2012). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa (CNIIE) Recuperado de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice

Gal, I. y Tout, D. (2014). Comparison of PIAAC and PISA Frameworks for Numeracy and Mathematical Literacy, OECD *Education Working Papers*, (102), OECD Publishing, Paris. doi: 10.1787/5jz3wl63cs6f-en

Hoyles, C., Wolf, A., Molyneux-Hodgson, S. y Kent, P., (2002). *Mathematical skills in the workplace*: *final report to the Science Technology and Mathematics Council*. London: Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council.

Maass, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285-311.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2015). *Pisa in Focus*, *56*. Recuperado de: https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:d3b9c2ba-0088-499b-b7b6-3205e34e6cbf/pisa-in-focus-n56esp.pdf

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework – Mathematics, reading, science, and problem solving knowledge and skills.* Paris: OECD.

OECD. (2014). *PISA 2012 Technical Report.* PISA. OED. Publishing, Paris.

OECD. (2014). PISA 2012 *Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics, Reading and Science*. Volume I.

OECD. (2016). *Equations and inequalities: making mathematics accessible to all*. PISA OECD Publishing, Paris.

Psifidou, I. (2009). "Innovation in school curriculum: the shift to learning outcomes". *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*, 2436-2440.

Ponte, J. P. y Canavarro, A. P. (1994). A Resolução de Problemas nas Concepções e Práticas de Professores. En D. Fernandes, A. Borralho, y G. Amaro (Eds.), *Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular* (pp. 197-211). Lisboa: IIE.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. USA.

Schwarzkopf, R. (2007). Elementary modeling in mathematics lessons: The interplay between Real-world, knowledge and mathematics structures. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 209-216). New York: Springer.

ANÁLISIS DE LAS ANOTACIONES REALIZADAS POR PROFESORES AL CALIFICAR PRUEBAS ESCRITAS DE MATEMÁTICAS

Analysis of the annotations made by teachers when grading mathematics written exams

Arnal-Bailera, A.[a], Muñoz-Escolano, J. M.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

Pese a la existencia de múltiples modelos, métodos e instrumentos para la evaluación, la calificación de exámenes sigue siendo una de las actividades cotidianas de los profesores de matemáticas. Diversos trabajos han puesto de manifiesto la complejidad de esta tarea, así como los diversos factores que influyen en los profesores a la hora de abordarla. En este trabajo, bajo el paradigma de la teoría fundamentada, ampliamos estudios anteriores analizando las anotaciones de 21 profesores universitarios de matemáticas cuando califican diez respuestas (algunas correctas y otras con errores de distinto tipo) a una tarea de tipo procedimental en un contexto de análisis matemático. A partir de este análisis, se han identificado cinco grandes categorías (con diversas subcategorías) en torno a las que se organizan los comentarios de los profesores.

Palabras clave: *calificación, evaluación, pruebas escritas, análisis temático, teoría fundamentada*.

Abstract

In spite of the many models, methods and instruments to the assessment, the grading of written exams is still a daily task of mathematics teachers. Several works point out the complexity of this task, as well as the many factors affecting the teachers when they carry it out. In this work, based on the grounded theory paradigm, we extend previous work by analysing the annotations of 21 university mathematics teachers when grading 10 answers (some correct and some containing different types of errors) to a procedural task in a context of mathematical analysis. From this analysis, we have identified five main categories (with several subcategories) which organise the teachers' comments.

Keywords: *grading, assessment, written exams, thematic analysis, grounded theory*.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En el trabajo de Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016), se estudiaron las actuaciones de un grupo de profesores de secundaria al calificar tres producciones correctas de una misma tarea, típica en las P.A.U., de marcado carácter procedimental. Además de constatar una gran variabilidad en las calificaciones otorgadas, un estudio cualitativo mostró que, durante el proceso de calificación, los profesores analizados realizaban anotaciones y comentarios sobre diversos aspectos. En concreto se identificaron tres grandes temas en torno a los que giraban dichas anotaciones: el método de resolución seguido por el alumno, la corrección matemática de la respuesta y el grado de argumentación de la misma.

Resulta de interés entonces ampliar el estudio cualitativo anterior, incluyendo en el mismo no sólo producciones correctas, sino también otras que incluyan diferentes errores. De este modo, además de identificar eventualmente nuevas temáticas asociadas a la calificación de producciones correctas,

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2018). Análisis de las anotaciones realizadas por profesores al calificar pruebas escritas de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 131-140). Gijón: SEIEM.

también aparecerán temáticas asociadas a la calificación de producciones que contienen errores de distinta naturaleza.

Así, el objetivo fundamental de este trabajo consiste en identificar y caracterizar los diferentes temas que emergen en los comentarios de profesores cuando éstos califican las respuestas, tanto correctas como erróneas, dadas por estudiantes a una tarea de tipo procedimental en un contexto de análisis matemático.

MARCO TEÓRICO

La evaluación afecta de manera determinante a los procesos de enseñanza y aprendizaje de cualquier disciplina. La evaluación en matemáticas tiene distintas funciones (Giménez, 1997) y atendiendo a su propósito, a cuando se realiza y a los agentes implicados en ellas, podemos clasificar distintos tipos de evaluación: formativa, sumativa, de diagnóstico, inicial, continua, final, interna, externa, etc. (Castillo, 1999). Pese a esta diversidad, los exámenes siguen siendo un instrumento muy usado por parte de los profesores de matemáticas (Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero, 2016).

Webb (1993) señala cinco aspectos comunes a todo tipo de evaluación, ya sea la evaluación realizada por un profesor (o persona que evalúa) en un contexto de aula o en un estudio internacional: la tarea que se evalúa, la respuesta que da el estudiante, la interpretación que hace el profesor de esta respuesta, la valoración de dicha interpretación ubicándola dentro de una escala y, finalmente, el registro e informe del resultado de la evaluación.

En concreto, durante las fases de interpretación y valoración, el evaluador debe identificar aspectos importantes de la tarea, establecer criterios para valorar la respuesta e identificar y ponderar los posibles errores en la producción. En este punto, juega un papel importante la formación matemática y la experiencia profesional de los correctores (Meier, Rich y Cady, 2006; Wang y Cai, 2006). A este respecto existen estudios sobre prácticas evaluativas en la Universidad tanto con profesores de la Licenciatura de Matemáticas (Jarero, Aparicio y Sosa, 2013), como del Grado o Diplomatura de Magisterio (Palacios y López-Pastor, 2013). Además, también son relevantes las concepciones del evaluador sobre los contenidos involucrados y sobre los posibles modos correctos de resolución de la tarea, así como sus concepciones y creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares (Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero, 2016; Gil y Rico, 2003, Carrillo y Contreras, 1995).

Según muchos de los autores anteriores, el diferente papel que tiene el error es uno de los indicadores de las concepciones del profesorado. Por ejemplo, Huitrado y Climent (2013) establecen dimensiones para la caracterización de saberes en la comprensión de los errores mediante el estudio de las argumentaciones dadas por un docente mientras califica producciones de estudiantes. González, Gómez y Restrepo (2015) caracterizan distintos usos del error en la enseñanza de las matemáticas en el contexto de un curso de formación continua del profesorado donde los profesores debían analizar, diseñar e implementar la enseñanza de un tema. Estudiando los propósitos, las acciones docentes vinculadas y los resultados finales de dichas acciones, los autores establecen 16 usos del error por parte de los docentes. Un propósito concreto asociado a evaluar el estado cognitivo del estudiante es calificar o emitir una valoración final sobre dicho estado tras un determinado periodo formativo. Para conseguir este propósito concreto, se usan los errores para llevar a cabo las acciones de enunciar los criterios de evaluación correspondientes al tema y de diseñar los instrumentos de evaluación. Por otro lado, en cuanto a la presencia de errores en las respuestas de los estudiantes, Wang y Cai (2006) señalan que éste es uno de los factores que influyen en la variabilidad de las calificaciones otorgadas por distintos correctores.

En la literatura, existen múltiples propuestas para evaluar las producciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas. Charles, Lester y O'Daffer (1987) señalan tres aspectos a evaluar: comprensión del problema, planificación de la solución y respuesta obtenida. Lane (1993), en su diseño de rúbrica general para evaluar tareas dentro del proyecto QUASAR, distingue entre conocimiento matemático, conocimiento de estrategias y comunicación. Szetela y Nicol (1992) señalan como categorías a evaluar: respuesta, expresión de la respuesta, estrategia seleccionada e implementación de la estrategia. Más recientemente, Cáceres y Chamoso (2015) proponen una matriz de valoración de resolución de problemas donde destacan cinco aspectos: la comprensión del problema, planificación y ejecución de la estrategia, solución del problema, análisis del proceso y la solución y la presentación.

La calificación de una producción solo está en el punto final de todo el proceso de evaluación. Para llegar a ella, como hemos visto, es necesario un proceso de interpretación y valoración. Así, es necesario prestar atención a cómo los correctores argumentan y justifican la calificación otorgada a cada producción. Fernández, Callejo y Márquez (2014) recogen los argumentos explicitados por maestros en formación cuando califican problemas de división-medida; mientras que Sakonidis y Klothou (2007) estudian las justificaciones dadas por maestros en ejercicio al calificar cuatro respuestas al mismo problema indicando los recursos y posiciones adoptados frente a la evaluación (Morgan, Tsatsaroni y Lerman, 2002; Morgan y Watson, 2002).

Las pruebas externas y anónimas, como los estudios de evaluación a gran escala, pueden estar menos afectadas por los efectos de las expectativas del profesor hacia cada estudiante (Morgan y Watson, 2002). Además, pueden ser un buen contexto para analizar y caracterizar las distintas dificultades de los estudiantes (Nortes y Nortes, 2010; Cai, Mok, Reddy y Stacey, 2016) así como para analizar las actuaciones de distintos correctores a la hora de valorar las respuestas de los estudiantes y proponer modelos de calificación (Gairín, Muñoz y Oller, 2012; 2013; Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2013).

En este trabajo se analiza sobre qué aspectos o a qué temas hacen referencia distintos profesores de universidad cuando califican producciones variadas de estudiantes de 2º de Bachillerato ante una tarea de tipo procedimental y con un rol de evaluadores externos.

MÉTODO Y MUESTRA

El estudio realizado es de carácter cualitativo. En particular, se aborda un análisis temático de tipo inductivo (Braun y Clarke, 2006) que se enmarca en el paradigma de la teoría fundamentada. En este tipo de diseños de investigación se "utiliza un procedimiento sistemático cualitativo para generar una teoría que explique en un nivel conceptual una acción, una interacción o un área específica" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 492).

En el marco de la teoría fundamentada (Charmaz, 2006) se suele optar por un muestreo teórico, entendido éste como la búsqueda de fuentes de datos potencialmente ricas desde el punto de vista de la investigación que se pretende realizar. En nuestro caso, se diseñó una situación de práctica virtual (Carrillo y Contreras, 1995) consistente en un cuestionario formado por 10 respuestas distintas (creadas por el equipo investigador) a un mismo problema de optimización (Figura 1) similar a los propuestos habitualmente en las P.A.U. (Zamora-Pérez, 2014). Se trató de que las 10 respuestas diseñadas presentaran la mayor diversidad posible (Tabla 1). Para ello, tres de ellas son respuestas correctas que involucran distintos métodos de resolución (Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2016), una de ellas presenta un procedimiento inacabado y las seis restantes, presentan errores en tareas de diversa índole según la clasificación de Gairín, Muñoz y Oller (2012). De estas seis, tres presentan errores relacionados con aspectos procedimentales algebraicos, dos con aspectos procedimentales analíticos y una con aspectos conceptuales; en algunos casos el mismo error aparece repetido en la misma respuesta.

Tabla 1. Detalles principales de las 10 respuestas

Respuesta	Resultado	Error	Tipo de tarea en la que sucede
A1	Incorrecto	Manipulación algebraica	Tarea auxiliar general
A2	Incorrecto	Derivación	Tarea auxiliar específica
A3	Ninguno	Método incompleto	Tarea principal
A4	Correcto	-	-
A5	Correcto	-	-
A6	Correcto	-	-
A7	Incorrecto	Método incorrecto	Tarea principal
A8	Incorrecto	Derivación	Tarea auxiliar específica
A9	Correcto	Derivación	Tarea auxiliar específica
A10	Incorrecto	Manipulación algebraica	Tarea auxiliar general

Finalmente, las respuestas calificadas contienen distintos sistemas de representación y presentan grados diversos de justificación, orden y limpieza en la presentación. Pese a no tratarse de respuestas reales de alumno, todas las respuestas presentan características observadas en el análisis de respuestas reales de alumnos a problemas similares en la P.A.U. (Gairín, Muñoz y Oller, 2013).

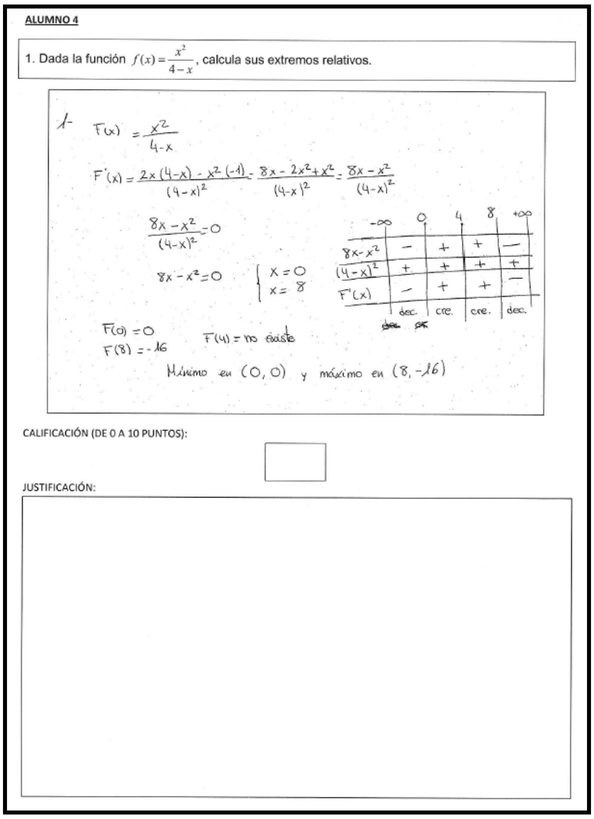
Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$, calcula sus extremos relativos

Figura 1. Enunciado del problema utilizado en el cuestionario.

Una vez diseñado el cuestionario, se solicitó a 21 profesores universitarios de matemáticas, todos ellos doctores en matemáticas, y en ejercicio en diversos centros de la Universidad de Zaragoza que calificaran cada una de las 10 respuestas que lo formaban. Al tratarse de profesores de matemáticas a nivel universitario se minimiza la influencia del factor de la formación matemática. Por otra parte, de los 21 participantes, 5 habían impartido clase a nivel de Educación Secundaria y 16 de ellos habían actuado como correctores en los tribunales de las P.A.U. en la Universidad de Zaragoza por lo que el factor de la experiencia profesional queda también controlado.

Puesto que cada uno de los 21 correctores actuó sobre 10 respuestas, se dispuso finalmente de una muestra de 210 correcciones realizadas cada una de ellas sobre un documento como el mostrado en la Figura 2. Como se observa en la figura, además de la calificación otorgada a la pregunta, se dedicaba un espacio en el que los correctores debían aportar justificaciones acerca de la calificación emitida. Las unidades de análisis fijadas para el estudio fueron las distintas anotaciones y comentarios realizados por los correctores en cada una de ellas. Estas anotaciones podían ser realizadas tanto en la zona dedicada a las justificaciones, como sobre la respuesta del alumno.

El análisis de la información obtenida en el cuestionario se realizó en dos fases (Charmaz, 2006). En una fase inicial, se generó y codificó una serie de categorías provisionales a partir de los datos. A continuación, en una segunda fase, se refinaron las categorías conceptuales identificadas. Puesto que el equipo investigador consideró que se había alcanzado la saturación de las categorías (Charmaz, 2006), el proceso concluyó con el análisis de la muestra considerada dando como resultado un instrumento que permite analizar las anotaciones realizadas por profesores al calificar pruebas escritas de matemáticas.


ALUMNO 4

1. Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$, calcula sus extremos relativos.

CALIFICACIÓN (DE 0 A 10 PUNTOS):

JUSTIFICACIÓN:

Figura 2. Enunciado del problema utilizado en el cuestionario.

La validez y fiabilidad internas de la investigación se mejoran mediante la “triangulación de investigadores” (Flick, 2007, p. 42); en concreto con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales para reducir los posibles sesgos individuales. Para ello, los tres investigadores analizaron por separado todas las producciones y posteriormente se compararon y discutieron las diferentes categorías que emergían de los datos analizados en sucesivas reuniones y puestas en común.

Cada uno de los correctores realizó entre 3 y 5 unidades de análisis o comentarios a clasificar para justificar la calificación de cada una de las 10 respuestas. Esto da un total por corrector de más de 30 comentarios cuyo análisis detallado excede del espacio disponible para este trabajo.

RESULTADOS

Dentro del conjunto de correctores se distinguen 3 casos en los que, previamente a la calificación de las respuestas, establecen escalas de puntuaciones analíticas en las que dividen la tarea en varios aspectos como la corrección del proceso de resolución, la justificación de detalles técnicos o la comprobación de errores de cálculo, entre otros. Uno de estos correctores no realiza comentarios propiamente dichos en cada tarea, limitándose a asignar una calificación numérica en cada apartado de la escala y a proporcionar la calificación final de la respuesta en el cuadro reservado para ello. Los apartados en los que se divide cada una de estas escalas no han sido considerados comentarios como tales ya que no se pueden relacionar con una respuesta en particular. Los otros dos correctores, al margen de asignar la puntuación atendiendo a los criterios antes enunciados, sí que realizan comentarios durante la corrección a cada una de las respuestas y son analizados en el estudio.

Durante la primera fase del análisis se generaron y codificaron una serie de categorías provisionales a partir de los datos analizados. En la Tabla 2 mostramos los resultados relativos a esta fase del estudio.

Tabla 2. Resumen de los resultados de la primera fase.

Nombre (código)	Definición	Ejemplos
Procedimiento esperado (PE)	Comentarios acerca del ajuste del proceso general seguido por el alumno al esperado o preferido por el corrector.	*"No se aprecia si conoce el estudio a través de la segunda derivada y/o crecimiento/ decrecimiento."* *"La manera de ver si hay máximo o mínimo no es la más adecuada."*
Procedimiento correcto (PC)	Comentarios acerca de la corrección del proceso general seguido por el alumno.	*"Se utilizan las mínimas herramientas necesarias…"* *"Conoce la mecánica."*
Procedimiento incorrecto (PI)	Comentarios acerca de la incorrección o incompletitud del proceso general seguido por el alumno.	*"El estudiante trabaja mecánicamente, aplicando mal determinadas reglas. No relaciona derivadas con crecimiento/ decrecimiento."* *"No sabe cómo se calculan los puntos críticos ni los extremos relativos."*
Tarea algebraica correcta (TalC)	Comentarios acerca de la corrección de una tarea algebraica llevada a cabo por el alumno en el proceso de resolución del problema.	*"No se equivoca en las operaciones."* *"Sabe operar."*
Tarea algebraica incorrecta (TalI)	Comentarios acerca de la incorrección de una tarea algebraica llevada a cabo por el alumno en el proceso de resolución del problema.	*"… pone que $(ab+c)/b^2=(a+c)/b$."* *"Errores […] de manipulación algebraica."*
Tarea analítica correcta (TanC)	Comentarios acerca de la corrección de una tarea analítica llevada a cabo por el alumno en el proceso de resolución del problema.	*"Calcula bien f' y f''."* *"Realiza la 1ª derivada bien."*
Tarea analítica incorrecta (TanI)	Comentarios acerca de la incorrección de una tarea analítica llevada a cabo por el alumno en el proceso de resolución del problema.	*"Fallo al derivar…"* *"Error en la fórmula de derivación."*
Gravedad absoluta (GA)	Comentarios acerca de la gravedad de un error cometido por el alumno en términos absolutos.	*"…tiene un error de simplificación MUY grave…"* *"Despiste."*
Gravedad relativa (GR)	Comentarios acerca de la gravedad de un error cometido por el alumno en términos relativos.	*"Creo que al nivel de las PAU no se puede aprobar un ejercicio en el que se comete un error de este tipo."*
Reiteración (R)	Comentarios respecto a la repetición a lo largo del problema de un mismo error cometido por el alumno.	*"Comete un error grave 2 veces…"* *"Mismo fallo repetido 2 veces."*
Limpieza (LI)	Comentarios acerca del orden y limpieza en la presentación de la respuesta del alumno.	*"Exposición esquemáticamente muy clara."* *"Claro y muy bien."*
Argumentación (AR)	Comentarios acerca del grado de argumentación presente en la respuesta del alumno.	*"No justifica suficientemente las monotonías."* *"Quizás falte algo de letra comentando la teoría."*
Sistemas de representación (SR)	Comentarios acerca del uso por parte del alumno de distintos sistemas de representación.	*"No hubiera estado mal añadir una pequeña gráfica de la función."* *"Aproxima 8/3 con lo que podría generar un error."*
Resultado final (RF)	Comentarios acerca de la corrección del resultado final presentado por el alumno.	*"¡El "acierto" en el mínimo es casualidad!"* *"El resultado es correcto."*
Verificación del resultado (VR)	Comentarios acerca del uso de estrategias por parte del alumno para la comprobación de la	*"No analiza el hecho de que salgan dos mínimos."*

	validez o corrección del resultado final.	*“Con los resultados obtenidos debería darse cuenta de que algo va mal.”*

Las 15 categorías identificadas en esta primera fase recogen la práctica totalidad de las unidades de análisis estudiadas. De hecho, los escasos comentarios que no corresponden a ninguna de las categorías anteriores se refieren a aspectos que no están directamente relacionados con la calificación de la pregunta. Un ejemplo de este tipo de comentarios aparece recogido en la Figura 3.

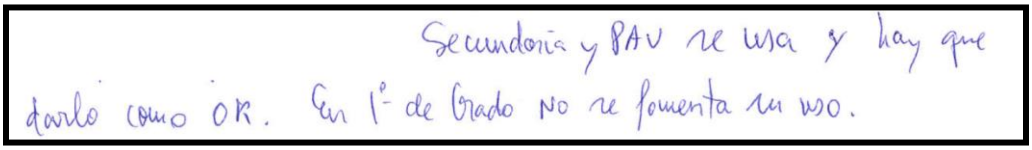


Figura 3. Comentario ajeno al proceso de calificación: “*En 1º de Grado no se fomenta su uso*”.

En la segunda fase, las categorías anteriormente identificadas se refinaron y agruparon en otras más generales tal y como se recoge en la Tabla 3.

Tabla 3. Resumen de los resultados de la primera fase.

Nombre	Código	Categorías de la primera fase que la componen	Definición
Procedimiento	P	PE, PC, PI	Comentarios acerca del proceso general seguido por el alumno.
Cálculos	C	TalC, TalI, TanC, TanI	Comentarios acerca de una tarea concreta llevada a cabo por el alumno dentro del proceso general de resolución.
Errores	E	GA, GR, RE	Comentarios acerca de un error cometido por el alumno.
Exposición	EX	LI, AR, SR	Comentarios acerca de la calidad expositiva de la respuesta del alumno.
Resultado	R	RF, VR	Comentarios acerca del resultado final presentado por el alumno.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados del estudio se centran fundamentalmente en la tercera característica apuntada por Webb (1993) sobre la interpretación de la respuesta por parte del corrector y, de manera tangencial, la cuarta característica sobre la valoración de la misma. Del análisis de los comentarios de los profesores, han surgido 15 categorías temáticas que hemos agrupado en 5 categorías más generales: procedimiento, cálculos, errores, exposición y resultado. Ampliar el estudio a un número mayor de producciones con distintas características ha supuesto que hayan aparecido nuevos temas en los comentarios de los correctores. Las temáticas emergidas en Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) (método esperado, argumentación y corrección matemática) han sido refinadas y ampliadas con estas nuevas categorías que hacen referencia a comentarios sobre los cálculos realizados para llegar a la solución, el resultado final y los errores cometidos por el alumno.

Las categorías presentadas en la Tabla 3 pueden ser útiles para analizar cualitativamente el modo en que profesores de matemáticas califican pruebas escritas. Este análisis permitiría una descripción más detallada de los perfiles que eventualmente puedan identificarse a partir de un estudio estadístico de carácter cuantitativo. Un trabajo de este tipo, pero circunscrito únicamente a la calificación de respuestas correctas, ya fue llevado a cabo por Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016). La consideración de todo tipo de respuestas permitiría considerar aspectos como la relación entre las calificaciones y el tipo de comentarios realizados, así como la realización de un análisis del contenido de dichos comentarios.

Por otro lado, la identificación de estas temáticas en las justificaciones que emplean los correctores puede permitir el establecimiento de criterios de evaluación más completos, tal y cómo señalan González, Gomez y Restrepo (2015). Así, el análisis de los comentarios que aparecen durante la evaluación de tareas de escolares y la reflexión sobre las mismas es un valioso recurso didáctico para la formación inicial del profesorado, tanto para abordar el tratamiento didáctico de los contenidos (Fernández, Callejo y Márquez, 2014) como para trabajar contenidos sobre evaluación en matemáticas (Arnal-Bailera, Cid, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2018).

De hecho, a pesar de que la mayor parte de los correctores analizados no establecieron ninguna escala de evaluación a priori y puntuaron mediante la penalización por error, todas las categorías emergentes que aparecen son comparables con las escalas de puntuación analítica y de criterios de evaluación de problemas y tareas presentes en la literatura. Por ejemplo, las consideraciones acerca de los procedimientos, cálculos y exposición están presentes en todos los indicadores para la evaluación de problemas mencionados anteriormente (Charles, Lester y O'Daffer, 1987; Szetela y Nicol, 1992; Lane, 1993; Cáceres y Chamoso, 2015). Comentarios acerca de la importancia del error (grave o leve) aparecen explícitamente tanto en la rúbrica general de Lane (1993) como en las categorías de Szetela y Nicol (1992). De hecho, estos últimos autores también advierten sobre la reiteración de un mismo error. Cáceres y Chamoso (2015) valoran el hecho de que el estudiante obtenga la respuesta correcta al problema, y que, además, sea capaz de valorar si la solución que obtiene de ejecutar un determinado plan es correcta y tiene sentido en el contexto del problema.

Sin embargo, entre los comentarios analizados no aparece mención alguna a la comprensión del enunciado del problema, aspecto considerado por todos los autores anteriores en sus trabajos. Esto puede deberse al carácter estándar del enunciado de la tarea propuesta, que aparece consistentemente en las P.A.U. y se trabaja de forma exhaustiva en las aulas de bachillerato. Cabría ampliar el estudio para analizar los efectos en las temáticas identificadas al cambiar la tarea a evaluar, tanto en lo relativo al contenido matemático (en este caso, cálculo de extremos relativos) como al tipo de demanda cognitiva (en este caso, baja demanda cognitiva) (Smith y Stein, 1998). Por ejemplo, nuestra categoría 'Argumentación' incluye comentarios con diferente grado de exigencia argumentativa, desde la mera descripción de los pasos efectuados hasta la demanda de la explicitación de los resultados teóricos que avalan el procedimiento seguido por el alumno.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (S36_17D Investigación en Educación Matemática) así como por el Ministerio de Economía y Competitividad (Proyecto EDU2015-65378-P).

Referencias

Arnal-Bailera, A., Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2018). Marking mathematics exams as a tool for secondary teacher training. En M. E. Strutchens, R. Huang, D. Potari y L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers*. New York, NY: Springer. En prensa.

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Caracterización de las actuaciones de correctores al calificar pruebas escritas de matemáticas. *Revista de Educación, 371*, 35-60.

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology 3*(2), 77-101.

Cai, J., Mok, I., Reddy, V. y Stacey, K. (2016). *International comparative studies in mathematics: Lessons for improving students' learning*. New York, NY: Springer.

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2015). La evaluación sobre la resolución de problemas de matemáticas. En L. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 225-241). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2016). Manifestaciones de los profesores de matemáticas sobre sus prácticas de evaluación de la resolución de problemas. *Bolema, 30*(55), 649-669.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación matemática, 7*(3), 79-92.

Castillo, S. (1999). Sentido educativo de la evaluación en la Educación Secundaria. *Educación XX1, 2*, 65-96.

Charles, R., Lester, F. y O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem-solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Charmaz, K. (2006). *Constructing Grounded Theory. A Practical Guide through Qualitative Analysis*. London: SAGE.

Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2014) Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 407-424.

Flick, U. (2007). *Managing Quality in Qualitative Research*. London: SAGE.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2013). Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U. *Campo abierto: Revista de Educación 32*(2), 27-50.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 21*(1), 27-47.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación, 370*, 71-95.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2010) *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Educación.

Huitrado, J. L. y Climent, N. (2013). Conocimiento profesional del profesor ante errores relativos al algebra de los alumnos de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 327-336). Bilbao: SEIEM.

Jarero, M., Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Pruebas escritas como estrategias de evaluación de aprendizajes matemáticos: un estudio de caso a nivel superior. *RELIME*, 16(2), 213-243.

Lane, S. (1993). The conceptual framework for the development of a mathematics performance assessment instrument. *Educational Measurement: Issues and Practice, 12*(2), 16-23.

Meier, S. L., Rich, B. S. y Cady, J. (2006). Teachers' use of rubrics to score non-traditional tasks: factors related to discrepancies in scoring. *Assessment in Education, 13*(01), 69-95.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de Matemáticas. En A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 367-381). Bilbao: SEIEM.

Morgan, C. y Watson, A. (2002). The Interpretative Nature of Teachers’ Assessment of Students’ Mathematics: Issues for Equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 78-110.

Morgan, C., Tsatsaroni, A. y Lerman, S. (2002). Mathematics teachers’ positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education, 23*(3), 445-461.

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI, 28*(1), 317-341.

Palacios, A. y López-Pastor, V. M. (2013). Haz lo que yo digo, pero no lo que yo hago: Sistemas de evaluación del alumnado en la formación inicial del profesorado. *Revista de Educación, 361*, 279-305.

Sakonidis, H. y Klothou, A. (2007). On Primary teachers' assessment of pupils' written work in mathematics. En J-H. Woo, H-C. Lew, K-S. Park y D-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol 4,* (pp. 153-160). Seoul: PME.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344–350.

Szetela, W. y Nicol, C. (1992). Evaluating Problem Solving in Mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Wang, N. y Cai, J. (2006). An investigation of factors influencing teachers' scoring student responses to mathematics constructed-response assessment tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 5,* (pp. 369-376). Prague: PME.

Webb, N. L. (1993). Assessment for the Mathematics Classroom. En N. L. Webb y A. F. Coxford (Eds.), *Assessment in the Mathematics Classroom. 1993 Yearbook.* (pp. 1-7). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zamora-Pérez, R. F. (2014). *Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemáticas II)*. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Valladolid, Valladolid.

REPRESENTACIÓN DE CANTIDADES INDETERMINADAS POR ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA: EL CASO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE

Representation of indeterminate quantities by third grade students: The case of the dependent variable

Ayala-Altamirano, C.[a] y Molina, M.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

En el marco de la propuesta early algebra, en este trabajo analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes de tercero de primaria a una tarea que involucra una relación funcional lineal. Describimos cómo representan la variable dependiente de una función, cuando la variable independiente, como cantidad indeterminada, está representada por una letra. Extendemos los hallazgos descritos en estudios previos al mostrar que los estudiantes lograron asociar las letras con la idea de variabilidad. Al expresar esto con símbolos, recurren a ideas o sistemas de representación familiares para ellos dejando implícita la idea de variabilidad que verbalizan en las explicaciones de sus respuestas.

Palabras clave: *educación primaria, early algebra, pensamiento funcional, simbolismo algebraico, variables.*

Abstract

In the context of the proposal early algebra, in this paper we analyze the responses of a group of third grade students in a task involving a linear functional relationship. We describe how they represent the dependent variable of a function, when the independent variable, as an indeterminate quantity, is represented by a letter. We extend the findings described in previous studies by showing that the students managed to associate letters with the idea of variability. By expressing this with symbols, they turn to ideas or systems of representation, which are familiar to them. They leave implicit the idea of variability that they verbalize in the explanations of their responses.

Keywords: *elementary education, early algebra, functional thinking, algebraic symbolism, variables.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo es indagar en las capacidades algebraicas que manifiestan estudiantes de educación primaria en contextos funcionales. Se fundamenta en la propuesta curricular *early algebra* que busca promover, en los estudiantes de Educación Primaria, modos de pensamiento algebraico, mayor grado de generalización en su pensamiento y aumentar su capacidad para expresar esa generalidad (Brizuela y Blanton, 2014). Esta propuesta curricular ha impactado en las directrices curriculares de numerosos países, tales como España, EEUU, Chile, Australia, lo que incrementa la relevancia de investigaciones que indaguen en su puesta en práctica en las aulas.

En esta comunicación analizamos cómo los estudiantes de primaria representan cantidades indeterminadas en tareas contextualizadas que involucran una relación funcional. Este trabajo proporciona información útil para los docentes relativa a las primeras reacciones de los estudiantes

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2018). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Burno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). Gijón: SEIEM.

al interactuar con la letra como símbolo algebraico y su empleo para representar la variable dependiente de una función. Coincidimos con otros autores (ej. Radford, 2011) en reconocer que el simbolismo alfanumérico no es la única forma de manifestar pensamiento algebraico. No obstante, describir las tensiones que se producen al trabajar con un nuevo sistema de símbolos, puede ayudar en la preparación de la enseñanza. Los docentes deben ser conscientes de las creencias acerca de los significados de las letras y la notación matemática que traen consigo los estudiantes, y basar su planificación sobre estas (MacGregor y Stacey, 1997).

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Dentro del pensamiento algebraico se considera el pensamiento funcional cuyo foco es estudiar las funciones y las familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Los elementos que lo conforma son, entre otros, la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta, la expresión de esta generalización y el uso de dichas expresiones para analizar el comportamiento de la función (Blanton, 2008).

Radford (2018) plantea que el pensamiento algebraico trata de razonar con cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros, números generalizados, etc.) de manera analítica y es posible hacer esto sin contar con los símbolos alfanuméricos para expresarlo. Para fundamentar el diseño de las sesiones implementadas en este trabajo, adoptamos la perspectiva de que en el aprendizaje del álgebra los signos se elaboran en actividades matemáticas específicas, cuyos usos y elaboración de significados son procesos individuales y sociales que emergen en relación a otros sistemas de signos que surgen en el aula (Radford, 1999). Además, tal como lo describen Kaput, Blanton y Moreno (2008), es un proceso dinámico en el que la generalización y la simbolización están estrechamente relacionadas. En este proceso, el símbolo y el referente pueden ser experimentados de forma separada. En nuestro caso, los estudiantes podrían comprender la idea de variabilidad o referirse a cantidades indeterminadas, sin embargo no contar con los símbolos convencionales para representarla. Para comunicar sus ideas, podrían crear sistemas de símbolos alternativos a partir de los que ya conocen y utilizan.

Una representación matemática es una herramienta que visibiliza los conceptos y procedimientos matemáticos. A través de ellas los estudiantes registran y comunican su conocimiento (Rico, 2009). Los sistemas para representar cantidades indeterminadas y las relaciones funcionales son variados, entre ellos encontramos el lenguaje natural, tablas, gráficos o símbolos algebraicos. Los símbolos algebraicos contemplan el uso de letras, consideradas herramientas lingüísticas para representar ideas matemáticas de forma sucinta. En el álgebra las letras pueden tener asociados distintos significados, tales como número generalizado, representación de cantidades variables, incógnitas o parámetros, según el contexto en el que se utilice. En consecuencia, es importante dar la oportunidad a los estudiantes de participar en experiencias ricas, que los ayuden a generar significados amplios y ricos (Ursini, 1994). Los significados que sean asignados a las letras afectaran a cómo son resueltos los problemas (Küchemann, 1981).

Estudios previos indagan en los significados que los estudiantes otorgan a las letras. Algunos se centran en secundaria (ej. Küchemann, 1981) y otros más recientes en primaria (ej. Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2017). En ambos casos indican que los estudiantes pueden relacionar las letras con objetos concretos o con elementos familiares, como el alfabeto. Además, al organizar los significados según su complejidad, la idea de letra como una cantidad variable es el más complejo de todos. Por otra parte, se ha indagado sobre las dificultades asociadas al uso de letras (ej. Booth, 1988), mencionando que se pueden deber a las diferencias entre la naturaleza de la aritmética y del álgebra, la notación y sus convenciones, o pueden estar relacionadas con la enseñanza. Otras investigaciones informan sobre la transición entre el uso de sistemas de representación no simbólico y simbólicos (ej. Radford, 2018) y sobre los sistemas de representación que utilizan estudiantes que manifiestan pensamiento funcional (ej. Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016). Algunos estudios informan sobre cómo los estudiantes se refieren a lo indeterminado y señalan la necesidad de seguir indagando en esta cuestión (ej., Callejo, García-Reche y Fernández, 2016).

En este estudio indagamos en cómo estudiantes españoles representan la variable dependiente, cuando la variable independiente es expresada a partir de una letra. De este modo, y ante la necesidad provocada de dar significado a las letras sin formación previa al respecto, completamos los resultados de estudios previos en los que en la mayoría de los casos los estudiantes contaban con formación algebraica previa. Indagamos en cómo las ideas asociadas a los símbolos literales influyen en cómo los estudiantes expresan relaciones generales de dependencia y la idea de variabilidad en general. De este modo, desde un contexto español, complementamos los estudios de Blanton y colaboradores (2017) y ampliamos la caracterización del pensamiento algebraico que manifiestan los estudiantes españoles de primaria, una temática de reciente investigación.

OBJETIVOS

El objetivo de esta comunicación es describir y ejemplificar en contextos funcionales cómo estudiantes de tercero de primaria representan la variable dependiente, cuando la variable independiente, como cantidad indeterminada, está representada por una letra.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo cualitativa, tiene carácter exploratorio y descriptivo. Se enmarca en un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) más amplio, dentro del paradigma de la investigación de diseño, cuyo objetivo es explorar y caracterizar el pensamiento funcional de estudiantes de primaria de diferentes edades.

Participantes

La muestra está conformada por 25 estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años). El centro educativo está situado al sur de España y es una institución privada. Antes de participar en esta investigación, los estudiantes no habían trabajado actividades en las que estuvieran involucrada la generalización o las funciones. Tampoco habían recibido instrucción sobre el uso de símbolos, literales o de otro tipo, para representar cantidades indeterminadas.

Diseño e implementación del experimento de enseñanza

Se realizaron cuatro sesiones de trabajo, de aproximadamente 90 minutos cada una. En la recogida de datos participó un grupo de investigadores de la Universidad de Granada, que tenían distintos roles: investigadora-docente, investigadora-observadora y técnico de cámaras. Los estudiantes trabajaron conservando la configuración habitual de la sala de clases. Podían trabajar de manera individual o en grupos de 3 o 4 integrantes. En cada sesión, luego de que los estudiantes registraran sus respuestas por escrito, se efectuó una puesta en común.

Las fuentes de información utilizadas en la recogida de datos fueron tres: (a) cuestionarios escritos (b) grabaciones de video con cámara fija ubicada al final de la sala de clases y (c) grabaciones con una cámara móvil que captó el trabajo realizado por algunos estudiantes.

Las actividades de todas las sesiones se estructuraron en base al modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007). En cada sesión se planteó una situación que implicaba una función lineal con dominio y codominio en los números naturales. En la Tabla 1 se muestran los enunciados generales presentados en las primeras tres sesiones en las que basamos esta investigación. Los datos de la cuarta no se consideran en esta comunicación porque las cuestiones planteadas no implicaban el uso de las letras.

Se plantearon cuestiones relativas a la relación funcional directa (se conoce la variable independiente y se desconoce la dependiente) y a la relación inversa (se conoce la variable dependiente y se desconoce la independiente). Principalmente se preguntó por la relación de correspondencia, y en menor medida por la relación de covariación (Smith, 2008). Las letras se introdujeron para representar cantidades indeterminadas, sin explicar su significado. Los criterios para seleccionarlas fueron evitar aquellas letras utilizadas en el sistema de numeración romano y las que correspondieran con las iniciales de los objetos y personas nombradas en las tareas. En el contexto de las tareas propuestas se esperaba que los estudiantes construyeran y negociaran los posibles usos y significados de los símbolos literales, aun cuando estos no se ajustaran a los institucionales.

Tabla 1. Situaciones presentadas en cada sesión

Sesión	Función	Nombre	Enunciado general
1	$f(x) = x + 5$	La edad de los hermanos	María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.
2 y 3	$f(x) = 3x$	Venta de camisetas	Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.

En la primera sesión se presentó una tabla de 3x9 donde en la primera columna los estudiantes debían registrar casos numéricos particulares para la edad de Raúl, en la segunda escribir la operación para calcular la edad de María y en la tercera escribir la edad de María. El primer acercamiento al uso de la letra se produjo cuando se les pidió que completaran la última fila de dicha tabla con una letra que representara la edad de Raúl. A continuación, debían utilizarla para expresar la operación a realizar con dicha cantidad para calcular la edad de María, en la correspondiente celda.

En la segunda sesión primero se introdujo la situación sobre la venta de camisetas descrita en la Tabla 1 y luego se presentaron 15 sentencias. Los estudiantes debían determinar si eran verdaderas o falsas, y corregir las falsas (ej., Cuando Carlos vende 23 camisetas, gana 69 euros). Las sentencias 6, 7, 14 y 15 incluían letras para representar las variables dependiente e independiente (Tabla 2). En todos los casos se representó la variable independiente con la letra Z, mientras que la representación de la variable dependiente fue cambiando. Las sentencias 7 y 14 podían ser verdaderas o falsas según las condiciones que señalaran que debían cumplir las letras N e Y, respectivamente.

Tabla 2. Sentencias que emplean letras en la sesión 2

Sentencias	Objetivos
6. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana 3xZ euros. 7. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana N euros.	Generalizar la relación de correspondencia directa y expresarlo utilizando letras.
14. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Y camisetas. 15. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Z camisetas.	Generalizar la relación de correspondencia inversa y expresarlo utilizando letras.

En la tercera sesión se les entregó una tabla incompleta de dos columnas correspondientes a las variables número de camisetas vendidas y euros ganados. Faltaban datos relativos a la relación de correspondencia directa o inversa, que debían completar. Se presentaron casos numéricos particulares y cuatro casos en los que estaban involucradas las letras (Figura 1).

Número de camisetas vendidas	Euros ganados	
N		Relación de correspondencia directa
	3×Y	Relación de correspondencia inversa
Z:3		Relación de correspondencia directa
	D	Relación de correspondencia inversa

Figura 1. Actividades que involucran letras. Sesión 3

Codificación de datos y análisis

Para el análisis de los datos se realizó una codificación cualitativa de las transcripciones de las grabaciones y de las producciones escritas. Primero se identificaron las instancias relacionadas con el uso de las letras. En el caso de las transcripciones se realizó una revisión línea por línea. En las producciones escritas las unidades de análisis fueron registros de los estudiantes, posteriormente contrastados con las grabaciones. Para mantener el anonimato de los estudiantes se les asignó un código específico: E_i, con i = 1… 25. En el caso de las investigadoras, el código utilizado fue R.

Las categorías se elaboraron siguiendo un proceso inductivo de análisis de los datos recogidos, apoyándonos para su definición en investigaciones previas (Blanton et al., 2015; Molina, Ambrose y del Rio, 2018). En la Tabla 3 se presentan y definen las categorías elaboradas; distinguimos dos generales ("letra" y "número") y otras seis específicas, debido que en ocasiones no es posible determinar por qué los estudiantes proponen una letra o un número concreto.

Tabla 3. Categorías relativas a la representación de la variable

Categorías	Descripción
Letra	Utiliza alguna letra para representar la variable dependiente.
Letra relacionada	Utiliza una letra para representar la variable independiente y una expresión que contiene esa misma letra para expresar la variable dependiente en relación con la independiente (ej., en la venta de las camisetas proponen N como el número de camisetas y 3xN como la cantidad de euros ganados).
Letra nueva no relacionada	Utiliza letras diferentes, no relacionadas, para representar cada una de las variables (ej., en las edades propone R y M).
Letra nueva relacionada	Utiliza letras diferentes para representar cada una de las variables, relacionadas de alguna forma que explicita (ej., elije las letras A y E por estar distantes 5 lugares en el orden alfabético).
Repite letras	Utiliza la misma letra para representar ambas variables (ej., vende N camisetas y gana N euros).
Número	Representa la variable dependiente con un número.
Número relacionado con el alfabeto	Dada una letra como representación de la variable independiente, representa la variable dependiente con un número que calcula asignando un valor numérico a la variable independiente. Dicho valor corresponde al orden de la letra en el alfabeto. (ej., vende D camisetas y gana 12 euros, ya que D tiene la cuarta posición en el alfabeto y 4 por 3 son 12).
Número aleatorio	Dada una letra como representación de la variable independiente, representa la variable dependiente con un número elegido al azar. (ej., si se plantea que gana S euros, señala que vende 100 camisetas, pues puede ser cualquier número).

RESULTADOS

En esta sección en primera instancia mostramos las representaciones que los estudiantes emplearon en las producciones escritas. Luego ahondamos en las categorías especificas, ejemplificándolas y exponiendo los argumentos dados por los estudiantes para justificar su uso de las letras o los números para representar la variable dependiente.

Representación de la variable dependiente

La variable dependiente fue representada por los estudiantes en las sesiones 1 y 3, es por esto que en la Tabla 4 solo se muestran estas respuestas. En la segunda sesión las representaciones fueron dadas por las investigadoras, no obstante analizamos los casos en los que los estudiantes explicaron cómo interpretan y utilizaban las letras. Esta información se presenta en los siguientes apartados.

La categoría “repite letra” no se muestra en la tabla pues no se observó en las producciones escritas de las sesiones 1 y 3. En el caso de la categoría “letra relacionada”, se muestran tanto respuestas correctas como incorrectas. Se consideraron estas últimas pues dan cuenta de un intento por expresar la variable dependiente explicitando la relación funcional asociada a la situación. Es de esperar que los estudiantes no apliquen las convenciones algebraicas pues este experimento de enseñanza es el primer acercamiento al uso de letras y no han recibido instrucción al respecto.

Tabla 4. Representaciones de la variable dependiente

Categorías de representación	Sesión 1	Sesión 3			
		Vende N	Vende Z:3	Gana 3xY	Gana D
Letra		$N \rightarrow Z^{(3)}$ $N \rightarrow Y$	$Z{:}3 \rightarrow N^{(3)}$	$3xY \rightarrow N^{(2)}$ $3xY \rightarrow O$	$D \rightarrow Z$ $D \rightarrow N$ $D \rightarrow A$
Relacionada		$N \rightarrow NNN$ $N \rightarrow 3xN$	$Z{:}3 \rightarrow ZZZ$ $Z{:}3 \rightarrow Z$	$3xY \rightarrow Y^{(2)}$	$D \rightarrow Dx3$
Nueva relacionada	$A \rightarrow F^{(2)}$ $C \rightarrow H$				
Nueva no relacionada	$R \rightarrow M^{(2)}$				
Número	$A \rightarrow 65$ $A \rightarrow 22$ $A \rightarrow 140$	$N \rightarrow 27^{(2)}$ $N \rightarrow 24$ $N \rightarrow 12^{(2)}$	$Z{:}3 \rightarrow 100$ $Z{:}3 \rightarrow 50$ $Z{:}3 \rightarrow 1^{(2)}$ $Z{:}3 \rightarrow 3^{(2)}$	$3xY \rightarrow 81$ $3xY \rightarrow 27$ $3xY \rightarrow 20$ $3xY \rightarrow 4$ $3xY \rightarrow 3x3$	$D \rightarrow 4^{(2)}$ $D \rightarrow 12^{(2)}$ $D \rightarrow 4x3$ $D \rightarrow 500x3$ $D \rightarrow 3+1$
Relacionado con el alfabeto	$R \rightarrow 24$ $R \rightarrow 33$	$N \rightarrow 42$			
Número aleatorio				$3xY \rightarrow 100$	

Nota. El número entre paréntesis indica la frecuencia de dichas respuestas cuando es mayor que uno.

Uso de una letra para representa la variable dependiente

Ejemplificamos la categoría “letra relacionada” con la respuesta dada por el estudiante E4 en la tercera sesión. Al completar la tabla con la cantidad de euros ganados, cuando vende N camiseta, trata de expresar la relación funcional repitiendo tres veces la letra que representa la variable independiente. Él en su intervención nunca se refiere a un valor particular de la letra, manifestando que interpreta la letra como variable con valor indeterminado. Su argumento es el siguiente.

E4: Si era multiplicado por tres, tres veces le sumas N.

R: Entonces tres veces una N. [Escribe en la pizarra lo que le indica el estudiante]

E4: N más N más n, tres N.

R: ¿Qué significa esto? ¿E4 lo puedes explicar?

E4: Es como si estuviera multiplicado. Tres N porque multiplicado por tres.

Otro ejemplo es la respuesta del estudiante E14 (Figura 2). Ésta es errónea, pues lo esperado es aplicar la relación inversa y expresar la cantidad de camisetas vendidas, por ejemplo, escribiendo “D:3”. El estudiante señala que como la letra puede ser “el número que tú quieras”, la letra que utilizó puede ser “por ejemplo” 5 y al multiplicar ese número por 3 se obtiene el valor que representa la otra D, que sería 15. Observamos en esta explicación que no aplica las convenciones que regulan el uso del simbolismo algebraico ya que no considera que la letra D no puede tener valores distintos en la misma situación.

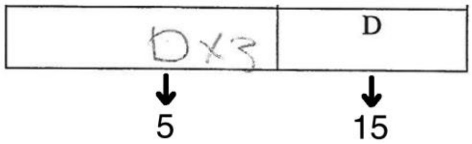


Figura 2. Respuesta estudiante E14 y valor asignado a la letra en su explicación. Sesión 3

En las producciones escritas, en los tres casos categorizados como "letra nueva relacionada" los estudiantes utilizaron el alfabeto como referencia para escoger las letras para representar las dos cantidades. En la puesta en común de la primera sesión el estudiante E4 propone que la edad de Raúl es A, cuenta cinco letras siguiendo el orden del alfabeto y determina que la edad de María es E. Nunca se refiere a una edad en particular, el valor de las letras utilizadas es indeterminado.

Otros casos asociados a la categoría "letra nueva relacionada" los encontramos en la segunda sesión. Los estudiantes utilizan una letra diferente a la dada para representar la variable dependiente, argumentando que letras distintas representan cantidades distintas y que la letra puede representar "el número que tú quieras". Cuatro estudiantes utilizan este argumento de forma amplia y otros dos de forma restrictiva ya que señalan que es cualquier número pero que debe cumplir la relación funcional entre las variables. Las siguientes intervenciones ejemplifican ambos tipos de respuestas. Corresponden a argumentos dados por los estudiantes al determinar si la sentencia 7, propuesta en la segunda sesión, era verdadera o falsa.

E7: Yo digo que es verdadero, pues si Carlos vende Z camisetas, Z es un número y gana N euros, N es otro número. Entonces si vende Z camisetas, entonces gana N euros. Entonces yo entiendo que si Carlos vende el número que sea, gana un número diferente de euros.

E1: Es verdadera, Pues si la Z es muchos, la N tiene que ser un número grande. Si la Z es poco, entonces la otra tiene que ser un número bajito. Por ejemplo, la Z es 20. 20 por 3 sería… mmm… 60. Y ahí pones 60, en la N. Y sería 60, y por eso digo que es verdadero.

En la primera sesión encontramos ejemplos de respuestas categorizadas como "letra nueva no relacionada". Aquí dos estudiantes (E21 y E25) utilizan las letras como etiquetas. No las relacionan entre sí ni las asocian con ninguna cantidad concreta o indeterminada. Emplean la letra R (de Raúl) y "M" (de María) para representar la variable independiente y dependiente respectivamente.

Respecto a la categoría "repite letras", al analizar la sentencia 15 en la segunda sesión, cuatro estudiantes afirman que es verdadera. Se basan en la idea de que la letra puede ser "el número que tú quieras". Interpretan la letra como una cantidad indeterminada y no aprecian que una misma letra no puede representar distintas cantidades en una misma situación. Un ejemplo de esto es la respuesta del estudiante E14, que dice "Porque la Z puede ser 13 o el número que tú quieras".

Uso de un número para representa la variable dependiente

Al emplear números, por lo general los estudiantes fijan un valor para la variable independiente y luego aplican la relación funcional; el resultado que obtienen lo escriben como representación de la variable dependiente. Los criterios para asignar el valor de la variable independiente pueden ser diversos, entre ellos encontramos elecciones aleatorias y otras que se basan en la posición de las letras en el alfabeto.

Por ejemplo, en la primera sesión dos estudiantes proponen representar la edad de Raúl con una R y la edad de María con una M. El valor de R lo determinan fijándose en el orden en el alfabeto. El valor de la letra M lo determinan aplicando la relación funcional, es decir, suman cinco al valor dado a la letra R. En la Figura 3 se muestra la respuesta del estudiante E15. Es interesante observar que para expresar la suma de R más cinco no combina números y letras sino que utiliza la letra E como representación del cinco.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
~~R~~	~~R+M =~~	
R	R+E=	24

Figura 3. Respuesta estudiante E15. Sesión 1

En este ejemplo a la letra se le asigna un valor fijo, lo que podría interpretarse como que el estudiante no asocia la idea de variabilidad a la letra. No obstante, en el siguiente diálogo se constata que acepta que el problema puede tener variadas respuestas. Señala que la edad de María (variable dependiente) puede ser cualquier número, el cual dependerá de la letra que cada estudiante escoja para representar la edad de Raúl.

R: Entonces, ¿cómo podrías averiguar la edad de María, si R es la edad de Raúl?

E15: Yo diría que tiene 24 años.

R: ¿Por qué?

E15: María, y 19 Raúl.

R: Pero no lo sabemos, a lo mejor tiene más.

E15: El que haya elegido la A por ejemplo, tendrá un número más bajito.

En cuanto a escoger un número de manera aleatoria, en la primera sesión el estudiante E6 señala que la letra puede representar una cantidad variable. En su argumento dice que el número que propone para la edad de María, es solo un "ejemplo". Sus palabras fueron: "A más 5, y pongo por ejemplo 45". En la tercera sesión el estudiante E3 completa la tabla representando la variable dependiente con el número 81. Esto cuando se le indica que gana 3xY euros. En un costado del cuestionario escribe un cálculo en el que evalúa la letra Y como 27 y aplica la relación funcional al multiplicar 27 por 3. Se desconoce cómo escoge el número 27, pudiendo atender a alguna lógica o incluso ser solo un ejemplo si ha interpretado la letra como una variable.

Otro ejemplo se encuentra en las grabaciones de la cámara móvil. El estudiante E10 explica por qué emplea el número 100 para representar la variable dependiente. Asocia a la letra el significado de variable y aclara que 100 es solo un ejemplo, pues las letras pueden representar "cualquier número".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestra investigación aporta nueva información sobre el significado que estudiantes de primaria le otorgan a las letras y cómo expresan la variabilidad al representar la variable dependiente de la función, cuando la variable independiente es dada y se expresa a partir de una letra. Estudios previos señalan que los estudiantes utilizan la posición del alfabeto para evaluar las letras y relacionan el orden lineal de la secuencia numérica con el orden del alfabeto (ej. Blanton et al., 2017; Küchemann, 1981; Molina, Ambrose y del Rio, 2018). Nosotros profundizamos en esto, y si bien en algunos casos los estudiantes utilizan este orden para reemplazar la letra por un valor numérico, en otras solo lo utilizan para escoger la letra con la que representan la variable dependiente y expresar la relación funcional dejando indeterminado el valor de dichas variables. En otros casos, aunque asignen a las letras un valor único que corresponde con su posición, reconocen que las variables dependiente e independiente son cantidades indeterminadas. Esto último lo manifiestan al aceptar que el valor puede cambiar según la letra que escoja cada estudiante. Por lo tanto, aunque usen el alfabeto, los estudiantes no tienen una visión estática de la situación. Solo que aun no cuentan con un sistema de símbolos que les permita expresar esta variabilidad.

Por otro lado, algunos estudiantes al interpretar la letra como una cantidad indeterminada y variable, señalan que puede ser "el número que tú quieras". Esta idea afecta a cómo representan la variable dependiente, pues utilizaban letras iguales o distintas sin considerar algunas convenciones sobre su uso. Por ejemplo, que letras iguales no pueden representar distintas cantidades en una misma situación o que letras distintas pueden tener el mismo valor. De todas formas, algunos estudiantes considerando esta misma idea, fueron más rigurosos al interpretar la letra y procuraron explicitar que la letra que representa la variable dependiente no puede ser cualquier número, sino uno que resulte de aplicar la relación funcional involucrada en la tarea.

Otro efecto asociado a la idea que la letra puede ser "el número que tú quieras", tiene relación con el uso de los números para representar la variable dependiente. Algunos estudiantes escribían un número cualquiera para expresar la variable dependiente, lo que podría interpretarse como que asignan un valor fijo a la letra, evidenciando una visión estática de esta, dificultad descrita por Kücheman (1981). Sin embargo, al escuchar algunos de sus argumentos se identifica que dichos números son solo un ejemplo genérico.

A lo largo de la intervención en el aula, hubo estudiantes que rechazaron el uso de la letra. Sin embargo, en general se puedo apreciar que relacionaron la idea de variabilidad con la letra y la interpretaban como una cantidad indeterminada. Al representar la variable dependiente utilizaron un sistema de simbolización distinto al algebraico: empleaban letras, números o una combinación de ambos, según les parecía más razonable. Estos resultados evidencian que la idea de variabilidad y su simbolización se experimentan de forma separada.

En esta investigación también se puede observar que los estudiantes recurren a elementos familiares para enfrentar la situación. Recurren al uso del alfabeto, tanto para escoger la letra para representar la variable dependiente, o para asignarle un valor numérico. Esto concuerda con lo que señala Radford (2001) quien dice que los estudiantes le dan sentido a la notación con significados para los símbolos extraídos desde otros dominios. En este caso el alfabeto y el uso de las iniciales de las palabras claves. El uso de números también podría estar relacionado con esto y los estudiantes podrían estar basándose en conocimientos aritméticos. Podrían considerar que las respuestas deben ser numéricas sin aceptar el uso de expresiones generales algebraicas (Booth, 1988).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. La primera autora es beneficiaria de una Beca de Doctorado otorgada por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), folio 72180046.

Referencias

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 181.202. doi: 10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. Coxford y A. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología - Segunda época (UNLP)*, *14*, 37-57.

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Evolución del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización lineal. *Avances de investigación en educación matemática*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Kaput, J. J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Nueva York; NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). Londres, Reino Unido: Murray.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs* (pp. 261-280). Hamburgo, Alemania: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-68351-5_11

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 414-426). Málaga, España: SEIEM.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra: Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, *11*(3), 25-53.

Radford, L. (2001). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.) *Proceeding of the 35rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-68351-5_1

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática*, *6*(3), 90-108.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN NIÑOS/AS DE 9 AÑOS

9-years-old Children's understanding of polygon concept

Bernabeu, M.[a], Moreno, M.[a] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es identificar características de la comprensión del concepto de polígono en estudiantes de tercero de educación primaria (9 años). Los datos proceden de las respuestas de 28 niños a tres tareas de un experimento de enseñanza diseñado para apoyar la transición del razonamiento perceptual a un razonamiento basado en los atributos. Los resultados indican que la comprensión del concepto de polígono está vinculada al uso de las condiciones mínimas para considerar una figura como un contraejemplo de polígono (es decir, un ejemplo que no cumple al menos uno de los atributos relevantes del concepto). Desde una perspectiva educativa, aunque el razonamiento basado en lo perceptual puede ser un primer nivel, es necesario que le siga el razonamiento basado en los atributos para potenciar la relación entre la imagen y la definición del concepto de polígono en los estudiantes para realizar clasificaciones de las figuras geométricas.

Palabras clave: *aprehensiones, concepto figural, pensamiento geométrico, concepto de polígono, representación.*

Abstract

This study investigates 9-years-old children's understanding of polygon concept. Data come from twenty-eight children's answers to three tasks from a teaching experiment designed to support the transition between perceptual reasoning to attribute-based-reasoning. Results indicates that, children's understanding of polygon is linked to use minimum conditions to consider a figure as instance of non–polygon (that is to say, an instance which is missing at least one critical attribute of the concept of polygon). From an educational perspective, although perceptual reasoning can be a first level in the development, it is necessary that it be followed by analytical reasoning based on attributes in order to strength the relationships between image polygon concept and definition polygon concept of children to make classifications of the geometric figures.

Keywords: *apprehension, figural concept, geometrical thinking, polygon concept, representation.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión de las figuras geométricas vinculada al reconocimiento de los atributos y sus relaciones es un aspecto relevante en el desarrollo del pensamiento geométrico en educación primaria (Clements, Swaminathan, Hannibal, y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh, y Psamir, 2011; Yesil-Dagli y Halat, 2016). Los estudiantes de educación primaria inician el aprendizaje de los conceptos geométricos antes de ir a la escuela (Clements et al., 1999; Tall y Vinner, 1981), el cual está vinculado al reconocimiento de atributos de las figuras como una forma de empezar a categorizarlas (Levenson et al., 2011). Las figuras geométricas poseen atributos críticos y no críticos que pueden dificultar su compresión. Los atributos críticos se derivan de la definición formal del concepto y los atributos no críticos son los obtenidos a partir de la exposición frecuente de los ejemplos prototípicos y, que no determinan la categoría de la figura (tamaño, color u orientación) (Hershkowitz y Vinner, 1983; Hershkowitz, 1989). Por ejemplo, un atributo crítico

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Burno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.

para que una figura sea considerada un polígono es que los lados sean rectos, mientras que la orientación de la figura es un atributo irrelevante (no-crítico).

En las investigaciones en educación matemática se ha planteado que la comprensión del concepto como un desarrollo progresivo: se inicia con imágenes basadas en la semejanza perceptual (rasgos característicos), continúa con el reconocimiento de atributos y finalmente converge el concepto basado en la definición. Para describir este proceso Tall y Vinner (1981) introdujeron las ideas de imagen del concepto y definición del concepto. La imagen del concepto se usa para describir "la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, el cual incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p.152). La imagen del concepto puede incluir imágenes que son inapropiadas y contradicen la definición del concepto (Levenson et al., 2011). Por otro lado, la definición del concepto es "una descripción discursiva para especificar ese concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 152) aceptada por la comunidad matemática.

La comprensión del concepto polígono permite a los estudiantes identificar o proponer ejemplos o contra ejemplos de polígonos. Desde este punto de vista, reconocer que una figura no es un polígono, es decir, un contraejemplo, es un aspecto clave en la comprensión del concepto de polígono (Tsamir, Tirosh, y Levenson, 2008). En el proceso de comprensión del concepto de polígono podemos encontrar dos aproximaciones complementarias (Tsamir et al, 2008). Por una parte, la que incide en que el concepto viene dado por un conjunto de atributos que comparten todos los ejemplos y, además, determinar si una figura es o no un polígono se evidencia en la medida que cumple o no los atributos. Por otra parte, la que usa ejemplos ideales (prototípicos) que se adquieren inicialmente y sirven como base de comparación cuando hay que determinar si una nueva figura es o no un polígono. Desde esta última perspectiva, la comprensión del concepto de polígono se apoya en el uso de ejemplos y contraejemplos. Sin embargo, en el ámbito internacional hay estudios que han mostrado que los alumnos pueden llegar a reconocer figuras geométricas si las comparan con las figuras prototípicas, pero presentan dificultades cuando tienen que usar ejemplos no prototípicos o contraejemplos para realizar esta acción (Clements et al., 1999; Tsamir et al., 2008). Es decir, hay ejemplos de figuras geométricas que los niños aceptan con más facilidad como ejemplos de polígonos (por ejemplo, la representación de un triángulo equilátero con uno de los lados paralelo al filo del papel como ejemplo de triangulo es un ejemplo prototípico). En este sentido, aunque algunos ejemplos prototípicos ayudan a la formación inicial del concepto y son aceptados intuitivamente como ejemplos del concepto, también pueden obstaculizar su formación al limitar la imagen del concepto (Hershkowitz, 1990). Por otro lado, en el ámbito nacional, también se está estudiando cómo es el aprendizaje de la geometría (Berciano, Jiménez-Gestal, y Salgado, 2017; Bernabeu y Llinares, 2017; Bernabeu, Llinares, y Moreno, 2017; Gutiérrez, 1998; Sarasua, 2013). Estas interacciones entre lo perceptual y el reconocimiento de los atributos críticos para apoyar la comprensión del concepto de polígono son relevantes. Además, es necesario investigar las características del proceso de comprensión del concepto de polígono (relación entre el razonamiento visual y el apoyado en los atributos de las figuras). Así, en esta investigación nos planteamos:

- caracterizar la comprensión del concepto de polígono en alumnos de 9 años de educación primaria al participar en un módulo de enseñanza diseñado ad hoc.

MARCO TEÓRICO

Duval (1995a, 1999) subrayó que el aprendizaje de la geometría debe apoyarse en la coordinación entre diferentes aprehensiones: perceptual, discursiva y operativa. La aprehensión *perceptual* implica la capacidad para reconocer o percibir las figuras, saber nombrarlas y reconocerlas dentro de un subconjunto de varias figuras; la *aprehensión discursiva* es la capacidad de relacionar la figura con declaraciones sobre la denominación, definición y reconocimiento de los atributos geométricos; y la *aprehensión operativa* conlleva modificar una figura, cambiando la posición u orientación de esta. La conceptualización de las figuras geométricas depende de la coordinación de estas aprehensiones, pues se vinculan las imágenes perceptuales con las propiedades geométricas, lo que constituye la base del desarrollo del pensamiento geométrico (Fischbein, 1993, 1998). Que un alumno realice una coordinación de las tres aprehensiones para manipular las figuras y lo obtenido, lo vincule a propiedades geométricas, evidencia la existencia del concepto figural (Fischbein, 1998).

Por otra parte, el reconocimiento de atributos que proceden de la definición son condiciones necesarias y suficientes para identificar un ejemplo del concepto y, por tanto, para identificar contra-ejemplos. La determinación de las condiciones necesarias y suficientes mínimas para reconocer o representar ejemplos de polígonos pone de manifiesto las transformaciones entre diferentes representaciones semióticas (la definición discursiva de polígono y la representación de ejemplos y no-ejemplos de polígonos) (Duval, 1995b). Duval distinguió dos transformaciones de las representaciones semióticas: conversión y tratamiento. La conversión es la transformación de una representación de un registro a otro sin cambiar los atributos que denota; y el tratamiento es la trasformación de representaciones en un mismo registro. En esta investigación nos vamos a basar en la conversión, la cual se va a entender como las transformaciones entre los registros discursivos y visuales. La asociación de una figura con afirmaciones matemáticas se puede realizar en ambas direcciones (de la figura a lo discursivo y de lo discursivo a la figura), lo cual se denomina cambio de anclaje: (a) de lo visual a lo discursivo cuando se reconoce atributos en una determinada figura y se emiten declaraciones sobre estos, y (b) de lo discursivo a lo visual, cuando se realiza una representación de una figura geométrica que cumpla unos atributos dados (Duval, 1995b). Esta traducción es la que permite vincular: el proceso de definir un polígono dando un conjunto mínimo de atributos relevantes (por ejemplo, un polígono como una figura plana formada por líneas rectas, cerradas y no cruzadas), considerar que una figura que no cumple uno de estos atributos ya no es un polígono y el de representar ejemplos y no ejemplos de polígonos.

Desde estas referencias previas particularizamos nuestro objetivo de investigación a:

- identificar características de la comprensión del concepto de polígono en estudiantes de tercero de educación primaria (9 años), considerando los cambios de anclajes cuando representan y caracterizan ejemplos y contraejemplos de polígonos.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

En esta investigación participaron 28 alumnos de tercero de primaria (9 años). El currículo de los alumnos de tercero de educación primaria se centra en desarrollar la capacidad de reconocer polígonos según el número de lados, reconocer figuras cóncavas y convexas, la circunferencia, el círculo y sus elementos; e identificar regularidades y simetrías en las figuras geométricas. Los estudiantes que participaron en esta investigación no habían estudiado los temas de geometría pertenecientes a este curso.

Instrumento y procedimiento

Se diseñó un módulo de enseñanza de 8 sesiones cuyo objetivo era apoyar la transición del razonamiento de los polígonos de los alumnos. Esta transición se desarrolla desde el uso de un razonamiento basado en lo perceptual, en el que se puede considerar las figuras de manera global, a empezar a observar la diferencia entre los atributos en figuras distintas, para finalmente, relacionar los atributos y realizar clasificaciones de las figuras. En la transición desde el razonamiento visual a uno más analítico, considerando los atributos relevantes, se consideró que los atributos no relevantes eran un aspecto clave en diferenciar ejemplos y no ejemplos de polígonos. En las sesiones del módulo, una característica transversal era la consideración del lenguaje (los términos geométricos para nombrar las figuras y los atributos) como una variable que ayuda a la formación de los conceptos, ya que permite a los estudiantes asociar diferentes ejemplos a un mismo término.

Las tareas del módulo fueron adaptadas de tareas de libros de texto o diseñadas teniendo en cuenta los resultados de investigaciones previas (Fisher, Hirsh-Pasek, Newcombe, y Golinkoff, 2013; Halat y Yesil-Dagli, 2016; Satlow y NewCombe, 1998; Yesil-Dagli y Halat, 2016). En cada sesión se presentaba una tarea que se resolvía en pequeño grupo, luego se comparaba la resolución con el resto de los grupos y a continuación, los estudiantes resolvían individualmente tareas parecidas a las que se habían resuelto en pequeño grupo. Las tareas consistían en reconocer atributos de las figuras, representar y clasificar figuras geométricas. Las sesiones fueron grabadas en vídeo y se recogieron los cuadernos individuales de los alumnos.

Las dos primeras sesiones tenían como objetivo la comprensión del concepto de polígono y las clases de polígonos según sus lados y concavidad. Para ello, los estudiantes debían reconocer diferentes atributos (número de lados, concavidad/convexidad) y usar los atributos críticos y no críticos de las figuras para diferenciar ejemplos y contra-ejemplos de polígonos. Usamos figuras con diferentes atributos y orientaciones (p. ej. polígonos regulares e irregulares, cóncavos y convexos, con diferentes números de lados, y figuras que no eran polígonos al no cumplir algunas de las condiciones de la definición). Se pretendía que los alumnos usaran las condiciones necesarias y suficientes (atributos críticos como figura cerrada, formada por líneas rectas, y no cruzada) para decidir si una figura era o no ejemplo de polígono. En estas dos sesiones se realizaron 6 tareas. En este estudio, presentamos el análisis de las Tareas individuales 1, 2 y 5 en las que el cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo se realiza mediante la escritura (Figura 1, 2 y 3) como un ejemplo de aprehensión discursiva.

TAREA 1. Dibuja dos figuras que sean polígonos y otras dos que no sean polígonos, luego contesta lo que es para ti un polígono y lo que no es un polígono.

POLÍGONOS	NO POLÍGONOS

· Un polígono es ...

· Un polígono no es ...

Figura 1. Tarea 1

TAREA 2. Completa la oración a partir de la imagen dada.

	**Esta figura es un polígono porque ...**
	**Esta figura no es un polígono porque ...**

Figura 2. Tarea 2

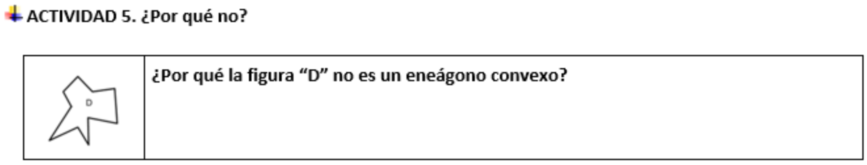


Figura 3. Tarea 5

Las figuras en las tareas son figuras no prototípicas representadas en diferentes orientaciones, es decir usando atributos no relevantes (Martin, Lukong, y Reaves, 2007; Tsamir et al., 2008). Las características de las tareas con varios registros junto con sus transformaciones, proporcionan información sobre lo que puede facilitar o limitar la comprensión del concepto de polígono. La variedad de registros se observa en la resolución de las tareas donde tienen que emplear la aprehensión perceptual y discursiva para reconocer los atributos de las figuras y relacionarlos con la definición.

Tabla 3. Descripción de las tareas según sus objetivos y tipo de conversión.

Tarea	Objetivo	Tipo de conversión
T - 1	Representar polígonos y no polígonos. Considerar condiciones necesarias y suficientes en la definición y la representación para ser polígono (o no polígono).	Cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo. Cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual.
T - 2	Reconocer y describir atributos de las figuras. Considerar condiciones necesarias y suficientes para que una figura sea un polígono (o un no polígono).	Cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo.
T - 5	Reconocer y describir atributos de las figuras considerando condiciones necesarias y suficientes para ser un determinado polígono. Uso de los atributos para determinar si una figura es o no ejemplo de un concepto.	Cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo.

Análisis

Para determinar las características de la comprensión del concepto de polígono analizamos respuestas de los cuadernos de los alumnos a las tres tareas individuales. Para ello, consideramos los atributos que consideraban cuando le dábamos un polígono o un contraejemplo de polígono y, por otro lado, las figuras que los alumnos representaban a partir de los atributos proporcionados. De esta manera, caracterizamos el cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo y viceversa (aprehensión discursiva), generado en cada caso. A partir de las respuestas escritas de los alumnos, se siguió el método empleado en la investigación de Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai y Tabach (2015) para determinar si las definiciones eran correctas o incorrectas. Se agruparon las respuestas correctas en mínimas o no-mínimas según los atributos considerados (condiciones necesarias y suficientes para que una figura fuera un polígono o un contraejemplo de polígono). Por otro lado, analizamos los términos usados en las respuestas para determinar las características del lenguaje usado.

RESULTADOS

Las respuestas a las dos primeras tareas (T-1I y T-2I) son presentados en la Tabla 2. En la Tarea T-1I (Tarea 1-Individual) los estudiantes debían representar dos figuras que fueran polígonos y dos figuras que no lo fueran. En la tarea grupal previa, en pequeño y gran grupo, se había representado ejemplos de polígonos y de figuras que no eran polígonos junto con la definición de polígono, pero no una caracterización discursiva de cuándo una figura no era un polígono. Es decir, podía haber un reconocimiento perceptual de que una figura no era un polígono, pero no una caracterización discursiva de cuando una figura no era un polígono (fijar un conjunto mínimo de atributos, en este caso, no cumplir alguno de los atributos críticos de la definición de polígono). Las respuestas de la tarea individual (Tabla 2) indican que los 28 alumnos representan de manera correcta dos ejemplos de polígonos y dos ejemplos de figuras que no son polígonos. El hecho de pedir dos ejemplos de polígono y no polígono no generó ninguna dificultad a los alumnos, dando en los dos casos respuestas correctas.

Tabla 2. Respuestas de las Tareas 1 y 2.

		Polígono		No-Polígono	
		Correcta	Incorrecta	Correcta	Incorrecta
T-1I. Pido (n=28)	Ejemplo	28	0	28	0
	Definición	17	11	28	0
T-2I. Doy ejemplo (n=28)	Pido definición	19	9	22	6

Sin embargo, solo 17 alumnos proporcionan una definición correcta de polígono (considerando los tres atributos críticos: lados rectos, figura cerrada y no cruzada). Los otros 11 alumnos omiten algún atributo o proporcionan un atributo de forma reiterada (G3CI4: "líneas juntas y no se separan"). Por otra parte, en relación a la definición de no-polígono, los 28 alumnos dan una definición correcta. Esta diferencia en las frecuencias entre definir lo que se considera un polígono e indicar cuando una figura no es un polígono, puede ser debida a que para definir una figura que no sea un polígono basta con que se indique que no cumple alguno de los atributos de polígono (figura abierta o lados curvados o cruzados). En este caso, algunos estudiantes niegan los tres atributos (Figura 4), indicando que no consideran la idea de definición como conjunto mínimo (condición mínima para caracterizar el concepto). Esta manera de definir las figuras que no son polígonos pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos para usar la idea de conjunto mínimo de condiciones necesarias y suficientes cuando se niega un conjunto formado por tres atributos. En este caso, es suficiente con que no se cumpla uno de los atributos críticos de la definición de polígono.

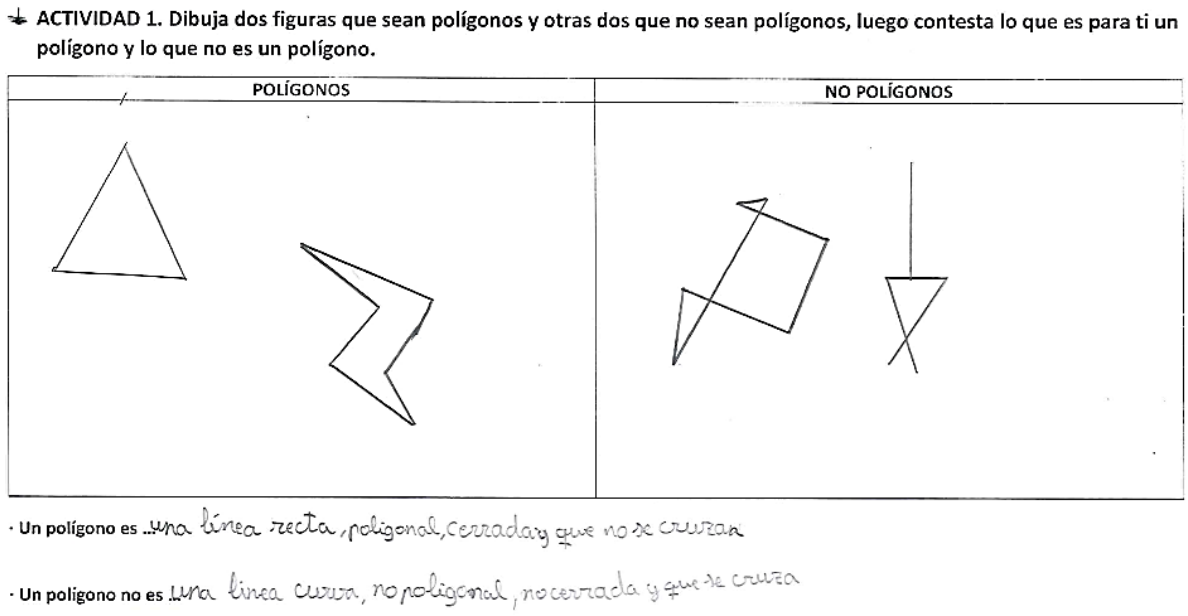


Figura 4. Resolución T-1 del alumno G2CI3

En la Tarea 2 se proporciona un ejemplo de una figura que es un polígono y un ejemplo de una figura que no es un polígono, y se pide dar una definición. En este caso, 19 alumnos indican correctamente por qué la figura dada es un polígono considerando el conjunto mínimo de atributos. Sin embargo, 9 alumnos omiten algún atributo, escriben un atributo no perteneciente al polígono (G7CI3: porque están curvadas y cerradas) o proporcionan y reiteran solo un atributo (G3CI4: cerrada, no abierta).

En relación a la figura que no era un polígono (figura abierta y algún lado curvo), 22 alumnos realizan una descripción correcta de por qué la figura no es un polígono, escribiendo uno o varios atributos de la figura que contradicen la definición de polígono. Los 6 alumnos restantes añaden atributos no presentes en la figura, como lados cruzados (G1CI2: *Esta figura no es un polígono porque… tiene lados abiertos, lados que se cortan y lados curvos*) (Figura 5). Este tipo de respuestas parecen indicar que los niños describen perceptualmente la figura identificando todos los atributos que contradicen la definición de polígono.

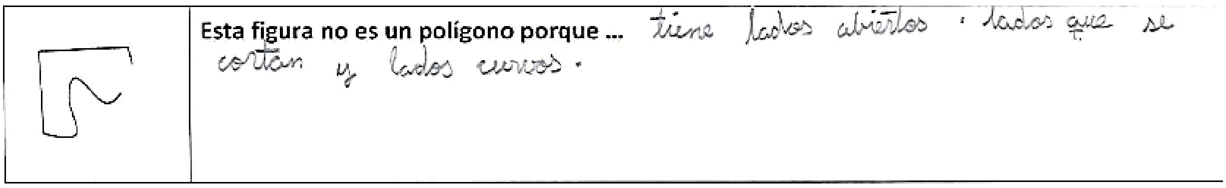


Figura 5. Resolución T-2I del alumno G1CI2

Estas respuestas sugieren una relación compleja entre el razonamiento perceptual y el razonamiento apoyado en los atributos. Además, la relación entre caracterizar perceptualmente por qué una figura no es un polígono y generar una definición como conjunto mínimo de condiciones necesarias y suficientes para definir. En este caso, para analizar en qué medida los alumnos están razonando apoyándose en los atributos, cuando caracterizan una figura como contraejemplo de polígono, se plantearon tareas del tipo *¿por qué no…*? Este tipo de cuestiones permite identificar características del razonamiento de los alumnos cuando identifican los atributos de las figuras. Así, se planteó la tarea 5 (T-5I) para analizar el papel que desempeña la identificación de atributos en la caracterización de una figura como contraejemplo de un determinado polígono y la forma en la que los alumnos razonan con ellos (como una evidencia de la transición desde el razonamiento perceptual a un razonamiento basado en los atributos) (Figura 3).

La Tarea 5 exige un nivel cognitivo mayor que las tareas anteriores, ya que implica considerar, no solo los atributos de los polígonos, sino razonar a partir de atributos particulares como el número de lados y la concavidad/convexidad. Estos atributos y los términos para describirlos fueron introducidos en la T-4: clases de polígonos según sus lados y según su concavidad. Aparte, se seleccionó esta tarea porque los alumnos tienen que realizar un cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual a partir del polígono proporcionado en el enunciado (eneágono convexo) y comparar sus atributos realizando un cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo con respecto al polígono representado (decágono cóncavo). La figura del polígono usada se puede considerar no intuitiva, en el sentido de que no es una figura que pueda pertenecer al conjunto de imágenes del concepto al tener diez lados y ser cóncavo. Esto daba más espacio para determinar cómo los alumnos razonaban apoyándose en los atributos para determinar si una figura cumplía o no determinadas condiciones. La Tabla 3 muestra la frecuencia de argumentos correctos e incorrectos usados por los alumnos.

Veintidós alumnos proporcionan una respuesta correcta. En estas respuestas encontramos argumentos que se apoyan en un solo atributo, pero también argumentos que no consideran el conjunto mínimo de atributos. En este caso, agrupamos las respuestas correctas en definición mínima, cuando indican solo un atributo; definición no-mínima-explicativa, cuando nombran y/o explican uno de los atributos); y definición no-mínima cuando en el argumento expuesto exige que se cumplan dos o más atributos. Los otros 6 alumnos realizan una definición errónea, escribiendo el atributo relacionado con los lados o con la concavidad incorrectamente.

Tabla 3. Respuestas correctas e incorrectas a la Tarea 5

		Decágono Cóncavo	
		Correcto	Incorrecto
T-5 Doy ejemplo (n=28)	Pido un argumento (¿por qué no es…?)	22	6

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es identificar características de la comprensión del concepto de polígono en estudiantes de tercero de educación primaria (9 años) considerando los cambios de anclajes cuando identifican y representa ejemplos y contraejemplos de polígonos. Los resultados indican una característica de la comprensión del concepto de polígono vinculada a la transición entre el razonamiento perceptual y el razonamiento basado en los atributos de las figuras. Esta transición se evidencia en el manejo de las condiciones mínimas para considerar una figura como un contraejemplo de polígono (es decir, un ejemplo que no cumple al menos uno de los atributos críticos del concepto).

En el razonamiento basado en lo perceptual, los alumnos describen todos los atributos que no se cumplen generando definiciones no minimalistas (Zaslavsky y Shir, 2005). En este caso, podemos entender que cuando los niños describen todos los atributos de la figura, cuando deben indicar por qué una figura no es un polígono, todavía no son conscientes de que es suficiente con indicar que no se cumple solo uno de los atributos críticos de la definición. Una explicación alternativa, al hecho de que haya niños que describen todos los atributos de la figura para indicar qué es un contraejemplo del concepto de polígono, podría estar vinculada a que el módulo de enseñanza hubiera generado la idea de describir "todos" los atributos de la figura. Es decir, el contexto estaría apoyando que los estudiantes estuvieran aceptando definiciones no mínimas de un contraejemplo de polígono generando caracterizaciones redundantes (Hershkowitz, 1990). Sin embargo, el hecho de que en la tarea 5 se volviera a repetir la argumentación por parte de los alumnos que una figura no es un eneágono convexo negando ambos atributos (polígono de once lados y ser convexo), apoya la interpretación de la dificultad de los alumnos en razonar basándose en los atributos y en generar condiciones mínimas para caracterizar el no ser un determinado polígono. En este sentido, la relación entre el razonamiento visual (reconociendo y describiendo todos los atributos de las figuras) y el razonamiento basado en los atributos, llegando a considerar solo el conjunto mínimo de atributos para caracterizar los no polígonos, puede ser considerado como una característica de la comprensión del concepto de polígono. En esta investigación, el contexto en el que se puso de manifiesto esta característica ha sido en los cambios de anclaje de lo visual a lo discursivo en las tareas de indicar por qué una figura "no es…", donde se evidencia el uso de la idea de condición suficiente por parte de los alumnos.

La transición del razonamiento visual al razonamiento basado en atributos se apoya en la consideración de definiciones no minimalistas antes de considerar las definiciones minimalistas (van Dormolen y Zaslavsky, 2003). Es decir, el criterio de minimalidad indica que solo el número mínimo de atributos necesarios para "reconstruir" el concepto debería ser mencionado. Así, ante una figura que no es un polígono, bastaría indicar que no cumple uno de los atributos críticos para ser polígono, sin necesidad de describir todos los atributos que no lo cumplan (Zaslavsky y Shir, 2005). La discusión sobre los contraejemplos del concepto de polígono permite tratar explícitamente con los atributos que las figuras no cumplen para ser considerados contraejemplos de polígonos, lo que permite hacer emerger el razonamiento basado en los atributos para establecer la caracterización discursiva de un contraejemplo de polígono.

Desde un punto de vista educativo, es importante considerar la forma en la que se puede generar la relación entre el razonamiento visual y el razonamiento basado en los atributos en la comprensión del concepto de polígono. Esto es así, ya que el razonamiento basado en lo perceptual puede ser un primer nivel en el razonamiento, pero es necesario que le siga el razonamiento analítico basado en los atributos como paso necesario para realizar clasificaciones. En esta transición, la manera en la que los estudiantes consideran los contraejemplos de polígonos, puede tener relevancia sobre la forma en la que construyen el significado de polígono. Que los alumnos construyan imágenes del concepto de polígono compatibles con la definición de polígono, se apoya en la consideración del uso de los contraejemplos para generar criterios que determinen si una figura es o no un polígono. Así, la relación entre la imagen y la definición del concepto debería articularse alrededor de la relación entre las aprehensiones perceptuales y discursivas que permiten colocar el foco de atención en la diferencia entre definiciones mínimas y redundantes del concepto de polígono y no polígono. En este sentido, son necesarias más investigaciones dirigidas a discernir en qué condiciones los estudiantes pueden aceptar definiciones mínimas frente al uso de definiciones redundantes, especialmente cuando se consideran contraejemplos.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

Referencias

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, *29*(2).

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192-212.

Duval, R. (1995a). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142-157.

Duval, R. (1995b). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE, pp. 3-26.

Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, *11*(2), 43-61.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fischbein, E. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211.

Fisher, K. R., Hirsh- Pasek, K., Newcombe, N. y Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child Development*, *84*(6), 1872-1878.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in "*Encuentro de Investigación en Educación Matemática*", TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscript.

Halat, E. y Yesil-Dagli, U. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *BOLEMA, 30*(55), 830-848.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*. *A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of mathematics Education*, (pp.70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R. y Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. En *Proceedings of the 7th PME International Conference* (pp. 223-228).

Levenson, S., Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research and Practical Perspectives.* Rotterdam: Sense Publishers.

Martin, T., Lukong, A. y Reaves, R. (2007). The Role of Manipulatives in Arithmetic and Geometry Tasks. *Journal of Education and Human Development*, *1*(1), 1-14.

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43-65). Bilbao: SEIEM.

Satlow, E. y Newcombe, N. (1998). When is a Triangle not a Triangle? Young Children's conceptions of Geometric Shapes. *Cognitive Development*, 13, 547-559.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R. y Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, *47*(3), 497-509.

Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematics Behavior, 22*, 91-196.

Yesil-Dagli, U. y Halat, E. (2016). Young Children's conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*, *12*(2), 189-202.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

ESTÉTICA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aesthetics and mathematics education

Bosque-Artaza, B. A.[a], Lupiáñez-Gómez, J. L.[a] y Segovia-Alex, I.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Al igual que los aspectos cognitivos y afectivos, los factores estéticos, entendidos estos como aquellas características de las Matemáticas escolares que de alguna manera atraen a los alumnos, influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Este trabajo presenta los resultados de un cuestionario exploratorio circunscrito en un trabajo de investigación que tiene como objetivo conocer los aspectos de las Matemáticas escolares que resultan estéticos para los escolares de Secundaria Obligatoria. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que algunos alumnos son capaces de percibir cualidades estéticas en diversos aspectos de las Matemáticas.

Palabras clave: *estética, cualidades estéticas, matemáticas escolares, educación secundaria.*

Abstract

As well as the cognitive and affective aspects, the aesthetic factors, understood as those characteristics of the school Mathematics that in some way attract the students, influence the teaching and learning of Mathematics. This paper presents the results of an exploratory questionnaire circumscribed in a research work that aims to know the aspects of school mathematics that are aesthetic for students in Compulsory Secondary Education. The results obtained show that some students are able to perceive aesthetic qualities in various aspects of Mathematics.

Keywords: *aesthetics, aesthetic qualities, school mathematics, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

Está por alcanzar el objetivo de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) del Ministerio de Educación y Ciencia (2013) de reducir la tasa de abandono escolar en España, situada en el 19%, mientras que la media comunitaria es de un 10,7% (Subdirección de Estadística y Estudios del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2017). Por otro lado, investigaciones realizadas desde un punto de vista psicológico muestran que la ansiedad y las respuestas afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (Pérez-Tyteca et al., 2009) y que un círculo vicioso cognitivo-afectivo subyace en el rechazo a esta materia (Alonso, Sáez y Picos, 2004).

En referencia a la Estética, la experiencia de la belleza, en muchas ocasiones ha supuesto un factor para la elección de las carreras profesionales de científicos relevantes de diferentes ramas (Root-Berstein, 2002). Matemáticos como Poincaré (1908/1956) piensan que la estética es un factor primordial en el pensamiento matemático (citado en Sinclair, 2009). Esta visión contrasta con los valores asociados en general a las Matemáticas como “fijas, inmutables, abstractas y no relacionadas con la realidad; un misterio accesible a pocos; una colección de reglas y de hechos que deben ser recordados, etc.” (Gómez-Chacón, 2005, p. 286) que no favorecen una actitud positiva hacia su estudio por parte del alumnado. Nuestro interés por conocer el papel que las consideraciones estéticas juegan en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas nace de entender que dichas consideraciones podrían ayudar, como señala Brinkmann (2009), a mejorar la actitud que muchos estudiantes tienen hacia esta materia, de forma que la asignatura de Matemáticas

Bosque-Artaza, B. A., Lupiañez-Gómez, J. L. y Segovia-Alex, I. (2018). Estética y Educación Matemática. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 161-170). Gijón: SEIEM.

contribuya a reducir las tasas de abandono en la Secundaría Obligatoria. Por tanto, el objetivo de esta investigación es conocer los aspectos de las Matemáticas escolares que resultan estéticos para los estudiantes de esta etapa educativa.

MARCO TEÓRICO

Según la Real Academia de la Lengua, la Estética es la ciencia que trata de la belleza y de la teoría filosófica del Arte. La Estética también se puede entender de una manera más amplia, ya que los valores estéticos y los juicios de valor referidos a éstos se dan en todos los ámbitos de la vida humana (García, 2000).

Siguiendo las explicaciones de Honderich (2001), un objeto tiene valor estético si es capaz de provocar en el sujeto ciertas respuestas que den lugar a una experiencia que se pueda calificar de estética porque produzca una cierta satisfacción al contemplar o experimentar el objeto. Dicha satisfacción vincularía la Estética con la afectividad, siendo la respuesta afectiva el mecanismo que usa nuestra mente para registrar la experiencia estética. La Estética empírica entiende que la experiencia estética surge de la interacción de un objeto u entidad, un sujeto y una situación (Jacobsen, 2006).

En el terreno de las Matemáticas no existe ninguna teoría general de la Estética, sin embargo, muchos expertos han descrito teoremas y demostraciones matemáticas en términos estéticos (Sinclair, 2009). Poincaré (1908/1956) considera que el trabajo matemático se da a nivel subconsciente y que una especial sensibilidad estética permite seleccionar las mejores ideas (citado en Sinclair, 2006). Durán (2001) encuentra que los objetos matemáticos poseedores del valor estético del que habla Honderich son los razonamientos matemáticos, pero que estos requieren de estudio y análisis, dado que no poseemos un sentido que nos permita su percepción. Igualmente, Wechsler (1978) entiende que si bien lo estético es lo percibido por los sentidos, existen relaciones separadas de su sustrato perceptivo que siguen sujetas a consideraciones estéticas que juegan un papel generador de pautas y guías que afectan a la forma, desarrollo y adecuación de las expresiones científicas. Además, la comprensión de ideas, de principios y de procesos de resolución de problemas provoca una clase de reacción que podemos calificar de deleite estético.

Respecto a las características de las Matemáticas expresadas por distintos matemáticos al referirse a la belleza matemática, la Tabla 1 recoge las cualidades estéticas propuestas por diversos autores y las entidades matemáticas a las que éstas se refieren. La intención de esta selección es proporcionar una muestra de las cualidades estéticas y las entidades matemáticas a las que se refieren los matemáticos profesionales.

Tabla 1. Cualidades estéticas de entidades matemáticas propuestas por matemáticos profesionales

	Entidades	Cualidades estéticas		
Dreyfus y Eisenberg (1986)	Argumentos	Simplicidad	Concisión	Claridad
Durán (2001)	Razonamientos	Generalidad Economía	Sorpresa Inevitabilidad	Profundidad
De Guzmán (2003)	Teoremas	Generalidad Economía de pensamiento	Seriedad Profundidad Inevitabilidad	Transparencia Belleza visual Adecuación
Ernest (2015)	Teoremas Conceptos Métodos Pruebas Teorías Aplicaciones Modelos	Generalización, abstracción, potencial; Economía, simplicidad, elegancia; Sorpresa, sagacidad, ingenio; Lógica, rigor, razonamiento y deducción estrictos, pensamiento puro; Interconexión, vínculos, rigurosidad; Patrón, estructura, simetría, regularidad, diseño visual; Aplicabilidad, posibilidad de modelado, generalidad empírica		

La aproximación pragmática a la Estética Matemática se ha centrado en la valoración de la práctica matemática de la investigación. El modelo tripartito del papel de la Estética diseñado por Sinclair (2004; citado en Sinclair, 2006) describe como los valores estéticos juegan: un papel motivador para elegir la investigación entre los diversos campos de la Matemática; otro, generador de ideas e hipótesis durante la investigación; y otro, evaluador de los productos matemáticos obtenidos.

En relación al objetivo de esta investigación, dentro del campo de la Educación Matemática, desde algunos trabajos se ha interpretado que los alumnos no son capaces de consideraciones estéticas, si son comparadas éstas con las que haría un matemático profesional, ya que para poder hacer juicios estéticos correctos se debe tener un cierto nivel de conocimientos previos (Poincaré, 1908/1956; citado en Sinclair, 2006; Dreyfus y Eisenberg, 1986; Brinkmann, 2009). Sin embargo, existen otros trabajos de investigación que han mostrado que los no expertos en Matemáticas pueden dejarse guiar por consideraciones estéticas que les conduzcan a soluciones de problemas y que son capaces de valorar cualidades estéticas que también valorarían los matemáticos profesionales (Papert, 1978; Brown, 1973; citados en Sinclair, 2006).

Sinclair (2006), por su parte, aplica su modelo tripartito del papel de la Estética en la investigación matemática a la resolución de problemas en el aula, comprobando que los estudiantes usan valores estéticos para: elegir problemas (simplicidad aparente, sorpresa, aplicabilidad de los problemas a la experiencia y atractivo visual), generar conjeturas (simplicidad, precisión, exactitud, simetría) y evaluar soluciones (generalizables, novedosas, claras y transparentes, visualmente atractivas). Hay casos en los que estos valores coinciden con algunos de los valores estéticos entendidos como matemáticos, por ejemplo, la utilidad, el atractivo visual y la sorpresa.

Los trabajos mencionados sobre Estética en Educación Matemática consisten en resolver problemas (Papert, 1978; Sinclair, 2001; Brown, 1973; citados en Sinclair, 2006) o en responder a un cuestionario sobre tipos de problemas (Brinkmann, 2009). En todos ellos, los alumnos parecen manifestar, con mayor o menor desacuerdo entre ellos, una apreciación de las características a las que apuntan los autores citados. Como señala Sinclair (2009), nuevas perspectivas sobre la Estética sugieren que lo importante, más allá de tendencias y preferencias particulares, es que todo el mundo manifiesta tener unas tendencias estéticas en general y que todo el mundo las usa continua y principalmente para dar sentido a su mundo. Por tanto, respecto a las investigaciones anteriores, este trabajo pretende, y así lo esperamos, por una parte, ampliar los aspectos de las Matemáticas escolares, a parte de los problemas y su resolución, sobre los cuales los alumnos manifiesten una apreciación estética, teniendo en cuenta, también, la valoración que hacen del contexto escolar en el que se da el aprendizaje y, por otra parte, caracterizar las cualidades estéticas que les asocian, relacionándolas con las manifestadas por los matemáticos profesionales.

Tatarkiewicz (2006) indica que la cualidad de estético se refiere a todo aquello que gusta, que atrae o despierta admiración. Además, el desinterés estético, en el sentido de que la apreciación de la belleza no debía esconder ningún interés utilitario, ha sido considerado un requisito para que se diese una experiencia estética (Honderich, 2001). Sin embargo, Wells (1990) encontró que en la valoración de los méritos estéticos en las Matemáticas entran muchos factores en juego, entre ellos los campos de interés de los sujetos. Atendiendo a todo ello, los objetivos específicos de esta investigación son conocer: a) las razones por las que las Matemáticas escolares interesan y gustan a los estudiantes, b) cómo el contexto escolar puede influir en el gusto hacia las Matemáticas y c) qué temas y actividades de Matemáticas gustan y porqué.

METODOLOGÍA

Para dar cumplimiento a los objetivos planteados elaboramos un cuestionario que recoge información de los gustos de alumnos de Secundaria Obligatoria hacia aspectos de las Matemáticas escolares.

Muestra

Debido a razones de intencionalidad o conveniencia (Cohen, Manion y Rodríguez, 1990), en la encuesta han participado 33 alumnos de 4º curso de ESO de un centro religioso concertado de Portugalete (Vizcaya) con un nivel socio-económico medio-bajo. Los alumnos cursan Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. De los 33 alumnos, 17 alumnos pertenecen a un grupo y 16 a otro. Estos dos grupos tienen una composición de alumnado con características similares, en cuanto a poder adquisitivo, procedencia y nivel académico, siendo ambos bastante variados.

Instrumento de recogida de datos

El cuestionario elaborado consta de tres partes que buscan responder a los objetivos planteados; la primera, *Interés y gusto por las Matemáticas y las clases de Matemáticas*, incluye tres cuestiones. A través de la primera pregunta *(¿Te interesan las matemáticas?*) queremos saber, siguiendo las consideraciones sobre el desinterés que apunta Honderich (2001), si a alguno de los entrevistados le interesan las Matemáticas, más allá de la necesidad de aprobar la asignatura. La segunda pregunta *(¿Te gustan las matemáticas?*) pudiera parecer igual que la primera, pero tiene un sentido diferente, ya que puede ocurrir que a alguien le gusten las Matemáticas, pero que no sean uno de sus centros de interés. Mediante la tercera pregunta (*En general, ¿te gustan las clases de Matemáticas?*) queremos saber cuál es la percepción general del alumnado respecto a las clases de Matemáticas.

El objeto de la segunda parte del cuestionario, *Gusto por lo escolar*, es poner en contexto el interés y/o gusto por las Matemáticas del alumnado siguiendo la premisa de la Estética Empírica según la cual, la experiencia estética surge de la interacción de un objeto u entidad, un sujeto y una situación (Jacobsen, 2006). Mediante las cuestiones cuarta y quinta ("*En general, ¿te gusta el instituto?*" y "*En general, ¿te gustan las clases?*") se busca saber cuál es la actitud de las personas entrevistadas hacia la institución académica y de qué forma esta actitud se puede relacionar con el gusto hacia las Matemáticas. Las cuestiones 2), 3), 4) y 5) dan a elegir como respuestas "*a) Sí, porque…*" y "*b) No, porque…*", pudiendo explicitar alguna particularidad del aspecto sobre el que se pregunta.

La tercera parte del cuestionario, *Gustos relativos a temas y actividades y/o ejercicios de Matemáticas*, indaga el gusto en asuntos más concretos. Las preguntas sexta *(¿Qué temas de matemáticas te gustan?*), séptima *(¿Qué temas de matemáticas no te gustan?*), octava *(¿Qué tipos de actividades y/o ejercicios de matemáticas te gustan?)* y novena *(¿Qué tipo de actividades y/o ejercicios de matemáticas no te gustan?*) buscan averiguar qué cualidades del contenido y de las actividades de Matemáticas son o no del gusto del alumnado y por qué, y en qué medida están relacionadas con las cualidades estéticas mencionadas en la Tabla 1.

Recogida y análisis de datos

La recogida de datos se realizó a través de un formulario en línea, al que accedían los alumnos mediante un enlace en el blog del aula, perteneciente a la plataforma *Educamos* del grupo SM. Las respuestas se exportaron a una hoja de cálculo. Después, a cada uno los de alumnos se le atribuyó un código específico según el orden en el que acabaron de responder al cuestionario (Ci, $1 \leq i \leq 33$).

En primer lugar, se hizo el cómputo de respuestas positivas y negativas dadas a cada cuestión codificadas como P1: interés por las Matemáticas; P2: gusto por las Matemáticas; P3: gusto por las clases de Matemáticas; P4: gusto por el instituto; P5: gusto por las clases. En segundo lugar, hicimos un recuento, para cada estudiante, de las respuestas afirmativas y negativas dadas a cada cuestión. En tercer lugar, mediante el análisis de las respuestas dadas extrajimos las palabras y expresiones que justifican el interés y el gusto por el aspecto en cuestión y las agrupamos en las categorías correspondientes que se extrajeron de manera inductiva. Seguidamente, relacionamos las cualidades estéticas asociadas a diversas entidades matemáticas señaladas por matemáticos profesionales que aparecen en la Tabla 1 con las categorías extraídas para ver en qué medida los alumnos y los expertos perciben cualidades estéticas similares. Esta relación se fundamenta en la caracterización de las cualidades propuestas por los autores mencionados. Finalmente, analizamos las categorías para responder a las cuestiones recogidas en los objetivos y deducir los resultados.

RESULTADOS

Los resultados del recuento de las respuestas a cada cuestión aparecen en la Tabla 2.

Tabla 2. Recuentos de respuestas a cada cuestión

	P1: Interesan		P2: Gustan		P3: Clases de Matemáticas		P4: Instituto		P5: Clases en general	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Sí	25	76%	23	70%	27	82%	20	61%	18	55%
No	8	24%	10	30%	6	18%	13	39%	15	45%

Interés y gusto por las Matemáticas y las clases de Matemáticas

En todos los ítems es mayor el porcentaje de alumnado al que le interesan y le gustan las Matemáticas y las clases de Matemáticas, respecto al porcentaje de a los que ni les interesan, ni les gustan las Matemáticas, ni las clases de Matemáticas. Las razones dadas podemos categorizarlas como: la utilidad, la lógica matemática, el gusto por razonar y que son entretenidas.

Así mismo, se puede observar que a 25 personas les interesan las Matemáticas y a 23 les gustan, con lo cual hay dos personas a las que les interesan pero no les gustan. Una no responde a lo que se le pregunta. A la otra le interesan las Matemáticas porque considera "*que es importante saber ciertas cosas de ellas para aplicarlas en nuestro día a día…*" pero no le gustan porque "*siempre me ha costado entenderlas. Al final consigo entenderlo y suelo sacar el examen con buena nota, pero en general no me gustan…*". También se recoge que personas que afirman estar interesadas en las Matemáticas por ser necesarias en el día a día (C5, C10, C11, C22) y por ser útiles (C12, C15, C16), afirman que les gustan porque le gusta razonar (C5), porque "*cuando me salen bien es satisfactorio*" (C15) y por ser entretenidas (C22, C16).

Otro hecho significativo es que hay 3 personas a las que a pesar de ni interesarles, ni gustarles las Matemáticas porque: no las entienden (1/3); porque se les dan mal (3/3); porque son difíciles (1/3), sin embargo, les gustan las clases de Matemáticas porque: las clases son amenas y rápidas (2/3); porque las Matemáticas te ayuda a comprender las cosas con lógica (1/3).

Tabla 3. Categorías de interés y gusto por las Matemáticas y las clases de Matemáticas

	SI			NO		
		N	%		N	%
P1: Interesan	Necesarias para el día a día	4/25	16%	No gustan	3/8	38%
	Entretenidas y divertidas	4/25	16%	No entender	3/8	38%
	Lógicas y hacer pensar	4/25	16%	No capacidad	2/8	25%
P2: Gustan	Gusta razonar	6/23	26%	No capacidad o habilidad	6/10 3/23	30% 26%
	Interesantes	5/23	22%	Lo difícil, lo lioso y lo complejo	2/10 5/23	20% 22%
	Entretenidas	4/23	17%	No entender	2/10 2/23	20% 9%
P3: Clases de Matemáticas	Pasarlo bien, clases amenas, divertidas y entretenidas	14/27 2/6	52% 33%	Aburrimiento	4/6 2/27	67% 7%
	Profesora	10/27	37%	Sentirse mal	3/6	50%
	Aprender cosas nuevas	6/27	22%	Teoría	8/27	30%
	Hacerse las clases cortas, pasarse el tiempo volando	6/27	22%			

La Tabla 3 muestra las categorías correspondientes a las cuestiones de la primera parte del cuestionario con los valores absolutos y porcentajes del número de alumnos cuyas respuestas están incluidas en dichas categorías. En las cuestiones P2 y P3, ocurre que algunas razones por las que hay aspectos de las Matemáticas y de las clases de Matemáticas que no les gustan a los alumnos que les gustan las Matemáticas y las clases de las Matemáticas coinciden con las razones por las que a otros alumnos no les gustan las Matemáticas ni las clases de Matemáticas y viceversa. Por esta razón algunas categorías tienen dos porcentajes diferentes.

Algunas de las categorías extraídas de las respuestas de los alumnos podrían relacionarse con las cualidades estéticas que los matemáticos profesionales adjudican a las entidades matemáticas como se recoge en la Tabla 4.

Tabla 4. Relación entre categorías extraídas de los alumnos y cualidades estéticas

Categorías (alumnos)	Cualidad estética (matemáticos)
Necesarias para el día a día	Aplicabilidad, posibilidad de modelado, generalidad empírica
Lógicas Hacer pensar Gusta razonar	Profundidad Lógica, rigor, razonamiento y deducción estrictos, pensamiento puro
Interesantes Entretenidas y divertidas Pasarlo bien, clases amenas, divertidas y entretenidas	Sorpresa, sagacidad, ingenio Patrón, estructura, simetría, regularidad, diseño visual
Aprender cosas nuevas e interesantes Lo difícil, lo lioso y lo complejo	Sorpresa Transparencia Economía, simplicidad, elegancia

Gusto por lo escolar

Respecto a la influencia que el contexto escolar pudiera tener sobre el interés y el gusto por las Matemáticas y las clases de Matemáticas, nos encontramos con gran variedad de situaciones.

De los 15 alumnos a los que les gusta el instituto y las clases en general tenemos: 9 alumnos a los que les interesan y les gustan las Matemáticas y las clases de Matemáticas; 1 alumno al que ni le interesan, ni le gustan ni las Matemáticas ni las clases de Matemáticas; y 5 alumnos a los que o no les interesan o no les gustan las Matemáticas o las clases de Matemáticas.

De los 10 alumnos a los que no les gusta ni el instituto ni las clases en general tenemos: 6 alumnos a los que les interesan y les gustan las Matemáticas y las clases de Matemáticas; 2 alumnos a los que ni les interesan ni les gustan las Matemáticas ni las clases de Matemáticas; y otros 2 alumnos a los que les interesa y gusta solo algún aspecto.

Finalmente, hay 8 alumnos a los que o les gusta el instituto pero no las clases y viceversa, de los cuales a 4 les interesan y gustan las Matemáticas y las clases de Matemáticas, mientras que a los otros cuatro les interesa o gusta solo algún aspecto.

Por otro lado, hay 12 alumnos a los que a pesar de no gustarles las clases en general, sí que les gustan las clases de Matemáticas. Las razones dadas por estos alumnos por las que no les gustan las clases en general son: que se aburren (4/12), que las clases son un coñazo, una chapa, no sirven para nada, inútiles (4/12), son repetitivas (1/12), los horarios son prolongados (1/12) y los profesores (1/12). Sin embargo, hay algunos aspectos de las clases que si les gustan: las clases de asignaturas teóricas y prácticas (Matemáticas, Física e Inglés) (3/12), lo que resulta divertido y ameno y además aprendes (Sociales, Lengua, otras dinámicas, “actividades didácticas”) (2/12), las horas en las que hablan todos juntos (1/12) y los compañeros (1/12). Las razones por las que les gustan las clases de Matemáticas son: porque lo pasan bien (4/12), porque aprenden cosas nuevas (4/12), por la profesora (4/12), porque son practicas (1/12), participativas (1/12), se hacen cortas, el tiempo pasa rápido (1/12) y porque les hacen pensar (1/12). Hay dos alumnos que manifiestan que les gusta todo, al resto hay algunos aspectos de las clases de Matemáticas que no les gustan: la teoría (5/12), el aburrimiento cuando explican (1/12) y cuando hay que hacer problemas (1/12), el hacer problemas porque no se les dan bien (2/12) y la Geometría porque hay que memorizar (1/12).

En todos los casos anteriores se puede apreciar que el interés y gusto por las Matemáticas puede darse a pesar de que no gusten ni el instituto ni las clases en general, con lo cual el gusto por las Matemáticas puede ser un factor que ayude a reducir la tasa de abandono escolar.

Gustos relativos a temas y actividades y/o ejercicios de Matemáticas

El tema que más alumnos han dicho que les gusta es el de Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones (14/33) y las razones dadas para ello son; que se les da bien (4/14); que es divertido, entretenido, ameno (4/14); ser fácil (1/14); ser útil para resolver problemas (1/14). A cuatro personas no les gusta este tema y tres de ellas dicen que no les gusta porque no se les da bien. A estas tres personas, sin embargo, les gustan respectivamente: Ruffini, porque se le da bien; la Estadística porque es de escribir; y la Geometría porque le gustan las figuras.

El siguiente tema que más gusta es los Polinomios (4/33). Las razones dadas son: porque se les da bien (2/4); porque lo entiende (1/4) y por ser fácil (1/4). Este tema solo una persona ha dicho que no le gusta porque se le da mal por ser despistada y equivocarse en los signos.

Los Problemas gustan a cuatro personas y las razones dadas son: cuestiones relacionadas con la tarea (3/4) como que les gusta razonar e interpretar el problema; por ser útil para la vida cotidiana (1/4); porque se le da bien (1/4); porque no hay que memorizar (1/4). Sin embargo, por otro lado los Problemas es el tema que menos gusta de Matemáticas (9/33). Las razones dadas son: por ser difíciles, costosos y problemáticos (3/9); por no entender (2/9); porque se les dan mal (2/9); porque tienen que usar ecuaciones (2/9); por aburrimiento (1/9); porque les lleva mucho tiempo (1/9).

La Geometría es el siguiente tema que menos gusta (5/33). Las razones dadas son: porque se les da mal (2/5); por ser aburrido (1/5) y porque hace falta memorizar (1/5). Por otro lado, este tema gusta a tres personas y las razones dadas son: por ser amena (1/3) y porque le gustan las figuras (1/3). La otra persona no justifica porque le gusta.

El tipo de actividades que más alumnos han dicho que les gusta son las de Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones (6/33). Las razones dadas por los alumnos son: porque se les dan bien (2/6); por ser divertido y entretenido (2/6). Otras dos personas no justifican porque les gusta. Hay a dos personas a las que no les gustan las actividades sobre ecuaciones, una porque no las entiende y otra no lo justifica.

El siguiente tipo de actividades que más gusta son los Problemas (4/33). Las razones dadas son: porque le gusta razonar y ver como los enfocan y plantean otras personas (1/4); porque le gusta formularlos (1/4). Sin embargo, hay ocho alumnos a los que no les gustan las actividades de problemas. Las razones dadas son: que se les dan mal (2/8), hay algunos problemas que no entiende (1/8); algunos problemas parecen muy difíciles de hacer (1/8).

Solo una persona de las tres personas a las que les gustan las actividades sobre Polinomios ha justificado porque le gustan; dice que le gusta Ruffini porque es entretenido. Una persona ha dicho que no le gustan las actividades sobre divisiones algebraicas, pero no lo justifica. Respecto a las actividades sobre Operaciones, de las tres personas a las que les gustan: una dice que le gusta el cálculo mental; otra dice que le parece fácil y entretenido hacer operaciones. Hay dos personas a las que no les gustan los cálculos, a una le resulta difícil y a otra no le gustan porque piensa que es lenta.

Las actividades de Geometría no gustan a tres personas: a una porque se lía con las formulas y no le parecen útiles, a otra porque se necesita memorizar y otra persona no lo justifica. Sin embargo, a otra persona le gustan las actividades sobre Geometría porque le gusta medir cosas.

DISCUSIÓN

Interés y gusto por las Matemáticas y las clases de Matemáticas

Podemos afirmar que en el caso de este estudio existe mayoritariamente interés y gusto por las mismas, así como por las clases de Matemáticas. Las razones dadas son la utilidad de las Matemáticas, el gusto por la lógica y el razonamiento matemático y porque son entretenidas. Parece que para el alumnado de este nivel de enseñanza, "las Matemáticas" son equivalentes a "la asignatura de Matemáticas" y ésta lo es a "las clases de Matemáticas", por tanto si las clases son divertidas y amenas, entonces las Matemáticas son divertidas y amenas. Así pues, en el gusto por las clases un factor importante es el profesorado. Otro factor es la percepción del paso rápido del tiempo durante las clases. Esto último podríamos relacionarlo con las características de una experiencia estética, según Urmeneta (2008), determinadas experiencias estéticas podrían modificar determinadas representaciones temporales.

Por el contrario, como señalan Alonso et al. (2004), el hecho de no entender o de sentir que no se tiene capacidad para la asignatura lleva a un rechazo a la misma. Lo que no gusta de las Matemáticas es lo percibido como lioso, difícil y complejo. En consonancia, lo que no gusta de las clases de las Matemáticas es el aburrimiento y sentirse mal. Tampoco gusta la teoría, lo que lleva a concluir que hay algunos alumnos que no perciben la belleza de las demostraciones, contrariamente a lo que les ocurre a los matemáticos profesionales, como sugerían Poincaré (1908/1956; citado en Sinclair, 2006), Dreyfus y Eisenberg (1986) y Brinkmann (2009).

Mayoritariamente, a los alumnos que les interesan las Matemáticas también les gustan las Matemáticas y viceversa, poniéndose de manifiesto como indicaba Wells (1990) que los campos de interés de los sujetos condicionan las valoraciones estéticas en las Matemáticas. Pero en algún caso, el hecho de no entender puede dar lugar a que a pesar de mostrar interés hacia las Matemáticas al alumno no le gusten. Por otro lado, contrariamente a lo indicado en Honderich (2001) sobre la necesidad de una falta de interés utilitario para percibir la belleza, el hecho de mostrar un interés utilitario hacia las Matemáticas, en el sentido de considerarlas necesarias en el día a día y útiles, no invalida el gusto por las Matemáticas debido a cualidades como que gusta razonar, que producen satisfacción y que son entretenidas, alejadas estas últimas razones de una utilidad inmediata.

Por último, puede darse la situación de que a alumnos que ni les interesan ni les gustan las Matemáticas, sin embargo tengan un buen rendimiento porque les gusten las clases de Matemáticas e incluso que lleguen a valorar alguna de las cualidades de las Matemáticas que podríamos considerar estéticas. En este caso, la lógica, es decir, la lógica, el rigor, el razonamiento y la deducción estrictos, el pensamiento puro (Ernest, 2015).

Interés y gusto por el instituto y las clases en general

Aunque el hecho de que no guste lo escolar no es un condicionante para el interés ni para el gusto por las Matemáticas o las clases de Matemáticas, parece más probable que interesen y gusten las Matemáticas y las clases de Matemáticas si hay gusto por el ámbito escolar y las clases en general, poniéndose de manifiesto las tesis de Jacobsen (2006) de que en la experiencia estética entran en juego un sujeto, un objeto y una situación.

Que las Matemáticas podrían ayudar a reducir el abandono escolar se refleja en que hay 12 alumnos a los que a pesar de no gustarles las clases en general, porque les aburren las explicaciones, si que les gustan las clases de Matemáticas porque lo pasan bien en clase gracias a la profesora y por la sensación de aprender cosas nuevas, lo cual nuevamente se corresponde con el papel de la situación señalado por Jacobsen, anteriormente comentado.

Gustos relativos a temas y actividades y/o ejercicios de Matemáticas

Es interesante comprobar que para los alumnos no es clara la distinción entre temas de Matemáticas y tipos de actividades de Matemáticas.

Un factor decisivo para que guste un tema de Matemáticas es que los alumnos sientan que se les da bien (Ecuaciones, Polinomios), que les resulte ameno (Ecuaciones, Geometría, Fracciones) y les resulte fácil (Ecuaciones, Polinomios, Estadística). Igualmente, un tema no gusta si el alumnado siente que: no se le da bien (Ecuaciones, Polinomios, Problemas, Geometría, Fracciones), el tema aburre (Problemas, Geometría, Estadística) y el tema es difícil, complicado (Problemas, Fracciones, Estadística). De estas razones, la facilidad por la que gustan las Ecuaciones, Polinomios y Estadística parece relacionarse con el gusto por la simplicidad, la concisión y la claridad que valoran Dreyfus y Eisenberg (1986) en los argumentos matemáticos, siendo también éstos los valores en positivo de lo difícil y complicado que no les gusta a los alumnos, en el caso de Problemas, Fracciones y Estadística.

A un alumno le gusta la Geometría porque le gustan las figuras, lo cual puede relacionarse con la cualidad de belleza visual mencionada por De Guzmán (2003). En el caso del tema de Ecuaciones, un alumno ha mencionado que le gustan porque son útiles para resolver problemas y en el tema de Problemas, otro alumno indica que le gustan por ser útiles para la vida cotidiana. Estas razones se pueden relacionar con la aplicabilidad a la que se refiere Ernest (2015). Bosque, Segovia y Lupiáñez (2017) encontraron que junto a la simplicidad y el interés del tema, las aplicaciones en la vida real es una de las características más valoradas en la resolución de problemas.

Nuevamente, un tipo de actividades gusta si los alumnos: perciben que se les dan bien (Ecuaciones, Estadística), lo encuentran entretenido (Ecuaciones, Polinomios, Aritmética/Cálculos), lo encuentran fácil (Aritmética/Cálculos, Estadística). Podemos ver que las razones por las que les gusta un determinado tipo de actividades son prácticamente las mismas por las que les gusta un determinado tema. En cuanto a las actividades que no les gustan, la única razón que se ha repetido ha sido: no entienden (Ecuaciones, Problemas).

El hecho de que para que les guste un tema o un tipo de actividades, los alumnos tengan que sentir que se les da bien, parece relacionarse con la necesidad, que apunta Brinkmann (2009), de que en la resolución de problemas, el alumno sienta que tiene alguna posibilidad de resolverlos para que los perciba como bonitos.

Respecto a la Geometría, una razón por la que gustan las actividades es que gusta medir cosas, lo cual se puede relacionar con la aplicabilidad a la experiencia como criterio estético del que habla Sinclair (2006) respecto a la elección de problemas. Finalmente, las razones dadas para que gusten los Problemas se refieren a las habilidades que requieren: porque gusta razonar y ver cómo los enfocan y plantean otras personas y porque gusta formularlos. Este gusto por formular problemas está relacionado con la que De Guzmán (2003) entiende como la más fundamental de las características de las Matemáticas que dan lugar a lo que se entiende como belleza matemática, que sería la sorpresa y admiración que se produce al contemplar la armonía de los objetos matemáticos que son producto de la matematización de la naturaleza.

Por último, podemos concluir que este estudio pone de manifiesto que algunos alumnos son capaces de percibir cualidades estéticas en las Matemáticas, aunque quedaría por ver, en el caso de los alumnos que no las perciben, en qué medida desde la enseñanza se puede promover esta visión.

Agradecimientos

Este trabajo se sustenta en el proyecto EDU2015-70565-P del Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

Alonso, S. H., Sáez, A. M. y Picos, A. P. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación, 334*, 75-95.

Bosque, B., Segovia Alex, I. y Lupiáñez, J. L. (2017). Exploración del papel de la estética en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *PNA*, *12*(1), 1-25.

Brinkmann, A. (2009). Mathematical beauty and its characteristics. A study of the students' points of view. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 365-380.

Cohen, L., Manion, L. y Rodríguez, M. A. C. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

De Guzmán, M. (2003). Los goces estéticos del quehacer matemático. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *97*(2), 351.

Dreyfus, T., y Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the learning of Mathematics*, *6*(1), 2-10.

Durán, A. J. (2001). El valor estético de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *4*(2), 329-354.

Ernest, P. (2015). Mathematics and Beauty. *Mathematics Teaching*, *248*, 23-27

García, P. (2000). *Diccionario filosófico. Manual de materialismo filosófico. Una introducción analítica*. Oviedo: Pentalfa.

Gómez-Chacón, I. M. (2005). Valores y conocimiento matemático: la belleza matemática. *Diálogo filosófico, 62*, 285-306.

Honderich, T. (2001). *Enciclopedia Oxford de filosofía*. Londres: Oxford University Press.

Jacobsen, T. (2006). Bridging the Arts and Sciences: A Framework for the Psychology of Aesthetics. *Leonardo, 39*(2), 155-162.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), *BOE, 10*. Recuperado de https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2013-12886

Pérez-Tyteca, P., Martínez, E. C., Alex, I. S., Martínez, E. C., García, F. F. y Cano, F. (2009). El Papel de la Ansiedad Matemática en el Paso de la Educación Secundaria a la Educación Universitaria. *PNA, 4*(1), 23-35.

Root-Bernstein, R. S. (2002). Aesthetic cognition. *International Studies in the Philosophy of Science, 16*(1), 61-77.

Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty: Aesthetic approaches to teaching children*. New York: Teachers College Pr.

Sinclair, N. (2009). Aesthetics as a liberating force in mathematics education? *ZDM, 41*(1-2), 45.

Subdirección de Estadística y estudios del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2017). Recuperado de https://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/ca/estadisticas/educacion/indicadores-publicaciones-sintesis/datos-cifras.html

Tatarkiewicz, W. (2006). *Historia de seis ideas* (Francisco Rodríguez Martín, trad.). Madrid: Tecnos/Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1987).

Urmeneta, V. H. (2008). Tiempo y experiencia estética. Una aportación desde el pensamiento sociológico. En I. Mendiola (Ed.), *Textos y pretextos para repensar lo social: libro homenaje a Jesús Arpal* (pp. 173-178). Bilbao: Universidad del País Vasco.

Wechsler, J. (1978). *On aesthetics in science*. Cambridge (Massachusetts): MIT Press.

Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 12*(3), 37-41.

MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LENGUA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN CLASE

Methods for the analysis of the language of the mathematics teacher in the classroom

Boukafri, K.[a] y Planas, N.[a]

[a]Universitat Autónoma de Barcelona

Resumen

Presentamos métodos creados, implementados y validados en Boukafri (2017) para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase, en particular del uso de la lengua – discurso – denominado revoicing en la literatura. Los métodos responden a tres unidades concatenadas de análisis: turno, episodio y sesión de clase. Los ejemplificamos mediante datos de una discusión conjunta de una tarea de geometría con alumnos de 11 y 12 años. Los resultados indican la capacidad de la propuesta de rastrear el efecto del revoicing en la resolución de la tarea que se discute. Concluimos sobre la posibilidad de aplicar esta propuesta al análisis de la lengua del alumno de matemáticas en su actividad de aula y, más en general, para la comprensión del uso de la lengua en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: *lengua en uso del profesor de matemáticas, revoicing, datos de clase, análisis del discurso.*

Abstract

We present methods created, implemented and validated in Boukafri (2017) for the analysis of the language of the mathematics teacher in the classroom, in particular for the use of language – discourse – called revoicing in the literature. The methods respond to three interrelated units of analysis: turn, episode and lesson. We exemplify them by means of data from the joint discussion of a geometry task with 11 and 12 year-old learners. The results indicate the capacity of this proposal for tracing the effect of revoicing on the resolution of the task under discussion. We conclude about the possibility of applying such proposal to the analysis of the language of the mathematics learner in classroom activity and, more broadly, for the overall comprehension of language use in mathematics teaching and learning.

Keywords: *language of the mathematics teacher, revoicing, classroom data, discourse analysis.*

INTRODUCCIÓN

En su libro basado en resultados de trabajos con datos de clase, Pimm (1990) propone estrategias que el profesor puede usar en la comunicación con los alumnos a fin de que participen en la construcción del discurso matemático como, por ejemplo, hablar con oraciones inacabadas o subir el tono tras una pausa para sugerir al alumno que intervenga. Estas estrategias, deliberadas o espontáneas, son una parte fundamental de las condiciones de producción de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas en la escuela. De ahí que el estudio de estrategias discursivas del profesor sea una línea abierta en la investigación sobre educación matemática y lengua en entornos de clase, con literatura específica para usos particulares de la lengua. A lo largo de esta comunicación y como ocurre en Planas, Morgan y Schütte (2018), utilizamos indistintamente discurso y lengua en uso.

Boukafri, K. y Planas, N. (2018). Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 171-180). Gijón: SEIEM.

En el estudio de discusiones de clase de ciencias y de matemáticas, O'Connor y Michaels (1993) identifican y definen *revoicing* como una estrategia del discurso que consiste en re-expresar la intervención de un alumno, oral o escrita, por parte de otro participante. En su trabajo posterior (O'Connor y Michaels, 1996), estas autoras asocian el uso de revoicing con introducir y clarificar contenidos, explicar razonamientos y reorientar discusiones, entre otras funciones. Así ponen de relieve el efecto de unos usos de revoicing en el discurso de clase. Desde entonces, ha habido estudios de esta estrategia en clases de matemáticas (Enyedy y otros, 2008; Forman y Ansell, 2001, 2002; Herbel-Eisenmann, Drake y Cirillo, 2009; Moschkovich, 2015; Planas y Morera, 2011), ya sea en relación a la lengua del alumno o del profesor. En nuestra investigación, consideramos que hay revoicing cuando se re-expresa oralmente una intervención, de otro participante o de uno mismo, habiendo al menos un contenido matemático común entre la intervención origen y la re-expresada (Boukafri, 2017). Compartimos una visión social de la educación matemática, con atención al papel de la comunicación verbal en el desarrollo de la actividad en clase. Para entender lo que ocurre en clase de matemáticas, asumimos que es preciso conocer cómo se produce y muestra el discurso matemático y pedagógico – en adelante omitimos la mención a la naturaleza siempre pedagógica del discurso matemático en toda situación inmediata de aula –. Con esta agenda de investigación, hemos llevado a cabo un estudio sobre el discurso matemático del profesor en su interacción con los alumnos (Boukafri, Civil y Planas, 2018; Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2016; Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2018).

El propósito de esta comunicación es metodológico ya que pretende mostrar métodos de conocimiento donde el objeto de estudio es la comprensión de la lengua del profesor de matemáticas. En Boukafri (2017) se pone de relieve la importancia de generar instrumentos que faciliten la comprensión de la estrategia de revoicing como recurso del discurso para incidir en la construcción de actividad matemática. No entramos a examinar la noción teórica de revoicing, sino que presentamos métodos de análisis para explicar cómo este uso del discurso se produce en distintos segmentos: turno, episodio y sesión. Tomamos parte del discurso oral de una clase de matemáticas junto a discursos visuales y escritos en la confección de los instrumentos.

CONTEXTO PARA LA PROPUESTA DE ANÁLISIS

Trabajamos con dos acciones básicas en el análisis de datos: fragmentar, para obtener unidades más manejables para el análisis; y conectar, para discutir datos y resultados que se han tratado por separado. La reiteración de estas acciones nos lleva a filtrar tres unidades de análisis. La unidad más pequeña corresponde a la intervención o turno de un alumno o profesor, que precede o bien sigue en orden temporal a la intervención de otro participante, por lo que tiene valor de intercambio. La unidad intermedia corresponde a grupos de turnos, que llamamos episodios y que surgen al fijar criterios semánticos relativos al contenido matemático comunicado en la interacción. La tercera unidad corresponde al conjunto de turnos – o bien de episodios – que forman la discusión en grupo de una sesión de clase. Por simplicidad, llamamos sesión a esta unidad a pesar de que excluimos lo que ocurre en clase fuera de la discusión conjunta.

> Una araña está en medio de una de las paredes más pequeñas de mi salón y una mosca está en la ventana de la pared opuesta, 1.5m por encima del suelo y 0.5m de la pared adyacente con cuadros. El salón mide 5m de largo, 4m de ancho y 2.5m de alto. Si la araña se desplaza caminando por las paredes, ¿cuál es el camino más corto para que la araña cace a la mosca?

Figura 1. Enunciado de la tarea

De los datos en dos centros de secundaria en Boukafri (2017), tomamos una sesión en la clase con 28 alumnos de primer curso – 11 y 12 años – donde la profesora (en adelante PA) implementó una tarea de geometría sobre hallar “el camino más corto” que debe recorrer una araña para alcanzar una mosca, ambas en paredes opuestas de un salón con forma de ortoedro (Figura 1). La tarea involucra contenidos sobre los desarrollos de un ortoedro, la distancia entre dos puntos y el teorema de Pitágoras, junto a otras relaciones plano-espacio. Se facilitó a PA un esquema con las propuestas de aproximación a la resolución de la tarea a modo de árbol del problema (Morera, 2013). Los alumnos tenían que leer el enunciado, trabajar en grupos reducidos con acceso a material – maqueta del salón en papel y adhesivos para los animales – y, finalmente, participar en la discusión conjunta.

Tabla 1. Fragmento de transcripción multimodal

23	**PA:** Mireu això, quina diferència hi ha entre aquesta habitació i aquesta? Clara?	 

Utilizamos tres cámaras de video a fin de identificar participantes y textos hablados o escritos en la pizarra durante la realización de la tarea desde su planteamiento inicial hasta su resolución. Los datos de video fueron transcritos como sucesión de turnos de habla de los participantes. La transcripción de textos verbales se completó con imágenes asociadas a turnos con prevalencia de discursos pronominales o escritos. No se codificaron pausas, tonos, gestos ni otros elementos no verbales. En la Tabla 1, las imágenes se añaden para proporcionar el contexto de "esta habitación" y "esta" ("aquesta" y "aquesta habitació" en la transcripción original).

En las tres próximas secciones, mostramos los cuatro instrumentos principales de análisis (I_): I_Horizontal, I_Vertical, I_Origen e I_Conectividad. No son instrumentos que se triangulen entre ellos, sino que se suceden y completan a medida que se modifica la unidad de análisis (Tabla 2). En Boukafri (2017) hay el detalle de los instrumentos preparatorios de los principales.

Tabla 2. Relación entre unidades e instrumentos

Unidad de análisis	*Instrumento*
Turno	I_Horizontal
Episodio	I_Vertical
Sesión	I_Origen, I_Conectividad

ANÁLISIS DE LA UNIDAD 'TURNO'

El análisis del discurso a nivel de turnos empieza con la identificación de turnos con revoicing. Marcamos las evidencias lingüísticas de re-expresión de turnos con presencia de contenidos curriculares de matemáticas. Tomando a Forman y Ansell (2001, 2002), distinguimos tres formas de evidencia lingüística dadas por la re-expresión literal de un contenido matemático en un turno anterior (*repetir*); la re-expresión no literal de un contenido matemático con modificación de sintagmas (*refrasear*) o de estructuras sintácticas (*relatar*). Establecemos otra forma que supone re-expresión de un turno anterior con cambio en el contenido matemático, vinculado el contenido origen con otros de la matemática escolar (*ampliar*). Llamamos palabra clave (Pimm, 1990) al término propio de la matemática escolar y con relación a la tarea matemática. En este punto, es importante hacer notar que la selección de formas lingüísticas no es trivial; en cualquier opción que se tome subyace una conceptualización específica de la noción de revoicing. En nuestro trabajo, subyace una noción de revoicing que es particular de los procesos que operan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, *ampliar* es una forma sustancialmente distinta a *repetir*, *refrasear* y *relatar*.

La Figura 3 muestra un turno de PA [11] donde el enunciado "Hacer una diagonal desde la araña hasta la mosca" en el turno de una alumna [10] se *refrasea ampliando* como "Hacer una diagonal toda ella". Ambos enunciados expresan un movimiento entre dos puntos del espacio, que es un contenido de la matemática escolar en nuestro contexto institucional. Con independencia de los enunciados que los acompañen, se trata de palabras clave porque en sí mismas son representativas de contenido matemático. Si bien PA [11] no relata ni amplía este contenido de [10] de manera manifiesta, en el cambio de forma lingüística se omiten las posiciones para los extremos y la direccionalidad del movimiento que la alumna propone y se sugiere la visualización del continuo dinámico de posiciones que constituyen el movimiento. De ahí que incluso formas lingüísticas de revoicing que no modifican abiertamente la comunicación de un contenido matemático específico, también tengan un papel mediador en el desarrollo y la apropiación del discurso matemático que se genera en el aula. En este ejemplo, se está facilitando la oportunidad de que el grupo de alumnos, incluida Maria, consideren el desplazamiento desde distintas perspectivas. Esta reflexión es relevante porque aporta razones a la elección del turno como unidad de análisis con contenido matemático.

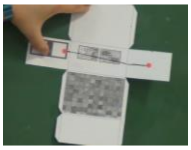
10	**Maria:**	Però el millor és <u>fer una diagonal des de l'aranya fins la mosca</u>. [Pero lo mejor es <u>hacer una diagonal desde la araña hasta la mosca</u>.]
11	**PA:**	<u>Fer una diagonal tota ella.</u> Per tant, des d'aquest punt fins aquest punt anar en diagonal directe. Sense fer aquí recte ni recte. Anar directament en diagonal. Això ens sortirà més curt? [<u>Hacer una diagonal toda ella.</u> Por lo tanto, desde este punto hasta este punto ir en diagonal directo. Sin hacer aquí recto ni recto. Ir directamente en diagonal. ¿Esto nos saldrá más corto?]

Figura 2. Ejemplo de turno con revoicing

Para la organización del análisis de turnos, se diseña I_Horizontal. Este instrumento tiene formato de tabla con cuatro columnas. La primera columna enumera los turnos y señala aquellos con revoicing en verde. A su derecha se ubica la transcripción multimodal con cursiva para los enunciados de origen de revoicing. La tercera columna denota la forma lingüística, pudiendo ocurrir que haya más de un enunciado con revoicing en un mismo turno y que estos se correspondan con distintas formas. La cuarta columna indica funciones del turno con revoicing en el discurso. Como en Planas (2018), por función de un turno entendemos el efecto potencial de ese segmento en la producción de otros turnos. Si bien el estudio del efecto actual requeriría del análisis de turnos posteriores y, por tanto, de la consideración de una unidad de análisis más amplia, lo que aquí se estudia es el efecto que potencialmente puede tener un cierto revoicing del profesor en el desarrollo del discurso matemático del aula. A diferencia de la forma, con base en cuatro tipos adaptados de la literatura, asociamos la función mediante un proceso inductivo de discusión y filtración de datos.

La Tabla 3 aporta ejemplos de asociación de formas y funciones a turnos con revoicing. En [3], PA *relata* "subiera uno veinticinco" (discurso de Sara en [2]) mediante "la araña sube uno veinticinco" con la variación de indicar el sujeto de la acción de subir. Asignamos la función de *examinar propuestas* (de desplazamientos que resuelvan la tarea) a este turno porque PA dirige la propuesta de la alumna – concatenación de dos movimientos – al resto de alumnos sin entrar a valorarla. En [9], PA *relata* el contenido introducido por Sara en [2], [4] y [5] sobre concatenación de movimientos horizontales y verticales respecto a las aristas del salón, y en [8] donde otra alumna, Cris, sugiere la concatenación de movimientos horizontales y oblicuos. Aquí asignamos la función de *comparar propuestas* porque PA menciona la diferencia introducida al usar movimientos oblicuos. Conviene insistir en el papel dado a la asignación de funciones a turnos en esta fase del análisis. Vemos, por ejemplo, revoicing con el efecto potencial de examinar y comparar propuestas de alumnas. El hecho deliberado y estratégico de organizar la totalidad de formas y funciones para turnos en un mismo instrumento permite conjeturar la preparación de comparar propuestas desde el momento en el que se examina el desplazamiento indicado por Sara y sin que se reformulen sustancialmente los contenidos matemáticos introducidos por Sara y Cris. No obstante, sin haber agrupado turnos no disponemos de información para concluir sobre la realización en el discurso de dicho potencial para modificar el contenido matemático que se discute. I_Horizontal es un instrumento adecuado para la identificación de formas de revoicing y la asignación de funciones potenciales de estas formas en turnos posteriores. Así, I_Horizontal informa tanto de la forma como de la función de los enunciados con revoicing. No obstante, este instrumento resulta insuficiente si se pretende concluir sobre el impacto efectivo de la re-expresión de ideas en el discurso matemático.

Tabla 3. Fragmento de I_Horizontal para una sesión

#	TRANSCRIPCIÓN		FORMA	FUNCIÓN
1				
2	**Sara:** Nosaltres volíem *que pugés u vint-i-cinc, després cinc metres de llarg i després un metre per arribar a la mosca.*			
3	**PA:** A veure, pujar, què vols dir? que la mosca puja u vint-i-cinc... no que l'aranya puja u vint-i-cinc, llavors camina cinc pel sostre i...		RELATAR$_{2}$	Examinar propuestas (concatenación de dos movimientos)
4	**Sara:** *Baixa un metre per agafar a la mosca.*			
5	**PA:** La Sara el què ha dit, hi ha una cosa que a mi no em quadra. I és que si l'aranya està aquí i puja, i després camina cinc metres, es fica aquí al sostre i camina cinc metres, ara em queda aquí, si ara jo baixo vaig com al mig d'aquesta cara. Però mira on està el gomet. *Aquí et falta encara baixar i llavors anar cap al gomet.* Ho entens o no?		RELATAR$_{2,4}$	Problematizar propuestas (no coincidencia entre punto final y coordenadas mosca)
6	**Sara:** Sí...			
7	**PA:** Bé, això és una primera intuïció, però després veieu que s'ha de millorar. Per exemple, Cris, vosaltres com ho havíeu fet, la millora?			
8	**Cris:** *Hem fet dos metres en línia recta, llavors, havíem fet com en diagonal i després...*			
9	**PA:** A veure, pintem-ho. **[i]** A veure, la Sara el que havia fet era: Pujava l'aranya fins aquí. Aquest punt va a parar aquí. Tothom veu que això enganxa? Apareix aquí, camina cinc metres. Apareix aquí i baixa un metre **[ii]** i després encara ha d'anar cap aquí. **[iii]** Elles diuen: Fan que l'aranya vagi recte i aquí també vagi recte i aquí en comptes de fer escaleta vaig en diagonal. **[iv]** Llavors feien una diagonal aquí. *Però aquest tros el deixaven recte i aquest tros el deixaven recte i lo que feien diagonal era aquest.*	 	RELATAR$_{2,4}$ RELATAR$_{5}$ RELATAR$_{8}$	Comparar propuestas (movimientos horizontales y verticales - oblicuos)

Las formas mostradas son ejemplos de re-expresión no literal (Figura 2 y Tabla 3). A lo largo de la sesión, encontramos ejemplos de re-expresión literal – repetir – que se dan principalmente cuando un participante 'dicta' datos de la tarea. En la Figura 3, PA [61] re-expresa usando exactamente las mismas palabras [60] la longitud de la base de triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde a la longitud del camino por la pared con cuadros.

60 Albert: Set coma cinc [Siete coma cinco].

61 PA: Set coma cinc. D'on surt aquest set coma cinc? [Siete coma cinco ¿De dónde sale este siete coma cinco?]

Figura 3. Ejemplo de re-expresión literal: repetir.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD 'EPISODIO'

Si se pretende ahondar en la función efectiva de turnos de la profesora con revoicing en el discurso matemático del aula, se necesita ampliar la unidad de análisis de modo que se incluya la discusión en torno a un contenido matemático específico – vinculado a palabras clave cuya literalidad se recoge en I_Horizontal –. El análisis del discurso a nivel de episodios estudia las funciones potenciales identificadas para turnos en torno a un mismo contenido matemático y busca relaciones entre ellas. De ahí, un episodio es una agrupación de turnos consecutivos con significado respecto al desarrollo de un contenido matemático, que no puede ser descompuesto en agrupaciones más simples sin que con ello se pierda información acerca del desarrollo de ese contenido durante la sesión de clase. Un episodio puede comprender apenas dos turnos si un contenido matemático solo aparece en el turno con revoicing y el de origen – o incluso un único turno si es PA quien se re-expresa de inmediato a sí misma –, o bien puede agrupar varios turnos de varios participantes. A grosso modo, cada episodio puede 'titularse' mediante un contenido matemático y ha de facilitar rastrear el impacto efectivo de turnos con revoicing en la discusión en clase de dicho contenido.

I_Vertical se diseña para estudiar funciones de manera relacionada entre ellas y en relación a un mismo contenido matemático. Una vez más se mantiene la doble mirada de la literalidad de las palabras clave y el contexto de uso de estas expresiones –. Este instrumento tiene formato de tabla con seis columnas. La primera y segunda columnas muestran la numeración de los turnos con revoicing y las expresiones clave utilizadas por PA. La tercera columna retoma contenidos matemáticos indicados en I_Horizontal. La cuarta y quinta columnas indican las expresiones clave de turnos intermedios de alumnos entre turnos con revoicing de PA y su numeración. La Tabla 4 muestra el aspecto de I_Vertical para el episodio *e1, distancia entre dos puntos del plano,* que va de [1] a [15]. Las expresiones clave y contenidos matemáticos incluyen principalmente la discusión del tipo de movimientos (horizontales, verticales, oblicuos), la cantidad (único, concatenados), y las coordenadas inicial y final. En [16], Nosotros también lo hemos hecho yendo por arriba. Por el techo", se consideran caminos por otras paredes del salón, por lo que este turno se incluye en otro episodio, *e2*.

Tabla 4. I_Vertical para e_1

#	PALABRAS CLAVE (PA)	CONTENIDO MATEMÁTICO	PALABRAS CLAVE (ALUMNOS)	#
			pugés / vint-i-cinc / cinc / metres / llarg / arribar /mosca	2
3	aranya / puja / u vint-i-cinc / camina / cinc / sostre	concatenación de dos movimientos	baixa / un / metre / agafar / mosca	4
5	aranya / puja / camina / cinc / metres / sostre / baixar / mig / anar	no coincidencia entre punto final y coordenadas mosca	dos / metres / línia / recta / diagonal	8
9	pujava / aranya / camina / cinc metres / baixa / un /metre / anar / aranya / recte / escaleta / diagonal / tros	movimientos horizontales y verticales - oblicuos movimiento oblicuo respecto a los ejes	diagonal	10
11	diagonal	movimiento oblicuo		
13	aquesta (diagonal) / recte / baixar	movimientos horizontales y oblicuo – movimiento oblicuo	recte	14
15	distància / curta / punts / recta	distancia entre dos puntos del plano		

Llegados a este punto, se tiene una discusión conjunta de una sesión de clase dividida en un conjunto de episodios – surgidos de la agrupación de turnos – con conexiones potenciales entre ellos. La totalidad del I_Vertical informa sobre el desarrollo de contenidos matemáticos poniéndolos en relación con el uso y efecto de revoicing. Este instrumento vuelve a ser insuficiente si se pretende averiguar la posible conexión entre episodios y, con ello, el posible impacto encabalgado y acumulativo de re-expresar ideas en la resolución de la tarea. Ciertamente tiene sentido finalizar el análisis del discurso sin incluir una mirada conjunta a la sesión de clase – conviene recordar que la unidad 'sesión' se limita al segmento de discusión conjunta –. Por otra parte, cualquier unidad es siempre válida por si misma y parte de una unidad más amplia que da continuidad al estudio del discurso. En Boukafri (2017) se dispone de una secuencia de sesiones con sendas tareas que permitirían contar con una cuarta unidad de análisis dada por la secuencia de discusiones conjuntas. Es necesario, sin embargo, decidir cuándo interrumpir el proceso de ampliación sucesiva de la unidad de análisis. En nuestra investigación, el logro de resultados sobre el impacto del uso de revoicing en la resolución de la tarea llevó a concluir sobre la suficiencia de unidades con las que trabajamos.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD 'SESIÓN'

Por cómo han sido filtrados los turnos y construidos los episodios, todos comparten la presencia manifiesta de revoicing. A fin de ahondar en las conexiones entre episodios y, con ello, en el impacto efectivo del uso de revoicing a lo largo de la resolución de la tarea, ampliamos una vez más la unidad de análisis de modo que ahora se tenga en cuenta la sesión de clase. Para empezar, rastreamos los turnos origen (de turnos con revoicing) compartidos entre episodios. Para ello diseñamos I_Origen, que es una tabla cuyo número de columnas varía según el número de episodios. La primera columna por la izquierda coincide con la primera de I_Horizontal y la última informa del conjunto de turnos que comprende cada episodio. Las columnas centrales sirven para marcar la distribución de episodios. Mediante sombreados resaltamos los turnos origen compartidos por más de un episodio para detectar contenidos matemáticos re-expresados en más de una ocasión durante la sesión. La Figura 3 muestra un fragmento de I_Origen. Se observan los turnos de *e1* que son origen de revoicing dentro de este episodio [2, 4, 5, 8, 9, 10, 14], y en otros episodios, a saber, *e2* [14, 15], *e4* [8, 9, 10, 11] y *e5* [14, 15]. Con I_Origen se logra observar con relativa facilidad que hay contenidos matemáticos recurrentes en [8], [9], [10], [14] y [15], que son re-expresados en más de una ocasión. Esta observación es esencial para la conjetura de conexiones entre episodios. Este es el propósito de I_Origen ya que el detalle de cuáles son los contenidos matemáticos re-expresados y cómo esto se hace se deja para los otros tres instrumentos. En este sentido, I_Origen es un instrumento distinto a los otros que presentamos, por ser sobre todo un rastreador de conexiones.

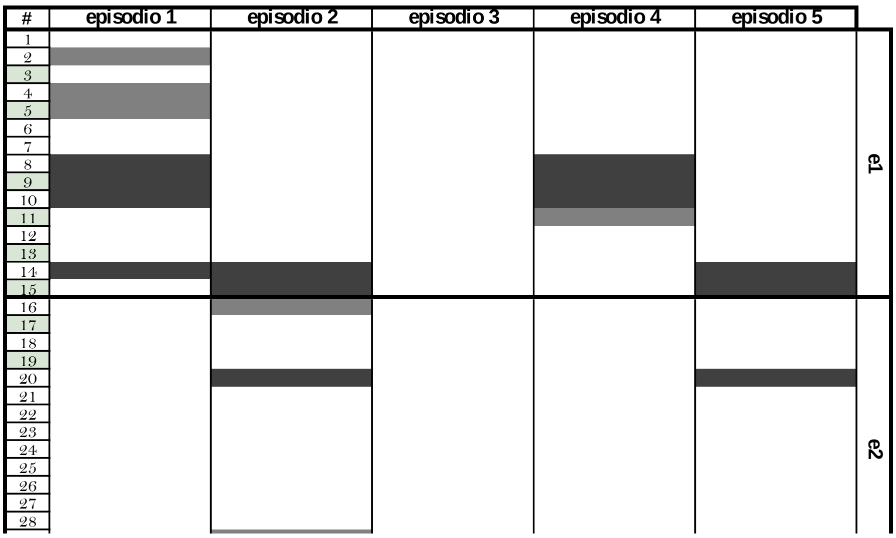


Figura 4. Fragmento de I_Origen para una sesión

I_Origen orienta el establecimiento de conexiones entre episodios ya que anticipa posibles conexiones relevantes entre aquellos que comparten turnos que son origen de turnos con revoicing. Entendemos que hay una conexión entre episodios cuando se consigue ver que el paso de un contenido matemático a otro, o entre aspectos de un mismo contenido, se produce en turnos compartidos que además son turnos de origen de revoicing. Para explorar estas posibles conexiones, se diseña el instrumento I_Conectividad, que sugiere la estructura de conexiones entre episodios para una sesión. En la Figura 4, se reproduce el procedimiento de indagación y visualización de conexiones. Se parte del primer episodio y como el siguiente episodio tiene turnos origen en *e1*, se indica *e2* a su lado derecho y se enlazan ambos episodios con una flecha que contiene la numeración de turnos compartidos y sus expresiones clave. El tercer episodio, *e3*, se sitúa sin flecha con *e1* porque no comparten turnos origen. Y así sucesivamente para todos los episodios dos a dos hasta completar el instrumento con formato de grafo. Se consigue una representación del discurso durante la discusión conjunta de una sesión de clase como grafo con tantos vértices como episodios. Dos vértices están conectados si los episodios correspondientes comparten al menos un turno. Por ejemplo, para la sesión seleccionada, se observa que *e1* tiene tres aristas que lo unen a: *e2* mediante [14] y [15] donde se comunica que el camino es un segmento recto cuyos extremos son las posiciones iniciales de la araña y de la mosca; *e4* mediante [8], [10] y [11] donde se comunica la posibilidad de pensar caminos oblicuos; y *e5* mediante los mismos turnos y por tanto la idea re-expresada en *e2*. Por cómo se ha procedido a lo largo de la propuesta metodológica, estas conexiones vienen determinadas por el uso de revoicing y la presencia de la lengua de las matemáticas – asociada a las expresiones clave –. En consecuencia, puede concluirse sobre el impacto de este uso específico de la lengua de la profesora en el desarrollo de la actividad matemática de los alumnos.

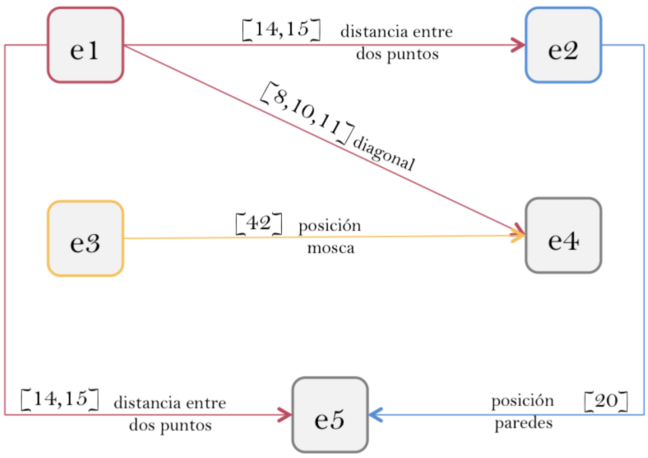


Figura 5. I_Conectividad para una sesión

Si hubiéramos tomado una sesión donde el uso de revoicing no pudiera conectarse con el desarrollo de contenido matemático para la resolución de la tarea, esto se vería mediante un I_Conectividad con el conjunto de episodios en paralelo. En realidad, esta situación de ausencia de conexiones no se dio para ninguna de las cuatro sesiones de clase con dos profesoras distintas examinadas en Boukafri (2017). Los cuatro grafos de ese estudio difieren, pero todos ponen de relieve alguna conexión entre episodios y contenidos matemáticos producida en turnos de origen de turnos con revoicing. El sentido preliminar de este resultado es que la re-expresión de ideas en la lengua de la profesora influye en la generación y el discurso matemático del aula. Esto se puede formular como la existencia de una cierta relación funcional estable en el discurso matemático escolar entre lo que la profesora re-expresa en un momento de una sesión de clase y lo que los alumnos y la profesora expresan en momentos posteriores, incluso cuando la reformulación de ideas atiende a formas lingüísticas que no involucran cambio de contenido matemático observable a nivel local.

DISCUSIÓN DE LA PROPUESTA Y CONCLUSIONES

En nuestra propuesta hay un salto sustancial entre lo que se analiza con I_Horizontal, I_Vertical y la pareja de instrumentos constituida por I_Origen e I_Conectividad. Los métodos presentados tienen una dependencia concatenada que permiten el paso de una unidad de análisis a la siguiente, con la correspondiente refinación en la asignación de funciones a distintos segmentos del discurso. I_Horizontal estudia el discurso de manera local a través de turnos. I_Vertical parte del estudio de turnos para indagar relaciones que sugieran episodios con contenido matemático. I_Origen e I_Conectividad realizan un análisis más global a sabiendas que la unidad 'sesión' podría ser, si así se decidiera, punto de partida de una unidad temporalmente mayor, del mismo modo que la unidad 'turno' podría ser todavía subdividida en segmentos más pequeños – las expresiones clave podrían haber sido pensadas y tratadas como las unidades más rudimentarias –. La recurrencia de lo observado en varios episodios permite considerar que el procedimiento de análisis del discurso es adecuado para el estudio del uso y del efecto de revoicing en relación con situaciones de actividad matemática.

En la investigación sobre revoicing hasta la fecha, los análisis se acostumbran a centrar en segmentos de sesiones de clase compuestos por turnos con revoicing y turnos anteriores y posteriores que contribuyen a interpretar la función de esta estrategia en el discurso (e.g., revoicing para posicionar la lengua del alumno en relación con el contenido principal, en Enyedy y otros, 2008; para fomentar explicaciones matemáticas, en Planas y Morera, 2011; para implicar alumnos y profesores en una discusión conjunta, en Forman y Ansell, 2002). Con nuestro trabajo, aportamos instrumentos que permiten examinar la influencia del uso de revoicing desde intervenciones individuales hasta la resolución colectiva de una tarea matemática, manteniendo en todo momento la presencia explícita de la lengua de las matemáticas. Así es posible establecer una relación funcional entre lo que ha ocurrido en momentos concretos del discurso, por un lado, y lo que ha ocurrido en un momento concreto con respecto a su papel en el desarrollo de la resolución de la tarea. Nuestra propuesta, por tanto, permite indagar sobre la doble relación potencial entre cualquier turno con revoicing y su aportación a la continuidad del discurso matemático en clase.

A pesar de lo específico de los instrumentos presentados, se pueden extraer implicaciones para el estudio más general del discurso, incluido el del alumno de matemáticas en clase, y de su significación en la producción del discurso matemático escolar. Una de las debilidades del análisis del discurso en la investigación en educación matemática es que a menudo no se han incorporado aspectos del discurso escolar propiamente matemático (Morgan, 2005), por lo que se han generado resultados aplicables a la comprensión de los procesos del discurso en cualquier aula. Sin embargo y aunque estos resultados siguen siendo valiosos, es posible pensar e implementar métodos de análisis del discurso que sitúen los rasgos del discurso de la matemática escolar en un lugar central. Es en este contexto de particularización, la investigación sobre discurso en educación matemática se plantea más necesaria. Si el propósito último es el aprendizaje matemático de los alumnos, debemos ser conocedores de los usos de la lengua del profesor de matemáticas en clase que generan oportunidades de reconocimiento y producción de la lengua que se considera adecuada en el discurso de la matemática escolar. Para ello falta investigación.

Agradecimientos

Proyecto EDU2015-65378-P, MICINN / FEDER, GIPEAM 2017-SGR101.

Referencias

Boukafri, K. (2017). *Revoicing. Estudio de discursos de profesores en clase de matemáticas* (Tesis doctoral). UAB.

Boukafri, K., Civil, M. y Planas, N. (2018). A teacher's use of revoicing in mathematical discussions. En J. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues Mendes y M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education: International perspectives*. (pp. 157-169). Dordrecht: Springer.

Enyedy, N., Rubel, L., Castellón, V., Mukhopadhyay, S., Esmonde, I. y Secada, W. (2008). Revoicing in a multilingual classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(2), 134-162.

Forman, E. A. y Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 115-142.

Forman, E. A. y Ansell, E. (2002). Orchestrating the multiple voices and inscriptions of a mathematics classroom. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(2-3), 251-274.

Herbel-Eisenmann, B., Drake, C. y Cirillo, M. (2009). "Muddying the clear waters": teachers' take-up of the linguistic idea of revoicing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(2), 268-277.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología* (Tesis doctoral). UAB.

Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education, 19*(2), 102-116.

Moschkovich, J. (2015). Scaffolding student participation in mathematical practices. *ZDM*, *47*(7), 1067-1078.

O'Connor, M. C. y Michaels, S. (1993). Aligning academic task and participation status through revoicing: analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly*, *24*, 318-318.

O'Connor, M. C. y Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking practices in group discussion. En D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning and schooling* (pp. 63-103). Nueva York: Cambridge University Press

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata [original en inglés, 1987].

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J. A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., García-Honrado, I. y Arnal-Bailera, A. (2018). El discurso matemático del profesor. ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 45-60.

Planas, N. y Morera, L. (2011). Revoicing in processes of collective mathematical argumentation among students. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1380-1389). Rzeszow, Polonia: ERME.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres, Reino Unido: Routledge.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO DE ALUMNOS DE QUINTO DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE PROPORCIONALIDAD

Primary education students' early algebraical thinking when solving a proportionality task

Burgos, M.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Godino, J. D.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo es diseñar, experimentar y evaluar intervenciones educativas que promuevan formas de razonamiento algebraico en los primeros niveles de educación primaria usando tareas de proporcionalidad. Se informa de la fase de evaluación de una experiencia realizada con un grupo de alumnos de quinto curso de primaria que tienen un primer encuentro con este tipo de tareas, analizando con detalle los procedimientos, representaciones, argumentos y grado de generalización en las respuestas dadas al problema planteado. Como resultado se observa en algunos estudiantes rasgos del nivel 1 de razonamiento proto-algebraico. Se concluye que el uso de tareas introductorias de la proporcionalidad, en nuevos ciclos de experimentación, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogénea y aditiva de la función de proporcionalidad puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico.

Palabras clave: *algebra temprana, niveles de algebrización, razonamiento proporcional.*

Abstract

This manuscript is part of a research project whose main goal is to design, experiment and evaluate educative interventions that promote algebraic reasoning in the first levels of primary school, by using proportionality tasks. We report of the evaluation step of an experiment developed with a group of students in the fifth level of primary school (10-11 years old) that had a first contact with this kind of tasks. We analyse in deep detail the procedures, representations, arguments and generalization level of the answers given for the proposed problem. As a result, we observe in some students traces of level 1 of proto-algebraic reasoning. We conclude that the use of introductory proportionality tasks in new experimental cycle, by means of numerical tables and posing questions for the recognition of the homogeneous and additive properties of the proportionality function, enables the student to achieve higher levels of algebraic reasoning.

Keywords: *early algebra, algebraization levels, proportional reasoning.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática. La introducción del álgebra temprana en el currículo de Educación Primaria persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Radford, 2014).

Parte de la propuesta conocida como "early algebra" sugiere que los alumnos en edades tempranas exploren, modelicen, discutan y argumenten sobre relaciones y propiedades matemáticas. Diversas

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). Gijón: SEIEM.

investigaciones muestran la capacidad de los estudiantes de educación primaria para trabajar problemas aritméticos desde un punto de vista algebraico, para identificar relaciones funcionales, representarlas de diversas maneras, generalizarlas y utilizarlas para resolver problemas (Cañadas y Fuentes, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Molina 2007).

Para Kieran (2004) el razonamiento algebraico en los grados elementales "debería incluir el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción" (p. 149). En este sentido, el razonamiento proporcional es frecuentemente considerado como ruta de acceso al pensamiento algebraico temprano. Puesto que razón y proporción tratan sobre relaciones cuantitativas entre cantidades, la habilidad para razonar proporcionalmente juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lim, 2009).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que tiene un doble objetivo:

- Estudiar nuevas modalidades de intervención educativa que se deberían implementar en los procesos instruccionales para promover el desarrollo del razonamiento proporcional, con estudiantes que tienen su primer encuentro con dicho tema.

Describir las formas de pensamiento algebraico temprano en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de Educación Primaria como consecuencia de las intervenciones educativas implementadas. A continuación, se presenta el marco teórico, el problema de investigación y antecedentes, seguido del método de investigación y diseño instruccional. En la siguiente sección se analizan los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes a la tarea de evaluación propuesta. El documento concluye con unas reflexiones finales a modo de síntesis.

OBJETIVO ESPECÍFICO, MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El objetivo específico de esta comunicación es presentar resultados sobre las formas de razonamiento algebraico temprano (proto-algebraicas) manifestadas por alumnos de 5º curso de primaria que han participado en una intervención educativa centrada en el desarrollo del pensamiento proporcional. Dicha intervención sigue un modelo instruccional de tipo mixto en el que el profesor y los estudiantes estudian conjuntamente situaciones introductorias que ponen en juego los contenidos matemáticos pretendidos (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014).

En este artículo aplicaremos algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Tales herramientas son, las categorías de objetos matemáticos que propone el EOS, así como los niveles de algebrización de la actividad matemática introducidos en Godino et al. (2014), aplicando los tipos de procesos, medios de representación y grados de generalidad de los objetos matemáticos.

Tipos de objetos matemáticos

Desde la concepción antropológica de la matemática asumida por el EOS, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central. Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Las entidades materiales o inmateriales que intervienen en la práctica matemática, sustentando y regulando su realización, son los objetos matemáticos. El EOS propone los siguientes tipos de objetos primarios:

- *Situaciones-problema*: ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.

- *Lenguajes*: términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos*: entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición (número, punto, recta, media, función).
- *Proposiciones*: propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentos*: enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o para explicar los procedimientos.

En el EOS se dice que un objeto es extensivo si interviene en la práctica matemática como un caso particular, mientras que es intensivo si interviene como una clase o tipo de objetos; son las entidades resultantes de los correspondientes procesos de particularización y generalización.

Niveles algebraicos de razonamiento matemático

La necesidad de promover el razonamiento algebraico en los distintos niveles de Educación Primaria y Secundaria (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Chevallard y Bosch, 2012; Kieran, 2004; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011) requiere la identificación de los rasgos característicos del pensamiento algebraico, dado que dependiendo de cómo se conciba el álgebra escolar se tomarán decisiones relativas a su introducción temprana y las estrategias instruccionales a seguir.

En Godino et al. (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de los progresivos niveles de algebrización. Los criterios utilizados para delimitar los distintos niveles se basan en la clase de objetos y procesos matemáticos involucrados: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

- *Nivel 0*. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- *Nivel 1*. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de los naturales y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2*. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.
- *Nivel 3*. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax+B=Cx+D$.

Los niveles de algebrización se atribuyen a la actividad matemática que desarrolla el sujeto que resuelve un problema o tarea matemática, no a la tarea matemática en sí, que puede ser resuelta de distintas maneras, poniendo en juego una actividad algebraica diferente.

La aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional.

Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) distinguen tres tipos de significados del objeto proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que además se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

El significado aritmético (nivel 0 de algebrización) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos. El significado proto-algebraico está centrado en la noción de proporción, de manera que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones se pueden calificar de proto-algebraicas y, por tanto, de nivel 1 de algebrización. Por otro lado, la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es proto-algebraica de nivel 2, según el modelo de Godino et al. (2014), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación (Ax=B).

En la última década, diversos autores (Bentley y Yates, 2017; Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015; Miyakawa y Winslow, 2009; Silvestre y Ponte, 2011) se han preocupado por analizar y proponer diseños didácticos apropiados para introducir la proporcionalidad en Educación Primaria. Miyakawa y Winslow (2009) presentan un estudio comparativo de dos modelos didácticos ampliamente usados en educación matemática, apoyados en el análisis de experiencias de enseñanza de iniciación a la proporcionalidad en el contexto de la semejanza de figuras. Silvestre y Ponte (2011) asumen en su experiencia didáctica la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional, lo que se consigue mediante la resolución de problemas en el contexto de la interacción social en pequeños grupos y la discusión colectiva con todo un curso. Por otro lado, Bentley y Yates (2017) comparan los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes de 12 años, cuando resolvían problemas de valor faltante de proporcionalidad, y concluyen que la instrucción basada en ejemplos resueltos (de reducción a la unidad) tuvo un gran impacto en la habilidad de los estudiantes para razonar proporcionalmente.

MÉTODO

Se trata de un experimento de enseñanza concebido en el marco de las investigaciones de diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008), las cuales, según (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013) se relacionan con la ingeniería didáctica (Artigue, 1989), aplicando en nuestro caso, el EOS como teoría base. En este trabajo, por razones de espacio, solo reportamos resultados de la fase de evaluación de un primer ciclo de experimentación, aplicando un método mixto, cuantitativo y cualitativo (Castro y Godino, 2010).

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La población sobre la que se centra la investigación son estudiantes de primaria que tienen su primer encuentro con situaciones-problema que ponen en juego la noción de proporcionalidad. La muestra objeto de estudio está constituida por un grupo de 23 estudiantes (13 niñas y 10 niños) de quinto curso de Educación Primaria (10-11 años de edad). La experiencia se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de Educación Infantil y Primaria durante el curso 2016-2017. La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro escolar y de los docentes de este.

Las sesiones de investigación se desarrollaron en el tiempo (50 minutos) y la distribución habitual de la clase, durante las dos últimas semanas del curso académico. De manera previa a las sesiones, los alumnos no habían trabajado con problemas que proporcionasen a los alumnos un concepto intuitivo de proporción. Después de presentar el contexto en la primera sesión, la investigadora facilitó a los alumnos una hoja de trabajo con las tareas introductorias, que se trabajarían durante las siguientes dos sesiones. En el diseño de las tareas se tuvieron en cuenta las recomendaciones de diversas investigaciones que sugieren un primer acercamiento intuitivo al concepto de proporcionalidad, recurriendo al uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. Así, por medio de cuestiones dirigidas, iniciamos el razonamiento proporcional a través de razones sencillas (doble, mitad, etc.) y el reconocimiento de la propiedad aditiva de la función de proporcionalidad, por medio del registro tabular. El alumno debía reflexionar sobre si una situación es de tipo proporcional o no, movilizando el razonamiento proporcional en contextos en los que la constante de proporcionalidad no es necesariamente un número entero. En la segunda parte de la hoja de trabajo, se introdujo también el concepto de constante de proporcionalidad a través de las tablas de proporcionalidad, y el procedimiento de reducción a la unidad.

Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuya comprensión se perseguía desarrollar con cada tarea.

Instrumento de recogida de datos

La situación-problema planteada a los estudiantes se basa en la tarea de ampliación del puzle de Brousseau (1997). Esta tarea forma parte de una secuencia de 65 lecciones experimentadas por Guy y Nadine Brousseau sobre fracciones y números decimales (Brousseau, 1997, Capítulo 4).

> En la figura se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Queremos construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. ¿Sabrías que medida hay que darle a cada lado? Explica cómo lo has obtenido.

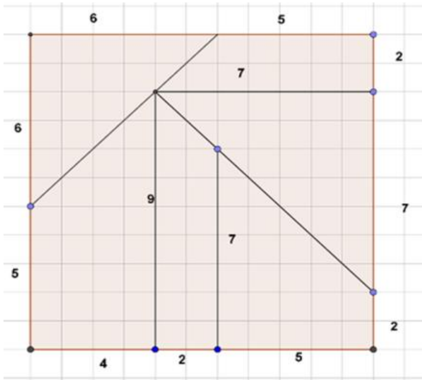


Figura 1. Situación del puzle

RESULTADOS

Métodos de solución y niveles de algebrización

Para evaluar el grado de aprendizaje logrado por los estudiantes se definieron dos variables cuantitativas y variables cualitativas.

Las variables cuantitativas refieren al grado de corrección de la respuesta y al grado de corrección de las explicaciones dadas por los estudiantes en las tareas de evaluación. En ambos casos se ha asignado una puntuación de 0, 1, o 2 puntos si la respuesta es incorrecta (o el alumno no responde), parcialmente correcta o correcta, respectivamente. Se consideró correcta la solución cuando el alumno obtuvo apropiadamente las cinco medidas desconocidas en el puzle de cartulina y parcialmente correcta cuando determinó adecuadamente un mínimo de tres medidas de este. En otro caso, se consideró incorrecta. Por otro lado, una explicación se calificó como correcta siempre que la secuencia argumentativa se refiriese a la relación de proporcionalidad entre las medidas de la maqueta y las medidas del puzle en cartulina; parcialmente correcta cuando hacía referencia a la multiplicación por la constante sin argumentar de qué manera se había obtenido o por qué se procedía de esta forma; e incorrecta en otro caso.

Las variables cualitativas refieren, con base a nuestro marco teórico, a la presencia en la práctica matemática de determinados tipos de objetos, como son, argumentos, procedimientos, tipos de lenguaje y representaciones, así como el grado de generalidad logrado. La Tabla 1 resume las frecuencias en el grado de corrección de la solución y justificación a dicha tarea.

Tabla 1. Frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de las variables vinculadas al grado de corrección

Grado de corrección	Solución (n=23)	Justificación (n=23)
No contesta	3 (13,04)	8 (34,78)
Incorrecta	4 (17,39)	2 (8,70)
Parcialmente correcta	7 (30,43)	10 (43,48)
Correcta	9 (39,13)	3 (13,04)

El procedimiento más seguido por los alumnos para resolver la tarea es el de reducción a la unidad; es decir, encontrar la razón unitaria: nueve de los veinte alumnos lo usaron de forma exclusiva y cuatro más lo combinaron con estrategias aditivas. Un ejemplo de ello puede verse en la Figura 2.

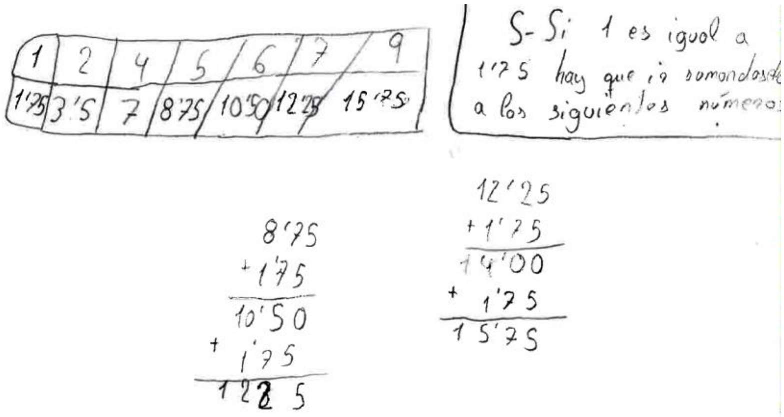


Figura 2. Estrategia mixta de resolución

Casi todos los alumnos (dieciocho de los veinte que respondieron a esta tarea) usaron el registro tabular, pero de ellos, solo dos lo utiliza de forma exclusiva como respuesta a la tarea sin especificar cómo habían llegado a completar la tabla. La Tabla 2 recoge los tipos de procedimiento empleados por los alumnos y sus frecuencias.

Tabla 2. Tipos de procedimiento y frecuencias absolutas y porcentajes

Tipos de procedimiento	Frecuencias (n=20)
Aritmético	4 (20)
Tabular	2 (10)
Reducción a la unidad	9 (45)
Aritmético y reducción a la unidad	4 (20)
Proporciones	1 (5)

De los veinte alumnos que habían resuelto la tarea, 5 (es decir, la cuarta parte) no lograron justificar la forma en que habían obtenido las medidas del puzle. Dos alumnos que usaron una argumentación de orientación exclusivamente aritmética lo hicieron de forma incorrecta. En ambos casos los estudiantes interpretaron que el puzle en realidad era el doble del puzle en la maqueta, y, por tanto, las medidas deberían ser el doble. Por otro lado, la mayoría de los alumnos que justificaron apropiadamente el proceso seguido para obtener las medidas del puzle en cartulina, (9 de los 15) hicieron referencia al factor de proporcionalidad (escala) que habían averiguado a partir de las medidas conocidas correspondientes al puzle en la maqueta (lado de 4 cm) y su respectiva en el puzle en cartulina (lado de 7cm). Las demás distancias las obtuvieron después multiplicando por dicho factor (1,75), tal y como muestra el ejemplo de solución en la Figura 3. Se consideraron como incompletas aquellas justificaciones del tipo “multiplico por 1,75”, donde no se explicitaba la forma de obtener la constante de proporcionalidad, ni el significado de los números que intervienen.

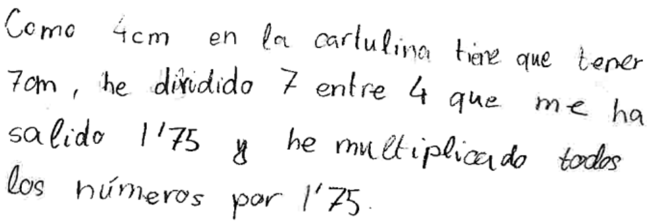


Figura 3. Justificación a la tarea del puzle

Llama la atención la respuesta dada por un alumno (Figura 4) en la que cada medida se obtiene como valor faltante en una proporción, establecida entre las medidas del puzle en la maqueta y el puzle que se pretende construir en la realidad, siendo en cada caso una de las razones 4/7. Además, dicho alumno recurre a un simbolismo que no se le había introducido antes en clase (según confirmó el tutor del grupo).

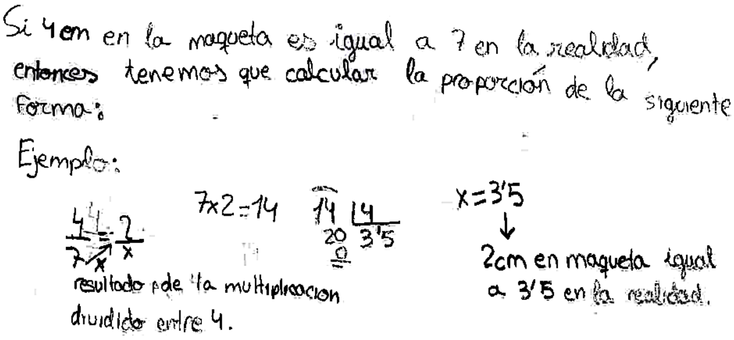


Figura 4. Fragmento de la solución propuesta por un alumno basada en razones

Cuatro alumnos ofrecieron una justificación que hemos calificado de tipo "mixto". En ella obtienen la medida del puzle en cartulina que corresponde a 1 cm del puzle maqueta, pero no recurren a este valor como factor. A veces obtienen dicho valor de forma directa dividiendo los 7 centímetros del real entre los 4 centímetros de la maqueta, y en otras ocasiones lo obtienen después de dividir por la mitad dos veces la medida 7 cm que corresponde a los 4 cm de la maqueta (Figura 5).

Casi todos los alumnos, 18 de los 20 que realizaron la tarea, usaron el registro tabular: 4 lo usaron de forma exclusiva y el resto de forma conjunta con el lenguaje natural y/o numérico. En estos casos, las tablas eran utilizadas para organizar los datos obtenidos o justificar la relación entre las medidas. Además, el alumno que resolvió la tarea del puzle por medio de proporciones recurrió al símbolo literal "x" para representar el valor faltante en cada proporción (Figura 4).

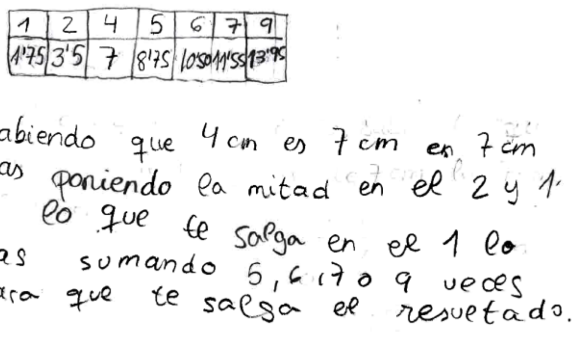


Figura 5. Justificación con orientación mixta

Respecto al grado de generalidad de la actividad matemática desarrollada, es importante notar que el 55% de los alumnos que efectuaron la tarea, consiguieron expresar la regla general que les permitía obtener las distintas distancias en el puzle de cartulina a partir de las correspondientes distancias en el puzle modelo, a través de la constante de proporcionalidad. Un 25% incluyeron de forma exclusiva una tabla donde se relacionaban las medidas sin desarrollar ninguna otra práctica discursiva, y un 15% trabajaron con números particulares con relaciones doble-mitad infructuosas (puede verse el ejemplo en la Figura 6).

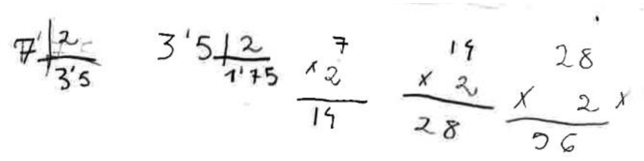


Figura 6. Solución incorrecta de tipo aritmético

Nivel de algebrización

Para determinar el nivel de algebrización de la actividad desarrollada, analizamos los tipos de objetos (números particulares, tablas, clase de medidas del puzle en cartulina), las transformaciones aplicadas sobre objetos (cálculos), las representaciones usadas (lenguaje natural, numérico, tabular o simbólico), y los procesos de generalización implicados. En base a los datos que hemos recogido y presentado de cada uno de estos aspectos, casi todos los alumnos, respondieron a la tarea por medio de reducción a la unidad y la mayoría expresaron la regla general en base a ésta. Cuando se reconoce la generalidad, se hace en lenguaje natural. Así, concluimos que la actividad matemática desarrollada por la mayoría de los alumnos (15 de los 20) se puede considerar proto-algebraica de nivel 1 de algebrización. La actividad desarrollada por el alumno recogida en la Figura 4 se considera de nivel 2 de algebrización, por cuanto interviene la variable expresada en lenguaje simbólico-literal, se reconoce la generalidad dada por la igualdad de razones y se plantean ecuaciones del tipo $\frac{4}{7}=\frac{A}{x}$, que se resuelven multiplicando en cruz, para cada medida *A* desconocida en el puzle a construir. Los cuatro alumnos que resolvieron de forma incorrecta la tarea realizaron una actividad aritmética (nivel 0 de algebrización) como en el ejemplo de la Figura 6.

CONCLUSIONES

El carácter algebraico de una práctica matemática no viene dada de forma exclusiva por el uso del simbolismo algebraico, sino que se reconoce en la presencia de ciertas formas de razonamiento. Como afirma Radford (2003), los estudiantes de los primeros niveles educativos pueden expresar tipos de objetos y procesos algebraicos a través de registros distintos del simbólico, en particular, pueden recurrir al lenguaje ordinario, gráfico, tabular o incluso gestual. El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que, partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido, vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico (Godino et al, 2014, p. 217).

Diversos autores (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Streefland, 1985) apoyan la pertinencia de una secuencia didáctica que permita avanzar desde un conocimiento de naturaleza intuitiva y cualitativa de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva que permita encaminar hacia el proceso de consolidación del razonamiento proporcional.

Con relación a la tarea del puzle que hemos usado en nuestra investigación, Miyakawa y Winslow (2009) afirman, “parece deducirse de los experimentos previos realizados por Brousseau y colegas que, a pesar de la cuidada preparación en las lecciones previas, los estudiantes tienden de manera espontánea a construir las piezas mayores añadiendo 3 cm a todos los lados conocidos (ya que 7 cm es 3 cm más que 4 cm).” En nuestro estudio, no hemos encontrado evidencias de este tipo, posiblemente porque la realización de esta tarea fue precedida de otras introductorias sobre proporcionalidad aritmética. La estrategia de resolución predominante fue la reducción a la unidad. Algunos estudiantes identificaron el valor unitario después de haber realizado ciertas operaciones aritméticas (dividir por dos de forma sucesiva). En otras ocasiones, recurrían a una estrategia aditiva para determinar las medidas, sumando el valor unitario tantas veces como fuese preciso.

En relación con los objetivos de nuestra investigación, el análisis global de la experiencia realizada nos permite reconocer formas de pensamiento proto-algebraico en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de Educación Primaria cuando se enfrentan a una tarea de proporcionalidad directa. El uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogénea y aditiva de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico. Por otro lado, un modelo de colaboración entre profesor y estudiantes, en relación a la situación-problema que se pretende resolver y el contenido matemático puesto en juego, permite identificar y resolver conflictos semióticos, aumentando el grado de implicación del alumnado y la apropiación progresiva de los objetos implicados en la proporcionalidad.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía) y dentro del Grupo «S119-Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Referencias

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook on research of teaching and learning* (pp. 296-333). New York: McMillan.

Bentley, B. y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education, 4*, 1297213.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (p. 99). Ciudad Real: SEIEM.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J. L. Dorier, y A. Robert (Coord.), Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, special issue, 13-33.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *CERME 9, TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research*. (Versión ampliada en español: Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Universidad de la Sabana, Colombia).

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Lim, K. H. (2009). Burning the candle at just one end: Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(8), 492-500.

Martínez, S., Muñoz, J. M., Oller, A. M. y Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En C. de E. de la J. de C. y León. (Ed.), *Congreso las Nuevas Metodologías en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*, 199-218.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, P. y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics *Education Research Journal, 26*, 257-277.

Ruiz-Munzón, N. Bosch, M. y Gascón (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*. (pp. 743-765). III Congreso Internacional sobre la TAD.

Silvestre, A. I. y Ponte, J. P. (2011) Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 137-158.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards... a theory) part II: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Wilhelmi, M. R. (2017). Didáctica del álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM.

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

Exploring conceptions of students to be early childhood teachers about mathematics teachers' professional knowledge

Cárdenas, J. A.[a] y Cáceres, M. J.[b]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

Este trabajo analiza si los Estudiantes para Maestro (EpM) de Educación Infantil (EI) se consideran capacitados para enseñar Matemáticas en EI antes de su formación en Didáctica de Matemáticas y las razones que justifican sus respuestas con relación a aspectos del conocimiento profesional. Los resultados muestran los EpM asociaban el nivel de conocimiento matemático que debe dominar un maestro de EI con el contenido matemático a enseñar; los EpM que no se sentían capacitados para enseñar matemáticas en EI manifiestaron que se debía a la falta de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, mientras que los EpM que se sentían capacitados indicaron que se debía al dominio del contenido matemático o al gusto por la enseñanza o las matemáticas; la dificultad de enseñar matemáticas en EI la asociaron a la complejidad de la matemática en sí, en las estrategias de enseñanza y en las características y cualidades que debe tener un maestro de EI.

Palabras clave: *formación inicial, educación infantil, maestros, didáctica, matemáticas.*

Abstract

This paper analyses if the Students to be Early Childhood Education Teachers (ECET) consider themselves qualified to teach Mathematics in Early Childhood Education before their training in Mathematics Education. Also the reasons that justify their answers regarding professional knowledge aspects. The results show that the Student to be ECET linked the required ECET mathematical knowledge level with the mathematical content to be taught; those who did not feel capable of teaching mathematics in Early Childhood Education showed that it was due to a lack of knowledge about the teaching of mathematics, while those that felt they were sufficiently trained indicated that it was due to their mastery of the mathematical content or the fact they like either teaching or mathematics; The difficulty of teaching mathematics in Early Childhood was associated to the complexity of the subject, of the teaching strategies as well as to the specific characteristics and competences that an ECET should have to teach mathematics.

Keywords: *initial training, early childhood education, teachers, didactic, mathematics*.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que se han realizado sobre el conocimiento profesional del docente en Matemáticas han buscado identificar y caracterizar el pensamiento del profesor, tanto en formación como en activo. El interés de estos trabajos está en que a partir de sus resultados es posible identificar implicaciones en la formación del profesorado de matemáticas. La mayor parte de estos estudios se han realizado con docentes y estudiantes para ser docentes de matemáticas en Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato, sin embargo, son escasos los estudios que se han desarrollado con EpM y maestros de Infantil.

Cárdenas, J. A. y Cáceres M. J. (2018). Concepciones de los estudiantes para maestro de educación infantil sobre el conocimiento profesional del docente de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 191-200). Gijón: SEIEM.

En este trabajo se pretende conocer si los EpM de EI se consideran capacitados para enseñar Matemáticas a los niños de las primeras edades escolares antes de cursar asignaturas de Didáctica de las Matemáticas y clasificar las razones que justifican sus respuestas en función de los aspectos propios del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

REFERENTE TEÓRICO

El Conocimiento del Maestro de matemáticas de Educación Infantil

Hace algunos años, en la sociedad se tenía la idea de que para trabajar con niños pequeños se requería de mucha paciencia y poca preparación sobre algún contenido determinado, dado que lo importante era mantener a los niños entretenidos y vigilados, por lo que se demanda una formación sobre un conocimiento técnico (Zabalza y Zabalza, 2011). Según este mismo autor, esta visión cambia cuando se habla de la formación de maestros de Educación Infantil.

En este sentido la literatura sobre formación de maestros de matemáticas y, en concreto, para los maestros de EI, debe responder a cuestiones problemáticas propias de su profesión (Blanco, 2002; Llinares, 1999; Sierra y García, 2015). Es decir, un maestro de matemáticas debe tener un conocimiento matemático específico de la labor de profesor de matemáticas, en el que interviene el contexto en que vaya a ser utilizado y los procesos de su enseñanza y aprendizaje. A partir del modelo de Shulman (1986) diversos autores han tratado de describir y caracterizar cuál debe ser el conocimiento de los estudiantes para maestro de Matemáticas y han distiguido siempre dos grandes dominios: el *Conocimiento de las Matemáticas* y el *Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático* (Blanco, 1991; Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Carrillo, Contreras y Flores, 2013). El interés en este tema ha dado lugar al desarrollo de diversos los modelos, por ejemplo, Knowledge Quartet –KQ (Rowland, 2014); Mathematical Knowledge for Teaching –MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008) y Mathematics Teachers Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), la perspectiva socio cultural de Sfard (2008) y la resolución de problemas (Chapman, 2015).

En este trabajo se considera el modelo MTSK, que avanza en el modelo de Shulman (1986), refinado por Ball et al. (2008), y considera seis subdominios, tres para el *Conocimiento Matemático* (MK): Conocimiento de los temas, Estructura de la Matemática y Práctica de la Matemática; y otros tres para el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK): Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Características del aprendizaje de las Matemáticas y Estándares de Aprendizaje. Además, incluye un tercer dominio, el de las *Creencias y Concepciones* “como elementos que permean y definen la organización y el uso del conocimiento” (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes, et al., 2015, p.1807).

De forma resumida, el Conocimiento de los temas (KoT) considera la matemática escolar, sus fundamentos matemáticos, los procedimientos, y las diferentes formas de representación de los diversos temas, aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático, es decir, un conocimiento del contenido que va más allá de lo que los estudiantes deben aprender; el Conocimiento de la estructura matemática (KSM) integra las relaciones entre conceptos tanto superiores como inferiores; el Conocimiento de la práctica matemática (KPM) incluye las diferentes formas de demostrar, criterios de generalización, significado de definición, axioma, teorema, así como la sintaxis matemática. Por otro lado, el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) contempla el conocimiento en profundidad de estrategias y teorías o recursos, de enseñanza de matemáticas ya sean institucionales o personales; el Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) considera cómo se aprende, teorías de aprendizaje, fortalezas, dificultades, obstáculos y errores asociados a los diversos contenidos, expresiones o ideas intuitivas propias de los estudiantes; y el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KSML) se ocupa del conocimiento de las directrices oficiales o de referentes externos como asociaciones profesionales, opiniones de expertos con gran experiencia, investigaciones o la propia práctica docente (más detalle en Muñoz-Catalán et al., 2015; Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Carrillo et al., 2013).

Muñoz-Catalán et al. (2015, p.1815) indican que "cada etapa educativa, incluyendo Educación Infantil, requiere de un conocimiento matemático especializado para la enseñanza sólido, muy específico y fuertemente enraizado en la propia disciplina", de esos aspectos propios de cada etapa educativa debe ocuparse la formación universitaria de los futuros docentes.

Concepciones y creencias de los estudiantes para maestro en la Educación Matemática

Las concepciones y las creencias son verdades personales que sirven de filtro, ayudan a la organización de conceptos e influyen sobre el comportamiento (Gil, Blanco y Guerrero, 2005), algunos autores distinguen estos dos términos al indicar que las concepciones se refieren a algo mucho más cognitivo, mientras que las creencias son resultado de un componente afectivo (Ponte, 1994, citado por Dodera et al., 2008), en otros casos no hacen distinción entre estos términos. Para los efectos de este estudio, no es de interés distinguir entre concepciones y creencias, por lo que indistintamente de los posicionamientos teóricos haremos referencia a concepciones.

Las concepciones que se han formado los EpM funcionan como organizador y filtro de la información que han recibido sobre y hacia las matemáticas, por ello influyen en su visión hacia esta área de conocimiento y su enseñanza, así como en lo que pueden esperar que sea su formación, y pueden afectar a sus posibilidades de actuación y comprensión del conocimiento profesional (Autor, en prensa). Estas concepciones se pueden haber formado en el sistema escolar, a partir de experiencias personales, de observaciones de la vida cotidiana, o de la influencia de los medios de comunicación y la cultura (Gil et al., 2005). Por ejemplo, una concepción bastante generalizada es pensar que las matemáticas son difíciles.

Las concepciones son persistentes y difícilmente modificables, suelen guardar un grado de coherencia interna con algún esquema conceptual o valoración personal y, en muchas ocasiones, son compartidas por un grupo social (Gil et al., 2005; Mato, Chao y Carretero, 2015). Estudios con EpM de primaria han apreciado que sus concepciones determinan la imagen que ellos tienen de las matemáticas en el aula, lo que influye en sus actitudes y emociones, primero como estudiantes, pero más adelante como maestros, e incide en sus conductas como maestros y en el aprendizaje de sus alumnos (Blanco, Guerrero y Caballero, 2011).

METODOLOGÍA

La investigación se llevó a cabo con 82 EpM de la asignatura Matemáticas y su Didáctica para EI, de la Universidad de Salamanca, asignatura de 6 créditos ECTS que se imparte en el 2º semestre del 2º curso del grado, única asignatura obligatoria en la que reciben formación sobre las matemáticas y su enseñanza. Los EpM cumplimentaron una encuesta, facilitada a través de Google Forms, después de la primera sesión de clase. El cuestionario empleado fue el propuesto por Mato, el al. (2015) y consta de dos partes: una en la que se recogen aspectos de tipo sociológico y otra en la que se plantean cuestiones referidas a las concepciones que se tienen respecto a las Matemáticas y su enseñanza en EI por medio de 7 preguntas, de las cuales dos eran abiertas y el resto cerradas, en las que se pedía justificar su elección en 4 de los casos.

El trabajo sigue una metodología de tipo mixto, en la que se incorporan la descripción de los resultados a partir de la frecuencia relativa de las respuestas que fueron seleccionadas por los EpM y el análisis de contenido de las justificaciones que escribieron a cada una de las respuestas, en este documento se presentan únicamente los resultados obtenidos de las respuestas a tres preguntas de la segunda parte de dicho cuestionario que se corresponden con el objetivo de este trabajo (Figura 1).

1. ¿Cuántas matemáticas debe saber un maestro en educación infantil?
   a. Con saber algo de matemáticas es suficiente
   b. Con dominar las matemáticas de primaria es suficiente
   c. Con dominar las matemáticas de secundaria es suficiente
   d. Con dominar las matemáticas de bachillerato sobra
   e. Otras matemáticas

   Justifica tu respuesta anterior
2. ¿Estas preparado para enseñar Matemáticas en Educación Infantil?
   a. Si
   b. No

   Justifica tu respuesta anterior
3. ¿Crees que ser buen profesor de matemáticas en Educación Infantil es fácil?
   a. Si
   b. No

   Justifica tu respuesta anterior

Figura 1. Preguntas formuladas en segunda parte del cuestionario de Mato et al. (2015) en los lugares 1, 2 y 4

En el análisis de contenido se emplean los dominios y subdominios del modelo MTSK como categorías de análisis, y las unidades de análisis que se toman de las justificaciones dadas por los EpM son aquellas que hacen alusión directa, aunque sea de una manera vaga[1], a alguno de los aspectos que definen cada dominio o subdominio. Los EpM se numeraron desde el 1 al 82, de manera que EpM31 indica que nos referimos al EpM 31. A modo de ejemplo, el EpM71 indicó que no se sentía preparado para enseñar matemáticas en EI y, su justificación fue:

> EpM71: […] pero no estoy segura de saber hacerlo [llevar a la práctica sesiones de matemáticas] de la manera más adecuada por lo que en esta asignatura espero aprender las distintas metodologías más ajustadas para esta edad, así como los aclarar los objetivos y contenidos que se deben trabajar.

El EpM71 presenta indicios de falta de conocimiento, más no ausencia, sobre distintas metodologías [para enseñar matemáticas] en EI (KMT), y los objetivos [de enseñanza y aprendizaje] (KMLS).

Aquellas justificaciones que eran demasiado generales, y de las cuales no fue posible identificar algún aspecto que hiciera alusión a alguno de los dominios o subdominios del MTSK y no aportaba información relevante, no se presentan en este documento.

Este análisis se hace con la finalidad de identificar en qué aspectos del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, según el modelo MTSK, se basan las justificaciones por las que los EpM de EI consideran que pueden o no enseñar matemáticas en EI antes de su formación en Didáctica de las Matemáticas.

Este estudio forma parte de una investigación más amplia que se está llevando a cabo entre estudiantes de dos universidades, antes y después de su formación en Didáctica de las Matemáticas para EI, donde se contrastarán los resultados obtenidos en las siete preguntas del cuestionario.

RESULTADOS

Para cada una de las preguntas formuladas se presentan, en primer lugar, los resultados obtenidos en las respuestas de los EpM de forma descriptiva y, en segundo lugar, la clasificación de las justificaciones dadas a cada una de ellas de acuerdo a los dominios y subdominios considerados en el modelo MTSK.

¿Cuántas matemáticas debe saber un Maestro de Infantil?

Las respuestas que dieron los EpM indican que la mayoría de ellos considera que un maestro de EI ha de saber más matemáticas que sus alumnos (Figura 2). La mayoría (36,6%) indicaron que el nivel de conocimiento matemático que debe tener un maestro de EI son “Otras matemáticas” que se corresponde con el máximo nivel de conocimiento que se ofrecía como repuesta en el cuestionario. Tan solo un 13,4% indicó que con conocer algunas matemáticas era suficiente.

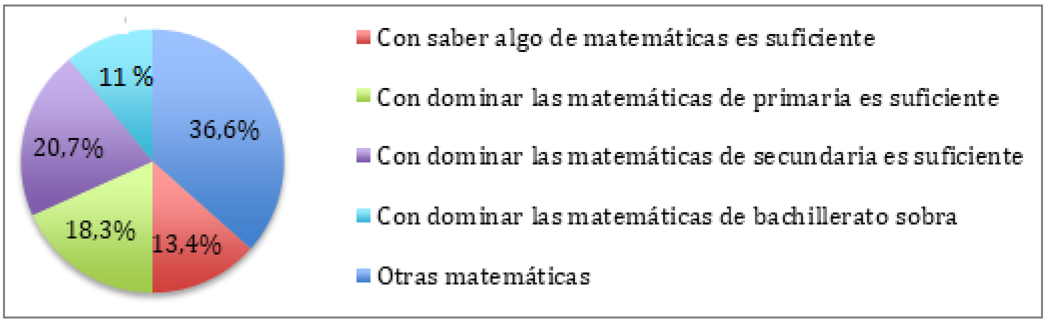


Figura 2. Nivel de matemáticas que opinan los EpM que debe conocer un Maestro de EI

Las justificaciones que dieron los EpM para determinar el nivel de matemáticas que debe saber un Maestro de Infantil no dependían de la respuesta dada, en su mayoría las justificaciones fueron comunes entre los diferentes niveles. En ellas encontramos que independientemente del nivel conocimiento de matemáticas que los EpM consideraban necesario, la mayoría de ellos coincidían en que el nivel seleccionado se debía a la asociación que se hace entre éste y el conocimiento matemático que se enseña en EI (MK), pero, en ocasiones, también hicieron alusión a la necesidad de saber cómo se enseña matemáticas (MKT).

Entre algunas de estas manifestaciones encontramos que dicho conocimiento hacía referencia solamente a los contenidos que se han de enseñar a los alumnos de infantil (EpM12) limitando ese conocimiento al KoT. En otras justificaciones los EpM reconocieron que hay un conocimiento que va más allá del KoT y que este conocimiento ayuda a la enseñanza de las matemáticas (EpM27); a la consecución de los objetivos marcados en el currículo (EpM60), KMLS y brinda un estado de comodidad al profesor (EpM9) – Dominio afectivo.

EpM12: Considero que la enseñanza de las matemáticas en infantil es básica y creo que con tener claros los conocimientos del nivel de primaria es suficiente para transmitir al alumnado los conocimientos específicos de Educación infantil, ya que hay aspectos de matemáticas de la etapa de secundaria y superiores que no nos sirven para la enseñanza en Educación infantil.

EpM27: En infantil no necesitamos saber muchas matemáticas pero creo que debemos saber matemáticas a nivel secundaria ya que cuanto más sepamos más rica será la explicación para los más pequeños.

EpM60: Considero que es necesario dominar los máximos conocimientos posibles para así ayudar a alcanzar a nuestros alumnos y alumnas los objetivos marcados en nuestro currículum.

EpM9: Creo que el maestro debe de tener conocimientos matemáticos superiores para sentirse más cómodo

Otra justificación que dieron los EpM y que presentaron haciendo referencia, o no, al conocimiento matemático es el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, donde se indica que, más que el conocimiento matemático es necesario saber cómo enseñar matemáticas (EpM21) KMT.

EpM21: En infantil no se necesita saber muchas matemáticas, solo con saber la base inicial sobra, el problema está en cómo enseñarlas.

¿Estas preparado para enseñar Matemáticas en EI?

La mayoría los EpM indicaron que no se sentían preparados para enseñar Matemáticas en EI y justifican dicho sentimiento con alusiones a la complejidad de las matemáticas y la falta de conocimientos, ya sea sobre cómo se enseñan las matemáticas (MKT). Mientras que los EpM que manifestaron que sí se sienten capaces de enseñar justificaron este sentimiento con alusiones a aspectos propios del dominio de contenidos matemáticos (MK) o a cuestiones afectivas.

Entre las manifestaciones que hicieron los EpM de porqué no se sentían preparados para enseñar Matemáticas en EI en ese momento, se refirieron al desconocimiento sobre metodologías, estrategias y recursos para enseñar matemáticas (EpM15) KMT o a la inseguridad de implementar estrategias personales para la enseñanza de las matemáticas (EpM68). Así mismo, se encontraron manifestaciones en las que se hacía referencia a la complejidad de las matemáticas (EpM68. Más escasas fueron las manifestaciones en que se mencionó desconocimiento (EpM70) o conocimiento (EpM4) sobre el conocimiento matemático a enseñar, MK.

EpM15: Considero que no estoy preparada para enseñar matemáticas ya que aún no tengo los recursos y conocimientos necesarios para transmitir de manera eficaz y significativa los conocimientos que se deben enseñar en esta etapa.

EpM68: Considero que no estoy preparada porque nunca me han enseñado a cómo hacerlo y no es algo fácil. Es cierto que puedo tener ideas y recursos, pero no sé si me valdrían frente al aula, es necesaria la puesta en práctica para poder ver el resultado. Además, creo que es un contenido muy complejo en el aula.

EpM70: Me falta […] recordar muchos aspectos teóricos básicos de las matemáticas que se me habrán olvidado con el paso del tiempo.

EpM4: no estoy preparada para enseñar matemáticas en educación infantil porque, aunque yo domine las matemáticas, todavía no sé las técnicas necesarias para enseñarlas.

Algunos EpM aludieron en sus justificaciones al desconocimiento sobre los objetivos de aprendizaje KLMS y sobre el contenido que se debía enseñar (EpM42) KoT-KLMS.

EpM42: No, por eso espero que esta asignatura me oriente para saber enseñar en Educación Infantil y conocer más a fondo las metodologías, contenidos y objetivos.

En las justificaciones que dieron los EpM que sí se sentían preparados para enseñar Matemáticas en EI, hubo manifestaciones de tener conocimiento sobre los contenidos matemáticos a enseñar (KoT), así como de tener conocimiento (EpM79) o desconocimiento (EpM80) sobre cómo enseñar matemáticas KMT, aunque la mención a aspectos propios del KMT fue escasa.

EpM79: Creo que estoy preparada, a partir de realizar las primeras prácticas he podido observar en el aula cómo se trabajan distintos conceptos matemáticos a través de experiencias reales, diálogos, fichas... aunque soy consciente de que me queda mucho por aprender para llevarlo a la práctica de la manera más adecuada.

EpM80: Pienso que tengo la base, es decir, que tengo algunos conocimientos de matemáticas pero que aún no sé enseñarlos.

Otros EpM justificaron el sentirse capacitados para enseñar matemáticas en EI gracias a cuestiones más de tipo afectivo, tales como su gusto por las matemáticas (EpM35), la enseñanza (EpM72), ver cómo otros aprenden gracias a él y su deseo/motivación por aprender a enseñar (EpM22).

EpM35: Porque me gustan las matemáticas.

EpM34: Porque quiero aprender a enseñar las matemáticas

EpM72: a mi me gusta mucho enseñar mis conocimientos y que ellos sepan ser autónomos

EpM22: Sí, porque estoy preparada para enseñar Matemáticas debido a mi gran motivación por aprender y posteriormente enseñar a los niños.

¿Crees que ser buen profesor de Matemáticas en Educación Infantil es fácil?

Todos los EpM indicaron que no es fácil ser buen profesor de Matemáticas en Infantil. Las razones con las que los EpM justificaron su respuesta se refieren a la dificultad que tiene el conocimiento matemático en sí, a su enseñanza y al resultado de este proceso. También aludieron a cuestiones más de tipo afectivo, como las características y cualidades del maestro de EI.

Entre las justificaciones que hicieron los EpM se evidencia que cuando los EpM referían a la dificultad en el conocimiento matemático, KM, se aludía a creencias sobre las matemáticas en sí, afirmando que las matemáticas [en educación infantil] son difíciles, complejas y abstractas (EpM79). También hicieron referencia a la necesidad de tener un buen dominio sobre las Matemáticas de Infantil (EpM31) y al ser capaces de resolver las dudas de sus alumnos (EpM60).

EpM79: Pienso que no ha de ser fácil, los conceptos matemáticos en comparación a otros son a veces abstractos y difíciles de entender para el alumnado de estas edades tempranas […].

EpM31: No porque tiene q tener los conocimientos muy claros a la hora de enseñar.

EpM60: Ser buen profesor es necesario para poder ser capaces de apreciar la diversidad de nuestro alumnado y resolver sus dudas.

Otra dificultad que se puso de manifiesto está en el conocimiento pedagógico del contenido donde hay una asociación entre las matemáticas como área difícil, compleja y abstracta y algunas concepciones sobre el desarrollo evolutivo del niño y su aprendizaje hacia las matemáticas. En él se suscitaba la dificultad de enseñar matemáticas de infantil a niños de estas edades porque hay que iniciar de cero (EpM70), o porque ellos no pueden entender cuestiones abstractas (EpM5) o no tienen capacidad de comprensión (EpM6).

EpM70: Pienso que muchos conceptos de las matemáticas son abstractos, y difíciles de enseñar, sobre todo a los niños de infantil, ya que empiezan desde cero a aprender cosas sobre las matemáticas, y pienso que hay muchos conceptos que pueden resultar difíciles de comprender para algunos alumnos/as.

EpM5: Saber cómo enseñar matemáticas es complicado pero más si se trata de niños pequeños ya que su mente todavía no tiene la capacidad de entender las cuestiones más abstracta.

EpM6: Es muy difícil enseñar matemáticas y más en niños que no tienen la capacidad de comprensión.

Los EpM pusieron de manifiesto otras dificultades que se referían al conocimiento de diferentes metodologías, estrategias y recursos para enseñar matemáticas (EpM38) KMT. Así mismo, hicieron mención al reconocimiento de los conocimientos previos de los alumnos (EpM38), la adaptación a los ritmos de aprendizaje (EpM1) y a la consideración del desarrollo del niño (EpM74) como aspectos relevantes para enseñar matemáticas.

EpM38: No, ya que hay que partir de unos conocimientos previos y además de los medios y estrategias necesarias.

EpM1: […] por lo que hay que adaptarse también a los diferentes ritmos de aprendizaje de los niños.

EpM74: Tiene su dificultad como en cualquier otra asignatura, a la cual hay que dedicarle tiempo y adaptarlo a la edad que tenga el alumnado.

Algunos de los EpM que aludieron a dificultades sobre cómo enseñar matemáticas, indicaron también la dificultad de que sus alumnos aprendan las matemáticas que se les han enseñado lo cual consideramos que hace parte del KMT. Otros EpM indicaron que la dificultad para enseñar matemáticas en EI está en las características y cualidades del profesor (EpM51).

EpM51: Pienso que no es fácil ser buen profesor de matemáticas en general, pero en Educación Infantil tampoco porque [...] hay que tener muchos recursos y mucha paciencia [...].

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos en este estudio difieren de los obtenidos en el estudio realizado por Mato et al. (2015) en varios sentidos. En primer lugar, en dicho estudio la mayoría de los EpM indicaron que para enseñar matemáticas en EI era suficiente con saber lo que tienen que enseñar a sus alumnos o un poco más, sin embargo, en nuestro estudio menos de la mitad de los EpM indicó que bastaba con saber las matemáticas de un nivel inferior al de Educació Secundaria. Además, en sus justificaciones, nuestros estudiantes aludieron a un conocimiento matemático para la enseñanza, en el que algunos se limitan a mencionar un conocimiento propio del KoT y otros muestran indicios de ir más allá de dicho conocimiento dentro de MK; también hicieron referencia a la necesidad de un conocimiento matemático especial, que permite enseñar de manera adecuada, KMT.

Por otra parte, en nuestro caso, la mayoría de los EpM indicó que no se sentían capacitados para enseñar matemáticas. A este sentimiento aludieron la falta de conocimientos esencialmente en el KMT y en menor medida desconocimiento sobre el MK y el KMLS, a su vez, este sentimiento, en algunos casos se encuentra permeado por dos tipos de creencias según la clasificación de McLeod (1992, citado por Gil et al., 2005): creencias acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, y creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. Mientras que en el caso de Mato et al. (2015) la mayoría indicó que sí se sentían preparados y que este sentimiento surgía de la formación matemática que ellos poseían en ese momento. Y aunque la mayoría de nuestros EpM que aludieron a este mismo sentimiento, también lo justificaron gracias a sus conocimientos matemáticos, otros lo justificaron con sus conocimientos sobre aspectos del KMT y sobre su dominio afectivo hacia el gusto por las matemáticas y la enseñanza.

Finalmente, en cuanto a las respuestas que dieron los EpM sobre si ser buen profesor de matemáticas es fácil, en nuestro caso todos ellos manifestaron que no era fácil. A ello aludían dificultades o desconocimiento esencialmente sobre MK, KMT, KMLS, y a su vez, se hicieron explícitas sus creencias acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje. Además, consideramos importante mencionar que nuestros EpM aludieron a una serie de cualidades que consideran que ha de tener un maestro de EI. Siguiendo Krathwohl et al (1973, citado por Gil et al, 2005) estos aspectos los hemos clasificado entre lo que el modelo MTSK denomina el dominio afectivo. En cambio, en el estudio de Mato et al. (2015) la mitad de los alumnos consideran que es fácil ser maestro de Infantil, aludiendo a las matemáticas que se imparten en dicho nivel.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se ha utilizado el modelo MTSK para analizar las respuestas de EpM de EI sobre cuestiones relacionadas con el conocimiento profesional del docente de matemáticas antes de su formación en Didáctica de las Matemáticas. Mediante este análisis se percibió que, en ese momento, los EpM no se sentían capacitados para enseñar matemáticas en EI, tampoco consideraban que sea algo fácil, por ello consideraban necesario cursar la asignatura Matemáticas y su Didáctica para EI. Esta dificultad se demandaba generalmente desde las estrategias, metodologías y recursos para la enseñanza de las matemáticas. Otra cuestión que algunos EpM mencionaban como dificultad para enseñar matemáticas en EI era la percepción que se encierra de la matemática como área de conocimiento, considerándose esta como un ente abstracto, complejo y difícil, lo cual podría estar alejado de la matemática escolar que ellos enseñarán en EI. No obstante, es interesante ver como esta dificultad se atenuaba o se enmascaraba cuando se indagaba en si ellos se sentían capacitados o no para enseñar matemáticas en EI en ese momento, ya que esta era la principal razón por la que los EpM reclamaban que se les enseñe a enseñar matemáticas en EI.

Algunas limitaciones de este estudio son, por un lado, que todos los EpM pertenezcan a la misma Universidad y la influencia que pueda haber tenido su formación anterior en las asignaturas previas del grado; por otro lado, que en el estudio se hayan desechado respuestas muy generales en las que se podría profundizar en el futuro mediante entrevistas, con ellas también podrían precisar los resultados en cada uno de los subdominios del MTSK.

Finalmente, consideramos de interés determinar si las razones por las que los EpM enuncian solamente aspectos relacionados con el KoT, el KMT y el KLMS se debe a las preguntas formuladas o a que éste es el conocimiento que se tiene desde el punto de vista del alumno. Por ello se debería preguntar a estos mismos EpM por cuestiones similares a las analizadas para ver qué cambios se producen en sus justificaciones una vez cursada la asignatura y si en ellas se alude a aspectos propios de los demás subdominios del MTSK.

Notas

[1]Entendemos que el discurso puede ser bastante pobre debido a que los alumnos no han cursado ninguna asignatura de Didáctica de Matemáticas.

Agradecimientos

Los autores son miembros de la “Red8-Educacion Matemática y Formación de Profesores” (EDU2016-81994-REDT), financiado por Ministerio de Economía y Competitividad; de los proyectos de investigación “New Rules for Assessing Mathematical Competencies (RULES-MATH)” (2017-1-ESO1-KA203-038491), financiado por el programa Erasmus + y “Caracterización de la identidad profesional de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria” (2017/00111/001), financiado por la Universidad de Salamanca. y pertenecen al Grupo de Investigación Ciberdidact de la Universidad de Extremadura y al GIRME: Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa de la Universidad de Salamanca, según su filiación institucional.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanco, L. J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de Profesores de EGB y estudiantes para Profesores*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Badajoz.

Blanco, L. (2002). Educación matemática y formación inicial del profesorado de primaria, secundaria y bachillerato. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 43*, 173-179.

Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2011). Problem Solving and Emotional Education in Initial Primary Teacher Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology* Education, *7*, 281-292.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education 26*, 5, 1186-1195.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). *Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT, 3*(1), 19-36.

Dodera, M., A. Burroni, y M. Lázaro. (2008). *Concepciones y creencias de profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Dodera.pdf

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2,* 15-32.

Llinares, S. (1999). La investigación sobre el profesor de matemáticas. Aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula. Revista de enseñanza e investigación educativa, 10*, 153-179.

Mato, M. D., Chao, R. y Carretero, M. (2015). Concepciones del alumnado de Grado de Educación Infantil sobre las matemáticas. *Revista de estudios e investigación en psicología y educación*, *Extr(6)*, 27-31.

Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 1801-1817.

Rowland, T. (2014) The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. SISYPHUS *Journal of Education, 1*(3), 15-43. Recuperado de http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/issue/view/293

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing.* Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511499944

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-1.

Sierra, T. A. y García, F. J. (2015). ¿Cómo organizar la formación matematicodidactica del maestro de Educción Infantil? Propuesta de un recorrido de formación. *Educação Matemática Pesquisa, 17,* 767-790.

PRODUCCIÓN DE LA LENGUA DE LAS MATEMÁTICAS EN CLASE DURANTE LA INTERACCIÓN EN GRUPO

Production of the language of the mathematics in the classroom throughout group interaction

Chico, J.[a] y Planas, N.[a]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos resultados y reflexiones de un estudio sobre la relación entre el desarrollo de la lengua de las matemáticas en el aula y la interacción entre profesora y alumnos. Mediante métodos cualitativos de comparación constante, se analizaron discusiones en grupo en torno a la resolución de cinco problemas de generalización. Mostramos parte del análisis de cuatro segmentos transcritos de la discusión en una de las sesiones de clase. El objetivo es ilustrar el impacto en la lengua del aula y en particular en la lengua de las matemáticas de los alumnos de cuatro formas de interacción que, por su emergencia a lo largo de las sesiones, llamamos patrones: Iniciar-Solicitar, Iniciar-Compartir, Dudar-Solicitar e Iniciar-Dudar. Produjimos más patrones, pero con estos basta para concluir sobre la producción de la lengua de las matemáticas en la interacción.

Palabras clave: *lengua en uso de las matemáticas, datos de aula, interacción, discusión en grupo.*

Abstract

We present results and reflections of a research on the relationship between the development of the language of the mathematics in the classroom and the interaction between teacher and learners. We apply qualitative methods of constant comparison to analyse group discussions for the resolution of five problems of generalization. We report part of the analysis of four transcribed segments of the discussion in one lesson. The goal is to illustrate the impact on the language of the classroom and particularly on the language of mathematics of the learners of four forms of interaction that, based on the emergence throughout the lessons, can be named patterns: Initiating-Requesting, Initiating-Sharing, Querying-Requesting and Initiating-Querying. We produced more patterns, but these suffice to conclude about the production of the language of mathematics in the interaction.

Keywords: *language of mathematics in use, classroom data, interaction, group discussion.*

INTRODUCCIÓN

En Chico y Planas (2011), mostramos el análisis de datos de una pareja de alumnos durante la resolución de un problema de generalización en una clase de cuarto curso de secundaria. En esa colaboración establecimos las bases para el estudio del impacto de la interacción – en pareja y en grupo – en los procesos de aprendizaje matemático del aula, con avances que culminaron en Chico (2014). En esta ocasión, presentamos el análisis de la discusión en grupo de una sesión de clase del mismo cuerpo de datos, con el propósito de argumentar el impacto de ciertas formas de interacción en el desarrollo de la lengua en uso – discurso – de las matemáticas en el aula. De acuerdo con las teorías sociales en educación matemática (Planas, 2018), el estudio de la lengua de las matemáticas se asemeja al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas según se examine el uso de la lengua que hace el profesor o bien el de los alumnos. A pesar de lo prolífico de la línea de investigación sobre lengua en uso o discurso a nivel internacional (e.g., Ingram, Pitt y Baldry, 2015; Krummheuer, 2011), se han presentado relativamente pocos estudios al respecto en el contexto de

Chico, J. y Planas, N. (2018). Producción de la lengua de las matemáticas en clase durante la interacción en grupo. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 201-210). Gijón: SEIEM.

los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (algunas excepciones son García-Honrado, Fortuny y Ferrer, 2016; Sánchez y otros, 2015). A fecha de hoy, se conoce bien el papel mediador y potenciador de la interacción en la producción de la lengua de las matemáticas en clase (Planas, Morgan y Schütte, 2018); el reto es conocer cómo se produce dicha mediación, mediante qué formas de interacción y con qué efectos para tareas específicas. Al respecto, en esta comunicación se atiende el objetivo de identificar patrones de interacción en la construcción de la lengua de las matemáticas durante la resolución de tareas de generalización.

En lo que sigue, damos nuestra visión teórica de la interacción social, la lengua en uso en situaciones de aula y el aprendizaje matemático, así como de las relaciones entre estos tres constructos. Luego explicamos el diseño experimental del estudio con datos de clase y resumimos los métodos de análisis. Continuamos con la ejemplificación del análisis de cuatro segmentos de lengua en uso para mostrar cuatro patrones de interacción y su contribución a la producción de la lengua de las matemáticas de los alumnos. Concluimos con consideraciones sobre los próximos pasos a realizar en torno a la lengua del aula de matemáticas y su actualización en clase.

INTERACCIÓN SOCIAL, LENGUA EN USO Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

En la tradición del interaccionismo simbólico vinculada al socioconstructivismo (ver, e.g., Godino y Llinares, 2000), la noción de *interacción social* se ha utilizado para referirse a cualquier relación social y se ha entendido como proceso articulado de acciones individuales que da lugar a la construcción conjunta de significado. En las últimas décadas, las teorías sociales del aprendizaje y del discurso (Planas y otros, 2018) han reabierto el debate sobre la naturaleza simbólica de la interacción. A raíz de este debate más reciente, se ha delimitado el uso del término a las relaciones sociales más inmediatas. Con esto se ha querido diferenciar entre relaciones inmediatas en un contexto material y relaciones simbólicas cosificadas en la cultura. Un ejemplo del primer tipo serían las relaciones sociales observables en un aula, mientras que uno del segundo tipo serían las relaciones entre alumnos y profesores históricamente establecidas en la cultura escolar, que dejan de llamarse interacciones en la literatura. En nuestro trabajo tomamos la noción de interacción social en el sentido de relaciones concretas entre participantes que se encuentran en un mismo lugar –en clase de matemáticas–, imprescindibles para entender cómo opera la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Aunque la comprensión de los significados que se construyen en esta interacción no es reducible a la interacción cara a cara que se produce en el discurso hablado del aula, el estudio de este discurso es una ventana efectiva de acceso a la construcción conjunta de significado matemático (Planas, Arnal y García-Honrado, 2018). La investigación en educación matemática proporciona diferentes patrones de interacción en el aula de matemáticas. Voigt (1985) define el patrón extractivo y el de discusión como regularidades que estructuran la actividad matemática a partir de fases de la actividad asociadas a formas de interacción entre profesor y alumno. Sierpinska (1997) describe el patrón interrogativo y afirmativo según la reacción del profesor (cuestiona o valida) a intervenciones del alumno. Schwarz, Dreyfus, Hadas y Hershkowitz (2004) proponen tipos de diálogo (básico, prospectivo, conferencia, crítico y reflexivo) para guiar la interacción en clase. Aunque los patrones documentados contemplan la interacción entre profesor y alumno, las formas de organizar la actividad del profesor son las que reciben mayor atención. En esta investigación consideramos los patrones que son interactivamente constituidos por profesor y alumnos en el proceso de negociar y compartir significados matemáticos (Godino y Llinares, 2000). A nivel operativo, entendemos estas regularidades como la asociación entre acciones de los participantes orientadas a la comunicación matemática.

Desde la perspectiva de la noción de interacción social como relación de inmediatez material parcialmente observable en la lengua hablada del aula, tiene sentido plantear la construcción colectiva de significado en general y de discurso matemático en particular (Morgan, Craig, Schütte y Wagner, 2014). Si a esto añadimos la visión del aprendizaje como reconocimiento y uso de significados atribuibles a un discurso determinado, tenemos que a la vez que se produce construcción colectiva de la lengua de las matemáticas, se sientan las bases del aprendizaje matemático individual de los participantes en la interacción (Morgan, 2005). Como la construcción colectiva de significado es un proceso, el aprendizaje individual es también un proceso que se va generando en la interacción (Planas, 2018). De acuerdo con esto, consideramos el aprendizaje matemático como resultado potencial de la interacción en entornos de uso de la lengua de las matemáticas y de significados asociados a la apropiación de la cultura escolar. Hablamos de resultado potencial porque la interacción con otros provee situaciones de acceso a una variedad de significados y discursos sin que esto implique necesariamente que se reconozcan y reconstruyan aquellos propios de la cultura de la matemática escolar. El papel mediador de la interacción en el aprendizaje, con potencial transformador de la lengua de las matemáticas del alumno, es un supuesto básico que adoptamos de las teorías sociales del aprendizaje matemático. Al respecto, la interacción no es importante en sí misma; su importancia para el aprendizaje radica en las oportunidades que ofrece a los alumnos para que puedan acceder a significados matemáticos y sociales necesarios para participar en situaciones de comunicación en el aula. El aprendizaje matemático entendido como el desarrollo de la lengua de las matemáticas en una determinada cultura escolar requiere la modificación del discurso del alumno en aquellos aspectos alejados de la formalidad del discurso matemático escolar. En este sentido, la lengua del álgebra puede verse como una extensión de la lengua de los números utilizada por los alumnos, cuya modificación se produce a raíz de prácticas aritméticas combinadas con prácticas de generalización a través de regularidades numérica o geométricas (Sfard, 2012). Así, es esperable la coexistencia de discursos diferentes según su cercanía a la formalidad del discurso matemático escolar durante la interacción en el aula de matemáticas. Cuando decimos que el objetivo de este estudio es identificar patrones de interacción en la construcción de la lengua de las matemáticas durante la resolución de tareas de generalización, estamos considerando que dicha construcción de la lengua de las matemáticas involucra multitud de discursos y significados.

DISEÑO DEL ESTUDIO Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

Se diseñó una secuencia de cinco problemas de generalización a través de patrones que se implementó en un aula de matemáticas de secundaria con estudiantes de 15 y 16 años. La primera autora era la profesora del aula y seleccionó esta opción para facilitar el pensamiento algebraico a través de razonamientos inductivos generados en situaciones aritméticas. Manteniendo la dinámica habitual, se trabajó con contextos imaginables fuera de las matemáticas y enunciados con dibujos de apoyo que representan los primeros términos de una secuencia. Los problemas del estudio tuvieron texto escrito con tres cuestiones sobre generalización: 1) próxima, se pide un elemento calculable mediante un procedimiento de recuento directo; 2) lejana, se pide un elemento de difícil cálculo mediante recuento directo; 3) matemática, se pide pasar del pensamiento aritmético y/o geométrico al algebraico en la expresión del caso general. Así se quiso graduar la complejidad matemática desde identificar regularidades aritméticas o geométricas hasta producir generalizaciones algebraicas. También se graduó la dificultad lingüística de los enunciados. El problema de la cuarta sesión (Figura 1) añadió complejidad en la redacción – “enésima camiseta” –, estructura – sin cuestión de generalización lejana– y modalidad – las figuras se suponen superpuestas –. La posición de la camiseta en la sucesión y el número de camiseta no coinciden, lo cual pretende incitar la discusión sobre el significado de “la enésima camiseta”. La profesora presentó la tarea y los alumnos trabajaron en parejas hacia la producción de un texto escrito con propuestas de resolución; luego se discutieron las propuestas en grupo y se finalizó con la revisión de los textos.

Los datos son transcripciones de grabaciones de audio y video de cada sesión, originalmente en catalán. Las transcripciones de discusiones en grupo se segmentaron en episodios delimitados por el contenido matemático central en la discusión. Las transcripciones se completaron con imágenes extraídas de los vídeos cuando convino para mostrar objetos designados en la conversación con “este”, “aquí”, “aquel”, etc. Tras construir los episodios, se inició un análisis comparativo entre episodios de una sesión y del total de sesiones en la elaboración de códigos de contenido matemático y de interacción (Chico, 2014). Los códigos de interacción que ejemplificamos son:

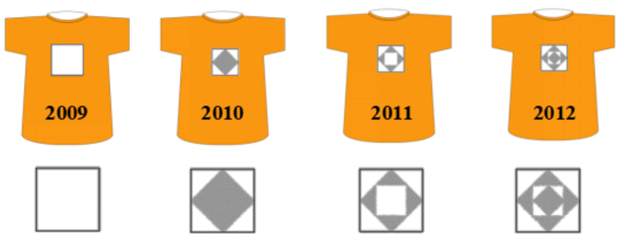
1. Iniciar (una resolución de una cuestión del problema);
2. Compartir (una explicación matemática entre alumnos de una pareja);
3. Dudar (ante la comprensión de un razonamiento matemático);
4. Solicitar (aclaración de un razonamiento matemático).

Los códigos de contenido matemático que ilustramos son:

1. Generalización aritmética (representación de la generalización con lengua numérica);
2. Identificación de variable (determinación de la variable en el contexto del problema);
3. Generalización algebraica (representación de la generalización con lengua del álgebra);
4. Rango de variable (detección del conjunto de números que toma la variable);
5. Expresión algebraica (representación de un conjunto de números con expresión algebraica);
6. Particularización visual (expresión de regularidades en el dibujo);
7. Justificación numérica (justificación de la generalización mediante casos particulares).

Tras el análisis de episodios, se unieron episodios consecutivos relativos a una misma cuestión del problema para indagar los procesos de desarrollo de contenido matemático en el discurso hablado. A la vez que detectamos avances en las contribuciones a la resolución de la tarea, prestamos atención a los códigos de interacción involucrados a fin de identificar recurrencias en las formas de intercambio, además de su efecto sobre la lengua usada para la discusión del contenido matemático. Comparando los episodios del total de sesiones se observaron patrones de interacción con efecto en el desarrollo de la lengua de las matemáticas de los alumnos. A continuación se muestran cuatro de estos patrones en relación con el contenido matemático subyacente en el uso de la lengua. En esta ocasión no mostramos el análisis cruzado entre episodios que permitió concluir sobre la recurrencia de formas de interacción y que, por tanto, respaldó la consideración de patrones.

Desde 2009, una diseñadora hace una camiseta por año como insignia de su marca. Estos son los modelos correspondientes al primer, segundo, tercer y cuarto año:



La figura en cada camiseta sigue una serie: se toma un cuadrado blanco, se marcan los puntos medios de los lados, se unen y se pinta de gris el cuadrado resultante. Después se unen los puntos medios del cuadrado gris y se pinta de blanco, y así sucesivamente.

1. ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos grises tendrá la figura de la camiseta 2015?
2. ¿Cuántos de cada tipo tendrá una camiseta de cualquier año, la enésima camiseta?
3. ¿Cuántos triángulos blancos y cuántos grises tendrá la figura de la enésima camiseta?

Figura 1. Enunciado del problema de la cuarta sesión

GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA, IDENTIFICACIÓN DE VARIABLE E INICIAR-SOLICITAR

En este primer segmento, donde transcribimos "ene" como *n*, los alumnos discuten la segunda cuestión del problema de la Figura 1, esto es, respuestas para el número de cuadrados blancos y grises de la enésima camiseta. Los códigos de contenido matemático que encontramos son *Generalización aritmética* e *Identificación de variable*. Cristina expone una resolución en la lengua de los números donde la variable es el año de creación de la camiseta y no la posición que ocupa en la secuencia [1]. Durante el trabajo en pareja Cristina tuvo dificultades para generalizar en la lengua del álgebra derivadas de no identificar las variables en el contexto del problema ni su la relación de dependencia. Jose pregunta por el símbolo *n* en la *generalización aritmética* dada [2]. Sara y Cristina, a la vez, *identifican n* con el año de la camiseta [3-4] y Jose aclara que *n* representa la expresión "enésima" del enunciado y la posición de la camiseta en la secuencia y no al año [5].

1. Cristina: Pues el año menos 2009 es igual al año menos 2009 partido entre dos más una blanca si fuera impar y sin una blanca, si fuera par.
2. Jose: ¿Y la *n*?
3. Cristina: El año, el año que estás buscando o sea el año que te dan.
4. Sara: El año que pone en la camiseta.
5. Jose: No, porque la enésima camiseta, la *n*, no sería el año es el número de camiseta. Claro, la enésima camiseta no es 2009 o 2013, ¿qué sería la dos mil trece camiseta? No, es la sexta, la quinta…

De acuerdo con las definiciones de los códigos, en este fragmento encontramos *Iniciar* y *Solicitar*. *Iniciar* se observa cuando Cristina expone su resolución que, en el conjunto de la discusión, es el primer enfoque a la segunda cuestión del problema [1]. Las situaciones caracterizadas por este código se refieren a la introducción de una resolución a la cuestión en debate. Por otro lado, *Solicitar* representa situaciones en las que se piden clarificaciones sobre un razonamiento matemático expuesto. Jose pide aclaraciones que centran la conversación en el significado de la variable dentro del contexto del enunciado [2]. La asociación de estos dos códigos es lo que llamamos patrón de interacción *Iniciar-Solicitar*, que representamos en la Figura 2 en relación con el contenido matemático subyacente. Un patrón está conformado por dos códigos de interacción que aparecen seguidos en la codificación de un episodio, estando ambos involucrados en la producción de la lengua de las matemáticas. El patrón de la Figura 2 surge en la discusión sobre el significado de la variable en el contexto del problema a partir de su uso en una generalización. En términos de aprendizaje, se desarrolla la lengua del álgebra a partir de una generalización aritmética mediante la formalización simbólica de la expresión "enésima" y su identificación como variable independiente en la generalización. A lo largo de las sesiones este patrón aparece involucrado de forma recurrente en la identificación de la variable o la aclaración de expresiones en la lengua del álgebra de una generalización aritmética o algebraica. En general, *Iniciar-Solicitar* representa situaciones de producción de la lengua de las matemáticas mediante la aclaración y negociación de significados por más de un alumno del grupo de modo que se refleja un aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático generadas en la interacción.

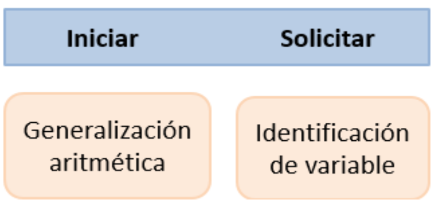


Figura 2. *Iniciar-Solicitar* y contenido matemático

GENERALIZACIÓN ALGÉBRICA, RANGO DE VARIABLE E INICIAR-COMPARTIR

En el segundo segmento, donde transcribimos "ene" y "ene menos uno" como *n* y *n*-1, los alumnos discuten la tercera cuestión del problema, "¿Cuántos triángulos blancos y triángulos grises tiene una camiseta?". Los códigos de contenido matemático son G*eneralización algebraica y Rango de variable*. Jose habla de *n* para indicar la posición de la camiseta en la secuencia y explica la generalización 4(*n*-1)/2 para el caso de *n* par en la lengua del álgebra [6]. A pesar de la confusión entre camisetas pares e impares, construye la generalización conectando expresiones algebraicas con regularidades en la secuencia. Gabriel indica la distinción entre casos pares e impares que influye en la revisión de la generalización planteada. Ninguno de los alumnos, sin embargo, parece tener clara la necesidad de usar *n* o *n-1* [7-8]. En un momento anterior de la sesión, se ha discutido si la camiseta de 2015 es la séptima en la colección o la sexta. Esto tiene que ver con tomar 1 ó 0 como valor inicial para *n*. Gabriel comprueba en el dibujo de la tercera camiseta, la regularidad geométrica que origina la discriminación entre camisetas pares e impares y concluye que el *rango de la variable* donde la generalización es válida son los números impares [9]. Al final, Jose y Gabriel utilizan la convención simbólica para la representación genérica de los números naturales.

6. Jose: Nosotros hemos hecho, suponiendo que *n* es el número de camiseta que nos dan, sabemos que *n*, el número de camiseta es igual que el número de cuadrados que hay dentro. Porque en la primera camiseta hay un cuadrado, en la segunda hay dos, en la tercera hay tres… Entonces el número de camiseta menos uno, porque como ya se ha dicho hay un cuadrado que no genera triángulos, es el número de cuadrados que generan triángulos. Entonces lo multiplicamos por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos. Entonces obtienes el número total de triángulos. Si la *n* es par, divides el número total entre dos y obtienes el número de triángulos cualesquiera porque hay el mismo número de triángulos blancos que grises. Porque cuando la *n* es par hay el mismo número de cuadrados blancos que grises, como le has restado uno, te queda el mismo número de triángulos blancos que grises.
7. Gabriel: No, esto es cuando la *n* es impar, no...sí, sí cuando *n*-1 es impar.
8. Jose: Sí, es *n*-1 que es impar…
9. Gabriel: Es decir, cuando *n*-1 es impar… Nos hemos equivocado, cuando *n* es impar es cuando hay un cuadrado más blanco y es lo que hace que haya el mismo número de triángulos blancos que grises.
10. Jose: Sí, claro. Cuando la *n* es impar divides entre dos y te da el número de triángulos de los dos colores.

Los códigos de interacción que encontramos en este fragmento son *Iniciar* y *Compartir*. *Iniciar* se observa cuando Jose explica su aproximación al problema de forma espontánea, sin que se lo pida ningún compañero [6]. Las situaciones caracterizadas por *Iniciar* se refieren a la introducción de un enfoque para la resolución de la cuestión en debate y conllevan una diversificación de la resolución. *Compartir* representa situaciones de apoyo entre miembros de una pareja en la explicación de un razonamiento matemático. Gabriel reacciona a la explicación inicial de Jose señalando el rango correcto de la variable y la regularidad geométrica que lo sustenta [7,9]. La asociación de ambos códigos es el patrón *Iniciar-Compartir*, representado en la Figura 3 con su contenido matemático. Este patrón surge durante la discusión del rango de la variable independiente de una generalización algebraica y representa la responsabilidad compartida por dos alumnos en la comunicación correcta de una resolución en la discusión en grupo. En términos de aprendizaje, se comunica una generalización en la lengua del álgebra y se revisa y se corrige mediante la comprobación de regularidades y expresiones simbólicas en el dibujo de un caso particular. En general, en las situaciones caracterizadas mediante este patrón, se aclaran o se corrigen términos en la lengua del álgebra en una generalización o se operan expresiones algebraicas para determinar su equivalencia. *Iniciar-Compartir* representa situaciones de producción de la lengua de las matemáticas mediante la conjunción de significados introducidos por más de un alumno del grupo de modo que se evidencia un aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático ofrecidas en la interacción.

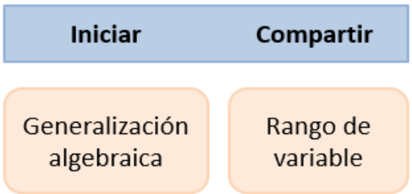


Figura 3. *Iniciar-Compartir* y contenido matemático

EXPRESIÓN ALGÉBRICA, PARTICULARIZACIÓN VISUAL Y DUDAR-SOLICITAR

El tercer segmento, que incluye una captura de vídeo para la comprensión del turno 19, es continuación inmediata del anterior. Maria, otra alumna, y la profesora se incorporan a la discusión. Los códigos de contenido matemático ahora son *Expresión algebraica y Particularización visual*. En este punto se había dado la generalización 4(n-1)/2 para el caso impar con una lengua basada en la manipulación de símbolos de la expresión por delante de la relación entre la posición de la camiseta en la secuencia y la cantidad de cuadrados y triángulos en el diseño. Tal aproximación pareció dificultar la comprensión de Maria [14]. Jose habla sobre la transformación de la figura en la secuencia y, apoyándose en $n=3$, explica regularidades que sustentan la generalización usando términos y expresiones algebraicas [15-17]. Maria pide clarificaciones [18] y Jose usa el dibujo de la tercera camiseta para ilustrar propiedades geométricas ligadas a la *expresión algebraica* n-1 [19].

11. Profesora: Maria, ¿lo hemos entendido?
12. Maria: Sí.
13. Profesora: ¿Nos lo explicas?
14. Maria: ¡Es que no me he enterado de nada!
15. Jose: A ver, si a ti te dicen que hay tres camisetas, una, dos y tres… En la tercera, al ser la tercera sabes que tienes tres cuadrados, porque cada año le pones uno más.
16. Maria: Entonces tendrá los mismos triángulos blancos que grises…
17. Jose: Eso da igual, todavía no lo hemos tocado. O sea, tienes tres cuadrados dentro pero sabes que hay uno que no hace triángulos, el del medio no hace triángulos. Entonces le restas uno a la *n*.
18. Maria: Pero, ¿por qué le restas uno?
19. Jose: Porque este no hace triángulos. Entonces te quedan estos dos cuadrados que sí hacen triángulos y los multiplicas por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos.
20. Maria: Vale, sí.

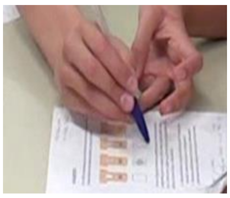


Figura 4. Imagen para el turno 19

De acuerdo con las definiciones, los códigos de interacción son *Dudar* y *Solicitar*. *Dudar* representa situaciones donde un alumno reacciona a una intervención alegando falta de comprensión de un razonamiento matemático. Maria es quien expresa confusión tras la pregunta de la profesora [11-14]. Aunque la falta de comprensión sugiere la dimensión cognitiva individual, puede surgir de la comunicación poco clara o con omisión de ideas. Por otro lado, *Solicitar* representa situaciones en las que se piden clarificaciones sobre un razonamiento matemático expuesto. Maria vuelve a ser quien solicita aclaraciones [18]. Aunque *Solicitar* sugiere falta de comprensión, existe una diferencia cualitativa entre ambos códigos. La petición de clarificaciones implica que se ha seguido y comprendido parte de lo expuesto, mientras que *Dudar* expresa una falta de comprensión más general. En el conjunto de datos, *Dudar* aparece mayormente tras preguntas de la profesora mientras que *Solicitar* es espontáneo. La asociación de ambos códigos da lugar al patrón *Dudar-Solicitar* representado en la Figura 5 con su contenido matemático. Este patrón surge en la reformulación de parte de una generalización donde se expresan regularidades geométricas con la lengua del álgebra. *Dudar-Solicitar* representa situaciones lideradas por dos alumnos en el grupo, donde uno secuencia contenidos de forma constructiva mientras que el otro apunta significados concretos que necesitan clarificación. Cuando Maria pregunta "¿Por qué le restas uno?", la conversación se centra en el razonamiento que subyace a la expresión n-1. Jose señala el dibujo de la tercera camiseta para ilustrar características geométricas de la figura expresada con la lengua del álgebra (Figura 4). Los alumnos generan un discurso de articulación de la lengua visual y la algebraica. A lo largo de las sesiones este patrón aparece involucrado en la secuenciación y aclaración de significados de expresiones en la lengua del álgebra y/o regularidades geométricas subyacentes a una generalización algebraica.

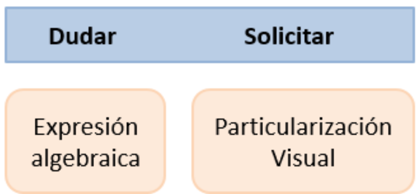


Figura 5. *Dudar-Solicitar* y contenido matemático

GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA, JUSTIFICACIÓN NUMÉRICA E INICIAR-DUDAR

El cuarto segmento ilustra limitaciones en la producción colectiva de la lengua de las matemáticas en una discusión entre alumnos y profesora sobre respuestas a la tercera cuestión del problema. Los códigos de contenido matemático son *Generalización aritmética* y *Justificación numérica*. Óscar explica una generalización para las camisetas de años pares mediante la lengua de los números [21]. La explicación se centra en el procedimiento utilizado sin mencionar regularidades geométricas o numéricas que respalden su resolución. Ante la falta de comprensión de Maria [23], Óscar señala la regularidad geométrica de las figuras que sustenta la discriminación entre camisetas pares e impares [24]. Durante el trabajo en pareja, este alumno dedujo la generalización a partir de regularidades numéricas en diversos casos particulares. Esto le lleva a dar una *justificación numérica* en el grupo como argumento de la *generalización aritmética* [24].

21. Óscar: En los pares, como el número de cuadrados es igual tienen cuatro triángulos más blancos. Por lo tanto, la fórmula es número de cuadrados multiplicado por dos y esto te da el número de triángulos blancos. Entonces he comprobado que hay cuatro triángulos blancos más que grises, entonces cuando sabes los blancos para saber los grises le restas cuatro.

22. Profesora: ¿Maria?

23. Maria: A ver, es que yo no lo he entendido muy bien.

24. Óscar: Ni yo tampoco, pero numéricamente se cumple en el dos mil diez, doce y catorce. Lo único que va con el dibujo es que en los pares hay cuatro triángulos más blancos que grises y en los impares hay el mismo número de triángulos blancos que grises.

Los códigos de interacción de este fragmento son *Iniciar* y *Dudar*. *Iniciar* se observa cuando Óscar explica su resolución y así modifica el contenido de la discusión [21]. Las situaciones caracterizadas por este código se refieren a la introducción de un nuevo enfoque para la resolución de una cuestión. *Dudar,* como ya se comentó, representa situaciones en las se enuncia falta de comprensión de la intervención de un alumno. Maria expresa confusión tras la pregunta de la profesora [22-23]. La asociación de estos dos códigos es el patrón *Iniciar-Dudar* que se muestra en la Figura 6 en relación con su contenido matemático. Este patrón surge durante la discusión de una generalización representada en la lengua aritmética. En cuanto a la producción de la lengua de las matemáticas, se observan limitaciones en el uso de la lengua del álgebra y de la lengua visual. Por otro lado, se introduce una justificación que proviene de un tratamiento numérico de la generalización y que supone una diversificación en las formas de hablar de la validez de una generalización en el grupo. En general, *Iniciar-Dudar* aparece involucrado en la aclaración de términos y expresiones de la lengua del álgebra o de regularidades geométricas que subyacen a una generalización algebraica. En esta ocasión, aunque hay contribución a la lengua de las matemáticas, la interacción es poco productiva en términos de la lengua del álgebra.

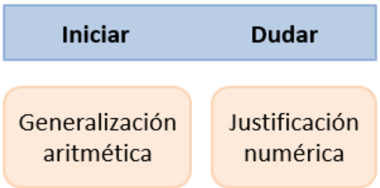


Figura 6. *Iniciar-Dudar* y contenido matemático

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

El propósito de este escrito ha sido mostrar cómo se produce la lengua de las matemáticas en la interacción en grupo en clase de matemáticas. Los resultados ponen de relieve que existen ciertas formas de interacción que se repiten en la discusión entre alumnos y - profesora cuyo contenido matemático subyacente incide en el desarrollo de la lengua del álgebra durante la discusión en torno a soluciones de problemas de generalización. Los ejemplos de patrones de interacción informan sobre cómo se aprovecha al otro como recurso en el aprendizaje matemático. Mientras que *Iniciar-Compartir* refleja un aprovechamiento que complementa y completa explicaciones, *Iniciar-Solicitar* y *Dudar-Solicitar* conllevan situaciones en las que un alumno usa una lengua de las matemáticas más formal y así ayuda a otro alumno. Los cuatro patrones mostrados representan interacciones productivas en términos de su contribución al desarrollo de un habla colectiva, aunque no todos con la misma intensidad. Jose amplía la información visual de su razonamiento al dar valor a la intervención de Maria, y así sucesivamente se encadenan las situaciones de producción conjunta de significado. Por otro lado, existen excepciones en las que los alumnos apenas modifican el contenido matemático de la discusión con menor aportación a la lengua de las matemáticas. Esto ocurre con *Iniciar-Dudar* en el último fragmento expuesto. Un mayor estudio de estos casos puede ayudar a comprender aspectos de influencia en la productividad de la interacción desde la perspectiva de la lengua de las matemáticas.

Los momentos matemáticamente relevantes de la interacción en grupo se pueden caracterizar a través de patrones de interacción y, mayormente, composiciones entre ellos. La composición de patrones es una combinación de dos o más patrones que representa una estructura de interacción más compleja. Analizar secuencias de información de forma aislada conlleva una visión limitada de la construcción colectiva de la lengua de las matemáticas en torno a la resolución de un problema. En este sentido, el estudio de la composición de patrones es relevante para comprender los procesos sociales involucrados en el desarrollo del aprendizaje matemático. Ahora estamos inmersas en el análisis de estas situaciones en el conjunto de datos de las cinco sesiones. Hemos encontrado combinaciones de patrones y patrones que aparecen vinculadas de forma recurrente y que representan en su conjunto una estructura más compleja de interacción que conlleva una contribución matemática al desarrollo de la lengua de las matemáticas en las discusiones en grupo.

Agradecimientos

GIPEAM, SGR-2017-101; EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER.

Referencias

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas* (Tesis doctoral). Bellaterra: UAB.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situación de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 253-263). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 70-92.

Ingram J., Pitt, A. y Baldry, F. (2015). Handling errors as they arise in whole-class interactions. *Research in Mathematics Education, 17*(3), 183-197.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion 'learning-as-participation' in everyday situations of mathematics classes. *ZDM, 43*(1), 81-90.

Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education, 19*(2), 102-116.

Morgan, C., Craig, T., Schütte, M. y Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM, 46*(6), 843-853.

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for the understanding of the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*. doi: 10.1007/s10649-018-9810-y

Planas, N., Arnal, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres: Routledge.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J., Vicente, S. y Gracia, L. (2015). Participación en la interacción profesor-alumnos al resolver un problema con apartados de distintos dominios cognitivos en primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 587). Alicante: SEIEM.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. y Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (vol 4, pp 169-176). Bergen: PME.

Sfard, A. (2012). Introduction: developing mathematical discourse. Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sierpinska, A. (1997). Formats of interaction and model readers. *For the Learning of Mathematics, 17*(2), 3-11.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

COMPONENTES DEL SENTIDO ESPACIAL EN UN TEST DE CAPACIDAD ESPACIAL

Components of space sense in a space capacity test

Cruz, A.[a] y Ramírez, R.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este estudio se presentan las componentes del sentido espacial en base al análisis de la literatura e investigaciones relevantes sobre el tema. Con estas componentes, se hace un primer estudio exploratorio sobre las características *presentadas por los modelos geométricos y las seis figuras que componen algunos ítems de un test que mide la capacidad visual. Se presenta una caracterización que sirve para analizar y mostrar la relación existente entre las propiedades de los modelos geométricos de cada ítem del test y sus respectivas figuras, y los aciertos y errores presentados en su aplicación por un grupo de estudiantes.*

Palabras clave: *componentes del sentido espacial, geometría, prueba, relaciones geométricas, sentido espacial.*

Abstract

In this research, the components of spatial sense are presented based on the analysis of literature and relevant research on the subject. With these components, a first exploratory study is carried out on the characteristics of the geometric models and the six figures that are part of some items of a test that measures visual capacity. A characterization is presented that serves to analyze and show the relationship between the geometric models' properties of each item with their respective figures, and the successes and errors presented in its application by a group of students.

Keywords: *components of spatial sense, geometry, test, geometric relations, spatial sense.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la enseñanza de la matemática, especialmente de la geometría, es que los estudiantes y los ciudadanos en general se ubiquen y desplacen eficientemente en el medio en que se desenvuelven a través de herramientas útiles. Por lo que se hace fundamental, en la enseñanza de los primeros niveles escolares, el desarrollo del sentido espacial, ya que proporciona a los estudiantes, nuevos caminos para pensar y hacer matemática por medio de la visualización (Flores, Ramírez y Del Río, 2015). Esta noción implica que los conceptos geométricos se articulen a través de la conexión de sus elementos, lo que permite elaborar razonamientos bien estructurados (Clements y Battista, 1992).

En esta comunicación se hace una revisión conceptual del sentido espacial y se explicitan sus componentes (elementos geométricos, relaciones, propiedades y movimientos). Luego, se relacionan dichos componentes con el uso de las habilidades de visualización que especifica Del Grande (1990), para realizar un análisis de las características geométricas presentes en los ítems de un test utilizado frecuentemente para evaluar la capacidad visual. Para esto, se realiza una exploración de las propiedades geométricas de los ítems en los que se han detectado mayores dificultades en su aplicación.

Cruz, A. y Ramírez, R. (2018). Componentes del sentido espacial en un test de capacidad espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 211-220). Gijón: SEIEM.

Esta comunicación pretende aportar información sobre la conexión entre las componentes del sentido espacial y las respuestas dadas por un grupo de estudiantes en algunos ítems y comprender la influencia de éstos en los resultados obtenidos.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El entorno geométrico manifiesta la relación entre aspectos de la visualización y el aprendizaje de contenidos geométricos (Guillén, 2010; Gutiérrez, 1996). Así también, en relevantes recopilaciones de investigaciones (Battista, 2007; Bishop, 1983) se han destacado los conceptos y las habilidades como dos elementos principales en el desarrollo del sentido espacial.

El sentido espacial es un conjunto complejo de competencias interconectadas (Lea, 1990) que interactúan necesariamente para relacionarse con el espacio. Lupiañez y Rico (2015) plantean que el sentido espacial es un campo del sentido matemático, mientras que otros autores lo definen como:

> La competencia del sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 129).

En lo descrito anteriormente sobre el sentido espacial, aparece un elemento común relativo a un enfoque funcional de la enseñanza de la geometría. Todos los estudiantes deben desarrollar el sentido espacial, siendo un objetivo básico de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de actividades espaciales integradas en los planes de estudio (Bishop, 1983), de oportunidades para el uso de vocabulario espacial en el lenguaje, del fomento de habilidades espaciales, de ejemplos concretos enlazados a experiencias previas, del seguimiento de dificultades y errores de los estudiantes y del establecimiento de la tecnología (Diezmann y Lowrie, 2009). Su desarrollo, se muestra cuando los estudiantes son capaces de identificar, analizar y describir las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones con criterios comunes y propios, en la localización y descripción de posiciones y trayectorias, en la descripción de invariantes y relaciones entre cuerpos y figuras; y en la aplicación e identificación de transformaciones, composiciones y descomposiciones geométricas (Lupiañez y Rico, 2015).

Esto brinda expectativas en el cumplimiento de los objetivos que se presentan en toda la educación preescolar y primaria referidos dentro del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), al desarrollo de dicho campo y reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico, lo que se relaciona con la orientación y visualización espacial. Por ejemplo, en el estándar de Geometría de este documento curricular, se explicita que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

> analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas; localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación; aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; y utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas (NCTM, 2000, p. 43).

Esto tiene relación con lo que plantea Hershkowitz (1990) sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, que éstos han sido abordados en dos modos clásicos: en ver la geometría como la ciencia del espacio y como estructura lógica donde el aprendiz puede conseguir un soporte para la estructura matemática. El primero, intenta desarrollar conocimientos sobre las figuras, formas y sus relaciones como elementos que ayudan a situarse en el espacio. El segundo, enfatiza que estos elementos son completamente abstractos, aunque tengan referentes concretos, por lo que el razonamiento con ellos se puede hacer de manera formal, como se ha estado empleando en la enseñanza siguiendo leyes de la lógica tal como hizo Euclides. Este doble enfoque relaciona estrechamente la enseñanza de la geometría con el desarrollo del sentido espacial (Ramírez, 2012).

Esto, además coincide con lo que Flores, Ramírez y Del Río (2015) plantean sobre que, el sentido espacial requiere generar una amplia red de imágenes de los conceptos geométricos para su aprendizaje, acompañada del descubrimiento y la práctica de destrezas para ubicarlos en el espacio, percibirlos y representarlos de diversas formas. Por lo que distinguen las siguientes componentes del sentido espacial:

El manejo de conceptos geométricos. Hace referencia al conocimiento de las características y propiedades de las formas geométricas, al reconocimiento y establecimientos de relaciones geométricas y a la ubicación y movimientos de ellas en el plano o en el espacio. El conocimiento de características y propiedades consiste en identificar las formas a través del nombre, la definición y diferentes representaciones, definir las formas y proponer contraejemplos. El reconocimiento y establecimiento de relaciones geométricas, en apreciar cualidades en las formas y cuerpos geométricos como la congruencia, simetría, igualdad o equivalencia, y características de clasificación y diferenciación. La ubicación y movimientos son elementos dinámicos que consisten en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio, conocer y saber llevar a cabo los movimientos, detectar regularidades o los elementos que resultarían invariantes al moverlos.

Las destrezas para visualizar estos conceptos (orientación y visualización). Hace referencia especialmente a la orientación y visualización de elementos geométricos en el espacio, donde los estudiantes deben localizar y describir las relaciones espaciales entre los elementos que componen su entorno (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 131).

La orientación se define como la destreza para comprender cómo están dispuestos los elementos en el espacio, y recordarlos sin confusión adoptando diferentes perspectivas. Es crear una representación mental de los elementos que permita identificarlos cuando se cambien las condiciones (Bishop, 1983).

Se señala a la visualización como una componente transversal que mediante el establecimiento de conexiones entre los elementos del primer componente descrito, se incorporan sus destrezas lo que contribuye a su mejora para logar un dominio geométrico funcional, es decir, facilitar la ubicación y el reconocimiento de relaciones geométricas y espaciales. Gutiérrez (2006) define la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

De acuerdo con lo que plantean Xistouri y Pitta-Pantazi (2006), tanto la visualización como la orientación son dos componentes principales de las habilidades espaciales que no sólo están correlacionadas, sino que la disociación entre estas dos es bastante difícil (Kozhevnikov y Hegarty, 2001; Zacks, Mires, Tversky y Hazeltine, 2002). Por tanto, ambas componentes o destrezas se consideran esenciales para el desarrollo del sentido espacial y no se pueden entender de un modo aislado.

Para discutir la influencia de la caracterización geométrica de los ítems en el rendimiento visual de los estudiantes, se caracterizan las habilidades recopiladas por Del Grande (1987, 1990), las que se describen a continuación:

- Coordinación ojo-motor. Coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
- Percepción figura-contexto. Reconocer una figura asilándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.

- Conservación de la percepción. Reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura...) aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
- Percepción de la posición en el espacio. Relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos.
- Percepción de las relaciones espaciales. Identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc).
- Discriminación visual. Identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición.
- Memoria visual. Recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros. Memoria fotográfica.

Cabe destacar que en el seno del SEIEM, destacadas revisiones de la literatura de investigación sobre visualización han respaldado el interés y la vigencia de este campo de investigación en la educación matemática (Fernández, 2013; Guillén, 2010). Específicamente algunos de estos trabajos se han focalizado en aspectos cognitivos asociados a las habilidades de visualización (Escrivá, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016; Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez, 2016; Ramírez, Flores y Castro, 2010; Ramírez, Flores y Castro, 2012). Así también, en revisiones de la literatura de investigación se considera aún relevante investigar sobre el sentido espacial (Jones y Tzekaki, 2016).

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en un estudio previo realizado a 331 estudiantes (grupo experimental y grupo control) de segundo, tercer y cuarto año de la educación secundaria para el análisis de la influencia del género en el talento matemático y la capacidad espacial. El grupo experimental compuesto por 145 estudiantes (105 hombres y 40 mujeres) que participaban en un proyecto para estimular a los matemáticamente talentosos (ESTALMAT) y que fueron elegidos por su desempeño en la resolución de problemas no rutinarios y entrevistas personales. El grupo control, compuesto por 186 estudiantes (97 hombres y 89 mujeres) lo formaban estudiantes de tres centros de secundaria, de los que ninguno estaba considerado como talento matemático. En esta comunicación se presentan los resultados de la muestra completa, sin distinción de sexo ni talento matemático.

En dicho estudio se utiliza la prueba de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) (Thurstone y Thurstone, 1976) que evalúa 5 de 7 aptitudes: comprensión verbal, comprensión espacial, razonamiento general, comprensión numérica y fluidez verbal. Específicamente, a los estudiantes antes mencionados se les aplica el Test Factor E que permite la evaluación de la visualización estática, la que se define como "la aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna". El Test se constituye de 20 ítems, en que cada uno presenta un modelo geométrico plano y seis figuras similares en distintas posiciones, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1. En un tiempo limitado de 5 minutos los estudiantes debían determinar cuál o cuáles figuras coincidían con el modelo al aplicarle un giro en el plano.

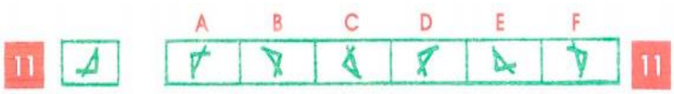


Figura 1. Ejemplo de ítem, Test Factor E

En este trabajo como estudio exploratorio, se realiza una caracterización geométrica de los modelos de los ítems que presentan un porcentaje de acierto más bajo en su aplicación. Se realiza primero una caracterización de cada uno, a partir de las componentes del sentido espacial, en donde se identifican los elementos que componen al modelo y sus figuras, y el número total de ellos. Se identifica el cambio de posición que muestra cada figura, ya sea con un giro y/o simetría respecto al modelo y se mide el ángulo de giro, cuando corresponda. En segundo lugar, se analiza cuál es la relación existente entre el porcentaje alto de respuestas incorrectas y las características geométricas de las figuras, en cuanto a los elementos presentes y las destrezas requeridas (orientación y visualización).

Se considerará, la puesta en juego de determinadas habilidades para comparar la componente relativa a la visualización con la caracterización geométrica de las tareas presentadas en los ítems del test, a través del análisis de los elementos, las relaciones y los movimientos implicados.

RESULTADOS

En este apartado se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas de la aplicación del test, resumidas en la Tabla 1. En la tabla se puede observar que a partir del ítem 10, va aumentando la frecuencia de los estudiantes que no responden, lo que puede ser ocasionado por la limitación de tiempo asignado para el desarrollo del test. Se subraya que los ítems 7, 11, 15 y 16 tienen un porcentaje de acierto bajo el 0.60 % respecto al total de estudiantes que contestaron (aciertos y fallos) y que en los ítems 18 y 20 el porcentaje de error es mayor que el de aciertos. Atendiendo a esta información, seleccionamos los 6 ítems sombreados en la Tabla 1 para su análisis y relación, ítems que obtuvieron menor porcentaje de aciertos respondidos.

Tabla 1. Número de estudiantes con fallos, acierto y preguntas no contestadas

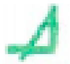
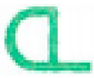
Items	Fallos	No Contestadas	Aciertos	Aciertos/Respondidas
1	67	6	258	0,79
2	78	8	245	0,76
3	101	12	218	0,68
4	65	8	258	0,80
5	101	7	223	0,69
6	67	18	246	0,79
7	139	25	167	0,55
8	53	58	220	0,81
9	81	57	193	0,70
10	69	84	178	0,72
11	83	129	119	0,59
12	39	149	143	0,79
13	41	174	116	0,74
14	38	201	92	0,71
15	44	223	64	0,59
16	32	257	42	0,57
17	19	272	40	0,68
18	23	287	21	0,48
19	14	295	22	0,61
20	22	301	8	0,27

En cuanto a los conceptos geométricos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015), se hace referencia a las características y propiedades, específicamente, a las propiedades de las figuras de cada ítem del test, a las relaciones geométricas de sus elementos y al movimiento que ha realizado el modelo y que se ha representado en cada una de las figuras de los ítems. Por lo que, se hace la siguiente caracterización geométrica de los ítems del test y se establecen en las siguientes categorías:

- Elementos. Segmentos, trozos de línea recta de longitud mayor; arcos, trozos de línea curva; y puntos, dibujo de tamaño pequeño que se representa en forma circular.
- Contactos. Cruces, elementos que se intersectan; apoyos, los elementos de tocan en un punto; y prolongaciones, un elemento continúa donde termina el otro. Se identifica el número de elementos que continúan tras la intersección. Se clasifican según sean perpendiculares u oblicuos, y en el caso de los apoyos y las prolongaciones, se consideran si se dan en la misma dirección.
- Relaciones. Pares de elementos que presentan paralelismo e igual longitud.
- Simetrías. Respuestas que presentan una simetría respecto a la muestra, que coinciden con las respuestas incorrectas del ítem.
- Giros. Ángulo de giro de la figura con respecto a la posición de la muestra (haya o no simetría).

En la Tabla 2, se muestra la caracterización y descripción de los ítems seleccionados en el test de acuerdo con uno de los componentes del sentido espacial, anteriormente mencionado.

Tabla 2: Características de los ítems seleccionados.

	Conceptos geométricos				
	Elementos	Contactos	Relaciones	Simetrías	Giros
Item 7 	3 segmentos	2 prolongaciones oblicuas	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	120, 0, -60, 120, -120 y 30
Item 11 	3 segmentos	1 cruce oblicuo 1 prolongación oblicua 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	180, 60, -120, -60, 10, -10
Item 15 	2 segmentos 1 arco	1 apoyo oblicuo 1 prolongación con igual dirección	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	150, 90, 30, -30, -150, 60
Item 16 	2 segmentos 1 arco	1 cruce perpendicular 1 prolongación oblicua 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos de igual longitud	En 3 de las respuestas	180, -120, 120, 180, 60, -90
Item 18 	2 segmentos 1 arco	1 apoyo perpendicular 1 prolongación en la misma dirección 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos de igual longitud	En 3 de las respuestas	150, 60, -60, -120, 0 , 90
Ítem 20 	1 segmento 2 arcos	2 prolongaciones en la misma dirección	1 par de elementos paralelos	En 3 de las respuestas	60, 180, -90, 0, 0, 60

Respecto a las semejanzas y diferencias encontradas en el grupo de ítems seleccionados con el resto de los ítems del test, se puede establecer lo siguiente en cada categoría:

- Elementos. Los ítems presentan el menor número de ellos (3), frente a otros del test que presentan 4 elementos. Sólo el ítem 12 que no se presenta en la tabla, presenta dos elementos.
- Contactos. Predominan las prolongaciones, pero no se observan diferencias con el resto de los ítems de los test, donde también predominan.
- Relaciones. En los ítems seleccionados aparece sólo una, mayoritariamente un par de elementos de igual longitud. Esta caracterización también predomina en el resto del test, ya que hay 6 ítems que tienen un mayor número de relaciones.
- Simetrías. Una característica común de estos ítems es que hay tres respuestas con simetrías. En el total del test hay 7 ítems con 4 respuestas simétricas, mientras que 13 de ellos tienen 3 de ellas simétricas.
- Giros. En el primer estudio exploratorio, no se observan diferencias entre el grupo de ítems seleccionados con el resto de ítems, pues los giros señalados aparecen indistintamente en los dos grupos.

DISCUSIÓN

En este primer estudio exploratorio se han descrito las propiedades geométricas de las representaciones utilizadas en uno de los test del PMA (Factor E) que mide la capacidad visual. Se han establecido categorías fundamentadas en las componentes del sentido espacial relativas a elementos geométricos, relaciones y movimientos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015).

Según la revisión de la literatura de investigación, en el desarrollo del sentido espacial se enfatiza la conexión entre las componentes (conceptos y destrezas), especialmente la visualización para fortalecer estas relaciones (Clements y Battista, 1992). A partir de este primer análisis, podemos establecer una primera aproximación en la relación entre el uso de las habilidades de visualización registradas mediante el rendimiento en el test con la caracterización geométrica de los ítems.

Previamente a un estudio con herramientas estadísticas más complejas de análisis de ítems, de este primer trabajo podemos deducir algunas hipótesis:

Los estudiantes han manifestado mayor número de errores en ítems con un menor número de elementos. Este hecho podría ir asociado a las habilidades Percepción figura-contexto y Discriminación visual. Para reconocer si la figura de la respuesta es la misma (salvo giros) o distinta (presencia de simetrías), una estrategia posible es fijar algunos elementos de referencia para establecer el centro, ángulo de giro o eje de simetría. Un menor número de elementos podría entenderse como una mayor dificultad para fijar estas referencias.

En los ítems con menor rendimiento aparecen pocas relaciones. Con la habilidad Percepción de las relaciones espaciales, el sujeto reconoce las relaciones entre los elementos de las figuras y con la habilidad Conservación de la percepción, reconoce que estas relaciones se mantienen al someterlas a giros o simetrías. Un ítem con un mayor número de relaciones (igualdad, paralelismo…) permite al sujeto identificarlas en la muestra y en la respuesta.

En esta misma línea, investigaciones en test espaciales han señalado la influencia en el tiempo de respuesta según el ángulo de giro y la presencia de simetrías. El tiempo de valoración de las respuestas se incrementaba según el ángulo de rotación y aumentaba con la presencia de reflexiones (Petrusic, Varro y Jamieson, 1978). Este aumento en los grados de ángulo de giro, también se ha asociado a un aumento en la complejidad y a una disminución del rendimiento (Alansari, Dere y McGeorge, 2008; Xu, Kim y Lewis, 2016). En este sentido se siguen demandando investigaciones específicas sobre las características geométricas relativas a la dirección y ángulo de rotación en los ítems y que infieren diferencias de género (Maeda y Yoon, 2016), así como de la complejidad de las formas geométricas utilizadas en los test (Arendasy y Sommer, 2012).

Sin embargo, en este primer estudio no se ha detectado la mayor complejidad asociada a un mayor ángulo de giro. La habilidad Percepción de la posición en el espacio, permite al sujeto relacionar la posición de la figura respecto a él mismo o respecto a la muestra. En esta relación podría influir el ángulo de giro, implicando un menor movimiento (menor dificultad) como en los ángulos más pequeños o siendo más reconocibles los ángulos más perceptibles como los de 90 o 180 grados. La simetría en el test se identifica como un movimiento entre la muestra y la figura, suponiendo la existencia de simetría una respuesta incorrecta. Las muestras utilizadas no presentaban simetrías, por lo que tampoco aporta información sobre la complejidad de la figura asociada a la presencia de simetrías.

Con este análisis tampoco se establece una relación entre el rendimiento y los contactos que forman la figura. La distinción entre cruces, apoyos y prolongaciones no ha mostrado resultados para caracterizar los ítems con mayor número de fallos. Se considera necesario seguir indagando en los aspectos relativos a esta componente que permitan caracterizar la mayor complejidad de las formas geométricas (Arendasy y Sommer, 2012; Maeda y Yoon, 2016). La utilización de figuras menos complejas y más familiares podría favorecer un uso más efectivo de la habilidad Memoria visual. Sin embargo, un triángulo menos la mitad de uno de sus lados ha supuesto uno de los ítems con mayor número de errores.

Para resolver el test, los sujetos pueden utilizar distintas estrategias y combinaciones de las habilidades de visualización, por lo que consideramos necesario un estudio más complejo en el que se puedan establecer relaciones entre distintas combinaciones de las habilidades y de las componentes.

Se puede concluir que, en el ámbito psicológico, la capacidad visual de los estudiantes queda registrada por su rendimiento en test psicométricos. Sin embargo, identificar las propiedades geométricas que implican una mayor dificultad para los estudiantes en el uso de la visualización, puede aportar una información relevante para el diseño de tareas y los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Jaime y Gutiérrez, 1996).

Referencias

Alansari, B. M., DerEgowski, J. B. y McGeorge, P. (2008). Sex differences in spatial visualization of Kuwaiti school children. *Social Behaviour and Personality, 36*(6), 811-824.

Arendasy, M. E. y Sommer, M. (2012). Gender differences in figural matrices: The moderating role of item design features. *Intelligence, 40*(6), 584-597.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Nueva York: Macmillan.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. En M. M. Lindquist. (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37*(6), 14-20.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 19-24). Greece: Aristotle University of Thessaloniki.

Escrivá, M. T., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Flores, P., Ramírez, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico. (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid, España: Pirámide.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz y M. De la Fuente. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick. (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G. B.: Cambridge U. P.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Editorial Síntesis.

Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Kozhevnikov, M. y Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory and Cognition, 29*(5), 745-756.

Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. En O. George Booker, P. Cobb y T. Mendicuti. (Eds.), *Proceedings of 14th PME conference* (pp. 259-266). México: Program Committe of the 14th PME Conference.

Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (p. 45). Madrid, España: Pirámide.

Maeda Y. y Yoon, SY. (2016). Are gender differences in spatial ability real or an artifact? Evaluation Of measurement invariance on the revised PSVT: R. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *34*(4), 397-403.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics. National Council of Tearchers of Mathematics.* Recuperado de http://standards.nctm.org/

Petrusic, W. M., Varro, L. y Jamieson, D. G. (1978). Mental rotation validation of two spatial ability tests. *Psychological Research*, *4*0(2), 139-148.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnus con talent matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida. SEIEM.

Ramírez, R.; Flores, P. y Castro, E. (2012). Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. En M. Marín-Rodríguez y N. Climent-Rodríguez. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*. Ciudad Real: SEIEM.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga: SEIEM.

Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1976). *P.M.A.: Aptitudes Mentales Primarias.* Madrid: TEA.

Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 425-432). Prague: PME.

Xu, X., Kim, E. S. y Lewis, J. E. (2016). Sex difference in spatial ability for college students and exploration of measurement invariance. *Learning and Individual Differences,* 45, 176-184.

Zacks, J. M., Mires, J., Tversky, B. y Hazeltine, E. (2002). Mental spatial transformations of objects and perspective. *Spatial Cognition and Computation, 2*(4), 315-332.

DIEGO: UNA HISTORIA DE SUPERACIÓN DE ANSIEDAD MATEMÁTICA EN PROFESORES

Diego: A history of overcoming of mathematics anxiety in teachers

García-González, M. S.[a] y Martínez-Sierra, G.[a]

[a]Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen

Esta investigación reporta el caso de Diego, un profesor novel mexicano que imparte clases de matemáticas en nivel secundaria, quien experimentaba ansiedad matemática en sus clases, debido a que no conocía toda la matemática escolar que debía enseñar. Al ser detectada la situación, la primera autora de este escrito realizó con él un acompañamiento centrado en su conocimiento emocional y su conocimiento matemático. Después del acompañamiento Diego logró superar su ansiedad matemática y logró disfrutar la enseñanza de las matemáticas. La historia de superación de la ansiedad de Diego, se reporta desde el enfoque de la historia de vida.

Palabras clave: *profesor de matemáticas, ansiedad matemática, emociones.*

Abstract

This research reports the case of Diego, a Mexican novice teacher who teaches math at secondary School. Diego experienced mathematics anxiety in his classes, because he did not know the entire mathematics scholar he had to teach. When was detected the situation, the first author of this paper made a coaching focused on Diego emotional knowledge, after the coaching Diego managed to overcome his mathematics anxiety and managed to enjoy the teaching of mathematics. From the perspective of the history of life is reported Diego's journey.

Keywords: *mathematics teacher, mathematics anxiety, emotions.*

LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN PROFESORES

Entendemos la ansiedad matemática, como un conjunto de emociones negativas acerca de un estado de disconfort, que ocurre en respuesta a situaciones que implican tareas matemáticas. La ansiedad matemática es el fenómeno emocional más estudiado en los profesores de matemáticas en formación de la escuela primaria en muchos países (Bekdemir, 2010) y se ha evidenciado que ésta puede interferir seriamente en quienes la padecen para convertirse en buenos profesores de matemáticas (Hannula, Liljedahl, Kaasila, y Rösken, 2007). Por ejemplo, Marbán, Maroto y Palacios (2016) reportan que las asignaturas relacionadas con la Didáctica de la Matemática en los grados de formación de maestros de Primaria no reducen los niveles de ansiedad matemática que los estudiantes presentaban al inicio de sus estudios en relación con las matemáticas. Y señalan que se tornan necesarias intervenciones específicas y en cierto modo individualizadas para abordar esta problemática. Respecto a los profesores en servicio, se sabe que quienes experimentan ansiedad matemática pueden transmitirla a sus alumnos (Brady y Bowd, 2005; Sloan, 2010).

Debido a este panorama emocional desencadenado por la ansiedad matemática entre profesores y futuros profesores, algunos investigadores enfatizan la importancia de prevenirla o superarla para mejorar la calidad del aprendizaje matemático (Coppola et al., 2012; Hannula et al., 2007). Particularmente Hannula et al. (2007) mencionan cuatro métodos para reducir la ansiedad matemática mediante el manejo de las experiencias de sus años en la escuela primaria o secundaria o de sus años durante su formación como profesores: (1) *Rehabilitación narrativa*; mediante la cual los profesores en formación reciben oportunidades para contar historias sobre sus recuerdos como

García-González, M. S. y Martínez-Sierra, G. (2018). Diego: Una historia de superación de ansiedad matemática en profesores. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 221-230). Gijón: SEIEM.

estudiantes y compartir sus experiencias con otros en pequeños grupos, (2) *Biblioterapia*; en donde los profesores en formación antes de sus prácticas de enseñanza leen biografías matemáticas producidas por un estudio de rehabilitación narrativa, centrándose en la que más se parecía a su propia historia, (3) *Escritura reflexiva*; a través de la cual los profesores en formación durante o después de sus prácticas de enseñanza producen un diario reflexivo que se componen de sus reflexiones de las lecciones de matemáticas y (4*) dibujo de imágenes esquemáticas*; en donde los profesores en formación dibujan mapas mentales o imágenes esquemáticas de sus puntos de vista de las matemáticas al principio y al final de un curso.

Nosotros nos unimos al llamado de estos investigadores, y abogamos por aliviar la ansiedad matemática en los profesores y futuros profesores que la padecen. Por ello realizamos una investigación, mediante un estudio de caso, cuyo objetivo fue aliviar la ansiedad matemática de un profesor novel centrando la atención en el conocimiento de las emociones que experimentaba durante su enseñanza y de su conocimiento matemático. En esta comunicación reportamos la superación de la ansiedad matemática, mediante el testimonio del profesor que vivió la experiencia, usamos para ello el método biográfico conocido como historia de vida.

LA HISTORIA DE VIDA

Entendemos la historia de vida como el relato autobiográfico, obtenido por el investigador mediante entrevistas sucesivas en las que el objetivo es mostrar el testimonio subjetivo de una persona en la que se recogen tanto los acontecimientos como las valoraciones que dicha persona hace de su propia existencia (Pujadas, 2012). Tarres (2008) señala que las historias de vida pretenden capturar la totalidad de una experiencia biográfica. Debido a la naturaleza de nuestra investigación, decidimos utilizar el método biográfico para reportar la superación de la ansiedad matemática del maestro participante. La historia inicia cuando detectamos en él la ansiedad matemática y termina cuando la supera. En la historia se desatacan los periodos de mayor intensidad y aquellos en que ésta fue disminuyendo hasta llegar a experimentarse el disfrute por enseñar matemáticas.

Las historias de vida han sido utilizadas en la formación de profesores de matemáticas. Así, los relatos autobiográficos recopilados durante las entrevistas con los docentes informan sobre la *identidad* del docente (Kaasila, Hannula, Laine, y Pehkonen, 2007), sus *creencias* (Kaasila, Hannula, y Laine, 2012), su *motivación* (Phelps, 2010), sus *emociones y actitudes* (Di Martino y Zan, 2009) y su *conocimiento matemático para la enseñanza* (Oslund, 2011).

Más recientemente algunos investigadores han indagado sobre cómo los profesores interpretan sus experiencias con la ansiedad matemática y cómo se conectan lo largo del tiempo para componer historias personales de ansiedad. Por ejemplo, Stoehr (2017) encontró que las futuras maestras de primaria pueden interpretar la ansiedad matemática como un temor específico (por ejemplo, la pérdida de oportunidades para la participación social, pérdida de identidad personal o pérdida de la competencia práctica) y que pueden desarrollar estrategias de afrontamiento particulares relacionadas con esos temores. En este mismo sentido, creemos que hay una necesidad de más investigación acerca de cómo los profesores logran superar la ansiedad matemática, ahí la contribución de nuestra investigación desde la perspectiva de la historia de vida.

METODOLOGÍA

Contexto y participante

En el marco del programa de Maestría en Docencia de la Matemática, ofertada por la Universidad Autónoma de Guerrero, en México, la primera autora de este escrito conoció a Diego, y reconoció en él indicios de ansiedad matemática, situación ocasionada por su poco conocimiento matemático que provocaba un rechazo hacia la enseñanza de las matemáticas. El caso de Diego nos pareció representativo de la situación a la que un profesor novel puede enfrentarse al dar clases de matemáticas y por eso decidimos darle seguimiento y tratar de aliviar su ansiedad matemática. En reuniones con Diego se platicaron estas intenciones, el aceptó participar a sabiendas de que pretendíamos documentar su caso con miras a hacerlo público ocultando su identidad.

Para empezar el seguimiento, la primera autora de este escrito comenzó con Diego un acompañamiento centrado en su conocimiento emocional y su conocimiento matemático, esto es, el conocimiento de las emociones que él experimentaba y de las situaciones que las desencadenaban, y el conocimiento que tenía de la matemática que enseñaba. Aunado a ello se le brindaron a Diego asesorías matemáticas y se observó su práctica docente de Mayo a Julio de 2017. Gracias a esto pudimos reconocer que él realmente estaba padeciendo ansiedad matemática y que ésta guiaba fuertemente las decisiones que tomaba en el aula. Nuestro reto era tratar de aliviar su ansiedad matemática.

Diego (pseudónimo) es arquitecto de formación y tiene 39 años de edad (en 2017). Ser profesor de matemáticas se le presentó como una oportunidad y él decidió aceptarla a la vez que continúa ejerciendo la profesión de arquitecto. Su labor como profesor de matemáticas en secundaria empezó en el ciclo escolar 2015-2016 en Chilpancingo, ciudad capital del Estado de Guerrero, México, y se le asignó el segundo grado de Secundaria. En el momento en que se inició esta investigación Diego impartía clases de matemáticas en segundo de secundaria (estudiantes de 12-15 años de edad) en el ciclo escolar 2016-2017 y se encontraba cursando el primer año de Maestría en Docencia de la Matemática.

Recogida de datos

La recopilación de datos estuvo a cargo de la primera autora en el marco de una interacción personal con Diego. Se usaron diferentes instrumentos acordes a dos contextos específicos de interacción: las asesorías de acompañamiento y el salón de clases de Diego.

El acompañamiento de Diego se realizó desde Febrero a Julio de 2017. Las asesorías del acompañamiento fueron videograbadas y se dividieron en diferentes actividades:

1. Discusión sobre 4 métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, igualación, reducción, sustitución y método gráfico; en las asesorías se aclaraban las dudas de Diego respecto a cómo aplicar cada uno de los métodos mediante ejemplos concretos, después de la explicación se le dejaban una serie de ejercicios, mismos que se revisaban con el fin de comprobar que diego había comprendido como emplear cada uno de los métodos.
2. Entrevista semiestructurada para profundizar en la historia de Diego como profesor de matemáticas y de las emociones que experimentaba durante la enseñanza; para conocer su historia como profesor de matemáticas se le pidió que contara cómo llegó a ser profesor de matemáticas, para conocer sus emociones en la enseñanza se le plantearon las siguientes preguntas: ¿qué emociones o sentimientos experimentas en la clase de matemáticas?, ¿cuáles son las principales experiencias positivas/negativas que has tenido como profesor de matemáticas?, ¿en qué circunstancias y situaciones has experimentado felicidad o alegría como profesor de matemáticas?, y ¿en qué circunstancias o situaciones has experimentado tristeza o pesar como profesor de matemáticas?
3. Entrevista semiestructurada para profundizar en las emociones de Diego en las clases de la maestría. Se le plantearon las siguientes preguntas: ¿qué emociones o sentimientos experimentas en tus cursos de la maestría?, ¿cuáles son las principales experiencias positivas/negativas que has experimentado en estos cursos?

Las clases de Diego en secundaria dedicadas a los métodos de solución de ecuaciones lineales (Mayo-Julio de 2017) fueron videograbadas para observar su comportamiento frente al grupo, y se seleccionaron al azar a 4 estudiantes de estas clases para entrevistarlos y conocer algunas opiniones que tenían de Diego. Las entrevistas y algunos episodios de las clases fueron transcritos en su totalidad.

El tipo de relación personal que implica el método de las historias de vida y el involucramiento que eventualmente se produce entre el investigador y el participante, aportan una evidencia fundamentalmente sobre la percepción de éste último acerca de su vida o de una parte significativa de ella (Denzin, 1989). En nuestro caso, durante el acompañamiento, Diego y la primera autora establecieron una relación personal de confianza que ayudó a obtener los datos de manera fluida en cada uno de los instrumentos aplicados. Diego, además, siempre estuvo disponible para proporcionar información adicional a la de la evidencia recolectada.

En la Tabla 1 se muestran las fases seguidas, propuestas por Pujadas (1992), para la construcción de la historia de vida.

Tabla 1. Fases para la construcción de la historia de superación de ansiedad matemática de Diego

Fases	Descripción
Explicitación de los criterios de selección del informante	Explicitar los criterios de selección del caso: El caso de Diego, un profesor novel de matemáticas de secundaria.
Recopilación de datos	Disponer de toda la información biográfica, para ello se usaron los siguientes instrumentos: Entrevistas biográficas, observaciones de clase, entrevistas a 4 estudiantes de Diego.
Registro, transcripción y elaboración del relato biográfico	Recolectar información y transcribirla. Las entrevistas y las observaciones de clase se videograbaron, las entrevistas fueron transcritas en su totalidad al igual que algunos episodios de las clases. Construir el relato biográfico con base en una trayectoria temporal.
Análisis e interpretación	Identificar proceso de cambio y transformación en el relato. Momentos de mayor o menor intensidad de la ansiedad matemática.
Presentación y publicación de la historia	Escribir la historia de vida Se describe la historia de alivio de la ansiedad matemática de Diego en 4 momentos

Análisis de datos

Para escribir la historia de Diego delimitamos una trayectoria temporal desde que él comenzó a impartir clases de matemáticas en julio de 2015 hasta que terminó el acompañamiento en julio de 2017. La trayectoria temporal constituye una vía que permite percibir que el relato se desarrolla a través del tiempo como un proceso de cambio y transformación, mediante su uso se evita tanto una visión fragmentaria de la biografía como una visión rígida (Tarres, 2008). Estos procesos de cambio los previmos desde un principio como aquellos en donde la ansiedad de Diego aumentara, disminuyera o desapareciera.

En la evidencia recolectada se identificaron emociones negativas y positivas y las situaciones que las desencadenaron, dependiendo de éstas las asociábamos a la ansiedad alta (mayor número de emociones negativas) o baja (pocas o nula emociones negativas, presencia de emociones positivas). Una vez que las identificamos las agrupamos respecto al tiempo en el que se manifestaron, de esta manera encontramos 4 momentos en los que la ansiedad de Diego se manifestó en niveles altos y bajos. Una vez identificados estos momentos fueron comunicados a Diego, quien nos confirmó que verdaderamente correspondían a los grados de ansiedad identificados, además nos brindó mayor información en algunos casos de las situaciones que desencadenaban sus emociones. Por ejemplo, nos habló del apoyo que tuvo con uno de sus compañeros en la maestría, y del papel que jugaba su libreta de apuntes en sus clases, situaciones que no estaban presentes en los datos iniciales que teníamos.

RESULTADOS

Identificamos 4 periodos en la historia de alivio de la ansiedad matemática de Diego. Los dos primeros son de ansiedad matemática alta, en el tercer periodo la ansiedad matemática comienza a disminuir, y en el último es en dónde la ansiedad matemática se convierte en disfrute. En la Tabla 2 mostramos los periodos y acontecimientos específicos que delimitan la historia de alivio de ansiedad matemática de Diego.

Tabla 2. Periodos y acontecimientos de la historia de alivio de la ansiedad matemática de Diego

Periodos	Acontecimientos
Periodo 1: La ansiedad matemática se desencadena (Julio de 2015-Julio de 2016)	Diego se siente agobiado por su escaso conocimiento de los temas matemáticos Diego siente miedo por enseñar matemáticas en secundaria Diego condiciona su enseñanza a su conocimiento matemático
Periodo 2: Diego como estudiante de la Maestría (Agosto de 2016-)	Diego incrementa su ansiedad matemática Diego encuentra apoyo en un compañero de la maestría
Periodo 3: Acompañamiento de Diego (Mayo-Julio de 2017)	Diego reflexiona sobre su práctica docente Diego no se reconoce como profesor de matemáticas Diego disminuye su ansiedad en las clases como profesor de secundaria
Periodo 4: Diego comienza a disfrutar sus clases en secundaria (Mayo de 2017-)	Diego aumentó su conocimiento de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 Diego mejora la relación con sus estudiantes Diego gana confianza a través de su libreta de apuntes Diego se compromete con la enseñanza de las matemáticas

En lo que sigue, la historia de superación de la ansiedad matemática de Diego la contamos los autores de este escrito y después de cada interpretación damos voz a Diego y a sus estudiantes, como sustento empírico de la historia que hemos elaborado. Esta historia fue compartida con Diego y él estuvo de acuerdo en que reflejaba adecuadamente su experiencia.

En las intervenciones de Diego y sus estudiantes seguimos algunas convenciones tipográficas. Usamos **negritas para resaltar un acontecimiento**, *cursivas para resaltar palabras emocionales que nos den cuenta de la ansiedad matemática* y <u>el subrayado lo usamos cuando queremos llamar la atención sobre un hecho</u>, usamos corchetes para hacer intervenciones o aclaraciones de lo dicho por el entrevistado. Enseguida mostramos un ejemplo.

> **Diego**: Cuando inicié en segundo año **como mi conocimiento de la matemática era muy poco** *me sentía frustrado* **por no poder enseñar más** [situación desencadenante]…En mi caso **el desconocimiento de algo** me da *temor* [palabra emocional], y ese temor *me agobiaba*, <u>ese agobio creo que se notaba en la clase con mis alumnos</u> [queremos resaltar en el discurso que el agobio era percibido por los alumnos] porque *estaba molesto, irritable, no me concentraba*.

Periodo 1: La ansiedad matemática se desencadena (julio 2015-julio 2016)

En esta primera etapa descubrimos a Diego como un profesor de matemáticas de secundaria que sufre ansiedad matemática por enseñar los temas del currículum. Ésta tiene como situación desencadenante su escaso conocimiento de dichos temas.

Presentamos a continuación 3 acontecimientos dónde hemos identificado la ansiedad matemática de Diego.

Diego se siente agobiado por su escaso conocimiento de los temas matemáticos

Diego comenzó su labor docente en secundaria en la asignatura de Tecnología en el ciclo escolar 2014-2015, para él no representaba problemas pues tenía dominio de los conocimientos que demandaba esta asignatura. Por su perfil de arquitecto fue elegido entre el resto de profesores colegas para impartir el curso de matemáticas 2 en el ciclo 2015-2016, que quedó vacante en la secundaria al jubilarse el profesor que lo impartía. La ansiedad matemática en Diego se desencadenó en el momento que comenzó el curso de matemáticas 2, debido a que conocía muy poco de los temas del currículum oficial de este grado escolar. Identificamos la ansiedad en su discurso cuando nos cuenta que se sentía frustrado, agobiado, estaba molesto, y no se concentraba por la situación que estaba atravesando.

> **Diego**: Cuando inicié en segundo año **como mi conocimiento de la matemática era muy poco** *me sentía frustrado* **por no poder enseñar más**…En mi caso **el desconocimiento de algo** me da *temor*, y ese temor *me agobiaba*, ese *agobio* creo que se notaba en la clase con mis alumnos porque <u>estaba molesto, irritable, no me concentraba</u>.

Diego siente miedo por enseñar matemáticas en secundaria

Al inicio de su práctica docente Diego experimentaba miedo por no conocer los temas que iba a enseñar. Particularmente las fracciones le causaban miedo, debido a que no estaba acostumbrado a trabajar con ellas y en las clases trataba de evitarlas lo más posible, él creía que el miedo que sentía lo transmitía a sus estudiantes.

> **Diego**: *Yo le tengo miedo a las fracciones*, **por qué no estoy familiarizado con ellas, solo uso** las que son fáciles de manipular, <u>si son séptimos, onceavos, ahí empiezan los problemas</u>… El **año pasado** [2015-2016] **veíamos fracciones y no podían hacer operaciones** y les decía: - ¡eso lo tuvieron que haber visto en primero! -, <u>se los decía para que no me preguntaran</u> [se ríe]. Como yo, *ellos* [los estudiantes] *le tienen miedo a las fracciones*, <u>considero que yo los contagié</u>.

Diego condiciona su enseñanza a su conocimiento matemático

Las clases de Diego estaban condicionadas por su conocimiento matemático; cuando conocía los temas, los explicaba, en caso contrario pedía a los estudiantes que los expusieran por equipo. Reconoce la facilidad que esta estrategia le brindaba como docente pero afirma estar consciente de que no fue buena pues no hubo aprendizaje de los temas por parte de los estudiantes.

> **Diego**: **Como no dominaba los temas** <u>ponía a exponerlos por equipos y con eso los evaluaba</u>, pero no creo que aprendieran… **Yo ni estudiaba**, **ni hacía el esfuerzo por aprender más**, <u>lo fácil para mí, era ponerlos a exponer.</u>

Periodo 2: Diego como estudiante de la Maestría (Agosto de 2016 -)

Para el ciclo escolar 2016-2017, Diego se enteró de que existía una maestría en Docencia de la Matemática y decidió ingresar a ella porque consideraba que hacerlo iba a ayudarle a mejorar como profesor de matemáticas. Se preparó para acreditar cada uno de los exámenes que se exigían en el proceso de admisión. Comentó que se sentía un poco inseguro de ser seleccionado, y cuando le comunicaron que había sido admitido se sintió feliz y orgulloso de sí mismo. En el primer semestre de la maestría (julio 2016-febrero 2017), su ansiedad matemática se incrementó porque llevó un curso de álgebra; área en la que tenía pocos conocimientos. Como estudiante tenía que cumplir con las tareas asignadas en este curso y esto lo agobiaba. A finales del primer semestre encontró apoyo en uno de sus compañeros de maestría para explicarle los temas que Diego no comprendía. Esta segunda etapa se forma de 2 acontecimientos, que enseguida describimos.

Diego incrementa su ansiedad matemática

En los primeros cursos de la maestría la ansiedad matemática que Diego sentía por ser profesor de matemáticas se incrementó como estudiante de matemáticas, debido a que algunos temas de sus cursos de matemáticas de la maestría no los comprendía. A pesar de la situación que vivía en la maestría, no pedía ayuda a sus profesores o sus compañeros y trataba de cumplir con las tareas asignadas.

> **Diego:** Me metí a la maestría para saber un poquito más, pero eso vino a agravar el problema, *me sentía más frustrado*, porque tenía que ver con los estudiantes matemáticas que no entendía y acá en la maestría también tenía que ver matemáticas [curso de álgebra], *me sentía agobiado* por tener que trabajar con matemáticas que me *hacían sentir incómodo*.

Diego encuentra apoyo en un compañero de la maestría

A finales del primer semestre, empezó a acercarse a un compañero de la maestría [en adelante P1] de formación ingeniero y con poca experiencia impartiendo clases de matemáticas. El conocimiento matemático de P1 era mayor al de Diego y lo ayudaba a aclarar dudas. Este apoyo desencadenaba en Diego alivio de su ansiedad matemática, pero seguía sintiéndose incómodo con la matemática, seguía sin entenderla.

> **Diego**: **Cuando tenía dudas** P1 me ayudaba, él me explicaba y yo le entendía, esto *me hacía sentirme mejor* con el agobio que sentía por no saber matemáticas, pero las tareas yo seguía haciéndolas solo.

Diego empezó también a convivir de manera cercana con P1 y con 3 compañeros más de la maestría, dos de ellos docentes de primaria y uno de secundaria.

Periodo 3: Acompañamiento de Diego (Mayo - Julio de 2017)

El acompañamiento con la primera autora representó para de Diego una especie de apoyo más sólido que el de P1, a quien dejó de consultar. Si bien este acompañamiento se centró solamente en los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, como tema matemático, logró desencadenar en Diego la confianza y seguridad de conocimiento matemático que necesitaba para enseñar en su aula. Durante el momento del acompañamiento, se abordaron 4 métodos de solución de ecuaciones lineales, igualación, eliminación, suma y resta y graficación. Posteriormente Diego realizaba ejercicios en su libreta, resolver los ejercicios de manera correcta le brindaba la seguridad de que en clase cuando explicara el método no se equivocaría, o que si los alumnos tenían alguna duda, él podría aclarárselas. Enseguida se describen 3 episodios que componen este momento.

Diego reflexiona sobre su práctica docente

Para reflexionar sobre su práctica docente la primera autora de este escrito acudió a una clase de Diego y la videograbó, después le pidió a Diego que comentara a cerca de su rol como profesor. Al verse impartiendo clases Diego se vio así mismo como un profesor que sólo se dirigía a los alumnos que ponían atención.

> **Diego**: Fue *sorprendente* verme dando clase, **me recordó cuando yo era estudiante de secundaria** y **sentía al maestro de matemáticas** como una persona inaccesible, que no toma en cuenta la parte afectiva de sus alumnos y solo se enfoca en los que participan.

Diego no se reconoce como profesor de matemáticas

Al indagar sobre su autoconcepto como profesor de matemáticas encontramos que Diego se reconocía como un arquitecto impartiendo clases de matemáticas, no como un profesor de matemáticas.

> **Diego**: **No me considero maestro**, **yo soy arquitecto**, me considero un buen arquitecto, porque *me apasiona esa profesión*, no puedo ser bueno en algo que *no me apasiona*, eso me pasa con ser profesor… yo no me formé ni quería ser profesor.

Diego disminuye su ansiedad en las clases como profesor de secundaria

La ansiedad de Diego disminuía en la medida que comprendía los temas que iba a enseñar, la estrategia que se siguió para lograrlo fue lograr que comprendiera el tema y luego fijarlo mediante la resolución de ejercicios. De los dos años que llevaba impartiendo clases, fue el segundo de estos en el que abordó el tema de métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, antes dejaba que los estudiantes los expusieran. Durante 3 meses Diego estuvo trabajando estos métodos en las clases de secundaria con la finalidad de que los estudiantes los comprendieran, su técnica de enseñanza consistía en explicarles a los alumnos de la forma en que él había aprendido, esto es, explicarles paso a paso cada uno de los métodos y posteriormente dejarlos que hicieran ejercicios para practicar el método.

> **María**: ¿Por qué decidió explicar los métodos, paso por paso?
>
> **Diego**: **A veces me pasa que estoy en el pizarrón y se me olvida un paso,** entonces para mi es *más fácil seguir una secuencia de pasos*, porque un paso lleva al otro, así no pierdo la secuencia de lo que estoy trabajando… Mi insistencia en que resuelvan paso a paso es también porque así puedo revisar lo que les salió mal, al hacerlo por pasos puedo tener control del proceso si se equivocan.

Periodo 4: Diego comienza a disfrutar sus clases en secundaria (Mayo de 2017)

La ansiedad de Diego la desencadenaba la falta de conocimiento matemático, esto le ocasionaba inseguridad para enseñar. Al adquirir conocimiento matemático, la ansiedad matemática se convirtió en disfrute, pues Diego conocía la matemática que iba a enseñar. Aunado a ello, los nuevos cursos y actividades de la maestría y la experiencia que iba acumulando como docente y estudiante influyeron para que esta ansiedad desapareciera por completo. Esta situación trajo consecuencias positivas, la más notoria fue el cambio en la relación de Diego con sus estudiantes y la manera en como conduce sus clases. Presentamos a continuación 4 episodios en dónde se evidencia el disfrute de Diego como profesor y como estudiante de matemáticas.

Diego aumentó su conocimiento de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2

El aumento del conocimiento matemático se evidenció en el tema de sistemas de ecuaciones lineales, esto fue producto del acompañamiento y del repaso de Diego mediante la realización de ejercicios, estos ejercicios después los exponía en clase con la certeza de que no se habría de equivocar y podría atender las dudas que resultaran.

> **Diego**: **Cuando un problema no me sale**, ya ve que vengo [asesorías con la primera autora] y lo discutimos, y me voy y resuelvo otro, y **si ese no me sale**, *me agobio*, y pienso en para qué quiero que me salga el problema y estudiar tanto, pero **cuando ya me está saliendo** me empieza *a gustar y me olvido de esos pensamientos, me animo*.

Diego mejora la relación con sus estudiantes

El cambio de Diego impactó la relación con sus estudiantes, dejó de ser el profesor estricto para convertirse en un profesor accesible para sus estudiantes.

> **María**: ¿Y cómo es ahora la relación con sus estudiantes?
>
> **Diego**: *La disfruto mucho*, **es más cercana, me intereso por ellos**… **Quiero que el encuentro de ellos con las matemáticas no sea traumante**, quiero borrar esa idea del profesor que sabe todo, que es muy estricto, que yo no les infunda miedo.

Los estudiantes de Diego percibieron su cambio y les gustaba este nuevo profesor en el que se ha convertido:

> **Alumna2**: He visto un cambio en él [Diego] **porque antes no le entendía nada**, y me preguntaba yo que estaba haciendo aquí, porque no le entendía, pero ahora ya le entiendo.
>
> **Alumna5**: **Ha mejorado su forma de explicar**, ahora ya le entiendo.

Diego gana confianza a través de su libreta de apuntes

En las observaciones de sus clases notamos que Diego cuando explicaba un tema o realizaba un ejercicio en el pizarrón siempre portaba su libreta de apuntes, este recurso le brindaba seguridad.

> **Diego**: **Siempre estoy con la libreta** *para que yo tenga seguridad de lo que hago y lo que digo*. Dos veces en clase no supe resolver un problema, y pensé en ya no arriesgarme y **decidí trabajar ejercicios con todos los métodos** [sistemas de ecuaciones], en la libreta tengo todo resuelto, la tengo conmigo por si hay algo en que me atoro, **solo veo la libreta y ya sé cómo resolver**, casi no la veo cuando estoy explicando, *pero tenerla ahí me da seguridad*.

Diego se compromete con la enseñanza de las matemáticas

En el salón de Diego había dos estudiantes con discapacidad, un estudiante hombre con hipoacusia bilateral profunda y una estudiante mujer con discapacidad intelectual. Este tipo de estudiantes se insertan en los grupos de clase pero se les deja que trabajen con materiales específicos, por ejemplo una serie de ejercicios aritméticos. Él reconoció que trabajar con ellos le representaba problemas a la hora de dar sus clases, pues no podía atenderlos y descuidar el resto de la clase y decidió buscar la manera adecuada de hacerlo mediante su trabajo de tesis. La sensibilidad e interés de Diego por los estudiantes con discapacidad nos muestra la imagen de un profesor comprometido con su práctica docente.

> **Diego**: **Yo pensaba que no lograría titularme de la maestría con una tesis**, porque es *muy difícil*, pero ya tengo mi protocolo de investigación, <u>trabajaré con estudiantes con discapacidad</u>, en este momento me siento motivado para seguir estudiando. Usted me conoció como empecé, un poco reacio, todavía estaba en esa etapa donde me preguntaba que hacía en esta maestría, pero **mi trabajo fue lo que me obligó**, **fue más obligación que gusto**, pero ahora que estoy aquí, *me gusta y lo disfruto*.

CONCLUSIONES

El caso de ansiedad matemática de Diego, puede ser representativo de los profesores noveles, quienes, aunque comprometidos con su labor, en sus primeros años experimentan emociones negativas como confusión, estrés y ansiedad al enseñar matemáticas, mismas que superan con el paso de los años, sin embargo, el caso de Diego resulta especial por varias razones, él no tenía la formación para ser docente de matemáticas, no tenía el deseo de ser profesor, esta profesión se le presentó por casualidad, y se inscribió en una maestría en docencia de la matemática para convertirse en profesor de matemáticas. De la historia de Diego podemos aprender que la ansiedad matemática se puede superar cuando hay un reconocimiento explícito por quien la padece, disposición para superarla, además de tener claridad en la situación que desencadena la ansiedad y trabajar para superarla. En el caso de Diego, el conocimiento matemático era el detonante de su ansiedad, una vez ganando conocimiento matemático la ansiedad se redujo. El programa de maestría que Diego cursaba y el acompañamiento, nos muestra que la superación de la ansiedad matemática pudo ser posible gracias a un colectivo de personas, los profesores de la maestría, los compañeros de clase, y los investigadores de este escrito, Diego nunca estuvo solo.

De acuerdo con Zembylas (2005), la importancia de conocer las emociones de los profesores radica en el impacto de éstas para la labor docente, el caso de Diego es un ejemplo, conocer sus emociones y gestionarlas tuvo un impacto positivo en su práctica docente. La falta de conocimiento matemático desencadenaba su ansiedad matemática, para superarla debía de adquirirlo, al hacerlo ganó confianza en él y esto lo llevó a explicar los temas en su salón de clase y a mostrarse dispuesto a atender las dudas de sus estudiantes. Berenguel, Montoro y Moreno (2015) señalan que la autoconfianza de los profesores en formación influye en su resolución de tareas matemáticas, en el caso de Diego encontramos indicios de esta relación, pues cuando sentía confianza respecto del tema, lo enseñaba a sus alumnos, por el contrario, cuando lo desconocía lo evadía.

La recreación de la historia de superación de ansiedad matemática de Diego mediante el método de la historia de vida, nos parece apropiada para documentar las vivencias de los profesores de matemáticas, además de tener potencial para convertirse en una herramienta para la reflexión de la práctica docente.

Referencias

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328.

Berenguel, E., Gil, F., Montoro, A. B. y Moreno, M. F. (2015). Influencia de la autoconfianza y el perfil motivacional en el "flujo" en matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 173-181). Alicante: SEIEM.

Brady, P. y Bowd, A. (2005). Mathematics anxiety, prior experience and confidence to teach mathematics among pre-service education students. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *11*(1), 37-46.

Carter, K. (1993). The place of story in the study of teaching and teacher education. *Educational Researcher*. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/10.2307/1177300

Coppola, C., Martino, P. Di, Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Matematics Education*, *17*(3-4), 107-123.

Denzin, N. (1989). *Interpretive Biography*. Newbury Park, California: Sage.

Di Martino, P. y Zan, R. (2009). "Me and maths": towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27–48. doi: 10.1007/s10857-009-9134-z

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R. y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. P. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153-156). Seoul, Korea.

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A. y Pehkonen, E. (2007). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 111-123. doi: 10.1007/s10649-007-9094-0

Kaasila, R., Hannula, M. y Laine, A. (2012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" analyzing preservice teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 975-995.

Marbán, J. M., Maroto, A. y Palacios, A. (2016). Evolución de la ansiedad matemática en los maestros de Primaria en formación. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 615). Málaga: SEIEM.

Oslund, J. A. (2011). Mathematics-for-teaching: what can be learned from the ethnopoetics of teachers' stories? *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 293–309. doi: 10.1007/s10649-011-9348-8

Phelps, C. M. (2010). Factors that pre-service elementary teachers perceive as affecting their motivational profiles in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 293–309.

Pujadas, J. J. (1992): *El método biográfico*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

Sloan, T. (2010). A quantitative and qualitative study of math anxiety among preservice teachers. *Educational Forum*, *74*(3), 242-256. doi: 10.1080/00131725.2010.483909

Stoehr, K. J. (2017). Mathematics Anxiety: One Size Does Not Fit All. *Journal of Teacher Education*, *68*(1), 69-84. doi: 10.1177/0022487116676316

Tarres, M. (2008). *Observar escuchar y comprender: Sobre la tradición cualitativa en la investigación social*. México: Porrúa.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.

ANÁLISIS DE LA PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE DE UNA FUTURA MAESTRA

Analysis of the learning progression of a future teacher

García-Honrado, I.[a], Clemente, F.[b], Vanegas, Y.[b], Badillo, E.[b] y Fortuny, J. M.[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de esta comunicación es evidenciar el progreso de aprendizaje de una futura maestra a lo largo del proceso de resolución de tareas matemáticas, que involucran la identificación inicial de elementos matemáticos, la generalización de patrones geométricos y la reformulación de contenidos matemáticos en un contexto artístico. Se estudia los cambios en el conocimiento matemático en uso a través de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Verificamos la progresión de aprendizaje que evidencia la futura maestra, contrastando el conocimiento logrado con la progresión hipotética de aprendizaje diseñada, a priori. Su progreso de aprendizaje revela procesos de exploración vinculados a la visualización, que le permiten establecer relaciones entre las propiedades geométricas, modificando su conocimiento matemático inicial.

Palabras clave: *trayectorias hipotéticas de aprendizaje, progresión de aprendizaje, formación de maestros, generalización de patrones.*

Abstract

The aim of this communication is to show the learning progress of a trainee teacher throughout the process of solving mathematical tasks framed in the model of Hypothetical Learning Trajectories, and which involve the initial identification of mathematical elements, the generalization of geometric patterns and the reformulation of mathematical contents in an artistic context. It is shown some evidences of the progression of the trainee teacher's learning, and it is contrasted the knowledge achieved with the hypothetical progression of learning designed, a priori. The learning progress of the future teacher reveals exploration processes linked to visualization, which allow her to establish relationships between geometric properties, modifying the initial mathematical knowledge of the trainee teacher.

Keywords: *hypothetical learning trajectories, learning progress, teacher training, generalization of patterns.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad los programas de formación del profesorado se centran en el desarrollo de competencias docentes. Esta nueva visión implica considerar la formación del profesorado como un espacio para el desarrollo profesional (Sullivan y Wood, 2008; Silverman y Thompson, 2008; Climent et al., 2016). Las investigaciones centradas en la formación de profesores de matemáticas resaltan la necesidad de diseñar tareas que ayuden a los futuros maestros en su desarrollo profesional (Mason, 2002; Hill et al., 2008). Fernández, Llinares y Valls (2013) consideran que la adquisición de las competencias docentes implica que el futuro maestro use el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en la resolución de tareas profesionales, tales como: resolver problemas; diseñar actividades; planificar y gestionar secuencias; evaluar el pensamiento de los alumnos, etc.

Estudios recientes han considerado que el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) en el diseño de tareas profesionales puede contribuir al desarrollo de las competencias docentes

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

(Simon y Tzur, 2004; Bernabeu y Llinares, 2016, entre otros). Un aspecto interesante del uso de la THA en la formación de maestros es que ayuda a caracterizar e interpretar la progresión de aprendizaje de los alumnos cuando se enfrentan a la resolución de tareas matemáticas. No obstante, en esta comunicación utilizaremos el marco de la THA desde la perspectiva de formadores de maestros para desarrollar el conocimiento matemático necesario para la tarea de enseñar. En concreto, nos focalizaremos en el análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra (Patricia) dando cuenta de los cambios en el uso del conocimiento matemático que evidencia a lo largo de la implementación de las tareas de la THA, relacionadas con la generalización de patrones geométricos. Caracterizamos la progresión de aprendizaje contrastando el conocimiento logrado (trayectoria actual) por Patricia con la trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada, a priori.

Por otro lado, se estudian los cambios en el conocimiento matemático de Patricia promovidos por la implementación de la secuencia de tareas, ya que con anterioridad a las tareas de la THA se proponen unas tareas iniciales que involucran la identificación de elementos matemáticos en un contexto artístico, y posteriormente, se pide la reformulación de contenidos matemáticos en dicho contexto artístico.

El objetivo de esta comunicación se concreta en la siguiente pregunta de investigación: ¿se evidencia progreso de aprendizaje en el conocimiento matemático de una futura maestra a través de la resolución de tareas matemáticas enmarcadas dentro de una THA, relacionada con la generalización de patrones? El progreso tendrá dos vertientes, por un lado, teniendo en cuenta los cambios de conocimiento mostrados a lo largo del desarrollo de estas tareas, y por otro lado, contrastando la identificación de elementos matemáticos en un contexto artístico inicial con la reformulación de estos contenidos tras finalizar las tareas de la THA.

MARCO TEÓRICO

Para este trabajo tomamos como referencia un sistema de dos ejes teóricos: el conocimiento especializado del profesor de matemática y las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Las investigaciones sobre la formación del profesorado han puesto de manifiesto la importancia de focalizar la atención en las características de los procesos de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas que pueden emerger en entornos formativos (Silverman y Thompson, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008; Climent et al., 2016, entre otros). Uno de los focos para dar cuenta de la progresión de aprendizaje de los futuros maestros es el análisis del tipo de conocimiento especializado que ponen en juego cuando resuelven diferentes tareas en el contexto de un entorno formativo. Desde el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) se asume que la noción de especialización es intrínseca al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el contenido, en cuanto a que contempla todos los conocimientos de índole matemática que el profesor necesita para enseñar (Climent et al., 2016). En este sentido, asumimos el conocimiento especializado de los futuros maestros como una conceptualización del conocimiento específico que poseen o podrían poseer para la enseñanza de las matemáticas.

La caracterización del conocimiento especializado nos permite una mejor comprensión de qué conoce el futuro maestro de matemáticas, cómo conoce, qué le posibilita dicho conocimiento y qué necesita. Llinares (2012) considera que la forma en la que este conocimiento se construye es importante porque ayuda a los futuros maestros a desarrollar destrezas para aprender, desde la propia práctica, los aspectos relevantes del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En concreto, caracterizar el conocimiento matemático que emerge en los procesos de resolución de tareas profesionales, nos proporciona herramientas para el diseño de propuestas de formación, que promuevan en los futuros maestros el desarrollo de procesos como razonar, argumentar, generalizar y hacer un uso con significado del conocimiento matemático.

En esta comunicación, se profundiza en el conocimiento matemático que muestra una futura maestra, centrándonos en los procesos de generalización de patrones geométricos (Radford, 2007). En concreto, las tareas dan cuenta de dos de los estadios de la progresión de aprendizaje propuesta por Zapatera y Callejo (2015). El primer estadio de coordinación de las estructuras numéricas y espaciales, implica que el alumno establezca relaciones entre las representaciones espaciales y numéricas (Duval, 2006). Esta coordinación es necesaria para explicar el fenómeno que se pretende generalizar y permite la exploración de regularidades. En el segundo estadio, se promueve la búsqueda de una relación funcional, a través de la profundización de las regularidades anteriormente descritas, para encontrar la regla general de la secuencia de cuadrados negros y grises en la obra de arte.

Sobre las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

En una THA, se distinguen los siguientes componentes: el objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético; es decir, la predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionan en el contexto de las actividades de aprendizaje (Simon, 1995). Se destaca especialmente la importancia de la tarea, su diseño, los objetivos de aprendizaje, los conocimientos previos de los estudiantes y la progresión hipotética de aprendizaje. Así mismo, se considera relevante reconocer los efectos de la secuencia de tareas en la progresión de aprendizaje de la futura maestra (Simon y Tzur, 2004).

A través de la THA, se muestran diferentes niveles de sofisticación por los que los estudiantes pueden pasar transformando sus ideas intuitivas a una comprensión más formal de los conceptos matemáticos. Los niveles cada vez más sofisticados de razonamiento matemático evidencian aspectos de la progresión de la comprensión de un contenido específico. Por todo lo anterior, se considera que las THA constituyen un recurso instructivo muy eficaz para la enseñanza. La THA proporciona al profesorado recursos relevantes para acompañar a cada estudiante en el logro de su aprendizaje. Indican también el estado actual de aprendizaje del alumnado y lo que le falta para lograr su progreso cognitivo a través de una secuencia de estados de aprendizaje.

MÉTODOLOGÍA

En esta investigación usamos una metodología etnográfica (Eisenhart, 1988). Abordamos el caso particular de una futura maestra, Patricia, que se analiza en profundidad, para evidenciar y hacer emerger su progreso de aprendizaje sobre los procesos de generalización de patrones y su posible impacto didáctico.

Contexto y tareas

Se diseñó un experimento de enseñanza que se implementó en una asignatura optativa con alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria e Infantil. En concreto, Patricia era alumna de ambas titulaciones. Este experimento constaba de 3 sesiones. En la primera sesión se plantearon tareas de exploración para la identificación de los elementos matemáticos de una obra de arte (Figura1). La segunda sesión estuvo centrada en tareas de generalización de patrones geométricos. Finalmente, la tercera sesión tenía como objetivo la reformulación de los contenidos matemáticos. La propuesta de tareas tiene un enfoque competencial (Walter, 2001; Pim, 2001) de las Matemáticas en el Arte (Figura 1), que permite ser adaptada a diferentes niveles educativos.

La primera sesión se estructura en tres tareas encaminadas a identificar los conceptos previos de los futuros maestros y favorecer un primer acercamiento al análisis matemático de la obra de arte. La tarea 1 y 2 perseguían identificar y relacionar intuitivamente conceptos geométricos en el contexto artístico. La tarea 3 está planteada para que los futuros maestros, a partir de la visualización del cuadro, reconocieran intuitivamente la relación entre el área de los cuadrados que aparecen en él. En las tareas 1, 2 y 3 se plantean las siguientes preguntas: observa la obra de arte por primera vez y enumera las sensaciones que le trasmite (T1); identifica los elementos matemáticos y las relaciones intuitivas que visualizas en la obra artística (T2); y, explica cómo crees que el autor construyó la obra de arte (T3). La sesión 1 permite conocer los conocimientos matemáticos previos de los que se parte para, según Simon y Tzur (2004), construir la THA.

La sesión 2 se estructura en 4 tareas que forman parte de la THA propuesta (Tabla 1). Para su diseño nos hemos inspirado en los estadios de Zapatera y Callejo (2015), aplicándolos al análisis de los cuadrados del contexto artístico que nos ocupa. Concretamente, la tarea 4, buscaba encontrar la relación entre los cuadrados de distinto color a partir de razonamientos matemáticos ligados a la visualización de las figuras geométricas de la obra artística. Las tareas 5, 6 y 7 pretendían que los futuros maestros argumentaran las relaciones entre áreas, las expresaran algebraicamente y llegaran a la generalización del patrón geométrico. Finalmente, en la tercera sesión se plantean las tareas 8 y 9, centradas en la reformulación de las ideas iniciales los elementos matemáticos y su uso en otras situaciones de enseñanza.

En esta investigación hemos construido la siguiente THA cuyo objetivo de aprendizaje es reconocer la generalización de patrones en la construcción de la secuencia geométrica de las figuras que aparecen en la obra artística “Composición aritmética” (Figura 1).

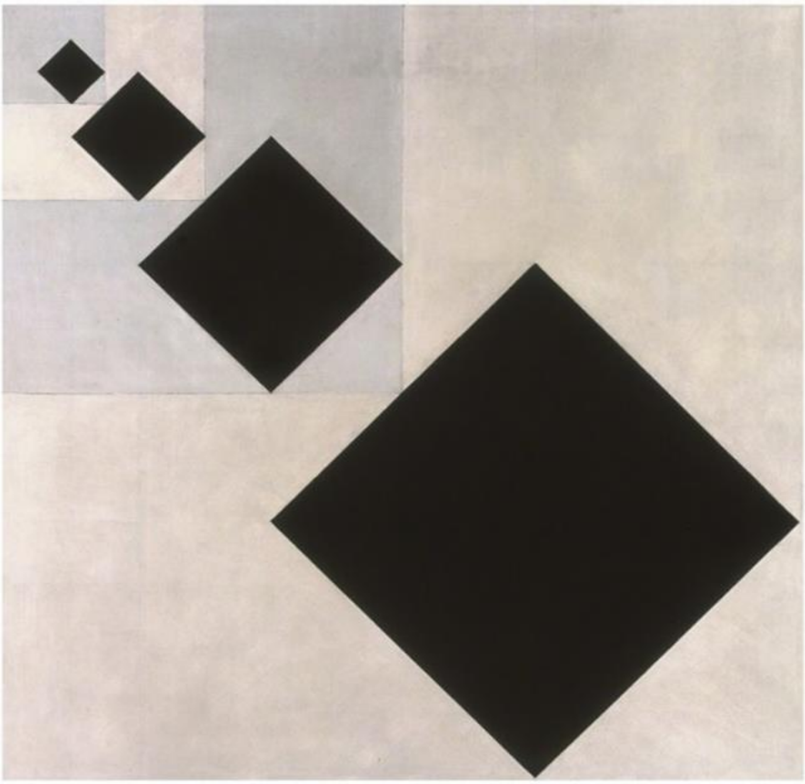
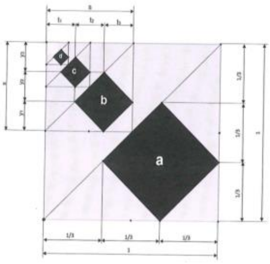
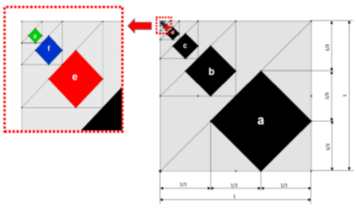


Figura 1. Arithmetic Composition. Theo van Doesburg, 1929-1930

Las tareas y la progresión hipotética de aprendizaje se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Tareas y progresión hipotética de aprendizaje.

Tarea de aprendizaje	Progresión hipotética de aprendizaje
Tarea 4. A partir de la obra de arte de la Figura 1, se ha construido la imagen que se muestra a continuación (la información que se incluye puede ayudar a resolver las tareas 5, 6 y 7).  Completa los datos que faltan en la figura, encontrando los valores de X, y1, y2, y3, s, t1, t2, t3. Justifica tu respuesta.	Estadio 1. Coordinación de la estructura espacial y la estructura numérica (a partir de las cotas) en la identificación de la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística.
Tarea 5. (a) En el cuadro gris grande de la Figura 1, ¿cuántas figuras "a" pueden colocarse sin superponerse? (b) Dentro de la figura negra "a", ¿cuántas figuras negras "b" podrías colocar?	Coordinación de la estructura espacial y la numérica de la secuencia de los cuadrados negros, estableciendo relaciones entre las áreas de los cuadrados negros de la Figura 1.
Tarea 6: En la Figura 1, (a) Calcula el área de la figura negra "a". (b) Calcula el área de la figura negra "b". (c) Calcula el área de las figuras negras "c" y "d".	Cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros, relacionando el valor del área de un cuadrado con el valor del área del anterior, lo que propicia la búsqueda de una regularidad funcional en el cálculo de esas áreas.
Tarea 7. Si continuáramos la secuencia de las figuras negras podríamos dibujar otras, tal y como se muestra en la ampliación siguiente.  ¿Sabrías calcular las áreas de las nuevas figuras "e", "f" y "g"? Explica cómo lo has hecho.	Estadio 2. Abstracción de la coordinación espacial y numérica para el establecimiento de la relación funcional entre el área de los cuadros negros.

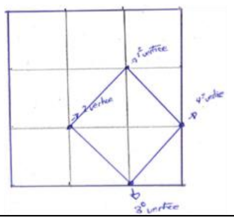
Análisis de datos

Los datos de esta investigación son los protocolos escritos de las tareas desarrolladas por el caso objeto de estudio. El análisis de los datos se realizó en tres fases. En la primera fase se analizaron las respuestas de Patricia a las tareas de la sesión 1, lo que permitió caracterizar su conocimiento matemático inicial sobre los elementos matemáticos de la obra artística: identificación de figuras geométricas; clasificación de polígonos; elementos de un cuadrado (polígonos); medida de longitudes y de área de las figuras geométricas; relación entre el área de los cuadrados del mismo color y de diferentes color; relación entre el perímetro de los cuadrados del mismo color y de diferentes color; generalización del patrón geométrico de crecimiento de los cuadrados (área y perímetro); teorema de Pitágoras; homotecia; relaciones de proporcionalidad, entre otros. En la segunda fase, se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión 2, lo que evidenció su comprensión sobre la generalización de patrones. Finalmente, en la tercera fase se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión tres, lo que pone de manifiesto cambios en el conocimiento matemático.

El análisis realizado en las tres fases se centró en los cambios del discurso evidenciados en el proceso de resolución de las tareas propuestas en las tres sesiones. Entendemos que el cambio de discurso conlleva el desarrollo de una actividad transformativa que permite un cambio de representaciones del objeto matemático (Duval, 2006). Así mismo, estos cambios discursivos y representacionales nos permitirán dar cuenta de la progresión de aprendizaje evidenciada por la futura maestra, teniendo en cuenta la THA.

A continuación, ejemplificaremos el análisis realizado para todas las resoluciones de las 9 tareas de Patricia, mostrando el análisis realizado de la tarea 3 de la primera fase y de las tareas 5 y 7 de la segunda fase. Seleccionamos estas tres tareas, ya que se focalizan en la segunda sesión en la cual se desarrolla la THA. Las respuestas han sido subdivididas en dos partes.

Tabla 2. Ejemplo 1: Dificultad en la coordinación entre la estructura espacial y numérica

Respuesta a la tarea 3	Análisis del conocimiento
 Los cuadrados negros los construyó [se refiere al autor de la obra artística] en base a los cuadrados grises, puesto que cada cuadrado gris lo dividió en 9 cuadrados pequeños y desde la derecha y desde abajo coges una 3ª parte del propio lado hacia la izquierda, otra 2ª parte del propio lado hacia arriba y hacia la izquierda y dos terceras partes en las mismas direcciones que las anteriores teniendo los cuatro vértices.	Patricia en su respuesta, parece que reconoce la *coordinación entre la estructura numérica y espacial*, realizada por el autor de la obra artística, tanto en la construcción gráfica que propone como al indicar "... que cada cuadrado gris lo dividió en 9 cuadrados pequeños...".
Cada cuadrado gris es una cuarta parte del cuadrado gris posterior al igual que el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado negro posterior, y también el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado gris en el que se encuentra.	Patricia *no reconoce la relación* entre las áreas del cuadro gris y el negro correspondiente, al no coordinar la estructura espacial con la numérica, al indicar que "...el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado gris en el que se encuentra". Este razonamiento podría estar influenciado por la idea errónea de que el cuadro negro es un giro de 90º del cuadrado gris siguiente de la sucesión (¼ del gris grande), ya que en la tarea inicial afirma "que hay movimientos en el plano". Lo cual nos permite inferir que Patricia a partir de una percepción geométrica errónea asocia una relación numérica incorrecta.

El análisis de la respuesta a la tarea 3, ha permitido observar una falta de coordinación entre la estructura espacial y numérica. Sin embargo, en el análisis de la respuesta a la tarea 5, que mostramos a continuación (Tabla 3), se evidencia que Patricia coordina la estructura numérica y espacial.

Tabla 3. Ejemplo 2: Coordinación entre la estructura numérica y gráfica

Respuesta a la tarea 5	Análisis del conocimiento
1. Respuesta numérica Un lado de a: $h^2 = \frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.47$ 2. Respuesta espacial Se pueden colocar cuatro figuras "a" puesto que el lado de cada cuadrado "a" es aproximadamente la mitad. Pero no se completaría totalmente como que sobraría algo de espacio.	Patricia hace uso de la *estructura numérica* a través del cálculo del lado del cuadrado negro más grande de la figura por medio del Teorema de Pitágoras. A través del cálculo previo, Patricia se apoya en la *estructura espacial* afirmando que en el cuadro entran 4 de esos cuadrados y "…pero [el cuadrado gris] no se completaría totalmente como que sobraría algo de espacio." Por tanto, evidenciamos una *coordinación entre lo espacial y numérico*.

El análisis de la respuesta a la tarea 7, lo subdividimos en tres partes. En la primera, se muestran evidencias de que Patricia abstrae la relación funcional. En la segunda, de que establece y explicita la relación funcional y, finalmente, en la tercera describe esa relación.

Tabla 4. Ejemplo 3: Establecimiento de la relación funcional de las áreas de los cuadrados negros

Respuesta a la tarea 7	Análisis del conocimiento
Puesto que cada figura es una cuarta parte del anterior el lado es la mitad del anterior. Podrías calcular las áreas de las siguientes figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior. $\frac{\text{Área } A}{4^n}$ N=0 -> A N=1 -> b N=2-> c La fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de "A" debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 -> A, n=1 -> b y así sucesivamente	Patricia es capaz de *abstraer la relación* entre la estructura espacial y la numérica entre las áreas de dos cuadros negros consecutivos: "Podrías calcular las áreas de las siguientes figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior." *Establece la relación funcional* que explicita en una expresión algebraica del cálculo del área el término general, que permite obtener el valor del área de un elemento arbitrario de la progresión geométrica. Además, explica el significado del término general relativo a los cuadrados negros "...donde n es el número del cuadrado siendo n=0->A [nombre del cuadrado negro más grande], n=1-> b [nombre del cuadrado negro que sigue en la sucesión al cuadrado "A"] y así sucesivamente".

RESULTADOS

Los resultados se organizan en tres partes: (a) caracterización del conocimiento matemático inicial de Patricia sobre los elementos matemáticos de la obra artística, (b) análisis de la progresión sobre la generalización de patrones y (c) cambios en el conocimiento matemático.

Caracterización del conocimiento matemático inicial

En la primera tarea de la sesión 1, al responder sobre las sensaciones que le trasmite la producción artística, la futura maestra indica: "… perfeccionismo, profundidad y organización matemática perfecta", mostrando ideas matemáticas intuitivas. Al enumerar los elementos y relaciones matemáticas de la obra, Patricia identifica inicialmente, cuadrados, movimientos en el plano y alude a un geoplano. En la tarea 3, dibuja la cuadrícula de un geoplano representando el cuadrado gris grande y el cuadrado negro correspondiente. Esta representación le permite visualizar y establecer la relación geométrica entre el área del cuadrado gris grande con su correspondiente cuadrado negro (Tabla 2). Sin embargo, establece una relación numérica errónea entre el área del cuadrado grande gris y el negro correspondiente. Este razonamiento podría estar influenciado por su percepción inicial de que el cuadrado negro grande se obtiene a partir del giro de un cuarto del cuadrado gris grande. Esto podría ser una evidencia de una falta de coordinación entre las relaciones numérica y espacial.

Progresión sobre la generalización de patrones

Patricia coordina la estructura espacial y numérica dado que identifica la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística cuando, a través de las cotas proporcionadas en la tarea 4, Patricia se focaliza en el establecimiento de la relación numérica del área de los cuadrados que aparecen en la obra artística.

Coordina la estructura espacial y numérica de la secuencia de los cuadrados negros, estableciendo relaciones entre sus áreas (Figura 1), como se evidencia en las respuestas dadas a la tarea 5 (Tabla 3), manifestándose una actividad transformadora de lo numérico a lo figural, en términos de Duval (2006).

Hay indicios de que inicia la búsqueda de una regularidad funcional a partir del cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros cuando indica que "se podría calcular el área de las figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior" (Tabla 4, parte 1). Finalmente, abstrae la relación funcional entre el área de los cuadros negros mediante la coordinación espacial y numérica ya que en su respuesta a la tarea 7, afirma que "la fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de A debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 > A, n=1 > b y así sucesivamente" (Tabla 4, parte 2 y 3). Lo anterior nos permite concluir que Patricia se encuentra en el estadio 2 de la progresión de aprendizaje de la THA, tal como se indica en la Tabla 1.

Cambios en el conocimiento matemático

Patricia además de observar cuadrados como lo hacía en la primera sesión, es capaz, en la tercera sesión, de observar otros tipos de figuras geométricas como triángulos. Esto podría estar influenciado por la activación del esquema de conocimiento del triángulo rectángulo conectado a la necesidad de usar el teorema de Pitágoras en el cálculo del área de los cuadrados negros (Chinnappan y Lawson, 2005). Lo anterior, se evidencia en la respuesta de Patricia a la tarea 8 "…puesto que podemos dividir el cuadro en pequeños cuadraditos y ver gráficamente las medidas".

Patricia también establece una transferencia de conceptos a una representación visual (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996). Esto se evidencia en la medida que va incorporando al razonamiento numérico aspectos de razonamiento geométrico; es decir, Patricia va siendo capaz de visualizar gráficamente los conocimientos matemáticos construidos a través del desarrollo numérico.

Por otro lado, Patricia muestra que se ha producido una modificación respecto de sus conocimientos iniciales estableciendo una conexión correcta entre el razonamiento numérico con el geométrico que inicialmente era erróneo. Por ejemplo, cuando al resolver la tarea 5 indica "…la relación que encontramos entre los cuadrados de distinto color es que entran 4'5 cuadrados negros de los más grandes que aparecen en el cuadrado gris que aparece más grande".

Otra evidencia de cambio de su conocimiento en uso es cuando modifica sus ideas iniciales erróneas sobre la visualización de giros en los cuadrados negros de la obra artística, al incorporar la idea intuitiva de homotecia hablando de "zum". Este cambio se puede ver cuando al resolver la tarea 7, afirma: "En cuanto al movimiento [se refiere a movimientos en el plano] no pueden ser de traslación ni de giro puesto que se modifica el tamaño de cada cuadrado comparándolo con los otros, es un movimiento de zum o alejarse".

CONCLUSIONES

En esta comunicación hemos evidenciado la progresión del aprendizaje matemático de una futura maestra, a lo largo de diferentes tareas diseñadas a partir de la obra *Arithmetic Composition* de Theo van Doesburg. Tras la implementación de la secuencia de tareas y el posterior análisis del conocimiento manifestado por Patricia en las respuestas a dichas tareas, hemos identificado cambios en su conocimiento matemático. Patricia incorpora razonamientos geométricos y numéricos en la interpretación de los elementos y las relaciones matemáticas de la obra artística, lo que le ha permitido modificar las ideas matemáticas erróneas que mostraba inicialmente.

En relación con el progreso en el aprendizaje seguido por la futura maestra en las respuestas a las tareas de la segunda sesión, hemos constatado que sigue la hipótesis de progresión definida en la trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la generalización de patrones. Por lo tanto, podemos concluir que Patricia alcanza el objetivo sobre la generalización de patrones y éste ha podido motivar los cambios en su conocimiento matemático en relación con la visualización, los procesos de identificación de elementos matemáticos y las relaciones geométricas.

Por lo tanto, hemos ilustrado con el ejemplo del caso de Patricia los cambios en el conocimiento matemático en uso a través de la consideración de una trayectoria hipotética de aprendizaje. Este resultado, puede ser una aportación interesante para el diseño de propuestas formativas que busquen el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

El estudio se ha realizado en el seno del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO; SGR-2014-972 y EDU2016-81994-REDT. Agradecemos a la profesora Julia Valls sus comentarios y sugerencias que han hecho mejorar esta comunicación.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2016). El desarrollo de una "mirada profesional": La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. *Ice/jornadas-redes*. Universidad de Alicante.

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 197-221.

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *9*, 85-103.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Eisenhart, A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19,* 99-114.

Fernández, C.; Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*, (1-2), 441-468.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp.161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 53-70.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pim, D. (2001) Some Notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his Arithmetic Composition 1. *For the learning of Mathematics*, *21*(2), 31-36.

Radford, L. (2007) Iconicity and contradiction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83-96.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(6), 499-511.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Simon M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91–104.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Walter, M. (2001). Looking at a Painting with a mathematical Eye. *For the learning of Mathematics, 21*(2), 26-30.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2015). Caracterización de una trayectoria de la "mirada profesional" de los estudiantes para maestro sobre la comprensión del proceso de generalización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521-528). Alicante: SEIEM.

LA INFLUENCIA DEL CONOCIMIENTO DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

The influence of natural number knowledge in the understanding of rational numbers

González-Forte, J. M.[a], Fernández, C.[a] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

Los números racionales es uno de los contenidos matemáticos más difíciles de comprender por los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, ya que a menudo aplican las propiedades de los números naturales para resolver actividades con los números racionales cuando no es apropiado (fenómeno Natural Number Bias). Nuestra investigación examina la evolución de este fenómeno en el contexto español desde la Educación Primaria a Educación Secundaria. 438 estudiantes desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de ESO respondieron a un cuestionario con ítems relativos a la comparación de números racionales, operaciones aritméticas y densidad. Los niveles de éxito y los razonamientos empleados por los estudiantes muestran que el fenómeno Natural Number Bias está presente en todos los cursos y aunque disminuye a lo largo de los años, persiste en algunos ítems al finalizar la Educación Secundaria.

Palabras clave: *números racionales, fracciones, números decimales, Educación Primaria, Educación Secundaria.*

Abstract

Rational numbers is one of the most difficult mathematical content to understand for primary and secondary school students, since they often apply the properties of natural numbers when working with rational numbers when it is not appropriate (Natural Number Bias phenomenon). Our research aims to examine the evolution of this phenomenon in the Spanish context from primary to secondary school. 438 students from 5th grade to 10th grade answered a test with items about rational number comparison, arithmetic operations with rationales and density. The levels of success and students' reasoning indicate that the Natural Number Bias phenomenon influences students' responses and, although it decreases along grades, it persists at the end of the secondary education in some of the items.

Keywords: r*ational numbers, natural number bias, fractions, decimal numbers, primary education, secondary education.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones están mostrando que los estudiantes de primaria y secundaria tienen dificultades en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales desde la década de los 80 (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Moss y Case, 1999; Resnick et al., 1989; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015). Una de las posibles causas se debe al uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando están aprendiendo los números racionales. Las dificultades identificadas se justifican ya que los números racionales no es una simple extensión de los números naturales. El uso del conocimiento de los números naturales cuando se resuelven actividades con racionales, se

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.

ha denominado *Natural Number Bias* (Ni y Zhou, 2005). La investigación sobre este fenómeno está siendo replanteada a nivel internacional en los últimos años desde nuevas perspectivas subrayando que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas sobre racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012; Van Dooren, et al., 2015). Este hecho ha sido estudiado en tres dominios (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2016; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel y Van Dooren, 2015): la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas y la densidad de los números racionales, teniendo en cuenta el papel desempeñado por las distintas representaciones de los números racionales (fracciones y números decimales) frente a la representación única de los números naturales (Vamvakoussi et al., 2012). Por ejemplo, los estudiantes a menudo tienen dificultades en identificar que 3/4, 6/8, 0.75, 0.750 son representaciones del mismo número racional.

Las investigaciones han indicado que los errores con la magnitud de los números decimales en tareas de comparación son frecuentes porque al contrario de los números naturales, *la cantidad de dígitos* del número no ayuda a decidir qué numero decimal es mayor. De hecho, los estudiantes tienen la creencia de que *los números decimales más largos son más grandes* y los *números decimales más cortos son más pequeños*. Por ejemplo, los estudiantes piensan que el número decimal 3,432 es más grande que 3,71 porque la parte decimal tiene más cifras (Resnick at al., 1989). En la comparación de fracciones, cuando las fracciones que se comparan son *compatibles* con el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales, como en el caso de 1/3 y 7/8 (ya que 7/8 es mayor que 1/3 y además el numerador y denominador es mayor), los estudiantes tienen mayor éxito. Sin embargo, cuando el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales no es compatible con las fracciones dadas (por ejemplo, cuando se comparan las fracciones 2/3 y 5/8, donde 2/3 es mayor que 5/8, pero el numerador y denominador de 2/3 son menores) entonces el nivel de éxito es menor (De Wolf y Vosniadou, 2015).

En relación a las operaciones aritméticas, las dificultades han sido observadas particularmente en las multiplicaciones y divisiones (Van Hoof et al., 2015) por la creencia que proviene de los números naturales de que el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor y el resultado de una división siempre es un número menor. Por ejemplo, en tareas de multiplicación de un natural por una fracción, el conocimiento de los números naturales sobre *el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor* es compatible en tareas con fracciones impropias como $2 \times 5/3$, sin embargo, este conocimiento no es válido cuando se tiene una multiplicación de un número natural por una fracción propia $2 \times 2/3$ (Fischbein et al., 1985).

El concepto de densidad es uno de los conceptos más difíciles de comprender por parte de los estudiantes (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen y Lehtinen, 2015; Vosniadou y Verschaffel, 2004), ya que los estudiantes a menudo creen que no hay, o solo hay una cantidad finita de números entre dos números racionales. Por tanto, el conocimiento de los números naturales no es compatible con la densidad de los números racionales (entre dos números racionales hay infinitos racionales). En este sentido, los estudiantes a menudo consideran que entre 1,23 y 1,24 no hay otros números o que entre 1/2 y 1/4 únicamente está la fracción 1/3.

El objetivo de este estudio es obtener información sobre la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* en los tres dominios indicados desde final de la Educación Primaria hasta la Educación Secundaria en el contexto español. Los estudios previos han utilizado cuestionarios de elección múltiple examinando el nivel de éxito y estudiando los tiempos de reacción (Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes y Dartnell, 2015), mientras que en nuestra investigación realizamos un análisis cualitativo de los razonamientos de los estudiantes para confirmar o no las hipótesis obtenidas en los estudios previos, generar hipótesis adicionales sobre las posibles relaciones entre la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas (en particular, la multiplicación de un racional por un natural) y la densidad de los números racionales, y determinar características de la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* desde los últimos años de Educación Primaria hasta el final de la Educación Secundaria.

MÉTODO

Participantes e instrumento

En este estudio participaron 438 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (Tabla 1). Los estudiantes pertenecían a dos centros de Educación Primaria y a dos centros de Educación Secundaria de la provincia de Alicante, situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta.

Tabla 1. Participantes

	5EP	6EP	1ES	2ES	3ES	4ES
Nº	85	81	78	81	57	56

El instrumento consistió en un cuestionario compuesto por 16 ítems sobre la magnitud de los números racionales, las operaciones aritméticas y la densidad. Además, los ítems son congruentes (compatibles con el conocimiento de los números naturales) o incongruentes (incompatibles con el conocimiento de los números naturales).

En relación a la magnitud hay cuatro ítems de comparación de fracciones donde se pedía a los estudiantes rodear la fracción mayor (Tabla 2) y tres ítems de ordenación de números decimales (Tabla 3).

Tabla 2. Items dominio magnitud (comparación de fracciones) y características

Congruente	**Incongruente**
(Ítem 1) 2/3 vs 7/8	(Ítem 3) 5/3 vs 9/7
(Ítem 2) 2/7 vs 5/8	(Ítem 4) 2/3 vs 5/8

Al final de los ítems sobre comparación de fracciones los estudiantes tenían que contestar la siguiente pregunta: *¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?*

Tabla 3. Items dominio magnitud (comparación/ordenación de decimales)

Incongruente
(Ítem 5) Rodea el número mayor: 0.37 vs. 0.5 ¿Cómo lo has sabido?
(Ítem 6) Ordena de mayor a menor: 0.82, 0.835 y 0.95
(Ítem 7) ¿Algunos de los siguientes números son el mismo? 0.53, 0.053 y 0.530

Para estudiar la densidad se propuso un ítem incongruente sobre la existencia o no de números entre dos dados (Ítem 8: *¿Existe algún número entre 0 y 1? Si existe, pon un ejemplo*) y cuatro ítems en los que se pedía escribir un número entre dos racionales dados (representados como fracciones y como decimales; Tabla 4):

Tabla 4. Items dominio densidad y características

	Congruente	**Incongruente**
Fracciones	(Ítem 9) 2/7 y 5/7	(Ítem 11) 3/5 y 4/5
Decimales	(Ítem 10) 0.2 y 0.9	(Ítem 12) 0.4 y 0.5

El dominio de las operaciones aritméticas se estudió mediante cuatro ítems considerando la multiplicación de un número racional (fracción o decimal) por un natural (Tabla 5):

Tabla 5. Items dominio operaciones aritméticas y características

	Incongruente	**Congruente**
Fracciones	(Ítem 13) 5 × 1/2	(Ítem 14) 10 × 3/2
Decimales	(Ítem 15) 2 × 0.5	(Ítem 16) 7 × 1.5

En estos ítems los estudiantes tenían que indicar si el resultado era mayor o menor que el número natural por el que estaba multiplicado y además tenían que responder a la pregunta *¿Cómo lo sabes?*, con el objetivo de conocer el razonamiento empleado. Así, en el cuestionario se plantean ítems en los que los estudiantes han de resolver y explicar el proceso para llegar a la respuesta seleccionada. Este formato de los ítems permite obtener datos sobre el razonamiento que emplean y su posible relación con el conocimiento de los números naturales.

Análisis

El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase, se identificaron los niveles de éxito en cada ítem y curso. Para ello, las respuestas correctas en cada ítem se codificaron con 1 y las incorrectas o en blanco con 0. A partir de esta codificación, se realizó un análisis de regresión logística de medidas repetidas usando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE), mediante el software SPSS 23 para estudiar si las diferencias eran significativas. En la segunda fase del análisis examinamos el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes en cada uno de los ítems con el objetivo de identificar cuándo se apoyaban en el conocimiento de los números naturales o usaban otros argumentos. En este estudio, se presenta los resultados del análisis cualitativo mediante ejemplos de los razonamientos de los estudiantes con el objetivo de confirmar o no las hipótesis obtenidas en los estudios previos y generar hipótesis adicionales sobre el fenómeno.

RESULTADOS

Para cada uno de los dominios, se presenta la evolución de los niveles de éxito de cada ítem desde 5º curso de Educación Primaria hasta 4º curso de Educación Secundaria y el porcentaje de razonamientos basados en el *Natural Number Bias.*

Magnitud

La Figura 1 muestra los porcentajes de éxito y el porcentaje de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales en cada uno de los ítems del dominio de magnitud (comparación de fracciones). Atendiendo a los niveles de éxito en los ítems de comparación de fracciones, los ítems congruentes tuvieron mayor nivel de éxito (ítem 1 y 2) que los incongruentes (ítems 3 y 4), hecho que se explica por el alto porcentaje de estudiantes que usaron un razonamiento basado en el *Natural Number Bias.* El uso del conocimiento de los números naturales (en este caso la idea de "a mayor numerador y denominador la fracción es mayor") es compatible con los ítems congruentes pero no con los ítems incongruentes. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de razonamiento basado en el *Natural Number Bias* para el item 4 (incongruente).

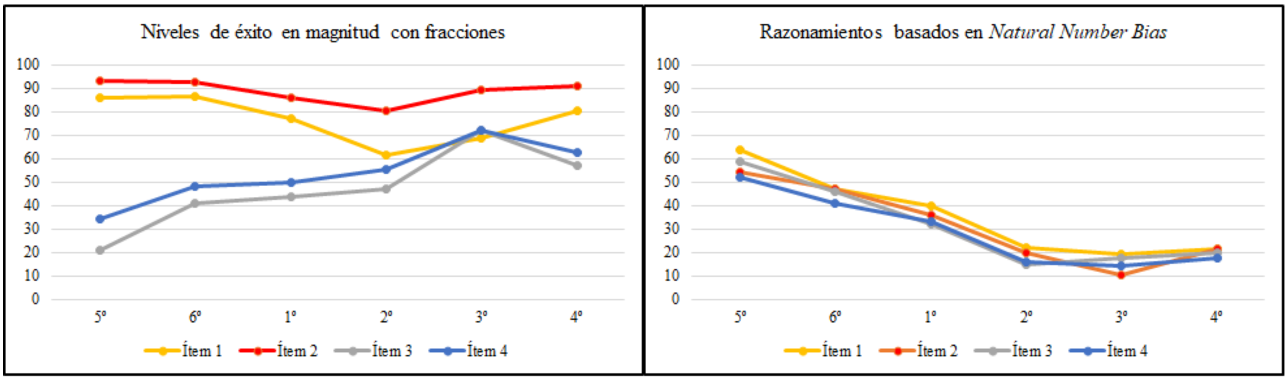
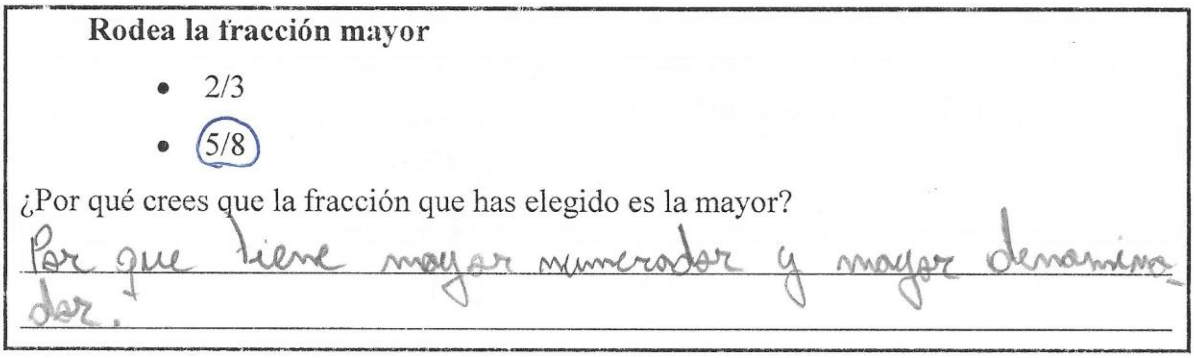


Figura 1. Nivel de éxito y uso de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de magnitud - Fracciones


Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 5/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Por que tiene mayor numerador y mayor denominador.

Figura 2. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO al ítem 4 (incongruente)

Además, la gráfica muestra una disminución del nivel de éxito en los dos ítems de comparación de fracciones congruentes (ítems 1 y 2) desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria y después un aumento desde 2º a 4º de Educación Secundaria. Mientras que el nivel de éxito de los ítems de comparación de fracciones incongruentes (ítems 3 y 4) aumenta con los años. Estas tendencias en los niveles de éxito se explican por la disminución del uso del razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales (*Natural Number Bias)* desde 5º de Educación Primaria a 4º de Educación Secundaria y el aumento de razonamientos correctos a lo largo de estos cursos. Sin embargo, se observa que el uso del conocimiento de los números naturales que es incompatible en ítems incongruentes se mantiene al final de la etapa de secundaria (un 20% de los estudiantes en 4º de ESO utilizan este razonamiento en los cuatro items de comparación de fracciones).

La Figura 3 muestra el nivel de éxito y el porcentaje de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales en cada uno de los ítems de comparación/ordenación de decimales.

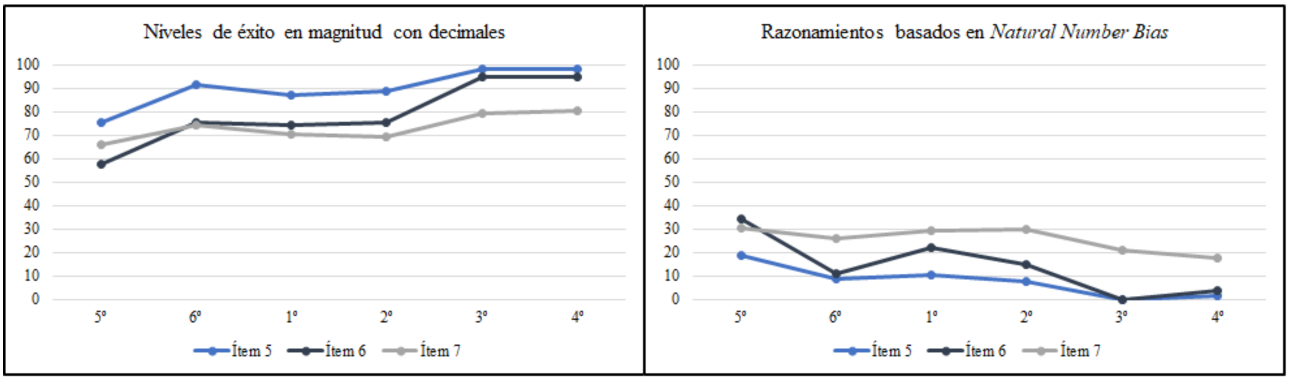
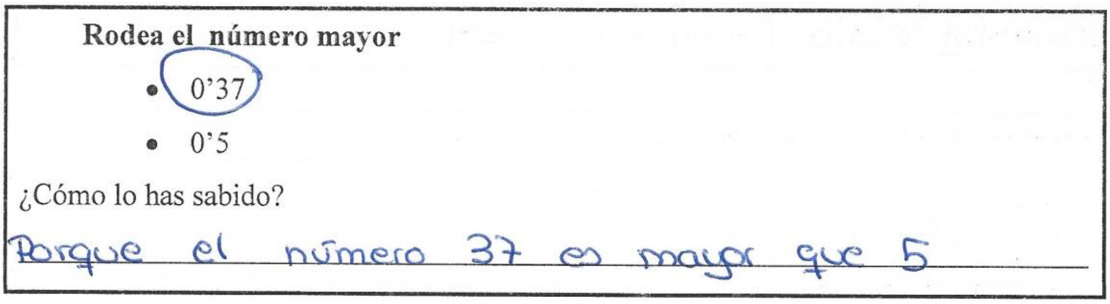


Figura 3. Nivel de éxito y uso de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de magnitud - Decimales

Los ítems incongruentes con números decimales (ítems 5, 6 y 7) obtuvieron un porcentaje más alto de éxito que los incongruentes con fracciones (ítems 3 y 4, Figura 2). De hecho, el uso de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales fue menor en estos ítems. No obstante, aproximadamente entre 20% - 30% de los estudiantes de 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria, usaron razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales incompatibles en estos ítems (incongruentes). Así, en el ítem de rodear qué número era mayor (ítem 5) y el de ordenar los números de mayor a menor (ítem 6), los estudiantes usaron un razonamiento centrado en "comparar el número de cifras de la parte decimal" (Figuras 4 y 5). El uso de este razonamiento "comparar el número de cifras de la parte decimal" disminuyó a lo largo de los cursos llegando casi a desaparecer (un 0%) al final de la etapa de secundaria.


Rodea el número mayor
- 0’37
- 0’5

¿Cómo lo has sabido?
Porque el número 37 es mayor que 5

Figura 4. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO

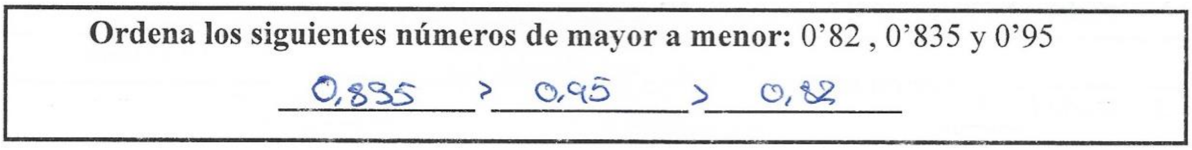

Ordena los siguientes números de mayor a menor: 0’82 , 0’835 y 0’95
0,835 > 0,95 > 0,82

Figura 5. Respuesta de un estudiante de 4º ESO

Cabe destacar, que el uso de razonamientos centrados en el *Natural Number* Bias persistió al final de la etapa de secundaria en el ítem 7. Este ítem preguntaba si alguno de los números dados era el mismo (Figura 6), indagando acerca del papel del 0 que proviene de los naturales “un 0 a la izquierda no tiene ningún valor”.

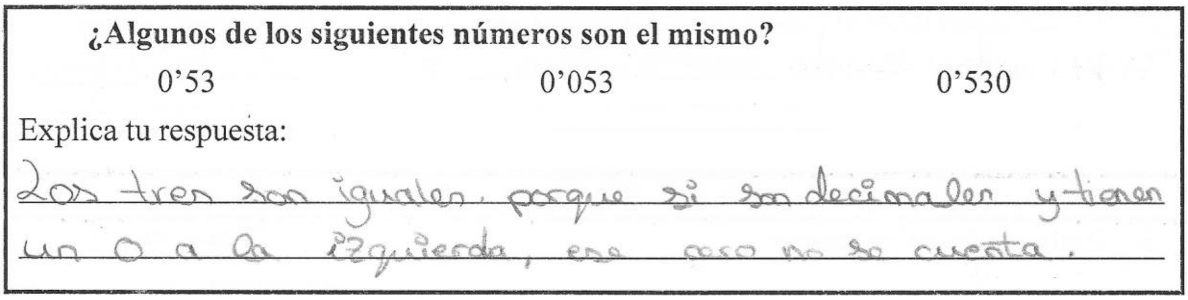

¿Algunos de los siguientes números son el mismo?
0’53 0’053 0’530
Explica tu respuesta:
Los tres son iguales, porque si son decimales y tienen un 0 a la izquierda, eso no se cuenta.

Figura 6. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

Operaciones aritméticas

La Figura 7 muestra los niveles de éxito de los estudiantes en los cuatro ítems de multiplicación de un número natural por un número racional (fracción y número decimal), así como el porcentaje de empleo de razonamientos basados en el *Natural Number Bias*. Los ítems congruentes (ítem 14 – fracciones y 16 – decimales) tuvieron mayor nivel de éxito que los incongruentes (ítems 13 y 15) ya que los estudiantes usaron razonamientos basados en el conocimiento del número natural compatibles con los ítems congruentes pero incompatibles con los ítems incongruentes. Estos razonamientos se centraban en la idea proveniente de los naturales de “si multiplicas un número por otro, el resultado siempre será un número mayor” (Figuras 8 y 9).

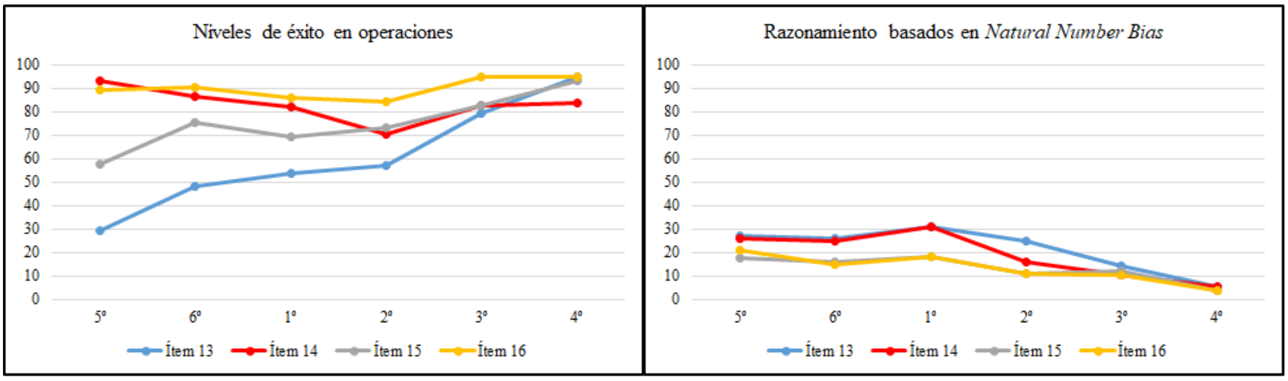
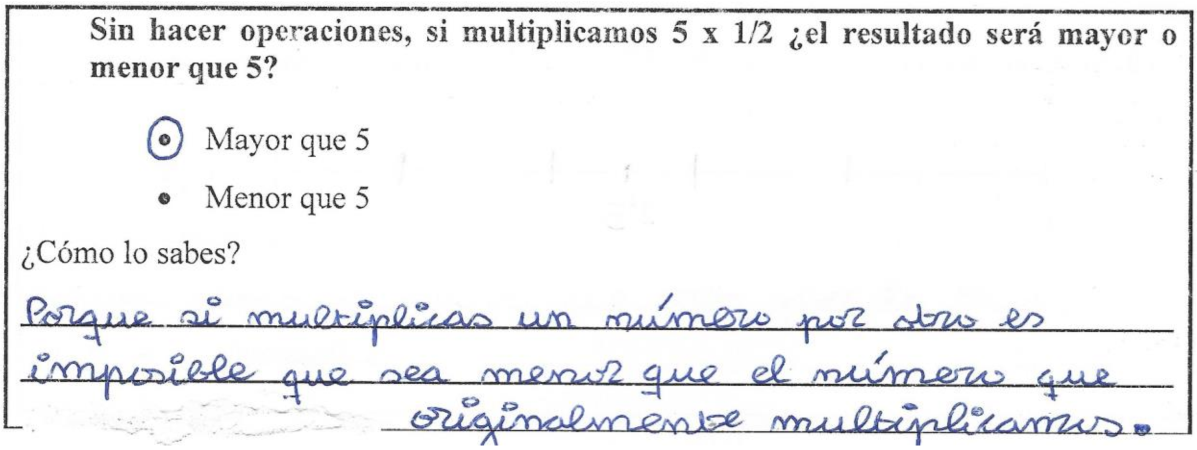


Figura 7. Nivel de éxito y empleo de razonamientos basados en el *Natural Number Bias* en los ítems de operaciones



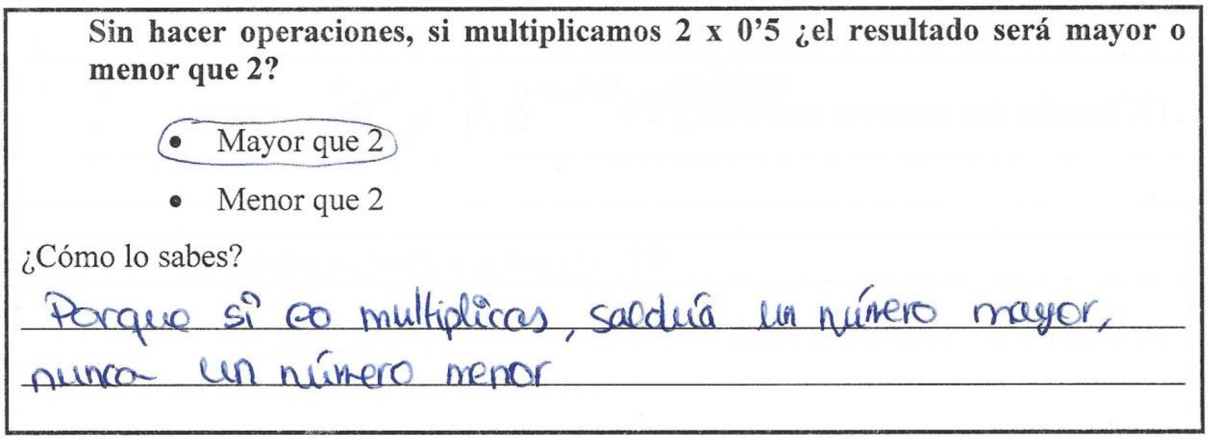
Sin hacer operaciones, si multiplicamos 5 x 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?

- Mayor que 5
- Menor que 5

¿Cómo lo sabes?

Porque si multiplicas un número por otro es imposible que sea menor que el número que originalmente multiplicamos.

Figura 8. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO



Sin hacer operaciones, si multiplicamos 2 x 0'5 ¿el resultado será mayor o menor que 2?

- Mayor que 2
- Menor que 2

¿Cómo lo sabes?

Porque si lo multiplicas, saldrá un número mayor, nunca un número menor

Figura 9. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

En cuanto a la evolución, se observa la misma tendencia que con los ítems de comparación de fracciones. Se observa una disminución del nivel de éxito en los dos ítems congruentes (ítems 14 y 16) desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria y después un aumento desde 2º a 4º de Educación Secundaria. Mientras que el nivel de éxito de los ítems incongruentes (ítems 13 y 15) aumenta con los años. La disminución en los niveles de éxito en los ítems congruentes desde 5º de Educación Primaria a 2º de Educación Secundaria (y después el aumento de 2º a 4º de Educación Secundaria) y el aumento en los ítems incongruentes a lo largo de los cursos tiene relación con la disminución en el uso del conocimiento de los números naturales (*Natural Number Bias)* y el aumento de razonamientos correctos. Sin embargo, se observa que el razonamiento centrado en el conocimiento de los números naturales incompatible en ítems incongruentes casi desaparece al final de la etapa de secundaria a diferencia del dominio magnitud - comparación de fracciones.

Densidad

En el dominio de la densidad únicamente se muestran los porcentajes de éxito en los cinco ítems propuestos, pues las respuestas incorrectas coinciden con el uso de un razonamiento centrado en el *Natural Number Bias* (Figura 10).

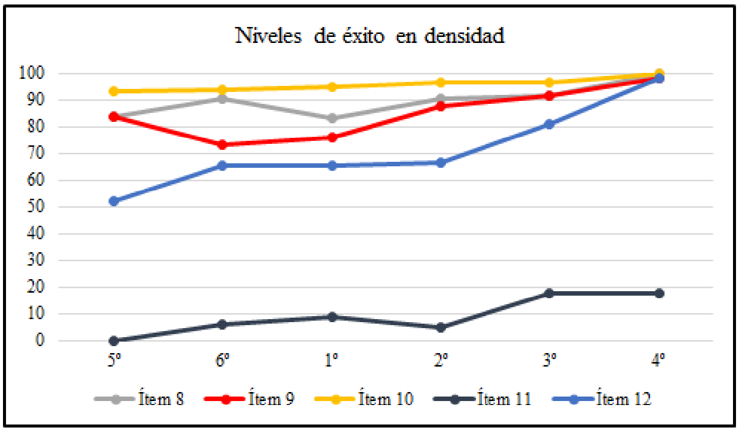


Figura 10. Porcentajes de nivel de éxito en los ítems de densidad

En este dominio, los estudiantes tuvieron más éxito en ítems congruentes (ítems 9 y 10) que en ítems incongruentes (ítems 11 y 12). De nuevo, los estudiantes usaron un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales "entre dos números no hay otros números" compatible solo en ítems congruentes (Figuras 11 y 12).

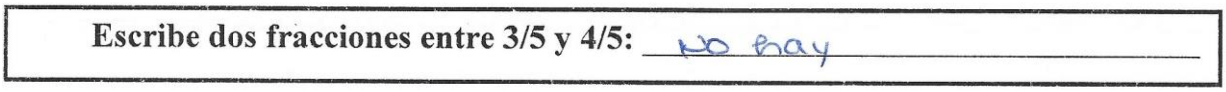


Figura 11. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

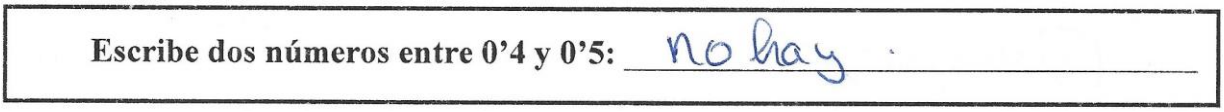


Figura 12. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

El ítem 8 que preguntaba *¿Existe algún número entre 0 y 1? Si existe, pon un ejemplo*, tuvo un porcentaje de éxito superior al 80% en todos los cursos, ya que los estudiantes respondían diciendo que sí y daban como ejemplo el 0.5. Sin embargo, entre 15-20% de los estudiantes de los primeros cursos usaron un razonamiento centrado también en el conocimiento de los números naturales en este ítem (Figura 13).

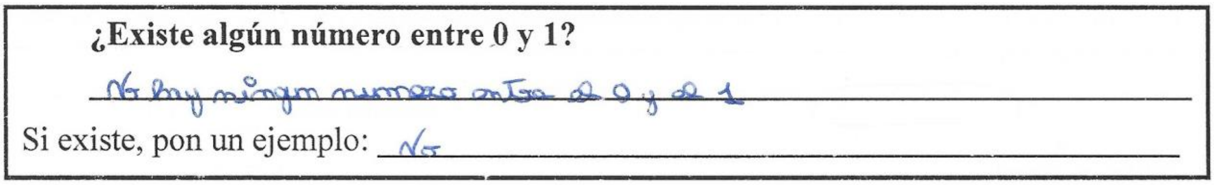


Figura 13. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

En relación a la evolución, se observa un aumento en los niveles de éxito de los ítems incongruentes por la disminución del uso de razonamiento centrados en el *Natural Number Bias*. Cabe destacar que al final de la etapa de secundaria, este fenómeno casi desaparece en la mayoría de los ítems, a excepción del ítem 11 (incongruente con fracciones) donde se observa que alrededor de un 80% de los estudiantes todavía usan un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es obtener información sobre la evolución del fenómeno *Natural Number Bias* en el contexto español, realizando un estudio transversal desde 5º de Educación Primaria a 4º de Educación Secundaria, evidenciando el fenómeno a través de los razonamientos de los estudiantes. Los resultados obtenidos han mostrado que en los dominios estudiados, los niveles de éxito fueron mayores en los ítems en los que el conocimiento sobre los números naturales era compatible (ítems congruentes), lo que determina un uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando están aprendiendo los números racionales. De este modo, se confirma en el contexto español las hipótesis de los estudios cuantitativos previos (cuestionarios de elección múltiple) de que “los estudiantes tienen mayor nivel de éxito en los congruentes que en los incongruentes” (Ni y Zhou, 2005, Van Dooren et al., 2015) y que este hecho se mantiene a lo largo de los años.

De este modo, en relación al dominio de la magnitud, los resultados obtenidos han evidenciado la influencia del conocimiento de los números naturales a la hora de hacer comparaciones u ordenaciones con los números decimales, ya que los estudiantes tienen la creencia de que “los números decimales más largos son más grandes” (Resnick at al., 1989). Esta influencia ha sido todavía más destacable en los ítems de comparación de fracciones donde los estudiantes han usado el razonamiento “una fracción es mayor si su numerador y denominador son mayores”, incompatible en ítems incongruentes (De Wolf y Vosniadou, 2015). En el dominio de las operaciones se ha observado cómo ha influido la creencia propia de los números naturales de que “el resultado de una multiplicación siempre es un número mayor” (Fischbein et al., 1985), pues el nivel de éxito ha sido claramente mayor en tareas congruentes que en las incongruentes. Con respecto al domino de la densidad, el conocimiento de que hay un número finito de números entre dos naturales ha influido de forma clara en las respuestas de los estudiantes (Vosniadou y Verschaffel, 2004), pues el nivel de éxito ha sido muy inferior en los ítems incongruentes, sobre todo con fracciones, donde la tendencia de los estudiantes fue a responder que entre 3/5 y 4/5 no había ningún número.

Por otro lado, cabe destacar el papel de las diferentes representaciones de los números racionales. En nuestro estudio se observa un mayor uso de razonamientos basados en el conocimiento de los números naturales cuando se usa la representación como fracción que cuando se usa la representación decimal. Este resultado se observa en los tres dominios y pone de manifiesto el papel que los modos de representación desempeñan en la comprensión de los números racionales.

En relación a la evolución a lo largo de los cursos, se observa, que un alto porcentaje de estudiantes de primaria y primeros cursos de Educación Secundaria usan razonamiento basados en el conocimiento de los números naturales, sin embargo, hay una disminución del uso de estos en los tres dominios a lo largo de los cursos. Cabe destacar, que al finalizar la etapa de secundaria estos razonamientos solo persisten en algunos ítems: ítems de magnitud de comparación de fracciones y densidad (con fracciones).

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d’Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135).

Referencias

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37,* 39-49.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16,* 3-17.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C. y Dartnell, P. (2015). The effect of inhibitory control on general mathematics achievement and fraction comparison in middle school children. *ZDM, 47*(5), 801-811.

Gómez, D. M., Silva, E. y Dartnell, P. (2017). En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of PME41* (vol. 2, pp. 353-360). Singapore: PME.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. y Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept. *Learning and Instruction, 37,* 14-20.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107*, 537-555.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, *20*, 8-27.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, *14*(5), 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, *37*, 1-4.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *37*, 30-38.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. En L. Verschaffel y S. Vosniadou (Eds.), Conceptual change in mathematics learning and teaching. Special Issue of *Learning and Instruction*, *14*(5), 445-451.

CONTEXTOS MÉDICOS DE LOS DATOS EN PROBLEMAS DE INFERENCIA SOBRE LA MEDIA EN LIBROS DE BIOESTADÍSTICA

Medical data-contexts in problems on inference for the population mean in biostatistics textbooks

González-Ruiz, I.[a], González-López, M. J.[a] y González-Astudillo, M. T.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

En este trabajo se analiza en qué medida los problemas de inferencia sobre la media que se plantean en los libros de Bioestadística del Grado en Medicina están contextualizados en situaciones clínicas propias de la profesión. Para ello, identificamos los contextos que aparecen en los enunciados de problemas incluidos en tres libros españoles de Bioestadística empleados en la formación de médicos. Utilizamos la noción de contexto médico de los datos y su tipología para asignar el contexto correspondiente a cada problema. Los resultados del análisis muestran que las situaciones clínicas dominantes están asociadas al diagnóstico, tratamiento y prevención de enfermedades. De igual modo, resulta significativa la presencia en los tres libros de algo más de la cuarta parte de problemas planteados en contextos desvinculados de la práctica profesional del médico.

Palabras clave: *contextos médicos, educación estadística, formación de médicos, inferencia sobre la media, problemas estadísticos.*

Abstract

In this paper we analyze to what extent the inference for the population mean problems posed in Bioestatistics textbooks in the Degree in Medicine are contextualized in clinical situations linked to physicians' professional practice. For this purpose, we identify the contexts that appear in the problem statements included in three Spanish Bioestatistics texbooks, used in the initial training of future medical graduates. We use the notion of medical data-context and its typology to assign context to each problem. The results of the analysis show that the dominant clinical situations are associated with the diagnosis, treatment and prevention of diseases. Besides, it is relevant the presence in the three textbooks of just over a quarte of problems raised in contexts unrelated to physicians' professional practice.

Keywords: *inference for the population mean, initial training of physicians, medical contexts, statistical problems, statistics education.*

INTRODUCCIÓN

En la última década se viene implementando una importante reforma en los planes de estudio universitarios en varios países europeos con el propósito de consolidar el Espacio Europeo de Educación Superior. Uno de los aspectos que han guiado dicha reforma es la preocupación por que las distintas asignaturas de cada grado contribuyan al desarrollo de las habilidades profesionales establecidas para el mismo (Rees, Forbes y Kubler, 2007; Grao, Iriarte, Ochoa, Uriarte, Mora, Lladosa, Carot y Conchado, 2011). En el caso de las asignaturas científico-técnicas (matemáticas, estadística, etc.) de los primeros cursos del grado, el enfoque profesional se suele aportar contextualizando el conocimiento académico, a través de la resolución de problemas, en situaciones

González-Ruiz, I., González- López, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2018). Contextos médicos de los datos en problemas de inferencia sobre la media en libros de bioestadística. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 251-260). Gijón: SEIEM.

que pueden surgir en el ejercicio de la profesión (Noss, Hoyles y Pozzi, 2000; Perrenet, Bouhuijs y Smits, 2000).

Pero la utilidad del conocimiento académico en las situaciones profesionales genera numerosos interrogantes (Evans, 2000). Algunas investigaciones han determinado que lo que aprenden los estudiantes, en la escuela o la universidad, no se transfiere de modo directo a las situaciones profesionales (Jurdak, 2006; Masingila, Davidenko y Prus-Wisnowska, 1996). Las verdaderas situaciones profesionales incorporan una serie de factores contextuales difíciles de reproducir en situaciones de formación inicial (Bessot y Ridgway, 2000). También ocurre que la transferencia del conocimiento formal a las situaciones prácticas no se produce de forma espontánea, sino que es necesario tomar en cuenta esa transferencia desde la enseñanza (Noss, Hoyles y Pozzi, 2000; Selden, Selden, Hauk y Mason, 2000).

Centrándonos en la formación estadística, son numerosas las situaciones profesionales que necesitan utilizar información sustentada en datos. La variabilidad de los datos de origen médico hace que las técnicas estadísticas sean especialmente necesarias para que estos profesionales puedan tomar decisiones acertadas basadas en el análisis de datos (Fardales Macías, 2014). Por ello, los distintos contextos productores de datos de origen médico cobran especial interés en la formación estadística de estos profesionales (Barrows, 1996). Por ejemplo, Carles y Huerta (2007) describen las características de los problemas de probabilidad condicional en el contexto del Test de Diagnóstico, resaltando la doble utilidad académica y profesional de estos problemas.

Así pues, bajo la premisa de que es relevante utilizar en la enseñanza los contextos en los que se producen los datos de origen médico, en este artículo abordamos la problemática de determinar en qué medida los conocimientos básicos de Bioestadística que se enseñan en el Grado en Medicina están contextualizados en situaciones propias de la futura profesión de sus estudiantes. Concretamente, nos proponemos como objetivo general identificar los contextos que aparecen en problemas de inferencia sobre la media en tres libros de texto de Bioestadística clásicamente empleados en el grado de Medicina a nivel nacional. Este objetivo general se desglosa en los objetivos específicos siguientes:

- Describir los contextos presentes en los problemas de inferencia sobre la media en dichos libros desde el punto de vista fenomenológico (médico, matemático u otros).
- Completar la caracterización de los contextos mediante las técnicas estadísticas acerca de la inferencia sobre la media que dan respuesta a los problemas planteados en tales contextos.

Utilizamos la noción de contexto médico de los datos (González-Ruiz, González-López y González-Astudillo, en prensa) para asignar un contexto a cada uno de los problemas resueltos o propuestos que aparecen en estos libros.

EL CONTEXTO DE UN PROBLEMA. CONTEXTO MÉDICO DE LOS DATOS

El contexto de un problema de matemáticas es un factor de gran relevancia en su resolución, además de ejercer una gran influencia en el aprendizaje, al constituir un puente entre la matemática abstracta y sus aplicaciones (Mbekwa y Julie, 2009). Diversas investigaciones en Educación Estadística destacan la importancia de comprender el contexto en el que surgen los datos para poder llevar a cabo un análisis estadístico adecuado (ej., De Souza, Lopes y Oliveira, 2014; Moore, 1991). Precisamente, en la literatura encontramos definiciones de contexto como un atributo inherente a los datos (Langrall, Nisbet, Mooney y Jansem, 2011; Pfannkuch, 2011).

Nuestro trabajo suscribe estas ideas, pero lo que nos interesa es profundizar en las relaciones que se dan entre las situaciones y las técnicas estadísticas cuando se trata de formar profesionales que utilizarán la estadística dentro de un ámbito profesional concreto. Así, hemos introducido una definición específica de contexto adaptada a los datos de origen médico. En González-Ruiz, González-López y González-Astudillo (en prensa) definimos el *contexto médico de los datos* como la situación clínica que requiere del uso de datos y la aplicación de técnicas estadísticas para su análisis. Esta noción capta, por un lado, el entorno clínico que justifica el origen, la toma y uso de datos y, por otro lado, las nociones y las técnicas estadísticas requeridas para su tratamiento o análisis. Concretando esta idea en las situaciones clínicas relacionadas con la idea de enfermedad, y en los conceptos y técnicas estadísticas contempladas en la asignatura Bioestadística del Grado en Medicina, hemos identificado (op. cit.) los once tipos de contextos médicos de los datos que aparecen a continuación y se resumen en la Tabla 1. Están organizados en cuatro grandes categorías según correspondan al diagnóstico, el tratamiento, la prevención o el pronóstico de enfermedades.

Contextos médicos de los datos asociados al diagnóstico de enfermedades

Diag1. Confirmación del cuadro clínico de una enfermedad mediante test de hipótesis. La situación consiste en identificar una enfermedad a través de sus signos o síntomas. Los test de hipótesis se utilizan para determinar si hay evidencias suficientes para relacionar dos o más signos o síntomas en un paciente, y determinar si, en efecto, son atribuibles a una misma enfermedad.

Diag2. Identificación de valores normales y alterados en parámetros fisiológicos. La situación consiste en advertir de las alteraciones que presentan los parámetros fisiológicos de un paciente respecto de los valores considerados normales. Los intervalos de confianza nos proporcionan el rango de valores considerado normal. Los test de hipótesis permiten aceptar o rechazar una información relativa a la variación de un parámetro fisiológico.

Diag3. Selección y validez de un método de diagnóstico. Los test de diagnóstico se emplean en situaciones en las que hay una población susceptible de padecer una enfermedad. La fiabilidad, la sensibilidad o la especificidad del test y sus valores predictivos juegan un importante papel a la hora de calcular los parámetros epidemiológicos asociados a la población.

Diag4. Ocurrencia, prevalencia e incidencia de una enfermedad. La situación trata las posibilidades de enfermar que tiene un paciente o una población. Tanto las técnicas de cálculo de probabilidades como las relativas a la inferencia sobre proporciones permiten cuantificar dichas posibilidades. Se mide en términos epidemiológicos mediante la prevalencia o la incidencia.

Contextos médicos de los datos asociados al tratamiento de enfermedades

Trat1. Diseño y prescripción óptima de tratamientos. Los intervalos de confianza dan información en situaciones en las que ha de proponer la dosis de tratamiento tolerable (dosis media) que debe suministrarse a un paciente para que surta el efecto deseado en su estado de salud. De igual modo, dan una estimación de la duración media del tratamiento al que debe somete un paciente.

Trat2. Inferencia sobre parámetros relativos a la validez de un tratamiento. Los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis se emplean en situaciones en las que es necesario conocer la validez o la efectividad de un tratamiento cuando se aplica en la curación de una enfermedad.

Trat3. Comparación de varios tratamientos empleados para curar una enfermedad. En situaciones en las que es necesario comparar varios tratamientos para seleccionar el más adecuado, es frecuente utilizar el análisis de varianza (ANOVA), basado en la metodología del contraste de hipótesis, así como los propios contrastes de hipótesis y los intervalos de confianza para la diferencia de medias.

Contextos médicos de los datos asociados a la prevención de enfermedades

Prev1. Asociación entre factores de riesgo y causales de enfermedad. Además de las técnicas de cálculo de probabilidades, es frecuente recurrir a pruebas de asociación en situaciones en las que la exposición a un determinado factor de riesgo puede considerarse causante de enfermedad.

Prev2. Inferencia sobre parámetros relativos a la validez de medidas de prevención primarias, secundarias y terciarias. Las situaciones de prevención se clasifican, según su naturaleza, en medidas de prevención primaria –dirigidas a actuar antes de que aparezca una enfermedad–, secundaria –dirigidas al diagnóstico y tratamiento precoces, una vez se ha iniciado la enfermedad; tratando aliviar la gravedad– y terciaria –dirigidas a paliar las incapacidades del paciente debidas a la enfermedad–. Tanto los intervalos de confianza como los contrastes de hipótesis, para la diferencia de medias o proporciones, y el test ji-cuadrado son técnicas que pueden emplearse para catalogar las medidas de prevención más útiles.

Contextos médicos de los datos asociados al pronóstico de enfermedades

Pron1. Predicción de la evolución de una enfermedad. Las situaciones en las que es necesario estudiar la evolución que sigue en el tiempo una enfermedad y prever los efectos que puede ocasionar en el estado de salud se pueden abordar mediante técnicas de regresión lineal.

Pron2. Predicción de la recuperación funcional y tiempo de supervivencia de un paciente. En situaciones en las que se desea prever el tiempo esperado para la recuperación de un paciente, se emplean técnicas de análisis de supervivencia, fundamentadas en los principios del cálculo de probabilidades.

Tabla 1. Tipos de contextos médicos de los datos asociados a la idea de enfermedad en inferencia estadística (González-Ruiz, González-López y González-Astudillo, en prensa)

Tipos de contextos médicos de los datos		Descripción
Diagnóstico	Diag1	Confirmación del cuadro clínico de una enfermedad mediante test de hipótesis
	Diag2	Identificación de valores normales y alterados en parámetros fisiológicos
	Diag3	Selección y validez de un método de diagnóstico
	Diag4	Ocurrencia, prevalencia e incidencia de una enfermedad
Tratamiento	Trat1	Diseño y prescripción óptima de tratamientos
	Trat2	Inferencia sobre parámetros relativos a la validez de un tratamiento
	Trat3	Comparación de varios tratamientos empleados para curar una enfermedad
Prevención	Prev1	Asociación entre factores de riesgo y causales de enfermedad
	Prev2	Inferencia sobre parámetros relativos a la validez de medidas de prevención primarias, secundarias y terciarias
Pronóstico	Pron1	Predicción de la evolución de una enfermedad
	Pron2	Predicción de la recuperación funcional y tiempo de supervivencia de un paciente

Teniendo en cuenta que nuestro interés es medir el impacto de los problemas contextualizados en los libros de texto, vamos a analizar toda la población de problemas acerca de la inferencia sobre la media. En consecuencia, hemos añadido las categorías “Mat” y “Otros” para clasificar, respectivamente, los enunciados de problemas formulados en términos estrictamente matemáticos o estadísticos, y los enunciados que, aunque están contextualizados en alguna situación real, no están relacionados con el ámbito médica.

TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DE INFERENCIA SOBRE LA MEDIA

La dimensión estadística considerada en la definición del contexto médico de los datos se ha descrito en los tipos de contextos médicos de los datos anteriores desde el punto de vista de la inferencia estadística en general. Se concretan a continuación las técnicas de inferencia sobre la media que forman parte de los programas de la asignatura Bioestadística del Grado en Medicina (ANECA, 2007, pp. 493-494). Utilizaremos estas técnicas para aportar un mayor nivel de detalle desde el punto de vista de los conceptos y procedimientos estadísticos considerados en los problemas. Las presentamos agrupadas en las clases: Tec1, Tec2, Tec3, Tec4 y Tec5.

- *Tec1. Técnicas sobre intervalos de confianza*. Engloban los intervalos de confianza para la media e intervalos de confianza para la diferencia de medias.

- *Tec2. Técnicas sobre intervalos de aceptación*. Engloban los intervalos de aceptación para una variable normal y para una variable continua de parámetros desconocidos.
- *Tec3. Técnicas sobre tamaño muestral*. Engloban las distintas relaciones que permiten calcular el tamaño de la muestra para estimar la media o contrastar una hipótesis sobre la media de una población y para contrastar dos medias.
- *Tec4. Test para la media con una muestra*. Engloban distintas técnicas relativas al contraste de hipótesis para la media de una población.
- *Tec5. Test para la diferencia de medias*. Engloban distintos test para comparar dos medias poblacionales, tanto en muestras independientes como apareadas.

METODOLOGÍA

Inicialmente, se revisaron las guías académicas de la asignatura de Bioestadística del Grado en Medicina de las universidades españolas con el fin de determinar los libros usados en dichos grados. De todos ellos, para esta comunicación se han seleccionado tres, presentes en diecisiete guías de entre las treinta y una universidades públicas que imparten el Grado en Medicina. La Tabla 2 recoge su denominación y el código con el que nos referiremos a cada uno de ellos de aquí en adelante. La autoría de los tres libros corresponde a profesores de las áreas de Estadística e Investigación Operativa y Medicina Preventiva y Salud Pública, que imparten docencia en las universidades de Málaga, Granada y Extremadura. Los tres libros incluyen una colección de problemas que acompaña a cada uno de los capítulos.

Tabla 2. Libros de Bioestadística empleados en el análisis

Denominación en este trabajo	Referencia completa
L1	Rius, F. y Barón, F. J. (2008). *Bioestadística*. Madrid: Thomson-Paraninfo.
L2	Martín Andrés, A. y Luna del Castillo, J. D. (2004). *Bioestadística para las Ciencias de la Salud*. 4ª ed. Madrid: Ediciones Norma.
L3	García Nogales, A. (2008). *Bioestadística básica*. Badajoz: Editoral @becedario.

La muestra de libros es intencional, puesto que planteamos un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva, sin pretensiones de extender las conclusiones obtenidas (Cohen y Manion, 1990), ya que se dispone de escasa información procedente de estudios previos sobre los libros de texto empleados en la formación estadística de médicos y, en particular, centrados en los problemas que presentan. Hemos considerado aquellos capítulos que cada libro dedica a los temas de inferencia sobre la media. Concretamente, abarcan técnicas de estimación (distintos intervalos de confianza), intervalos de aceptación y contrastes de hipótesis (distintos test con una y dos muestras). Se han analizado los enunciados de los problemas que incluye cada libro, tanto los que se presentan resueltos a modo de ejemplo, como los que se proponen para su resolución. En la Tabla 3 detallamos esta información e indicamos el número de problemas que cada capítulo de inferencia dedica a la media poblacional. En total se han analizado ochenta problemas. Hay que tener en cuenta que los libros L1 y L3 incluyen, además, problemas de inferencia para los parámetros varianza y proporción poblacional. Asimismo, los problemas que presenta L2 cubren, además de los anteriores, los parámetros de Poisson, coeficiente de variación y percentiles.

Tabla 3. Cantidad de problemas de inferencia sobre la media empleados en el análisis

Libro	Capítulo	Páginas	Cantidad de problemas
L1	Capítulo 8: Estimación confidencial	pp. 144-165	11
	Capítulo 9: Contrastes de hipótesis	pp. 168-208	20
L2	Capítulo 5: Intervalos de confianza y aceptación	pp. 121-155	11
	Capítulo 7: Test con una muestra	pp. 187-219	9
	Capítulo 8: Test con dos muestras	pp. 221-303	11
L3	Capítulo 4: Problemas de Inferencia Estadística sobre una o dos muestras	pp. 161-208	18
		Total	80

Hemos clasificado los enunciados de los problemas de inferencia sobre la media según los tipos de contextos médicos de los datos descritos antes.

Es necesario señalar que los libros L1 y L2 presentan un total de cuatro y tres problemas, respectivamente, a los que hemos asignado dos contextos médicos de los datos distintos en nuestro análisis. Entendemos que esta asignación es compatible con las definiciones que hemos tomado como referente. Concretamente, observamos que esta peculiaridad se da entre modalidades de contexto asociadas a las variables “tratamiento” y “prevención”. Ilustramos esta situación por medio del ejemplo de la Tabla 4. En efecto, consideramos que resulta razonable asignar a dicho problema el contexto Trat2 e, igualmente, Prev2, si entendemos que el tratamiento aplicado para reducir el colesterol es una medida de prevención secundaria.

Tabla 4. Ejemplo de problema con doble asignación: Trat2 y Prev2 (L1, p. 186)

Se pretende demostrar que cierto tratamiento practicado durante un mes, ayuda a reducir el colesterol. Para ello se realiza un estudio con una muestra aleatoria simple de 10 personas. Los resultados se muestran a continuación.

Antes: 200, 210, 330, 240, 260, 300, 245, 210, 190, 225

Después: 150, 200, 275, 250, 200, 250, 200, 180, 190, 205

¿Qué podemos concluir de estos datos?

RESULTADOS

La Tabla 5 resume los resultados obtenidos tras realizar la clasificación de los problemas en los tres libros.

Tabla 5. Frecuencia de contextos médicos de los datos en los libros

Contextos médicos de los datos		L1		L2		L3	
		Parcial	Total	Parcial	Total	Parcial	Total
Diagnóstico	Diag1	4	10	4	13	0	7
	Diag2	5		6		6	
	Diag3	0		3		1	
	Diag4	1		0		0	
Tratamiento	Trat1	1	6	5	9	0	5
	Trat2	5		4		3	
	Trat3	0		0		2	
Prevención	Prev1	3	6	1	3	0	0
	Prev2	3		2		0	
Pronóstico	Pron1	1	1	0	0	0	0
	Pron2	0		0		0	
Matemático	Mat	2	2	1	1	0	0
Otros	Otros	10	10	8	8	6	6
Total		31 problemas, 35 contextos		31 problemas, 34 contextos		18 problemas, 18 contextos	

Globalmente observamos que hay 53 problemas asociados a situaciones relacionadas con la enfermedad, de un total de 80 problemas (7 de ellos con doble asignación de contexto). Solo 3 problemas corresponden a contextos matemáticos, y 24 están contextualizados en situaciones que no son de tipo clínico. Entrando en el detalle de cada libro, observamos que un gran número de los problemas de L1 corresponde a “Otros” (10/31), – la Tabla 6 muestra un ejemplo de este tipo de problema –, si bien la mayoría de los problemas que aparecen en L1 se han podido clasificar en una de las cuatro categorías de los contextos médicos de los datos (19 problemas de 31, cuatro de ellos con doble asignación de contexto, lo que corresponde a 23 de 35 contextos).

Tabla 6. Ejemplo de problema en contexto “Otros” (L1, p. 207)

Se desea comparar la actividad motora espontánea de un grupo de 25 ratas control y otro de 36 ratas desnutridas. Se midió el número de veces que pasaban delante de una célula fotoeléctrica durante 24 horas. Los datos obtenidos fueron los siguientes:

Ratas de control	n_1=25	$\overline{x_1}$=869,8	S_1=106,7
Ratas desnutridas	n_2=36	$\overline{x_2}$=465	S_1=153,7

¿Se observan diferencias significativas entre el grupo de control y el grupo desnutrido?

Esta tendencia se mantiene en L2 (22/31 problemas, correspondientes a 25/34 contextos) y L3 (12/18); siendo las categorías dominantes “diagnóstico”, en el primer caso, y “diagnóstico” y “tratamiento” en el segundo. En la Tabla 7 mostramos algunos problemas formulados en estos contextos, concretamente, en sus modalidades Diag1 y Trat1.

Tabla 7. Ejemplos de problemas en contextos Diag1 y Trat1 (L1, pp. 150 y 295)

Ejemplo “Diag1”. Se ha obtenido la concentración de Apolipoproteína B (en gr/l) en un grupo de individuos sanos (n=146, $\bar{x}$=0,98, s=0,19) y en otro con lesiones coronarias de 2º grado (n=141, $\bar{x}$=1,24, s=0,13). ¿Está asociada la concentración de tal proteína con la presencia de lesiones coronarias?

Ejemplo “Trat1”. La cantidad mínima requerida para que un anestésico surta efecto en una intervención quirúrgica fue por término medio de 50 mg, con una desviación típica de 10,2, en una muestra de 60 pacientes. ¿Cuántos mg deben administrarse para que el 99% de los pacientes queden anestesiados?

También se observa que en L1 el mayor número de problemas corresponde al tipo Trat2, mientras que en L2 y L3 es Diag2. A modo de ejemplo, presentamos en la Tabla 8 enunciados correspondientes a problemas formulados en los tipos de contexto médico de los datos con mayor frecuencia, Trat2 y Diag2.

Tabla 8. Ejemplos de problemas en contextos Trat2 (L1, p. 205) y Diag2 (L3, p. 201)

Ejemplo “Trat2”. Para comprobar si un tratamiento con ácidos grasos es eficaz en pacientes con eczema atípico, se tomaron 10 pacientes con eczema de más de 9 meses y se les sometió durante 3 semanas a un tratamiento ficticio (placebo) y durante las tres siguientes a un tratamiento con ácidos rasos. Tras cada periodo, un medico ajeno al proyecto evaluó la importancia del eczema en una escala de 0 (no eczema) a 10 (tamaño máximo de eczema). Los datos fueron los siguientes:

Placebo: 6, 8, 4, 8, 5, 6, 5, 6, 4, 5

Tratamiento: 5, 6, 4, 5, 3, 6, 6, 2, 2, 6

¿Es eficaz el tratamiento?

Ejemplo “Diag2”. Con la intención de obtener los límites de normalidad o tolerancia para la presión sanguínea sistólica en una población se ha extraído una muestra de tamaño 25 de la misma y se han calculado la media y varianza muestrales a partir de los datos obtenidos: $\bar{x}$=130 y S2=729. Calcular esos límites de tolerancia si pretendemos que entre ellos se encuentre el 90% de la población con una confianza del 95%.

Por otro lado, hay pocos problemas en L2 y, especialmente, en L3 en los que el contexto médico de los datos esté asociado a la prevención y el pronóstico de enfermedades.

Las técnicas estadísticas involucradas en los problemas de inferencia sobre la media en cada contexto médico de los datos se resumen en la Tabla 9.

Tabla 9. Relación entre contextos médicos de los datos y técnicas estadísticas

		L1	L2	L3
Diagnóstico	Diag1	Tec1, Tec4, Tec5	Tec1, Tec3, Tec5	-
	Diag2	Tec1, Tec4	Tec1, Tec2, Tec3, Tec5	Tec2, Tec4, Tec5
	Diag3	-	Tec4	Tec5
	Diag4	Tec4	-	-
Tratamiento	Trat1	Tec1	Tec1, Tec3, Tec4	-
	Trat2	Tec4, Tec5	Tec1, Tec4, Tec5	Tec1, Tec5
	Trat3	-	-	Tec5
Prevención	Prev1	Tec1, Tec4	Tec2	-
	Prev2	Tec5	Tec1, Tec5	-
Pronóstico	Pron1	Tec3	-	-
	Pron2	-	-	-
Matemático	Mat	Tec5	Tec3	-
Otros	Otros	Tec1, Tec3, Tec4, Tec5	Tec1, Tec2, Tec3, Tec4, Tec5	Tec1 ,Tec3, Tec4, Tec5

En relación con estas técnicas, hay que señalar que L1, L2 y L3 contienen, respectivamente, 2/31, 13/31 y 4/18 problemas que requieren de la aplicación de, al menos, dos técnicas distintas. En general, se debe a que presentan múltiples apartados, como ocurre en el ejemplo de la Tabla 10.

Tabla 10. Ejemplo de problema con más de una técnica estadística (L2, p. 293)

Muchos autores afirman que los pacientes con depresión tienen una función cortical por debajo de lo normal debido a un riesgo sanguíneo cerebral ir debajo de lo normal. A dos muestras de individuos, unos con depresión y otros normales, se les midió un índice que indica el flujo sanguíneo en la materia gris (dado en ml/100g/min). Si los resultados fueron los que siguen:

Depresivos	n=19	$\bar{x}$=47,0	error estándar=6,8
Normales	n=22	$\bar{x}$=53,8	error estándar=6,3

a) ¿Es cierta la hipótesis inicial?

b) ¿Cuántos individuos han de tomarse para detectar un descenso de 10 unidades, si de sabe que la desviación vale como máximo 30?

Aún así, se observan diferencias de frecuencias entre las técnicas estadísticas que ponen en juego los problemas incluidos en los tres libros. Se puede observar que, en relación al “diagnóstico”, L1 no considera las técnicas Tec2 y Tec3. Esta última, junto con Tec1 tampoco aparece en los problemas de L3. También es significativo el hecho de que Tec2 no aparezca en ningún contexto de L1. Por el contrario, los problemas de L2 incluyen las cinco técnicas. En los tres libros las técnicas más usadas en los problemas planteados en contextos de tratamiento son Tec1 y Tec5. Tec4 también aparece en problemas de L1, L2 y L3. En los libros L1 y L2, los problemas correspondientes a la categoría de prevención involucran las técnicas Tec1 y Tec5. No hay problemas correspondientes a esta categoría en L3. Excepcionalmente, L1 es el único libro que considera contextos asociados al pronóstico. Concretamente, los problemas correspondientes involucran la técnica Tec3. Finalmente, se observa que los problemas categorizados como “Otros” ponen en juegos técnicas estadísticas de las cinco clases que hemos considerado, siendo L2 el único libro en el que aparecen las cinco técnicas dentro de este contexto.

CONCLUSIONES

Las asignaturas básicas en los grados universitarios plantean la enseñanza de las bases teóricas de distintas disciplinas científicas, aunque deben orientarse a desarrollar competencias profesionales útiles para el entorno laboral que empleará a los graduados (Grao et al, 2011). Siendo conscientes de las dificultades que conlleva la simulación de situaciones profesionales genuinas en el ámbito académico, consideramos que es posible acercarse a dichas situaciones mediante las prácticas adecuadas (Barrows, 1996; Evans, 2000; Noss, Hoyles y Pozzi, 2000; Perrenet, Bouhuijs y Smits, 2000). El caso de la estadística en Medicina ha merecido especial atención, por la variedad de situaciones sanitarias que necesitan utilizar información sustentada en datos estadísticos y tomar decisiones importantes basadas en el análisis de dichos datos (Fardales Macías, 2014).

Asumiendo que la resolución de problemas contextualizados en las situaciones en las que se producen datos de origen médico se considera una metodología adecuada en el tipo de formación orientada al ejercicio de la profesión, nos hemos propuesto identificar los contextos en los que se plantean problemas de inferencia sobre la media en tres libros de texto de Bioestadística habituales en la formación de los graduados en Medicina. Hemos utilizado la noción de contexto médico de los datos y una clasificación a priori, relacionada con la idea de enfermedad y organizada en cuatro grandes categorías -diagnóstico, tratamiento, prevención y pronóstico de enfermedades-, que nos ha permitido caracterizar el contexto de cada problema.

El análisis realizado muestra que una gran mayoría de los contextos en los problemas de estos libros (53 de 80) están asociados al diagnóstico, tratamiento, prevención y pronóstico de enfermedades, si bien, también incluyen un número significativo de problemas (27 de 80) cuyo planteamiento no involucra situaciones clínicas. En estos casos, la mayoría de los problemas (24 de 27) aparecen contextualizados en situaciones desconectadas de la práctica profesional del médico. Los contextos estrictamente matemáticos que han aparecido en estos libros son minoritarios (3 de 27). En cuanto a las técnicas usadas en dichos problemas, el análisis evidencia que los libros consideran distintas técnicas según los contextos, y se aprecia una gran variabilidad en las técnicas usadas en los tres libros, aun cuando los problemas correspondan al mismo contexto médico de los datos.

Puesto que el estudio es de tipo exploratorio, estos resultados deben valorarse con cautela y convenimos la necesidad de considerar otros contenidos estadísticos y otros atributos para analizar los problemas. Con la intención de ampliar nuestro enfoque en el futuro, nos proponemos tener en cuenta propuestas como el modelo de Palm (2009), quien situándose en la perspectiva de mirar la utilidad de las matemáticas en situaciones extra-académicas, describe los factores que han de tenerse en cuenta para reproducirlas de forma efectiva en entornos de enseñanza. Más allá del contexto, la estructura del problema y el formato de los datos son factores determinantes para clasificar las actividades que realizan los estudiantes según su proximidad a las situaciones reales (Huerta, 2014; Lonjedo, Huerta y Carles, 2012). Aún así, los resultados obtenidos nos han dado una visión sobre los tipos de contextos relacionados con la idea de enfermedad que se utilizan en la formación estadística de los futuros graduados en Medicina y sobre la proporción de problemas contextualizados que aparecen.

Referencias

ANECA. (2007). *Libro Blanco del Título de Grado en Medicina*. Recuperado de http://www.aneca.es/var/media/150312/libroblanco_medicina_def.pdf

Barrows, H. S. (1996). Problem-based learning in medicine and beyond: A brief overview. En L. Wilkerson y W. Gijselaers (Eds.), *Bringing problem-based learning to higher education: Theory and practice. New Directions For Teaching and Learning Series*, No. 68 (pp. 3-11). San Francisco: Jossey-Bass.

Bessot, A. y Ridgway, J. (2000). *Education for Mathematics in the Workplace (Vol. 24).* Springer Science y Business Media.

Carles, M. y Huerta, M. P. (2007). El mundo de los problemas de probabilidad condicional en el contexto del test de diagnóstico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 249-260. Tenerife: SEIEM.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

De Souza, A. C., Lopes, C. E. y de Oliveira, D. (2014). Stochastic Education in Childhood: Examining the Learning of Teachers and Students. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 58-71.

Evans, J. (2000). The transfer of learning from school to work, not straightforward but not impossible either. En A. Bessot y J. Ridgeway (Eds.), Education for mathematics in the workplace (pp. 5–16). Dordrecht: Kluwer.

Fardales Macías, V. E. (2014). *Dinámica de la formación estadística del profesional de Medicina* (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Médicas de Sancti Spiritus.

González-Ruiz, I., González-López, M. J. y González-Astudillo, M. T. (en prensa). Contexto médico de los datos en la formación estadística de los médicos.

Grao, J., Iriarte, M., Ochoa, C., Uriarte, C., Mora, J. G., Lladosa, L. V., Carot, J. M. y Conchado, A. (2011). Competencies of Recent University Graduates: What University Supply Them and What the Jobs Require From Them. En *V International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management* (pp. 407-416). Cartagena.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 613-639). Nueva York: Springer.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world, situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 283-301.

Lonjedo, M. A., Huerta, M. P. y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 319-338.

Masingila, J. O., Davidenko, S. y Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 175-200.

Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century*, 14-25. New York: Mathematical Association of America.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S. (2000). Working knowledge: Mathematics in use. En *Education for mathematics in the workplace* (pp. 17-35). Dordrech: Springer.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense Publishers.

Perrenet, J. C., Bouhuijs, P. A. J. y Smits, J. G. M. M. (2000). The suitability of problem-based learning for engineering education: theory and practice. *Teaching in higher education*, *5*(3), 345-358.

Rees, C., Forbes, P. y Kubler, B. (2007). *Student employability profiles: A guide for higher education practitioners*. 2ª ed. York: Higher Education Academy.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. y Mason, A. (2000). Why can’t calculus students access their knowledge to solve non-routine problems. *Issues in mathematics education, 8*, 128-153.

ESTUDIO DE LA PERCEPCIÓN DE LA UTILIDAD DE LA GEOMETRÍA EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Study of the perception of the usefulness of geometry in future teachers of Primary Education

Gutiérrez-Rubio, D.[a], Maz-Machado, A.[a], León-Mantero, C.[a] y Jiménez-Fanjul, N.[a]

[a]Universidad de Córdoba

Resumen

Se realiza un estudio de carácter descriptivo y exploratorio sobre la percepción de futuros maestros sobre la importancia de la enseñanza de Geometría en Educación Primaria, utilizando un cuestionario de preguntas abiertas. Se categorizaron las respuestas dentro de razones de tipo instrumental y razones de tipo procedimental, y se analizaron las relaciones entre ellas así como la influencia que factores como el género o la ansiedad matemática tuvieron en sus respuestas. Se obtuvo una tendencia a utilizar razones de tipo procedimental por parte del alumnado y una relación entre los niveles de ansiedad matemática y el uso de razones de tipo procedimental, lo que concuerda con otros estudios anteriores. No se observaron diferencias en cuanto a género.

Palabras clave: *geometría, formación del profesorado, Educación Primaria, ansiedad matemática.*

Abstract

An exploratory and descriptive study is carried out on the perception of future teachers about the importance of Geometry teaching in primary education, using an open question questionnaire. The responses were categorized into instrumental reasons and procedural reasons, and the relationships between them were analysed as well as the influence that factors such as gender or mathematical anxiety had in their responses. There was a tendency in students to use procedural reasons and a relationship between their levels of mathematical anxiety and the use of procedural reasons, according to previous studies. No gender differences were observed.

Keywords: *geometry, teacher training, Primary Education, math anxiety*.

INTRODUCCIÓN

Es innegable que las matemáticas son esenciales para la formación básica de todas las personas. Tradicionalmente, han formado parte de nuestra herencia cultural y de los conocimientos trasmitidos a través de los diferentes sistemas educativos que ha conocido la historia. En particular, ramas de conocimiento como la Geometría han sido estudiadas en los centros de enseñanza desde las primeras civilizaciones conocidas (Rico y Sierra, 2000).

La Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015) pone de manifiesto que estudiar Geometría permite a los alumnos desarrollar la capacidad para visualizar relaciones geométricas, la capacidad de describir la situación y posición de objetos en el espacio, capacidad de describir y analizar propiedades, además de establecer relaciones con el resto de ramas de las matemáticas y con otros ámbitos como el arte o la ciencia.

Para ello, maestros y profesores deben promover una enseñanza eficaz en sus aulas: estos deben conocer y dominar los conocimientos que enseñan, deben hacer uso de ese conocimiento con

Gutiérrez-Rubio, D., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estudio de la percepción de la utilidad de la geometría en futuros profesores de educación primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 261-269). Gijón: SEIEM.

flexibilidad, deben conocer cómo aprenden sus alumnos y deben elegir y usar cuidadosamente las herramientas pedagógicas y de evaluación adecuadas. En el caso de la Geometría, esta debe percibirse como algo más que definiciones, se trata de la rama de conocimiento que ayuda a los estudiantes a aprender a razonar y entender la estructura axiomática de las matemáticas (NCTM, 2003).

Sin embargo, estudios como los de Barrantes y Blanco (2004) nos muestran que, a pesar de los esfuerzos realizados desde las instituciones escolares e investigadores por presentar nuevas propuestas, metodologías y recursos sobre la enseñanza de la Geometría, los estudiantes que acceden a los grados de Educación, afrontan su formación inicial desde la falta de conocimientos de Geometría y sin conocer cómo aprender desde la cultura constructivista.

Por otro lado, hoy en día está totalmente aceptado entre los educadores e investigadores en didáctica de las matemáticas, que tanto los aspectos cognitivos como los afectivos influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia. Cuando se trabajan las matemáticas el dominio afectivo de alumnos y profesores juega un papel importante en su predisposición hacia la materia, por tanto, tiene sentido analizarlos con detalle (Gil, Blanco, y Guerrero, 2006; Gómez-Chacón, 2002; Hart y Walker, 1993).

MARCO TEÓRICO

Ansiedad hacia las Matemáticas

Richardson y Suinn (1972) definen la ansiedad matemática como el sentimiento de tensión que interfiere en el alumno al trabajar el cálculo o la resolución de problemas en situaciones académicas o surgidas en la vida cotidiana. En este mismo sentido Fennema y Sherman (1976) definen la ansiedad hacia las matemáticas en relación a los síntomas físicos de nerviosismo que surgen al trabajar la materia.

La ansiedad hacia las matemáticas ha sido ampliamente analizada en estudiantes. El marco PISA 2012 (OECD, 2013) señala que la ansiedad en los estudiantes de secundaria influye en el rendimiento en clase de matemáticas de forma adversa, ya que el alumno desvía parte de su atención a preocuparse por tener que resolver problemas matemáticos. Estudios como el de Palacios, Santiago, y Ortega (2013) mostraron en alumnos de primaria y secundaria que las actitudes hacia las matemáticas son las que determinan el grado de ansiedad hacia la materia y, por tanto, a mejores actitudes, menores niveles de ansiedad.

Por su parte, trabajos como los de Schillinger, Vogel, Diedrich, y Grabner (2018) o los de Delgado, Espinoza, y Fonseca (2017) muestran el efecto que la ansiedad matemática tiene sobre el rendimiento y autopercepción en matemáticas. Pérez-Tyteca, Castro, y Rico (2011) muestran diferencias significativas entre hombres y mujeres, siendo las mujeres las que mayor ansiedad poseen cuando se enfrentan a tareas matemáticas.

El efecto de la ansiedad matemática en profesores también se ha estudiado. Así, por ejemplo, según un estudio realizado en escuelas de primaria de EEUU, la ansiedad matemática de las profesoras mujeres afecta a la autopercepción de las estudiantes chicas, no así a los estudiantes chicos (Beilock, Gunderson, Ramirez, y Levine, 2010).

En un estudio similar realizado por Bush (1989), si bien no se encontraron evidencias de que la ansiedad del profesorado repercuta en la ansiedad del alumnado, sí se obtuvieron evidencias de que profesores con mayores niveles de ansiedad matemática tendían a tener una metodología más tradicional, con un enfoque más procedimental, entendido como aquel que ve las matemáticas como un conjunto limitado de reglas y de problemas tipo, en las que el objetivo del alumno ante un problema es identificar qué tipo de problema es y aplicar la regla correspondiente (Skemp, 2012). En definitiva, implica un mayor uso de clases magistrales, menor uso de juegos, o menor enfoque en resolución de problemas. Esta relación entre mayores niveles de ansiedad y un enfoque procedimental de las matemáticas también fue estudiada en alumnos por autores como Clute (1984) o Norwood (1994).

Percepción de la utilidad hacia las Matemáticas

La percepción de la utilidad de las matemáticas es uno de los principales componentes para el estudio del dominio afectivo. Esta engloba las creencias de los estudiantes sobre la utilidad de las matemáticas tanto en su día a día como en su futuro académico o profesional (Fennema y Sherman, 1979).

La revisión de la literatura llevada a cabo por Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2017) evidencia que los estudiantes de Primaria consideran menos útiles las matemáticas conforme avanzan de curso académico y los estudiantes de Secundaria valoran negativamente la utilidad de las matemáticas y no sienten agrado hacia ellas.

Si nos centramos en las investigaciones realizadas con futuros maestros, en el estudio realizado por Blanco et al. (2010) se obtiene que los estudiantes para maestro son conscientes de la utilidad de las matemáticas para el estudio del resto de materias escolares. Asimismo, estudios como los de Nortes y Nortes (2014), Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2017) o Casas et al. (2016) encuentran que los maestros en formación sienten agrado hacia las matemáticas, también las consideran útiles y, sin embargo, aquellos alumnos que no, podrían sentir ansiedad hacia la materia.

OBJETIVO DEL ESTUDIO

Analizar, identificar y categorizar las diferentes percepciones del futuro profesorado sobre la importancia de la enseñanza de la Geometría en Educación Primaria, y relacionarla con los niveles de ansiedad matemática que estos presentan, con la finalidad de discernir qué tipo de creencias están más relacionadas con la ansiedad hacia las matemáticas y poder implementar diferentes tipos de materiales didácticos más específicos que les permita superar los niveles de ansiedad y así ejercer su futura actividad profesional con calidad.

METODOLOGÍA

Se plantea un estudio de carácter descriptivo y exploratorio. Los participantes fueron 152 alumnos de la asignatura Didáctica de la Geometría y la Estadística del tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba. Como herramienta de recolección de datos se usó un cuestionario formado por algunas preguntas de carácter sociodemográfico, por la pregunta abierta "En cuatro o cinco líneas explique por qué es importante el estudio de la Geometría en Educación Primaria" y por el test abreviado de Ansiedad Matemática AMAS (Hopko, Mahadevan, Bare, y Hunt, 2003). El momento elegido para recoger los datos fue en septiembre de 2017, al comienzo del curso 2017-2018.

Posteriormente se realizó mediante el software de análisis cualitativo ATLAS.ti (Versión 8.0) una codificación de las respuestas obtenidas en la pregunta abierta. Los códigos obtenidos se clasificaron en familias y se estudió su relación entre ellos y entre los niveles de ansiedad por el aprendizaje de las matemáticas observado en el alumnado.

Se dividieron los códigos obtenidos en procedimentales e instrumentales. Los códigos de carácter procedimental son aquellos que se atienen a la definición dada por Skemp (2012), es decir, cuando el encuestado da como razón para estudiar la Geometría que el alumnado sea capaz de realizar un procedimiento determinado. Se clasificaron como de carácter instrumental aquellas razones que aludían al desarrollo de capacidades que el estudio de la Geometría puede brindar al alumnado.

RESULTADOS

La codificación de las respuestas sobre razones de la importancia del estudio de la Geometría en Educación Primaria dio lugar a la agrupación en dos familias de códigos, esto es, las que aluden a razones de carácter procedimental y a las que aluden a razones de carácter instrumental, más el código "Pienso que no es importante" que no entraría en ninguna familia. En la Tabla 1 se recogen los códigos empleados junto con la descripción de los mismos. Los códigos "volúmenes" y "áreas" se agruparon en uno solo debido a que la mayoría de los estudiantes que argumentaron "volúmenes" también incluyeron "áreas" y viceversa. Los códigos "distancias" y "longitudes" se agruparon ya que por sí solos no presentaban una frecuencia representativa.

Como puede apreciarse, la razón que más se utiliza para justificar la Geometría en Educación Primaria es "Identificar figuras geométricas" con un 40,13% de alumnos que la utilizaron. La segunda justificación más usada fue "Desarrollo de la visión espacial" con un 32,24%. De la muestra, un 1,32% de los estudiantes manifestaron que la Geometría no era importante para el alumnado.

Tabla 1. Descripción de los códigos obtenidos

	Código	Descripción	Ocurrencia
Carácter procedimental	Identificar figuras geométricas	Es importante que los niños sepan identificar las diferentes figuras geométricas.	40,13%
	Calcular volúmenes y áreas	Es importante que los niños aprendan a calcular volúmenes y áreas.	18,42%
	Calcular distancias y longitudes	Es importante que los niños sepan calcular distancias o longitudes.	5,26%
Carácter instrumental	Forma de pensar	La Geometría favorece su capacidad de razonar y de pensar.	11,84%
	Problemas de la vida cotidiana	La Geometría les ayuda a resolver problemas de la vida cotidiana.	28,29%
	Para estudios futuros	Es importante la Geometría para otros estudios que realizaran en el futuro.	11,18%
	Desarrollo de la visión espacial	Con la Geometría se desarrolla la visión espacial.	32,24%
	Relación con el mundo	La Geometría está presente en el mundo que nos rodea	28,95%
Otras categorías	Pienso que no es importante	La Geometría no es importante en la educación del niño.	1,32%

En la Figura 1 se muestran las ocurrencias de los códigos por sexos. Para determinar si las diferencias observadas en función del sexo eran o no estadísticamente significativas se realizó el test exacto de Fisher para cada código, no obteniendo resultados significativos en ningún caso. Es decir, no existen evidencias estadísticas de diferencias en ambos sexos en cuanto a las razones aducidas para la importancia de la enseñanza de la Geometría en Educación Primaria. No obstante, códigos como "Distancias y longitudes" que arrojaron un p-valor de 0,129 o "Relación con el mundo" con un p-valor de 0,103 en el test exacto de Fisher pueden ser indicadores de que aumentando el tamaño de muestra sí podrían obtenerse diferencias estadísticamente significativas.

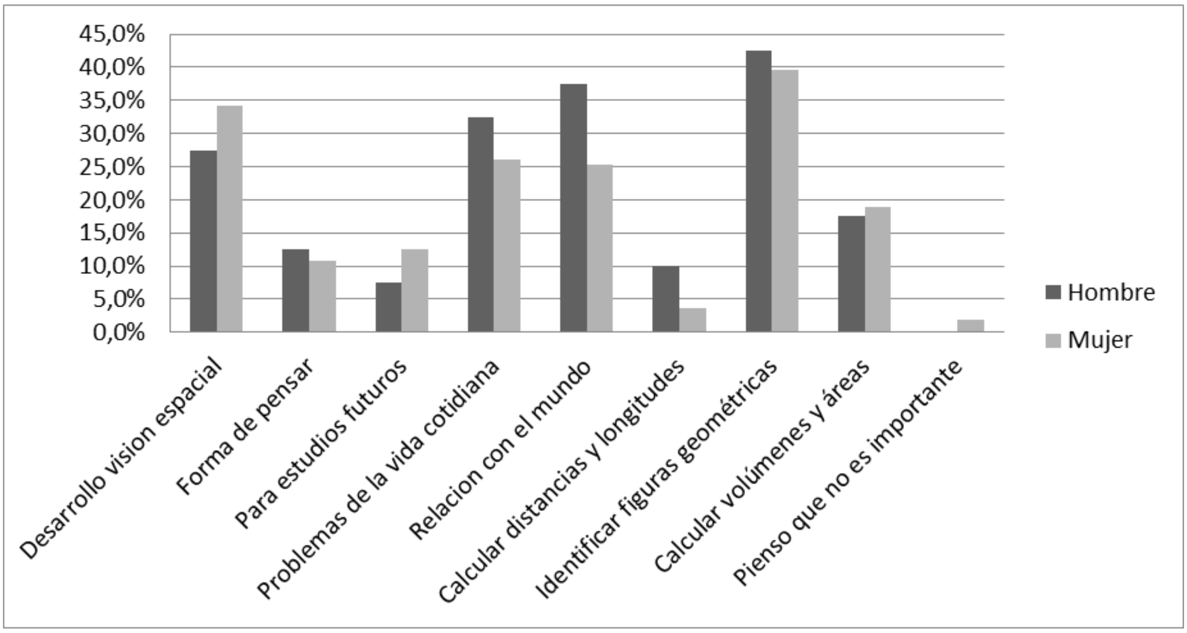


Figura 1. Porcentajes de razones esgrimidas para enseñar Geometría en función del sexo

Si consideramos el porcentaje de alumnos que respondieron al menos una razón de carácter instrumental o procedimental (Tabla 2), observamos una clara dominancia en el porcentaje de alumnos que se ciñen exclusivamente a razones procedimentales (45,0%). En este sentido el test de Fischer de dependencia da un p-valor de 0,00, por lo que existe une dependencia entre aludir razones de carácter procedimental o instrumental. El 7,2% de alumnos que no dieron razones ni procedimentales ni instrumentales corresponden a los que aludieron la razón “Pienso que no sirve para nada” o que contestaron en blanco dicha pregunta. La probabilidad de que un alumno incluya alguna razón de carácter instrumental baja del 47,4% al 32,3% si ha incluido alguna de carácter procedimental.

Asimismo, se calcularon tablas similares diferenciando por géneros, no encontrándose ninguna diferencia significativa entre ambos sexos.

Tabla 2. Porcentaje de alumnos que dieron razones procedimentales o instrumentales

		Alguna razón procedimental		
		NO	SI	Total
Alguna razón instrumental	NO	7,2%	45,4%	52,6%
	SI	25,7%	21,7%	47,4%
Total		32,9%	67,1%	100,00%

En la Tabla 3 se muestran las correlaciones de Tau-Kendall de las diferentes razones observadas. Se observa que las razones de carácter procedimental presentan correlaciones negativas con las instrumentales, lo cual puede ser evidencia de que ambos enfoques tienden a ser excluyentes en cierto grado. Esta suposición se ve reforzada por las correlaciones positivas significativas entre las distintas razones de carácter procedimental. Al igual que en la tabla anterior, se realizaron los mismos cálculos diferenciando por género del alumnado, no encontrándose diferencia significativa alguna entre sexos.

Tabla 3. Correlaciones de Tau-Kendall de los códigos. Con asterisco (*) correlaciones estadísticamente significativas a un nivel 0,05

	Desarrollo visión espacial	Forma de pensar	Para estudios futuros	Problemas de la vida cotidiana	Relación con el mundo	Calcular distancias y longitudes	Identificar figuras geométricas
Forma de pensar	0,139						
Para estudios futuros	-0,111	-0,065					
Problemas de la vida cotidiana	-0,183*	-0,140	-0,084				
Relación con el mundo	-0,068	0,035	-0,042	0,082			
Calcular distancias y longitudes	-0,036	-0,086	-0,084	-0,017	0,044		
Identificar figuras geométricas	-0,163*	-0,051	-,205*	-,186*	0,099	0,108	
Calcular volúmenes y áreas	-0,146	-0,174*	-,115	0,003	-0,079	0,420*	0,234*

En el test abreviado de ansiedad matemática AMAS, se obtuvo una puntuación en Ansiedad por Aprendizaje de las Matemáticas (MLA) de 7,59 en estudiantes hombres y un 9,11 en estudiantes mujeres, lo que concuerda con múltiples estudios anteriores, como los de Pérez-Tyteca, Castro, y Rico (2011) entre otros. El valor del Alfa de Cronbach fue de 0,853, representativo de una buena consistencia interna de los datos.

En la Tabla 4 se muestran los niveles medios de ansiedad por el aprendizaje de las matemáticas (MLA) en función de las razones que usaron para justificar el estudio de la Geometría en Educación Primaria. Cabe destacar que, en una aproximación puramente descriptiva, aducir razones de carácter instrumental para la enseñanza de la Geometría está relacionado con una disminución de la ansiedad media en el aprendizaje de las Matemáticas, mientras que con las de carácter procedimental ocurre justamente lo contrario. Esto puede ser un indicador de que una visión más procedimental de la Geometría (o de otras ramas de la Matemática) puede estar relacionada con niveles más altos de ansiedad relacionada con el aprendizaje de las Matemáticas en el alumnado. Esto concuerda con anteriores estudios que concluyen que alumnos con más ansiedad matemática se sienten más cómodos utilizando un enfoque procedimental de la asignatura (Bush, 1989; Clute, 1984; Norwood, 1994).

Tabla 4. Diferencias en los niveles de ansiedad. Con asterisco (*) diferencias estadísticamente significativas a un nivel 0,05

Carácter	Códigos	MLA		
		NO	SI	Dif.
Carácter instrumental	Desarrollo visión espacial	8,79	8,56	-0,22
	Problemas de la vida cotidiana	8,78	8,54	-0,25
	Forma de pensar	8,92	7,09	-1,83*
	Para estudios futuros	8,78	8,17	-0,61
	Relación con el mundo	8,78	8,55	-0,23
Carácter procedimental	Identificar figuras geométricas	8,70	8,73	0,03

	Calcular distancias y longitudes	8,66	9,71	1,05
	Calcular volúmenes y áreas	8,51	9,60	1,09*
Otros	Pienso que no es importante	8,68	11,21	2,52

Aplicando el test de igualdad de medianas se obtuvieron diferencias significativas en la ansiedad por aprendizaje de las Matemáticas para los códigos “Forma de pensar” y “Calcular volúmenes y áreas”, con efectos opuestos respecto a la MLA.

Aducir “Identificar figuras geométricas” como razón para la enseñanza de la Geometría, que fue la opción más utilizada por los estudiantes, no parece tener ninguna relación con la ansiedad. Esto puede deberse a que la noción de figura geométrica suele ser la asociación más común que se realiza con la Geometría, independientemente de los niveles de ansiedad de la persona. En este sentido cabe observar que algunos códigos están más relacionados que otros con el nivel de ansiedad, más allá de su carácter instrumental o procedimental, definiendo este si es una relación positiva o negativa.

CONCLUSIONES

En general no se aprecian diferencias entre sexos sobre las argumentaciones esgrimidas por los alumnos para estudiar Geometría en Educación Primaria, si bien algunas de ellas podrían necesitar un tamaño de muestra mayor para arrojar datos estadísticamente significativos.

Existe una clara tendencia por parte de los alumnos a utilizar enfoques procedimentales e incluso puramente procedimentales para justificar la enseñanza de la Geometría. Los datos analizados concuerdan con estudios previos de que un enfoque procedimental por parte del alumnado en la asignatura de Matemáticas está relacionado con niveles más altos de ansiedad matemática. Aquellos alumnos que manifestaron que la Geometría debe ser enseñada en Educación Primaria porque mejora la capacidad de pensar y razonar mostraron evidencias estadísticamente significativas de unos menores niveles de ansiedad matemática, mientras que los que justificaron su importancia porque el alumnado debía saber calcular áreas y volúmenes mostraron evidencias de mayor ansiedad. Esto nos permite afinar un poco más que en la clasificación instrumental/procedimental a la hora de buscar sus efectos en la ansiedad matemática, si bien el que una razón sea de carácter instrumental o procedimental nos permite determinar si tendrá un efecto positivo o negativo, respectivamente, sobre la ansiedad matemática, no todas las razones influyen en igual medida en esta, como hemos visto.

Como líneas futuras de acción, convendría comparar estos resultados con las valoraciones dadas por estudiantes del Grado de Educación Primaria de otros cursos académicos, de otros centros de formación de maestros, e incluso, otras Universidades, para identificar la influencia del conocimiento didáctico en sus niveles de ansiedad y su percepción de la utilidad de la Geometría.

Los resultados de este análisis pueden ayudar en un futuro, a plantear propuestas didácticas para los estudiantes en formación que les permita salvar aquellos obstáculos y dificultades que puedan influir en la toma de decisiones, gestión y desarrollo de su futuro ejercicio profesional como docentes, y que, por tanto, repercuta en la formación de sus alumnos.

REFERENCIAS

ATLAS.ti (Version 8) [Computer software] 2016. Berlín, Alemania: ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH. Recuperado de http://atlasti.com/

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G. y Levine, S. C. (2010). Female teachers’ math anxiety affects girls’ math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 22*(2), 241-250.

Blanco, L., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto. 19* (1), 13-31.

Casas, J. C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y Madrid, M. J. (2016). Identificando las relaciones dimensionales de la escala de actitudes hacia las matemáticas propuesta por Auzmendi en maestros en formación. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 579). Málaga: SEIEM.

Bush, W. S. (1989). Mathematics Anxiety in Upper Elementary School Teachers. *School Science and Mathematics*, *89*(6), 499-509. doi: 10.1111/j.1949-8594.1989.tb11952.x

Clute, P. S. (1984). Mathematics Anxiety, Instructional Method, and Achievement in a Survey Course in College Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 50-58. doi:10.2307/748987

Delgado, I. C., Espinoza, J. y Fonseca, J. (2017). Ansiedad matemática en estudiantes universitarios de Costa Rica y su relación con el rendimiento académico y variables sociodemográficas. *Propósitos y Representaciones*, *5*(1), 275. doi:10.20511/pyr2017.v5n1.148

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education*, *7*(5), 324-326. doi: 10.2307/748467

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación, 340*, 551-569.

Gómez-Chacón, I. M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Hart, L. E. y Walker, J. (1993). The role of affect in teaching and learning mathematics. En D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, (pp. 22-38). Nueva York: Macmillan.

Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L. y Hunt, M. K. (2003). The Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS): Construction, Validity, and Reliability. *Assessment*, *10*(2), 178-182. doi: 10.1177/1073191103010002008

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática (M. Fernández Reyes, Trad.). Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales. (Traducido de Principles and Standards for School Mathematics, 2000, Reston, VA: NCTM).

Nortes, R. y Nortes, A. (2014). Ansiedad hacia las matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 485-492). Salamanca: SEIEM.

Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2017). A los futuros maestros no les agradan las Matemáticas… pero las consideran útiles. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 367-376). Zaragoza: SEIEM.

Norwood, K. S. (1994). The Effect of Instructional Approach on Mathematics Anxiety and Achievement. *School Science and Mathematics*, *94*(5), 248-254. doi: 10.1111/j.1949-8594.1994.tb15665.x

OECD. (2013). Programa para la evaluación internacional de los alumnos: Informe español. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *BOJA, 60*, 9-696.

Palacios, A., Santiago, A. M. y Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 31*(2), 93-111.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(2), 237-250.

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, *19*, 551-554.

Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-132). Huelva: Hergué.

Schillinger, F. L., Vogel, S. E., Diedrich, J. y Grabner, R. H. (2018). Math anxiety, intelligence, and performance in mathematics: Insights from the German adaptation of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS-G). *Learning and Individual Differences, 61*, 109-119.

Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Nueva York: Routledge.

CARACTERÍSTICAS DEL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES SOBRE FRACCIONES

Characteristics of the professional noticing of students' mathematical thinking skill development about fractions

Ivars, P.[a], Fernández, C.[a] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

En este estudio 85 estudiantes para maestro participaron en un módulo de enseñanza donde tenían que usar la información de una trayectoria hipotética de aprendizaje de estudiantes de educación primaria sobre las fracciones para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir cómo responder. Los resultados muestran que la información de la trayectoria hipotética de aprendizaje ayudó a los estudiantes para maestro a generar un discurso con detalles sobre el pensamiento matemático de los estudiantes respecto a las fracciones y a proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes. Además, los resultados sugieren una relación entre la capacidad para atender a los detalles y la habilidad para proponer actividades para apoyar el desarrollo conceptual de los estudiantes.

Palabras clave: *mirada profesional, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, fracciones, estudiantes para maestro de educación primaria.*

Abstract

In this study, 85 pre-service primary school teachers participated in a teaching module where they had to use information from a hypothetical learning trajectory of primary students about fractions to interpret students' mathematical thinking and decide how to respond. Results show that the information of the hypothetical learning trajectory helped pre-service teachers to generate a detailed discourse about students' mathematical thinking regarding fractions and to propose activities focused on students' understanding. Furthermore, results suggest a relationship between the ability to attend to the details and the ability to propose activities to support students' conceptual development.

Keywords: *professional noticing, hypothetical learning trajectories, fractions, pre-service primary school teachers.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Para Mason (2011) "mirar profesionalmente implica un cambio o un movimiento en la atención" (p. 45) e identifica distintas maneras de prestar atención: i) *holding holes* es atender sin discernir detalles, ii) discernir detalles (*discerning details*) implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) reconocer relaciones (*recognizing relationships*) implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) percibir propiedades (*perceiving properties*) consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y, v) razonar en función de las propiedades *(reasoning on the basis of agreed properties*) implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás (Mason 2011, p.47). La particularización de esta competencia docente cuando se centra en el pensamiento matemático de

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). Carácterísticas del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes sobre fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 270-279). Gijón: SEIEM.

los estudiantes realizada por Jacobs Lamb y Philipp (2010) subraya la interrelación de tres destrezas: identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes (discernir detalles), interpretar su pensamiento matemático considerando los detalles matemáticos identificados (establecer relaciones), y decidir cómo continuar teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes (decidir qué actividades proponer que ayuden a los estudiantes a progresar conceptualmente).

Los resultados de las investigaciones previas indican que la competencia mirar profesionalmente puede desarrollarse en los programas de formación inicial de maestros (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Goldsmith y Seago, 2011; van Es, Cashen, Barnhart y Auger, 2017) aunque no es una tarea fácil sin la ayuda de una estructura o marco de referencia que guíen qué y cómo mirar (Levin, Hammer y Coffey, 2009), y que la destreza tomar decisiones es la más difícil de desarrollar (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016). Aunque los maestros y estudiantes para maestro pueden aprender a identificar los detalles de las estrategias de los estudiantes a veces no son capaces de usarlos para interpretar su pensamiento matemático o para tomar decisiones de acción (Barnhart y van Es, 2015: Gupta, Soto, Dick, Broderick y Appelgate, 2018; Stahnke et al., 2016).

Desde la perspectiva de apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente, las trayectorias de aprendizaje pueden servir a los estudiantes para maestro como marco de referencia con el que estructurar su atención (Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016) dotándoles de un lenguaje matemático para describir el pensamiento de los estudiantes y permitiéndoles identificar los objetivos de aprendizaje y dar respuesta con instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012). Nuestro estudio se apoya en la hipótesis de que proporcionar información sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje de un concepto matemático podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a tomar decisiones de acción centradas en su comprensión.

Una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre las fracciones

La conceptualización de Simon (1995) de trayectoria de aprendizaje, como un camino hipotético por el que el aprendizaje de los estudiantes puede discurrir, está formada por tres elementos: *un objetivo de aprendizaje, la descripción de un modelo del proceso de aprendizaje y actividades de enseñanza*. En esta investigación hemos construido una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para el concepto de fracción en educación primaria a partir de las investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones (Battista, 2012; Steffe y Olive, 2010).

Nivel 1. Los estudiantes no pueden identificar ni representar fracciones	Nivel 2. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias	Nivel 3. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones impropias
• No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes • No mantienen el mismo todo cuando comparan fracciones	• Reconocen que las partes en las que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero congruentes con relación al todo. • Usan fracciones como unidades iterativas para construir otras fracciones (propias) • Mantienen el mismo todo al comparar fracciones • No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes/ no consideran un grupo de partes como una parte	• Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte • Usan fracciones como unidad iterativa, para construir fracciones propias e impropias • Reconocen que el tamaño de una parte es menor cuando el número de partes aumenta.

Figura 1. Principales características de los niveles de comprensión de los estudiantes de primaria en la THA

El objetivo de aprendizaje de esta trayectoria es dar sentido al significado de fracción como parte-todo. Por lo que respecta al aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones, se han considerado tres niveles de comprensión (Figura 1). Finalmente, en cuanto a las actividades de aprendizaje se incluyen actividades de identificación, comparación y representación de fracciones en contexto continuo y discreto que apoyan la transición entre los niveles de comprensión de los estudiantes de educación primaria.

El objetivo de este estudio es analizar si la información proporcionada sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a tomar decisiones de acción centradas en su comprensión.

MÉTODO

Participantes e instrumento

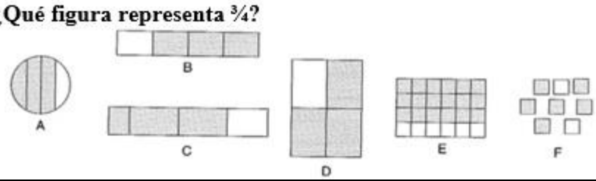
Los participantes fueron 85 estudiantes para maestro (EPM) del tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria. Los EPM cursaban una asignatura relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en la que uno de los objetivos es el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. Los EPM participaron en un módulo de enseñanza-aprendizaje correspondiente a las fracciones de seis sesiones de dos horas de duración. En la primera sesión se resolvieron actividades de fracciones identificando elementos matemáticos implicados. En la sesión 2, se analizaron resoluciones de estudiantes de primaria (videos) con el fin de aprender a identificar los elementos matemáticos implicados en las respuestas. En la sesión 3 se les presentó la trayectoria de aprendizaje considerada como información que les puede ayudar a analizar las respuestas de los estudiantes. En las sesiones 4 y 5 los EPM resolvieron dos tareas donde tenían que analizar respuestas de estudiantes con distinto nivel de comprensión usando la trayectoria de aprendizaje: una de identificación de fracciones (tarea 1) y otra de comparación de fracciones (tarea 2). En la sesión de evaluación (sesión 6), los EPM resolvieron una tarea similar a la de las sesiones 4 y 5: identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad (tarea 3).

En este estudio presentaremos los datos obtenidos en las tareas correspondientes a la sesión 4 (Tarea 1) y sesión 6 (Tarea 3). La estructura de las dos tareas era similar. En primer lugar, se presentaba una actividad de fracciones y las respuestas de tres estudiantes o parejas de estudiantes de primaria que mostraban características de los diferentes niveles de comprensión sobre fracciones de la THA. A continuación, los EPM debían responder tres preguntas:

- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista.

En la Tarea 1 los elementos matemáticos involucrados en la actividad son: *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes* (EM1) y *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte* (EM2). Las respuestas de los estudiantes de educación primaria reflejan diferentes características de los niveles de comprensión de la trayectoria de aprendizaje (Ivars, Fernández y Llinares, 2017). La Figura 2 muestra la actividad y las respuestas de los estudiantes de primaria en la Tarea 1. La Tarea 3 consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a dos actividades de fracciones, una de identificación y otra de reconstrucción de la unidad (Figura 3). En esta tarea, además de los elementos matemáticos 1 y 2 de la tarea 1, está implicado el elemento matemático 3 (EM3), *fracciones como unidades iterativas* *para construir otras fracciones*. Las respuestas de cada estudiante muestran características de los distintos niveles de comprensión en la trayectoria de aprendizaje (Ivars et al., 2017).

1. ¿Qué figura representa ¾?



Pareja 1: A, B, C y de son ¾ porque tienen 3 partes de 4 sombreadas	**Pareja 2**: B y D son ¾ porque están divididas en 3 partes iguales y 3 sombreadas. A y C no son ¾ porque las partes no son iguales. E son 24/18 y F no es una fracción.	**Pareja 3:** A, B, C y D como la pareja 2. E son ¾ porque tiene 4 líneas de 6 cuadrados y 3 sombreadas, y F también son 3/4, ya que tiene 4 grupos de 2 cuadros y 3 grupos están sombreados

Figura 2. Tarea 1: Identificación de fracciones (Battista, 2012)

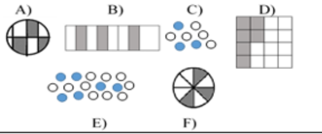
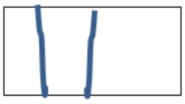
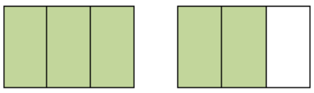
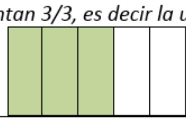
	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
¿Qué figuras representan 3/8? 	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*
Esta figura representa 5/3 de la unidad. Representa la unidad 	*Esto son 3 partes* 	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 	*Si nos muestran 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

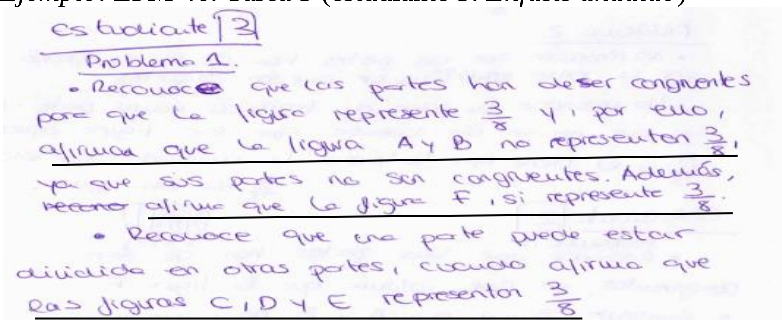
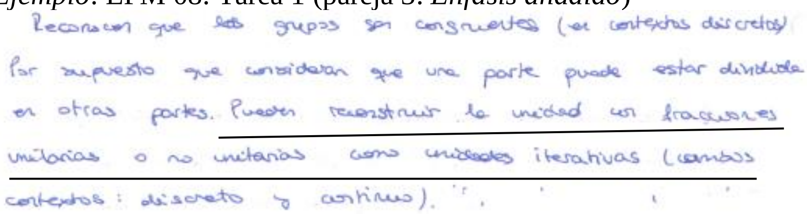
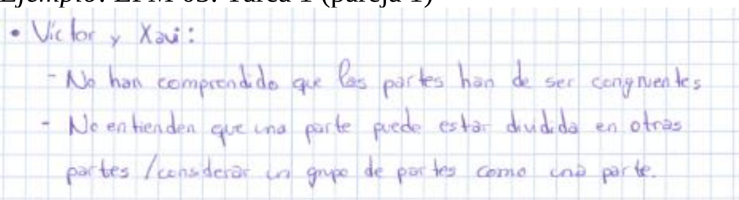
Figura 3. Tarea 3: Identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

Datos y análisis

Se llevó a cabo un análisis inductivo de las respuestas de los EPM a la Tarea 1 y Tarea 3. Las respuestas de los EPM a estas tareas fueron analizadas de manera independiente por tres investigadores considerando cómo los EPM *i)* usaron los elementos matemáticos del concepto de fracción para describir las respuestas de los estudiantes de primaria (discernir detalles), *ii)* interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes de primaria usando los elementos matemáticos identificados (establecer relaciones entre los elementos identificados en las respuestas de los estudiantes y el nivel de comprensión propuesto en la trayectoria de aprendizaje) y *iii)* decidían cómo responder proponiendo actividades para que el estudiante progresara en su comprensión. Posteriormente se compararon los análisis individuales discutiéndose las diferencias y similitudes hasta que se consensuó un acuerdo.

En esta comunicación focalizamos nuestra atención sobre las destrezas de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir cómo responder. En cuanto a la interpretación, generamos cuatro categorías; i) No establecen relaciones: EPM que no establecieron relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de comprensión de la trayectoria, ii) Establecen relaciones solo entre el elemento matemático 1 y el nivel de comprensión de los estudiantes, iii) Establecen relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 y el nivel de comprensión de los estudiantes iv) Establecen relaciones entre los tres elementos matemáticos y el nivel de comprensión de los estudiantes. Para cada una de estas cuatro categorías en función del discurso utilizado por los EPM en sus respuestas emergieron diferentes subcategorías: *Evidencer, Adder y Nonevidencer* (Tabla 1).

Tabla 1. Subcategorías considerando el discurso de los EPM

Subcategorías (Interpretar)	**Evidencias**
Evidencers: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias. *Ejemplo*: EPM 46. Tarea 3 (estudiante 3. *Énfasis añadido*)  estudiante 3 Problema 1. • Reconoce que las partes han de ser congruentes para que la figura represente 3/8 y, por ello, afirma que la figura A y B no representan 3/8, ya que sus partes no son congruentes. Además, reconoce afirma que la figura F, si representa 3/8. • Reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes, cuando afirma que las figuras C, D y E representan 3/8	El EPM 46 infiere la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1y 2, aportando detalles de las respuestas del estudiante como evidencias de sus inferencias. Por ejemplo "reconocen que las partes deben ser congruentes para que la figura represente 3/8, …, *afirman que la figura A y B no representa 3/8 […] y que la figura F sí representa 3/8*"
Adders: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias, pero añadiendo información innecesaria *Ejemplo*: EPM 08. Tarea 1 (pareja 3. *Énfasis añadido*)  Reconocen que los grupos son congruentes (en contextos discretos) por supuesto que consideran que una parte puede estar dividida en otras partes. Pueden reconstruir la unidad con fracciones unitarias o no unitarias como unidades iterativas (ambos contextos: discreto y continuo).	El EPM 08 hace inferencias sobre la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1 y 2, aportando detalles de las respuestas, pero añade información que no puede inferirse de la actividad ni en las respuestas de los estudiantes: "*pueden reconstruir la unidad con fracciones unitarias y no unitarias como unidades iterativas*…"
Nonevidencers: EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes *Ejemplo*: EPM 03. Tarea 1 (pareja 1)  • Víctor y Xavi: - No han comprendido que las partes han de ser congruentes - No entienden que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.	El EPM 03 infiere la comprensión del estudiante 3 de los elementos matemáticos 1 y 2 pero no aporta evidencias de sus inferencias.

En cuanto a la destreza de decidir cómo responder, para el análisis consideramos si los EPM proponían un objetivo de aprendizaje y una actividad apropiada a dicho objetivo que ayudara a los estudiantes a progresar. Así, emergieron tres categorías: i) EPM que no proponían ninguna actividad, ii) EPM que solo proponen objetivos de aprendizaje o que proponían una actividad no apropiada con dicho objetivo y iii) EPM que proponían un objetivo y una actividad apropiada con dicho objetivo. Por ejemplo, el EPM 46 tras interpretar la comprensión de la primera pareja en la Tarea 1 propuso como objetivo de aprendizaje *el reconocimiento por parte de los estudiantes de que las partes del todo deben ser congruentes* y propuso una actividad de fracciones en la que se muestran diferentes representaciones de ½ (Figura 4).

RESULTADOS

El análisis de los datos mostró dos resultados relevantes. En primer lugar, el uso de la información sobre una trayectoria de aprendizaje ayudó a los EPM a centrar su mirada en la comprensión de los estudiantes elaborando un discurso más rico en detalles. En segundo lugar, nuestros resultados sugieren una relación entre la habilidad de elaborar un discurso rico en detalles y la capacidad para tomar decisiones de acción centradas en el progreso conceptual de los estudiantes.

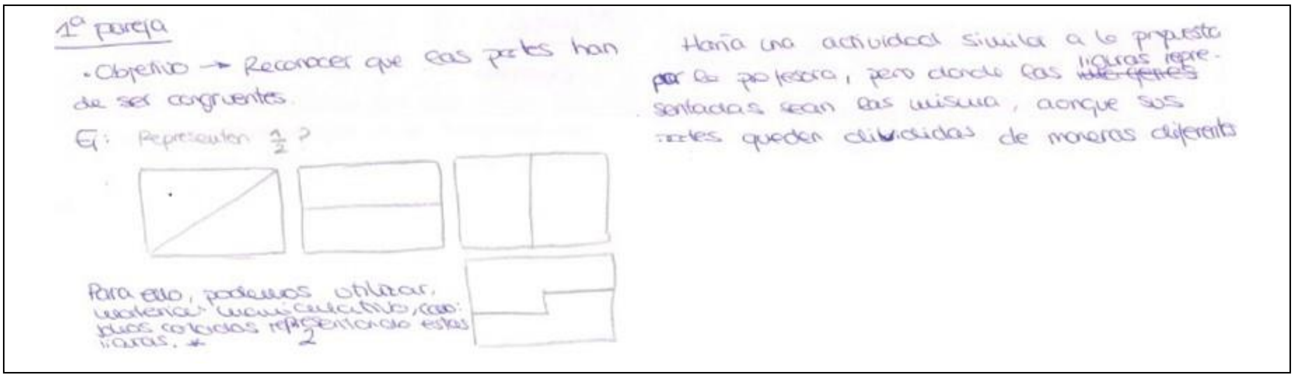


Figura 4. Ejemplo de actividad para progresar al Nivel 2 propuesta por EPM46

Cambios en el discurso sobre la comprensión de los estudiantes

La Tabla 2 muestra cómo los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes en la Tarea 1 y la Tarea 3. Los datos de esta tabla señalan que tras la participación en el entorno de aprendizaje (Tarea 3), 42 de los 85 EPM (49%) fueron capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes estableciendo relaciones entre los tres elementos matemáticos implicados (EM1, EM2 y EM3) y los diferentes niveles de comprensión de la trayectoria de aprendizaje; 32 de los 85 EPM interpretaron estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos (EM1 y EM2) y los niveles de la trayectoria hipotética de aprendizaje mientras que 11 de ellos solo establecieron relaciones con el elemento matemático EM1.

Además, la Tabla 2 nos muestra los cambios de los 85 EPM entre las tareas 1 y 3 en cuanto a la destreza interpretar considerando el discurso elaborado en función de los detalles aportados (evidencer, nonevidencer y adder). En la Tarea 1, 53 de los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes utilizando un discurso en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de las inferencias realizadas (evidencers*)*, y tras la participación en el entorno de aprendizaje, 70 de los 85 EPM incluyeron detalles de las respuestas de los estudiantes en su interpretación (evidencers; 37 interpretan la comprensión de los EM1,2y3; 26 interpretan la comprensión de los EM1y2; y finalmente 7 solo interpretan la comprensión del EM1). Este resultado sugiere que el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje usada como referencia para interpretar el pensamiento de los estudiantes, les permitió crear un discurso más elaborado incluyendo detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de apoyo a sus inferencias sobre la comprensión de los estudiantes.

Tabla 2. Cómo los EPM interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en las Tareas 1 y 3

TAREA 1 \ TAREA 3		**Establecen relaciones (EM1)**		**Establecen relaciones (EM1y2)**		**Establecen relaciones (EM1,2y3)**		**Total Tarea 1**
		Nonevid	Evidenc	Nonevid	Evidenc	Nonevid	Evidenc	
No relacionan		-	-	-	2	-	1	**3**
Establecen relaciones (EM1)	Nonevidencers	-	1	-	-	-	-	**1**
	Evidencers	-	-	-	1	1	-	**2**
Establecen relaciones (EM1y2)	Adders	-	-	1	1	-	5	**7**
	Nonevidencers	2	1	2	7	2	7	**21**
	Evidencers	2	5	3	15	2	24	**51**
Total Tarea 3		**4**	**7**	**6**	**26**	**5**	**37**	**85**

Relación entre la destreza interpretar y la destreza decidir

La Tabla 3 muestra la relación entre cómo interpretan y el número de actividades apropiadas con el objetivo propuestas para cada pareja de estudiantes (Pareja 1-desde el nivel 1 al nivel 2 y Pareja 2 desde el nivel 2 al nivel 3, por lo que tenemos un total de 2 actividades × 85EPM). Los EPM no propusieron actividades para la Pareja 3 que se encontraba en el nivel 3 ya que consideraron que estos estudiantes habían logrado el objetivo de aprendizaje. De manera general observamos que los 85 EPM fueron capaces de proponer 29 actividades para ayudar a progresar a los estudiantes entre el nivel 1 y el nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje (34%) mientras que para la transición entre el nivel 2 y el nivel 3 de la trayectoria se propusieron 43 actividades (51%). Los EPM fueron capaces de tomar una decisión de acción basada en la comprensión de los estudiantes en un 42% de las situaciones posibles. Estos datos sugieren dos ideas. En primer lugar, las dificultades de los EPM para proponer actividades apropiadas considerando el pensamiento matemático de los estudiantes y, en segundo lugar, que para los EPM resultó más difícil proponer una actividad para progresar entre el nivel 1 y el nivel 2 (vinculado al elemento matemático *las partes en las que se divide un todo deben ser congruentes*) que proponer una actividad para progresar entre el nivel 2 y el nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje (vinculado al elemento matemático *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes*).

La Tabla 3 señala ciertas diferencias entre las subcategorías relativas al discurso de los EPM sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Los 22 nonevidencers fueron capaces de proporcionar 11 actividades mientras que los 53 evidencers proporcionaron 56 actividades. Es decir, los EPM nonevidencers proporcionaron una actividad apropiada en el 25% de las situaciones posibles mientras que los evidencers lo hicieron en el 53% de las ocasiones.

Tabla 3. Relación destrezas interpretar- decidir en la Tarea 1

Interpretar \ Decisiones		EPM	ACT. N1-N2 Proponen	ACT. N1-N2 % ACT.1	ACT. N2-N3 Proponen	ACT. N2-N3 % ACT.2	% 2 Activid.
NO_ER		3	-	-%	-	-%	-%
ER_EM1	Nonevidencers	1	-	-%	-	-%	-%
	Evidencers	2	-	-%	-	-%	-%
ER_EM1Y2	Nonevidencers	21	3	14%	8	38%	26%
	Adders	7	3	43%	2	29%	36%
	Evidencers	51	23	45%	33	65%	55%

En cuanto a la Tarea 3 (Tabla 4), de manera general observamos que los 85 EPM fueron capaces de proponer 55 actividades para ayudar a progresar a los estudiantes del nivel 1 al nivel 2 (65%) mientras que para la transición del nivel 2 al nivel 3 de la trayectoria propusieron 40 actividades (47%). Así, los 85 EPM fueron capaces de proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes en un 56% de las situaciones posibles. Los cambios entre ambas tareas indican que los EPM fueron capaces de proponer un mayor número de actividades para la progresión del nivel 1 al nivel 2 lo que propició un aumento en los porcentajes globales en la Tarea 3 (42% vs 56%). Además, los 70 EPM que aportaron detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación proporcionaron 84 actividades de las 140 posibles (60%) mientras que los 15 EPM que en sus interpretaciones utilizaron un discurso que no incluía detalles de las respuestas de los estudiantes aportaron 11 actividades de las 30 posibles (37%). Estos resultados subrayan que aquellos EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes utilizando un discurso que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (evidencers), fueron capaces de proponer actividades en mayor medida que aquellos que no incluyeron detalles en sus interpretaciones. Dicho de otro modo, la generación de un discurso rico en detalles parece estar vinculado a la capacidad de proponer actividades adecuadas con el aprendizaje pretendido.

Tabla 4. Relación destrezas interpretar-decidir en la Tarea 3

Interpretar \ **Decisiones**			**ACT. N1-N2**		**ACT. N2-N3**		**% 2 Activid.**
		EPM	Proponen	**% ACT.1**	Proponen	**% ACT.2**	
ER_EM1	Nonevidencers	4	2	**50%**	-	**-%**	25%
	Evidencers	7	4	**57%**	-	**-%**	29%
ER_EM1y2	Nonevidencers	6	2	**33%**	2	**33%**	33%
	Evidencers	26	15	**58%**	12	**46%**	52%
ER_EM1,2y3	Nonevidencers	5	3	**60%**	2	**40%**	50%
	Evidencers	37	29	**78%**	24	**65%**	72%

Nuestro análisis nos permitió además identificar la frecuencia con la que los EPM eran capaces de proponer una, dos o las dos actividades posibles que las tareas les demandaban (Tablas 5, Tarea 1 y Tabla 6 Tarea 3). La Tabla 5 muestra que, en la Tarea 1, de los 53 EPM que interpretaron el pensamiento de los estudiantes proporcionando detalles (evidencers), 39 fueron capaces de proponer al menos una actividad para ayudarles a progresar en su comprensión de las fracciones (74%). Además, 17 de estos EPM fueron capaces de proponer las dos actividades solicitadas (32%). En cuanto a los EPM que no aportaron detalles en sus interpretaciones (nonevidencers), nueve de los 22 propusieron al menos una actividad (41%) y solo dos de ellos lograron proponer las dos actividades solicitadas (9%).

Tabla 5. Frecuencia con la que los EPM propusieron una, dos o las dos actividades (Tarea 1)

Interpretar \ Decidir		Nada	Solo objetivos	Una actividad: Act. N1-N2	Una actividad: Act. N2-N3	Dos actividades: N1-N2 N2-N3
NO_ER		3	-	-	-	-
ER_EM1	Non-Evidencer (1)		1	-	-	-
	Evidencer (2)	1	1			
ER_EM1y2	Non-Evidencer (21)	-	12	1	6	2
	Adder (7)	2	2	1	-	2
	Evidencer (51)	4	8	6	16	17
	TOTAL	10	24	8	22	21

Esta misma tendencia se aprecia en la Tarea 3 (Tabla 6). En este caso, 54 de los 70 evidencers proporcionaron al menos una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones (77%).

Tabla 6. Frecuencia con la que los EPM propusieron una, dos o las dos actividades (Tarea 3)

Interpretar \ Decidir		Nada	Solo objetivos	Una actividad: Act. N1-N2	Una actividad: Act. N2-N3	Dos actividades: N1-N2 N2-N3
ER_EM1	Non-Evidencer (4)	1	1	2	-	-
	Evidencer (7)	1	2	4	-	-
ER_EM1y2	Non-Evidencer (6)	2	1	1	1	1
	Evidencer (26)	6	3	5	2	10
ER_EM1,2y3	Non-Evidencer (5)	-	2	1	-	2
	Evidencer (37)	1	3	9	4	20
	TOTAL	11	12	22	7	33

Además, 30 EPM propusieron las dos actividades posibles (42%). De forma similar a la Tarea 1, de los 15 EPM categorizados como nonevidencers en esta Tarea 2, ocho propusieron al menos una actividad (53%), sin embargo, solo tres de ellos consiguieron proponer ambas actividades (20%).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es analizar si la información proporcionada sobre una trayectoria hipotética de aprendizaje podría ayudar a los estudiantes para maestro a interpretar su pensamiento matemático y a proponer actividades para apoyar su comprensión.

Los resultados han mostrado que los EPM que participaron en este estudio generaron un discurso sobre el pensamiento matemático de los estudiantes con características diferentes: Evidencer, Adder y Nonevidencer. Tras la participación en el entorno de aprendizaje 70 de los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes proporcionando un discurso más elaborado, en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias (evidencers). Este resultado puede interpretarse en el sentido de que la introducción de la THA como marco de referencia ayudó a los EPM a prestar atención a los detalles de las respuestas de los estudiantes evidenciando una mirada más estructurada. Este hecho es relevante ya que prestar atención a los detalles de las respuestas de los estudiantes puede “ayudar a los maestros a aprovechar la comprensión de los estudiantes” (Wilson Sztajn, Edgington, Webb y Myers, 2017; p 571) y es la manera de evitar generalidades que pueden bloquear el acceso a caminos alternativos, interpretaciones alternativas y, en última instancia, a actos alternativos (Mason, 2002). En este sentido, la THA proporcionó a los EPM una estructura que facilitó la generación de un discurso profesional, que incluía inferencias basadas en evidencias y que les permitió proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes. En cuanto a la destreza tomar decisiones de acción, investigaciones previas han mostrado que es la más difícil de adquirir (Choy, 2016; Stahnke et al., 2016). En nuestro estudio, los EPM propusieron un objetivo de aprendizaje y actividad apropiada en el 42% para la Tarea 1 y en el 56% para Tarea 3. Estos resultados son relevantes si los comparamos con los obtenidos por investigaciones previas como las de Jacobs et al. (2010) o Timinsky, Land, Drake, Zambak y Simpson (2014) que obtuvieron un porcentaje muy reducido de EPM que eran capaces de proponer actividades adecuadas (20% y 14% respectivamente).

Además, los resultados de este estudio han mostrado que aquellos EPM que fueron capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes elaborando un discurso con detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias, fueron capaces de proponer más actividades centradas en la comprensión del estudiante que aquellos que no aportaron evidencias. Los evidencers fueron capaces de proponer al menos una actividad en un porcentaje mayor de ocasiones que los nonevidencers, tanto en la Tarea 1 (76% *vs* 42%) como en la Tarea 3 (77% *vs* 53%). En cuanto a los EPM que lograron proponer las dos actividades en ambas tareas, las diferencias son similares tanto en la Tarea 1 (33% vs 9%) como en la Tarea 3 (42% vs 20%). Estos resultados sugieren una relación entre la capacidad para generar un discurso más detallado sobre la comprensión de los estudiantes y la capacidad para proponer actividades basadas en esta comprensión.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España) EDU2017-87411-R.

Referencias

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 421-440.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, *5*(1), 65-80.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Goldsmith, L. T. y Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 169-187). New York: Routledge.

Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. D. y Appelgate, M. (2018). Noticing and deciding the next steps for teaching: A cross-university study with elementary pre-service teachers. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (pp. 261-275). Springer, Cham.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education*, *60*(2), 142-154.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* (pp. 35-50). New York: Routledge.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Springer International Publishing.

van Es, E. A., Cashen, M., Barnhart, T. y Auger, A. (2017). Learning to notice mathematics instruction: Using video to develop preservice teachers' vision of ambitious pedagogy. *Cognition and Instruction*, *35*(3), 165-187.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J. y Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal*, *54*(3), 568-604.

EL ESTUDIO DE CLASES EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL: COMBINANDO TEORÍA Y PRÁCTICA PROFESIONAL

Lesson study in the initial education of early childhood education teachers: Combining theory and professional practice

Lendínez, E.[a], García, F. J.[a] y Lerma-Fernández, A. M.[a]

[a]Universidad de Jaén

Resumen

Como docentes universitarios a cargo de la formación inicial del profesorado de Educación Infantil, observamos claros síntomas del paradigma monumentalista (visita a algunas obras tanto de Matemáticas como de Didáctica de las Matemáticas) cuando esta formación se organiza según el esquema tradicional "clase de teoría - clase de prácticas". En esta comunicación pretendemos identificar con nitidez el reto que supone la formación profesional funcional del futuro profesorado, formularlo como un problema de investigación dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y explorar la potencialidad del dispositivo del estudio de clases como herramienta para desarrollar el equipamiento praxeológico del profesorado como respuesta a cuestiones profesionales vivas y auténticas. Se describirá el diseño de este dispositivo, para el caso de la formación inicial de profesorado de Educación Infantil sobre la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos.

Palabras clave: *formación inicial del profesorado, Educación Infantil, estudio de clases.*

Abstract

As teacher educators involved in the initial education of prospective Early Childhood Education teachers, we observe evident signs of the monumentalistic paradigm (visiting some works, both mathematical and from the didactic of mathematics) when the education of teachers is structured following the traditional scheme lecture-practice. In this communication, we aim at clearly identifying the challenge of a functional education of prospective teachers, formulating it as a research problem within the Anthropological Theory of the Didactic, and exploring the potential of the lesson study device as a tool to develop prospective teachers' praxeological equipment as responses to alive and authentic professional questions. We will describe de design of such device, for the case of the initial education of prospective Early Childhood Education teachers around the teaching of numbers and numbering.

Keywords: *initial teacher education, Early Childhood Education, Lesson Study.*

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado, inicial y continua, es un dominio de investigación central en el área de Didáctica de las Matemáticas. Tradicionalmente, dos ejes se interconectan dentro de esta problemática: el del conjunto de conocimientos y destrezas que el profesorado de matemáticas necesita en una determinada institución (dimensión del equipamiento praxeológico de la profesión), y el de cómo construir y desarrollar estos conocimientos, y estas destrezas, de manera efectiva (dimensión de los dispositivos para la formación).

Lendínez, E., García, F. J. y Lerma-Fernández, A. M. (2018). El estudio de clases en la formación inicial del profesorado de educación infantil: Combinando teoría y práctica profesional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 280-289). Gijón: SEIEM.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se puede identificar toda una línea de investigación en esta perspectiva, representada por trabajos como los de Cirade (2006), Chevallard (2009), Bosch y Gascón (2009), Ruiz-Higueras y García (2010), Ruiz-Olarría, Sierra, Bosch y Gascón (2014), Ruiz-Olarría (2015) o García (2017). Algunos de los avances más interesantes han sido: la despersonalización de la problemática del conocimiento del profesor (conocimiento de la profesión), la caracterización de este en términos praxeológicos (equipamiento praxeológico matemático-didáctico de la profesión), la experimentación de nuevos dispositivos para el desarrollo de este equipamiento (los REI-FP: recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado) o la extensión del *paradigma del cuestionamiento del mundo* a la formación del profesorado (*cuestionamiento del mundo de la profesión*), en torno a la que girará esta comunicación.

EL PARADIGMA DEL CUESTIONAMIENTO DEL MUNDO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Chevallard (2015) identifica dos paradigmas didácticos ideales, y contrapuestos, en la enseñanza de las matemáticas. Denomina *paradigma de la visita de las obras* o *monumentalista* a aquel en el cual la enseñanza de las matemáticas se organiza como el estudio de obras matemáticas ya cristalizadas, olvidando que toda obra surge como respuesta a una o varias cuestiones problemáticas, que son las que justifican su existencia (su *razón de ser*). Ante los fenómenos indeseables que surgen ligados al *paradigma de la visita de las obras*, Chevallard postula un nuevo paradigma, el del *cuestionamiento del mundo*, en el que el trabajo matemático se articule a partir del estudio de cuestiones generatrices *vivas* y *auténticas*. En García (2017) se propone extender este paradigma al caso de la formación del profesorado. Muy frecuentemente, esta formación está más organizada como *visita* a determinadas *respuestas* (“la resolución de problemas”, “los niveles de Van Hiele”, “la Teoría de las Situaciones Didácticas”) que los formadores presentan, considerando que son útiles y pertinentes para el profesorado, que como un verdadero *cuestionamiento del mundo de la profesión* docente. De esta forma, se corre el riesgo de estructurar la formación del profesorado a partir de los bloques tecnológico-teóricos de equipamientos praxeológicos ya existentes en la profesión, más que como una exploración de *cuestiones profesionales*, manteniendo implícitas, e incluso ausentes, las cuestiones que dieron lugar a su creación. Privados de sus “razones de ser”, y como una consecuencia más del *paradigma de la visita de las obras*, la toma de contacto de la profesión con estos equipamientos dejará completamente bajo la responsabilidad de los profesores el darle sentido a los mismos, dificultando enormemente que estos equipamientos se conviertan en verdaderas herramientas para actuar ante las situaciones problemáticas que la profesión debe abordar. En el marco de esta comunicación, entendemos la noción de equipamiento praxeológico como un conjunto conectado y articulado de praxeologías matemáticas y didácticas (en el sentido de Ruiz-Higueras y García, 2010) que la profesión pone en funcionamiento para concebir, diseñar, implementar, observar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo sin sentido del equipamiento praxeológico del profesorado es un fenómeno didáctico que venimos observando, de forma reiterada, en la formación inicial del profesorado de Educación Infantil en la Universidad de Jaén. Los estudiantes cursan una única asignatura de Didáctica de las Matemáticas (*Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil,* asignatura obligatoria de 7 créditos ECTS, que se traducen en 6 horas semanales presenciales de teoría y 3 horas semanales presenciales de prácticas, durante 5 semanas), organizada según el dispositivo clásico *clase de teoría-clase de prácticas*. La asignatura se centra en el aprendizaje por adaptación al *medio*, la Teoría de las Situaciones Didácticas y, a partir de esta, en la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos lógicos, aritméticos, espaciales y geométricos en la escuela infantil. Aun cuando se proponen muchos ejemplos y casos prácticos, la formación que reciben los futuros maestros asume en gran medida los postulados de un *paradigma monumentalista*, siendo tal vez el síntoma más evidente el que se les proporcione a los estudiantes un conjunto de respuestas recogidas en un “temario”, junto con unas clases de *teoría* orientadas a exponer (explicar) dicho temario. Aunque se incluyen cuestiones problemáticas a las que este temario intenta dar respuesta (por ejemplo, *¿qué conocimientos lógicos se deben trabajar en la escuela infantil?*, o *¿para qué sirve el número y su designación escrita?*), el mero hecho de formularlas no implica que generen, por un lado, el sentido de los conocimientos matemático-didácticos que se exponen y, por otro lado, que consigan que el equipamiento praxeológico de los futuros maestros se desarrolle más allá del bloque tecnológico-teórico, convirtiéndose en un verdadero instrumento que informe y provoque una *praxis* profesional (como constatamos con estos mismos estudiantes en sus periodos de prácticas docentes o en la realización de sus Trabajos Fin de Grado).

Nuestra hipótesis de partida surge de la constatación de las dificultades de nuestros estudiantes para diseñar e implementar situaciones adidácticas para el aprendizaje de conocimientos lógico-matemáticos en la escuela infantil. Postulamos que una formación docente desde el *paradigma del cuestionamiento del mundo* podría conducir a una elaboración significativa del equipamiento praxeológico de los docentes, que permitiría un desarrollo integrado de su *praxis* y *logos* profesional, y dotaría a la profesión de verdaderas herramientas para afrontar sus tareas profesionales.

La formación del profesorado según el *paradigma de cuestionamiento del mundo de la profesión* (*PCMP*) puede ser modelizada con el esquema herbartiano (véase García, 2017). Este representa un sistema didáctico constituido por uno o varios profesores y articulado en torno al estudio de una o varias *cuestiones profesionales Q*. La comunidad de estudio, tomando en serio el estudio de esta cuestión, indagaría en el *mundo de la profesión* buscando posibles respuestas ya existentes y considerando obras ya creadas que les permitan estudiar, cuestionar, deconstruir y validar estas respuestas. Este conjunto de respuestas y obras actúan como un *medio* (en el sentido brousseauniano), potencialmente útil a la comunidad de estudio en su búsqueda de una posible respuesta $R^{\blacktriangledown}$.

Considerar la formación del profesorado desde este paradigma supone un doble reto. Por un lado, la identificación de *cuestiones profesionales* con suficiente poder generador para desarrollar el equipamiento praxeológico de la profesión. Por otro lado, el diseño de dispositivos que permitan a la profesión identificar y explorar, de forma productiva, dichas cuestiones (Figura 1).

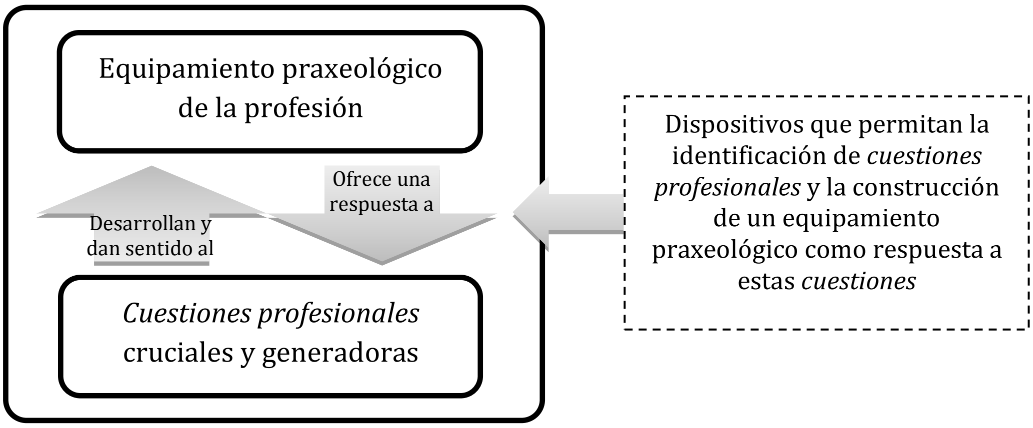


Figura 1. Doble reto de la formación del profesorado desde la TAD

En este contexto, nuestra investigación pretende explorar posibles respuestas a las siguientes cuestiones: ¿Qué dispositivos pueden ser eficaces para organizar la formación de los maestros dentro del *PCMP*? ¿Cuáles son las condiciones y las restricciones que permitirían o no el uso de estos dispositivos en los sistemas actuales de formación inicial del profesorado en España? En particular, nos planteamos los siguientes objetivos: (1) diseñar procesos de estudio basados en la estructura del *Estudio de Clases*, desde la perspectiva del *PCMP*; (2) experimentar dichos dispositivos con alumnado en formación inicial del Grado en Educación Infantil; (3) evaluar en qué medida el uso de estos dispositivos permite una construcción más articulada y significativa del equipamiento praxeológico de la profesión; y (4) identificar condiciones y restricciones ecológicas que favorecen o dificultan el uso de estos dispositivos. En esta comunicación nos centraremos en la primera cuestión, abordando aspectos que tienen que ver con los objetivos (1), (2) y (3).

EL DISPOSITIVO DE *ESTUDIO DE CLASES* DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

El dispositivo de *Estudio de Clases* (*EC*) es una práctica para la formación inicial y continua del profesorado desarrollada en Japón durante más de 100 años, que llamó la atención en la esfera internacional a partir de los resultados del estudio TIMSS.

Sucintamente, el *EC* se puede describir como un dispositivo que permite al profesorado desarrollar su práctica y su conocimiento profesional a través del diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior. Esbozaremos los rasgos más importantes y, hasta cierto punto, idealizados de este dispositivo, basándonos en Watanabe, Takahashi y Yoshida (2008), Doig y Groves (2011), Murata (2011), Shimizu (2014) y Fujii (2015):

1. Un *EC* parte siempre de algún tipo de inquietud por parte del profesorado, normalmente sobre el aprendizaje de sus estudiantes, que conduce a la formulación de una *pregunta de investigación*. Esta cuestión no es una formalidad, sino que debe ser tomada en serio, pues guiará las siguientes etapas, hacia la búsqueda de una posible respuesta a la misma.
2. El grupo de profesores comienza un proceso colaborativo que conduce al diseño de una intervención en el aula, y que incluye un documento detallado de cómo será esta (*plan de clase*). Esta intervención se puede apoyar en actividades ya existentes, o puede incluir el diseño de otras nuevas. En esta fase, los profesores van más allá de explorar posibles tareas, involucrándose en un verdadero proceso de investigación (*kyozaikenkyu*, en japonés), que podría incluir el análisis del currículo, de libros de texto, de otros materiales curriculares, de artículos y libros científicos, etc. El profesorado dedica tiempo y esfuerzo a anticipar cómo la intervención (*la clase*) va a funcionar y qué tipo de estrategias podrían movilizar los estudiantes. Para todo ello, el profesorado podría contar con la ayuda de uno o varios expertos (*koshi*, en japonés). El resultado es un *plan de clase*, que incluye: (i) el objetivo de la clase y su conexión con la *pregunta de investigación*; (ii) un análisis detallado de las posibles respuestas de los estudiantes, posibles errores, bloqueos, concepciones erróneas, etc.; (iii) la acción del profesor en el aula, para introducir la actividad, sostener y apoyar el trabajo de los estudiantes, comparar las respuestas de los estudiantes, y elaborar una síntesis a partir de éstas.
3. Una implementación de la *clase* por parte de un profesor del grupo, mientras que el resto observa. El profesor trata de ajustarse al *plan de clase*, aunque las circunstancias de la intervención le pueden llevar a hacer modificaciones. El resto observa la clase, centrándose en la actividad matemática de los alumnos, y no tanto en las acciones del profesor. La observación está guiada por la búsqueda de respuestas a la *pregunta de investigación*.
4. Tras la intervención, se produce una discusión grupal, centrada en las estrategias y las dificultades de los estudiantes, y conectada con la *pregunta de investigación*. El objetivo no es analizar ni cuestionar la intervención del profesor. En ocasiones, la discusión puede verse enriquecida con la intervención de un experto externo (normalmente un profesor universitario u otro profesor con experiencia).

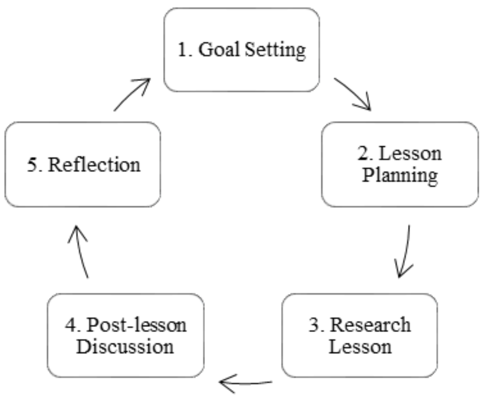


Figura 2. Etapas de un ciclo de *estudio de clases* (Fujii, 2016, p. 412)

Fujii (2016) añade una quinta etapa, que denomina “reflexión”, en la que el ciclo se documenta, el aprendizaje profesional se consolida, y nuevas cuestiones podrían emerger (Figura 2). En esta etapa se elabora un informe en el que se incluyen la *pregunta de investigación*, el *plan de clase*, datos de los estudiantes recogidos en la observación de la implementación y una reflexión sobre lo que se ha aprendido.

Desde la TAD, Winsløw (2011) y Miyakawa y Winsløw (2013) han propuesto una primera reinterpretación del *EC*, basándose en las nociones de *sistema didáctico* (Brousseau, 2002) y de *infraestructura matemática y didáctica* (Chevallard, 2009). Así, Winsløw (2011) considera que cuando los profesores planifican una clase, la observan, o cuando discuten *a posteriori*, forman parte de diferentes sistemas didácticos, que denomina, respectivamente, *sistema predidáctico* (PrS), *sistema didáctico de observación* (DoS) de un *sistema didáctico* (DS), y *sistema post-didáctico* (PoS). El *EC* integra, a lo largo del tiempo, estos cuatro sistemas didácticos. Por ello, Winsløw (2011) propone referirse al mismo como un *sistema paradidáctico*, en el que los profesores comparten prácticas y conocimiento sobre diferentes *sistemas didácticos*, que se convierten en objeto de estudio, usando diferentes artefactos (Figura 3).

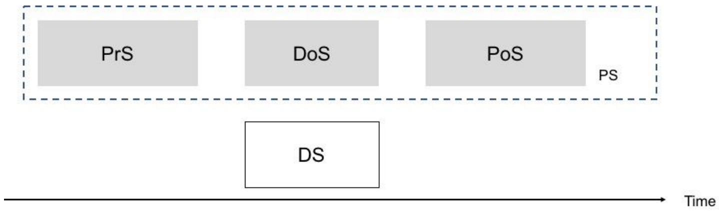


Figura 3. *Estudio de clases* como sistema paradidáctico (Winsløw, 2011)

Así pues, en este *sistema paradidáctico*, la formulación de una *pregunta de investigación* y el *diseño de una clase*, forman parte del PrS; la *implementación de la clase* forma parte del DoS; y la *discusión posterior* a la implementación y la *reflexión* forman parte del PoS.

La existencia de un *sistema didáctico* provoca la necesidad de una *infraestructura matemática y didáctica* (Chevallard, 2009), que incluye un conjunto de praxeologías matemáticas y didácticas, así como las condiciones que las afectan y hacen posible que vivan en una institución determinada. De manera análoga, la existencia del *sistema paradidáctico* del *EC* hace necesario el desarrollo de una *infraestructura paradidáctica*, que fijará las condiciones y las restricciones que condicionan al *sistema paradidáctico* en sus diferentes fases.

A partir de esta primera reinterpretación del *EC*, formulamos, como hipótesis de trabajo, vinculada con la hipótesis general descrita anteriormente, que este dispositivo podría ofrecer un marco de referencia para organizar la formación del profesorado desde el *PCMP*.

UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIO DE CLASES CON PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL EN FORMACIÓN INICIAL

En este apartado introduciremos algunos aspectos del trabajo que estamos llevando a cabo para crear una posible *infraestructura paradidáctica* para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil, desde el *PCMP*, y a través del dispositivo del *EC*.

Desde el punto de vista metodológico, presentamos aquí un primer estudio exploratorio, llevado a cabo con alumnado del grado en Educación Infantil. Por un lado, usaremos como herramientas de análisislos diferentes *sistemas didácticos* que integran un proceso de *EC* según la TAD, exponiendo en qué sentido hemos ido construyendo esta *infraestructura* atendiendo a los diferentes *sistemas didácticos* (PrS, DoS y PoS) que aparecen, así como al *sistema didáctico* (DS) que se desea producir. Por otro lado, la noción de equipamiento praxeológico de la profesión (modelo de la TAD para describir y cuestionar el conocimiento del profesor), intentando identificar vínculos entre el trabajo realizado en cada *sistema didáctico* y el desarrollo del citado equipamiento praxeológico.

Los datos provienen de una experiencia piloto llevada a cabo durante el curso 2016-17 con 48 estudiantes del Grado en Educación Infantil, dentro de una asignatura optativa de 4º curso. Estos estudiantes ya habían cursado la asignatura de 3er curso *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil* que, como ya hemos comentado, asume en gran medida los postulados del *paradigma monumentalista*. Con la ayuda de varios formadores, ocho grupos de *EC* trabajaron durante 7 semanas, aproximadamente, a razón de 3 horas de clases presenciales por semana, en la identificación de una *cuestión profesional* sobre aprendizajes numéricos en la escuela infantil y en el diseño de una intervención en el aula, recogida en un *plan de clase* detallado. Posteriormente, cada grupo tuvo la oportunidad de implementar su *plan de clase* en un aula real de Educación Infantil de un colegio público, habiendo recibido previamente información sobre las competencias matemáticas del alumnado. Tras el análisis y la discusión posterior a la *clase*, los grupos pudieron efectuar modificaciones en sus *planes de clase* (aproximadamente, durante 3 semanas de clases presenciales) y conducir una segunda *clase de investigación*. Durante el proceso, los estudiantes fueron recogiendo su trabajo en actas semanales. Además, en cada grupo, las dos *clases de investigación* fueron grabadas en vídeo, y las discusiones posteriores en audio. Para terminar, se les pidió un informe final en el que valorasen en qué grado habían sido capaces de dar respuesta a *la cuestión de investigación* que se habían planteado y qué impacto tuvo el proceso de *EC* en el que estuvieron inmersos en su desempeño como futuros maestros de Educación Infantil (otras 2 semanas, aproximadamente). Por último, se constituyeron grupos de discusión en los que los maestros en formación expusieron los retos a los que se tuvieron que enfrentar a lo largo de todo el proceso de *EC*, cómo superaron las dificultades que entrañaba cada una de las fases del proceso, qué aprendizajes habían logrado, o qué bondades podían destacar del dispositivo de *EC*, entre otras cuestiones.

El sistema didáctico a producir (DS)

Winsløw (2011) considera que una *infraestructura paradidáctica* debe ser analizada en conexión con el *sistema didáctico* (DS) que intenta producir.

Así, asumimos que un componente esencial de la *infraestructura paradidáctica* es la *infraestructura matemático-didáctica* del *sistema didáctico* que se desea producir. En nuestro estudio, el DS que se desea producir sería uno organizado según los modelos epistemológicos y didácticos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002). Radford (2008) los resume en los siguientes términos: (1) el conocimiento resulta como la solución “óptima” a una cierta situación o problema; (2) aprender es, en consonancia con la epistemología genética de Piaget, una forma de adaptación cognitiva; (3) para cada conocimiento matemático existe una familia de situaciones que le dan sentido, significado (al aparecer este conocimiento como la mejor estrategia posible ante dichas situaciones); (4) para el aprendizaje, es necesario que los estudiantes se enfrenten de forma autónoma a las situaciones planteadas.

En el caso de nuestra investigación, con maestros en formación inicial y para la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos y aritméticos en la escuela infantil, asumimos que los elementos esenciales de esta *infraestructura matemático-didáctica* están disponibles, al haber sido estudiados en un curso anterior, y al contar los estudiantes con documentos concretos sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas, las diferentes situaciones fundamentales y ejemplos de situaciones adidácticas concretas. El estudio exploratorio nos permitió constatar que el hecho de que los estudiantes tuviesen acceso a dicha *infraestructura* no implicaba necesariamente, como señalábamos al comienzo de esta comunicación, que fuesen capaces de ponerla en funcionamiento para generar los DS pretendidos. De hecho, fue este fenómeno el que nos condujo a explorar el uso del *EC* como dispositivo para mejorar la formación del profesorado.

El sistema predidáctico (PrS)

En este sistema, los estudiantes para maestro deben afrontar tareas profesionales diversas. Aun pudiendo existir otras, las más relevantes son: la *tarea de formular una pregunta de investigación*, la *tarea de indagar* (sobre el currículo, sobre materiales de enseñanza, sobre el aprendizaje de los alumnos…) y la *tarea de elaborar un plan de clase* (o propuesta de intervención en el aula).

Con la ayuda de los formadores (profesorado universitario), se fueron perfilando diferentes tipos de *preguntas de investigación*: sobre el significado o la “razón de ser” de los conocimientos matemáticos; sobre las estrategias de los niños y su posible evolución; o sobre el diseño de *medios* adidácticos y la gestión de variables didácticas para provocar determinados aprendizajes. Por ejemplo, un grupo llegó a formular la siguiente cuestión: *¿El uso del conteo en algunos contextos escolares garantiza que el niño haya aprendido a movilizar el número natural-cardinal con sentido (para medir y producir una colección), o sólo cuenta cuando se le pide que lo haga (o cuando él cree que debe hacerlo)?*

La *tarea profesional de indagación* se simplificó de forma deliberada, facilitándoles a los futuros maestros, por un lado, la descripción de las situaciones fundamentales que necesitasen (que supuestamente debían conocer) y, por otro lado, posibles variables didácticas a gestionar y posibles estrategias que podrían movilizar los niños.

Finalmente, la *tarea de elaborar un plan de clase* también supuso un reto mayor. No hay espacio para entrar aquí en detalle, pero identificamos como puntos cruciales a los que prestar mayor atención: (1) la elección del *medio* material y su estructuración para que sea adidáctico; (2) la formulación precisa y adaptada al alumnado de Educación Infantil de las consignas; (3) la anticipación de las posibles estrategias que pueden movilizar el alumnado de Educación Infantil; (4) la toma de decisiones sobre las variables didácticas para ir generando diferentes “juegos” o “fases” que provocasen una evolución determinada en las estrategias de los niños.

En nuestra experiencia piloto, observamos, por un lado, la gran dificultad que tienen los estudiantes para problematizar su práctica profesional y para identificar *cuestiones profesionales cruciales*. Y, por otro lado, sus dificultades para diseñar *planes de clase* conectados con su *cuestión profesional*, adaptados al alumnado de Educación Infantil, y que propongan una secuencia equilibrada y articulada de situaciones adidácticas que den lugar a la emergencia de ciertas estrategias y a su evolución en una determinada dirección.

En otro artículo, en revisión, nos preguntamos con qué herramientas se construyen estas *cuestiones*, formulando la hipótesis de que estas dependen de los modelos epistemológicos y didácticos que el grupo de *EC* asume. Desde esta perspectiva, la posibilidad misma de llevar a cabo con éxito esta tarea estará fuertemente ligada a la disponibilidad de la *infraestructura matemático-didáctica* correspondiente, y a la capacidad de hacerla funcionar. En consecuencia, podemos considerar que las dificultades anteriores son manifestación de una construcción deficiente de la *infraestructura matemático-didáctica* a través del dispositivo *monumentalista* "*clase de teoría-clase de prácticas*".

Por otro lado, cabe destacar que la intervención de los educadores, en el papel de expertos externos (*koshi*), fue crucial dentro de este sistema predidáctico, especialmente durante la tarea de formular la pregunta de investigación, lo que abre la puerta a cuestionar en qué medida esta intervención de los expertos afecta al proceso de *EC* y a los resultados del mismo.

El sistema didáctico de observación (DoS)

En este sistema didáctico, aunque llamado por Winsløw (2011) de "observación", confluyen, al menos, dos tareas profesionales diferentes: (1) la que ejecuta el encargado de implementar el *plan de clase* en un aula real, activando para ello las praxeologías matemáticas y didácticas recogidas en el *plan de clase*, pero al mismo tiempo tomando las decisiones que considera necesarias u oportunas, según las contingencias del momento; (2) la tarea propia de observar la evolución de la intervención, tratando de identificar cómo los estudiantes se adaptan a las situaciones propuestas, qué tipo de estrategias movilizan, qué dificultades y bloqueos surgen, cómo los superan (si son capaces), y a la vez recopilando datos para dar respuesta a la *pregunta de investigación.*

Nuestra experiencia, de nuevo, puso de manifiesto aspectos problemáticos sobre los que profundizar: (1) la elaboración poco detallada de los *planes de clase* condujo a incertidumbres importantes en momentos cruciales de la implementación (por ejemplo, sobre cómo introducir una situación, o sobre qué valores dar a ciertas variables didácticas para generar la siguiente "fase" en una secuencia de situaciones); (2) la evolución inesperada de los niños ante la situación (bien por una deficiente anticipación de las posibles estrategias que estos movilizarían, bien por otros motivos) también generó dificultades en el estudiante que hacía de maestro en el aula, al tener que tomar decisiones *in situ*; (3) la observación de los niños no era una tarea menor, aun cuando se disponía del *plan de clase*, como referencia, y de tablas de observación.

El sistema postdidáctico (PoS)

La actividad de los futuros maestros en este sistema post didáctico está fuertemente conectada con la anterior. De hecho, según la literatura ya citada en torno al *EC*, la tarea de *discutir sobre lo acontecido en la experimentación* debe llevarse a cabo justo al acabar la clase experimental.

En este sistema, lo importante no es describir lo que pasó, sino analizar el desarrollo de la experimentación, teniendo como referencia la pregunta de investigación a la que se desea dar respuesta. Es un momento clave en el que *praxis* y *logos* profesional se integran y articulan, contribuyendo al potencial desarrollo del equipamiento praxeológico de los maestros en formación implicados.

En nuestra experiencia piloto, observamos una vez más dificultades en los futuros maestros para ir más allá de lo anecdótico, y profundizar en un verdadero análisis. No queremos decir con ello que no surgiesen discusiones interesantes sobre las praxeologías matemáticas y didácticas puestas en acción durante la clase experimental, sino que estas fueron escasas y poco profundas.

Hay varias razones que pueden explicar este hecho. Por un lado, la dificultad para observar y registrar lo que acontece durante la clase experimental (véase el apartado anterior). Por otro lado, un desarrollo insuficiente de la *infraestructura matemático-didáctica* del grupo, a la que ya nos hemos referido con anterioridad.

A lo largo del trabajo con los 8 grupos de *EC* (2 ciclos por grupo), se probaron diferentes formas de organizar estas discusiones. Así, se probó a hacerlas justo tras la clase experimental o dejando unos días de margen para que los estudiantes reflexionaran a partir de las notas tomadas, no detectando, en principio, una gran diferencia en el análisis que llevaban a cabo. Para estimular el análisis y centrarlo en la pregunta de investigación, se les proporcionó un vídeo de la clase experimental al final de cada uno de los ciclos, y se les pidió que, tras su visionado, discutiesen y elaborasen un informe. Estos informes no evidencian, por ahora, una mejora significativa en su capacidad de análisis de la actividad matemática y didáctica acaecida en el aula, ni en su capacidad para vincular los fenómenos observados con la pregunta de investigación.

CONCLUSIONES

En esta comunicación hemos presentado los primeros pasos de una investigación que pretende explorar dispositivos para la formación inicial del profesorado a partir del *paradigma del cuestionamiento del mundo*. El origen de esta investigación está en las limitaciones observadas, como formadores de maestros, en nuestra forma de organizar la formación inicial a través del dispositivo tradicional "*clase de teoría-clase de prácticas*", que puede ser interpretada como más cercana a los postulados del *paradigma de la visita de las obras*.

En concreto, hemos elegido el dispositivo del *EC* porque consideramos que pone el acento en la formulación de cuestiones problemáticas y en procesos de indagación y experimentación en el aula y, por tanto, es *a priori* consistente con el paradigma que deseamos hacer vivir.

Tras la reformulación del dispositivo dentro del marco de la TAD, hemos descrito algunos aspectos de un trabajo en curso en el que se han diseñado y experimentado ciclos de *EC* con futuros maestros de Educación Infantil (objetivos 1 y 2). Nuestra primera experiencia piloto ha puesto de manifiesto, por un lado, el papel crucial que juega la *infraestructura matemático-didáctica* disponible en los grupos de *EC* y, por otro lado, ha permitido hacer emerger la complejidad de las tareas profesionales a las que los estudiantes para maestro se deben enfrentar.

En una primera aproximación, podemos interpretar que las dificultades observadas en los maestros en formación para abordar determinadas tareas profesionales (como la de formular una cuestión de investigación, desarrollar un *plan de clase*, implementarlo en un aula real, observar la actividad matemática del alumnado de Educación Infantil, o reflexionar sobre el proceso de estudio observado) están íntimamente ligadas, aunque no de forma exclusiva, a un desarrollo insuficiente de su equipamiento praxeológico a través de un dispositivo tradicional (clase de teoría-clase de prácticas) de claro corte *monumentalista*.

Sin embargo, consideramos que el mero hecho de enfrentar a los maestros en formación a estas tareas y de que, a pesar de las dificultades y de los errores, hayan podido llevarlas a cabo, ya implica una cierta evolución en su equipamiento praxeológico (objetivo 3). Así se desprende de las opiniones expresadas por los propios maestros en formación en la parte final de la experimentación.

No obstante, somos conscientes de que hace falta un estudio más sistemático y profundo de esta evolución. Para ello, se han diseñado unos instrumentos de diagnóstico (cuestionarios sobre autoeficacia percibida en las tareas profesionales asociadas con el diseño e implementación en el aula de situaciones adidácticas), que fueron administrados antes y después de los ciclos de *EC* (y también a un grupo control). Los resultados de los mismos, aún en proceso de análisis, nos permitirán determinar hasta qué punto el *EC* permite un desarrollo integrado y con sentido del equipamiento praxeológico de la profesión, dando así una posible respuesta más precisa a nuestro problema de investigación.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del contrato predoctoral para la Formación de Profesorado Universitario FPU014/06496 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte).

Referencias

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Springer.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. *Comunicación en el Seminario DiDiST, 29 de abril, 2009*. Toulouse.

Chevallard Y. (2015) Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Cham, Suiza: Springer.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). Université de Provence.

Doig, B. y Groves, S. (2011). Japanese Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 77-93.

Fujii T. (2015). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Cham, Suiza: Springer.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 411-423.

García, F. J. (2017). Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación. En G. Cirade et al. (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 529-556). Recuperado de https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 185-209.

Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: a brief inquiry into their conceptual differences. *Comunicación en el ICME 11, Survey Team 7, 6-13 de julio, 2008*. Monterrey, México. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/31_radfordicmist7_EN.pdf

Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2010). Didáctica de las Matemáticas y Formación de Maestros. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-213). Montpellier: Université de Montpellier.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Ruiz-Olarría, A., Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. *Bolema*, *28*(48), 319-340.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). Dordrecht: Springer.

Watanabe, T., Takahashi, A. y Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. En F. Arbaugh y P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into Mathematics Teacher Education* (Vol. 5, pp. 131-142). Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE). Monograph Series.

Winsløw C. (2011). A Comparative Perspective on Teacher Collaboration: The Cases of Lesson Study in Japan and of Multidisciplinary Teaching in Denmark. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources* (pp. 291-304). Dordrecht: Springer.

TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE MEDICIONES DE ACTITUDES CON ESCALAS TIPO LIKERT

Mathematical treatment of attitudes measurements with Likert scales

León-Mantero, C.[a], Pedrosa-Jesús, C.[a], Maz-Machado, A.[a] y Casas-Rosal, J. C.[a]

[a]Universidad de Córdoba

Resumen

En este trabajo se propone una revisión de la metodología utilizada para analizar las actitudes hacia las matemáticas a través de escalas tipo Likert. En primer lugar, se estudia la idoneidad de la agrupación de los ítems en factores dimensionales y, por otro lado, el cálculo de la estimación de los factores dimensionales a través de medias ponderadas por la influencia que cada ítem tiene sobre su correspondiente factor. Se analiza para una muestra de 408 estudiantes de Grado de Educación Primaria, para los que se obtienen resultados significativamente diferentes a los que se obtienen con los métodos habitualmente utilizados.

Palabras clave: *actitudes hacia las matemáticas, estudiantes para maestro, Educación Primaria, ecuaciones estructurales.*

Abstract

In this article, a revision of the methodology used to the analysis of attitudes towards mathematics through Likert scales is proposed. First of all, the suitability of the item groups in dimensional factors is studied. Then, the calculation of the dimensional factors' estimation through weighted average by the influence of each item over its corresponding factors is studied too. This has been analyzed for 408 students of the Primary Education Degree, and significantly different results from results obtained with usual methods has been gotten.

Keywords: *attitudes towards mathematics, trainee teachers, primary education, structural equations.*

INTRODUCCIÓN

Desde mediados del siglo pasado, educadores e investigadores comenzaron a asumir que no solo los factores cognitivos influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuando estudiantes y docentes trabajan las matemáticas, sus intereses, creencias, sentimientos y actitudes influyen, acompañan y adoptan un importante rol en este proceso, lo que da sentido a un análisis de estos factores en profundidad (Gómez-Chacón, 2002; Hannula et al., 2016; Hart y Walker, 1993).

El interés por medir y establecer relaciones entre las actitudes hacia las matemáticas de alumnos o profesores y otros factores, ha dado como resultado diferentes investigaciones en las que se diseñan y validan instrumentos de medida, tipo Thurstone, escalas tipo Likert o cuestionarios. Pero la elaboración de análisis de comportamientos sociales, tales como las actitudes, en los que se realizan estudios de campo, requiere de la aplicación de una correcta metodología de muestreo, un potente instrumento de medida del comportamiento y de una cuidadosa interpretación de los resultados obtenidos.

A pesar de que la actitud es un concepto ampliamente estudiado desde diversas líneas de investigación dentro de la Psicología y la Educación, no existe unanimidad con respecto a su definición, que depende del ámbito de trabajo y el contexto de cada autor, sin embargo, existen

León-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. (2018). Tratamiento matemático de mediciones de actitudes con escalas tipo Likert. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 290-299). Gijón: SEIEM.

ciertos acuerdos en considerarlas como estados mentales modificables, en las que, por tanto, se puede influir. En este mismo sentido, Hart (1989) y Gómez-Chacón (2000) coinciden en entender la actitud como una predisposición evaluativa que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento.

En la revisión realizada por Auzmendi (1992) se indica que, entre las escalas más usadas y citadas en las investigaciones sobre actitudes hacia las matemáticas, se encuentran las escalas diseñadas por Aiken (1974), el Inventario de actitudes hacia las matemáticas (Sandman, 1974) y la Escala de Actitudes hacia las matemáticas (Fennema y Sherman, 1976). Sin embargo, a nivel latinoamericano, la escala más utilizada para medir las actitudes de alumnos de secundaria (Auzmendi, 1992; Jiménez y Flores, 2017), estudiantes universitarios (Dörfer, Duque, y Soledad, 2016; Casas et. al, 2016; Fernández y Aguirre, 2010; Petriz, Barona, López, y Quiroz, 2010; Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa, 2017) y profesores en ejercicio (Fernández et al., 2016) es precisamente, la Escala tipo Likert de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992).

La escala Likert se utiliza con gran asiduidad debido a su sencillez y a la homogeneidad de escala de las variables obtenidas a través de ella. Además, debido a la imposibilidad de medir los factores directamente, es común construir las variables que representan estos factores sumando o promediando las valoraciones obtenidas de los ítems utilizados para medirlos. Al construir el factor de esta forma, se impone, de manera implícita, que todos los ítems tienen el mismo peso en la medida del factor.

En este trabajo se propone la construcción de los factores a partir de la media de las respuestas a los ítems, ponderada por los pesos estandarizados de la regresión del modelo de ecuaciones estructurales correspondiente. Esto permitirá asignar una mayor importancia a los ítems que contengan un mayor porcentaje de variabilidad explicada del factor. Como se verá más adelante, los factores así construidos son significativamente diferentes a los construidos mediante suma o media simple.

METODOLOGÍA

Objetivos

La finalidad de este estudio es mejorar la fiabilidad de los resultados obtenidos a través de la escala de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992). Para ello, perseguimos los siguientes objetivos específicos:

- Obtener una reordenación más adecuada de los ítems que conforman la escala, motivada por el análisis preliminar realizado a los enunciados de los ítems.
- Medir el grado de asociación entre los cinco factores dimensionales propuestos por la autora para la medición de las actitudes hacia las matemáticas, ya que un elevado grado justificaría el valor de la consistencia de los factores propuestos por la autora.
- Hallar la relevancia que cada ítem tiene en la explicación de su correspondiente factor, de modo que podamos calcular las medias ponderadas de valoración de los factores agrado, utilidad, confianza, ansiedad y motivación.
- Comparar los valores obtenidos para la media simple y la media ponderada de cada factor, y analizar si las diferencias de valor son significativas.

Participantes

Los participantes de este estudio fueron maestros en formación de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba (n=408), 277 alumnos que cursaban la asignatura de Matemáticas, del primer curso del grado (67,9%) y 131 que cursaban la asignatura Didáctica de la Geometría y la Estadística, del tercer curso, durante los cursos 2014/2015 y 2015/2016.

La muestra está compuesta mayoritariamente por mujeres (61,9%). La edad media de los sujetos es de 20,76 (S=4,065).

Instrumento de recogida de información

Se aplicó a los participantes del estudio la escala de actitudes hacia las matemáticas de Auzmendi (1992). Esta fue validada con una muestra de 1221 estudiantes españoles y consta de 25 preguntas con las opciones de puntuación siguiente: Totalmente en desacuerdo= 1, Desacuerdo= 2, Neutral (Ni de acuerdo ni en desacuerdo) = 3, De acuerdo= 4 y Muy de acuerdo= 5.

La autora agrupa los enunciados en cinco factores dimensionales de análisis: Ansiedad, Valor o utilidad, Agrado, Motivación y Seguridad-confianza hacia las matemáticas (Tabla 1).

Tabla 1. Agrupación de ítems por factor dimensional (Auzmendi, 1992)

Factor dimensional	Ítems
Utilidad	1, 6, 15, 16, 19 y 21
Ansiedad	2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18 y 22
Agrado	4, 9, 14 y 24
Motivación	5, 10 y 25
Confianza	11, 20 y 23

Un análisis preliminar de los enunciados pudiera mostrar que algunos de los ítems no están realmente asociados a sus respectivos factores dimensionales. Por ejemplo:

- El ítem 15, englobado por la autora en el factor Utilidad: "Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional" hace referencia a la esperanza que pueda tener el cuestionado sobre la no utilización de las matemáticas y no a la creencia de su utilidad. Por tanto, este ítem podría englobarse de una manera más adecuada dentro del factor Ansiedad.
- De forma similar podemos analizar el ítem 19: "Me gustaría tener una ocupación en que tuviera que utilizar las matemáticas", nuevamente incluido por la autora en el factor Utilidad, que puede motivar más una respuesta sobre el agrado que experimenta el cuestionado al trabajar con las matemáticas que sobre la percepción de la utilidad hacia la materia.

Estos hallazgos motivan la necesidad de reestructurar los ítems de modo que la información que se recoja, a través de la respuesta a los mismos, se dirija realmente a explicar el factor subyacente. Una fuerte relación entre los cinco factores dimensionales que explican la actitud hacia las matemáticas justificaría que la consistencia del cuestionario obtenida por la autora fuera elevada aun cuando, algunos ítems pudieran no estar asociados correctamente con su factor dimensional.

Análisis estadísticos

Una vez recogidos los datos, se procesaron, se invirtieron los resultados de los enunciados con sentido negativo (ítems 2, 5, 7, 10, 12, 15, 16, 17, 22 y 25) y se analizaron con los programas SPSS (Versión 23.0; Nie, Hull y Bent, 2016), para la estimación del análisis factorial y el cálculo de los valores de los factores y AMOS (Versión 23.0; Arbuckle, 2014) para la estimación de la ecuación estructural.

Para analizar la consistencia de las respuestas, se calculó el coeficiente Alpha de Cronbach para el instrumento de forma global (0,896) y posteriormente para cada agrupación de ítems dado por Auzmendi (1992) (Tabla 2).

Podemos observar que la consistencia interna global es muy elevada, cercana a 0,9, y todos los constructos pueden considerarse consistentes, a excepción de la Confianza, cuyo valor es excesivamente reducido. Al analizar la posible mejora de la consistencia de alguno de los ítems, los resultados no fueron significativos.

Tabla 2. Alpha de Cronbach por factor dimensional

Factor dimensional	Alpha de Cronbach
Agrado	0.827
Ansiedad	0,866
Motivación	0,678
Utilidad	0,706
Confianza	0,555

Una vez analizada la muestra, se plantea la necesidad de estructurar las técnicas estadísticas que permitirán obtener los objetivos perseguidos en este trabajo. Por un lado, tal y como se ha comentado en el apartado anterior, se han hallado incoherencias en la asignación de ítems en la explicación de los factores, por lo que un análisis factorial exploratorio guiará el proceso de ordenación más adecuado. Por otro lado, la creación del modelo de ecuaciones estructurales, a partir del resultado obtenido, nos permitirá estimar el grado de asociación entre los factores y el peso que la respuesta a cada ítem tiene sobre la estimación de cada factor. Esto último permitirá comparar los resultados de cada factor creado a partir de la media simple de las valoraciones de los ítems que lo explica con los que se obtienen al ponderar la respuesta de cada ítem con su relevancia en su explicación.

Por tanto, para obtener una clasificación más adecuada de los ítems, se ha propuesto un análisis factorial por el método de componentes principales con rotación Oblimin, que use como criterio de extracción un valor superior a la unidad para el autovalor asociado.

Para medir el grado de asociación entre los factores dimensionales y para encontrar las ponderaciones de cada ítem para el cálculo de éstos mediante la media ponderada, se ha planteado un modelo de ecuaciones estructurales a partir de la configuración obtenida en el análisis factorial y en el que se han incluido todas las posibles correlaciones entre los factores dimensionales, de forma que nos permita determinar cuáles de ellas son relevantes.

Por último, y tras realizar las dos estimaciones de los factores- la calculada a partir de la media ponderada y la no ponderada- se analizará la normalidad de éstas con la prueba Kolmogorov-Smirnov. En caso de descartar su cumplimiento, se optará por la realización de las cinco comparaciones a través de la prueba de rangos de Wilcoxon, lo que nos permitirá decidir si existen diferencias significativas entre los factores estimados de las dos formas.

RESULTADOS

Análisis factorial

Para analizar la aplicabilidad del análisis factorial sobre estas variables se han calculado los coeficientes de asimetría y de apuntamiento, resultando valores comprendidos entre -1.135 y 0.385 para el primero y entre -1.228 y 1.654 para el segundo, por lo que las distribuciones no se alejan en exceso de la hipótesis de normalidad. Por la naturaleza de las variables el análisis de la presencia de valores atípicos no es necesario.

El modelo finalmente considerado se construye a partir de 22 ítems, ya que los ítems 11, 16 y 20 fueron finalmente extraídos del mismo por sus reducidas comunalidades que afectaban de manera negativa al mismo. La medida de Kaiser-Meyer-Olkin, con un valor de 0.901 y la prueba de esfericidad de Barlett – con un p-límite inferior a 0.001 - concluyen la existencia de asociación entre los ítems y por tanto, la adecuación del análisis factorial exploratorio.

Las 22 variables finalmente consideradas se agruparon en 5 factores dimensionales con una varianza total explicada del 61.94%, mediante el método de componentes principales, al que se le aplicó una rotación Oblimin. La Tabla 4 muestra las comunalidades asociadas a estas variables, así como las cargas factoriales, cuyo valor absoluto es mayor de 0.3, asociadas a cada uno de las 5 componentes consideradas.

Tabla 4. Resultados del análisis factorial exploratorio

Ítem	Comunalidades	Componente				
		1	2	3	4	5
P04	0,722	0,834				
P09	0,666	0,782				
P14	0,743	0,695				
P24	0,534	0,617				
P19	0,553	0,594				
P17	0,704		0,796			
P02	0,683		0,794			
P22	0,726		0,774			
P07	0,645		0,761			
P12	0,597		0,626			
P15	0,555		0,626			
P05	0,686			0,858		
P10	0,607			0,676		
P25	0,581			0,668		
P13	0,698				0,747	
P08	0,693				0,741	
P18	0,581				0,681	
P03	0,440				0,510	
P23	0,471				0,471	
P21	0,612					-0,803
P06	0,548					-0,667
P01	0,569					-0,649

Como puede observarse, se han ordenado los ítems en orden decreciente a partir de sus cargas factoriales respecto a sus correspondientes factores. Éstas superan el valor de 0.6 salvo las últimas de las componentes 1 y 4. Todas las comunalidades son también superiores a 0.4, y la mayoría de ellas supera 0.6.

De esta forma, la asignación de ítems a factores, llevada a cabo a partir del análisis factorial exploratorio, queda como se muestra en la Tabla 5, en la que también se especifican los valores de consistencia dados por el coeficiente Alpha de Cronbach, así como la información antes presentada para la escala de Auzmendi, para su comparación.

Tabla 5. Nueva propuesta de agrupación en factores dimensionales

Factor	Auzmendi		Propuesta	
	Ítems	Alpha	Ítems	Alpha
Utilidad	1, 6, 15, 16, 19 y 21	0.706	1, 6 y 21	0.650
Ansiedad	2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18 y 22	0.866	2, 7, 12, 15, 17 y 22	0.868
Agrado	4, 9, 14 y 24	0.827	4, 9, 14, 19 y 24	0.841
Motivación	5, 10 y 25	0.678	5, 10 y 25	0.678
Confianza	11, 20 y 23	0.555	3, 8, 13, 18 y 23	0.802
TOTAL		0.896		0.896

Seis de los 25 ítems han sido redistribuidos, por el análisis factorial exploratorio, de forma que cuatro de ellos pasan de explicar la ansiedad – mejor dicho, su ausencia – a explicar la confianza que el encuestado muestra hacia las matemáticas. Además, los ítems 15 y 19 salen del grupo que explica la utilidad de esta materia y se engloban en Ansiedad y Agrado, respectivamente. Además, los ítems 11, 16 y 21 han sido excluidos por su reducida capacidad explicativa.

Al reorganizar los ítems de esta forma, la consistencia global permanece prácticamente invariante y los valores del coeficiente alfa de Cronbach mejoran para todos los factores salvo para el caso de Motivación, que permanece sin cambios y el factor Utilidad para el que se reduce ligeramente desde 0.706 hasta 0.650. Cabe destacar el incremento experimentado en la consistencia del factor Confianza, que, como ocurriera en Auzmendi (1992), presentaba un valor excesivamente bajo de 0.555 y ha subido hasta 0.802.

Los resultados obtenidos, respaldan las hipótesis acerca de la necesaria redistribución de los ítems del cuestionario debido a que se le presupone por parte de los autores una capacidad de explicación de un factor que no se corresponde con la realidad.

Ecuación estructural

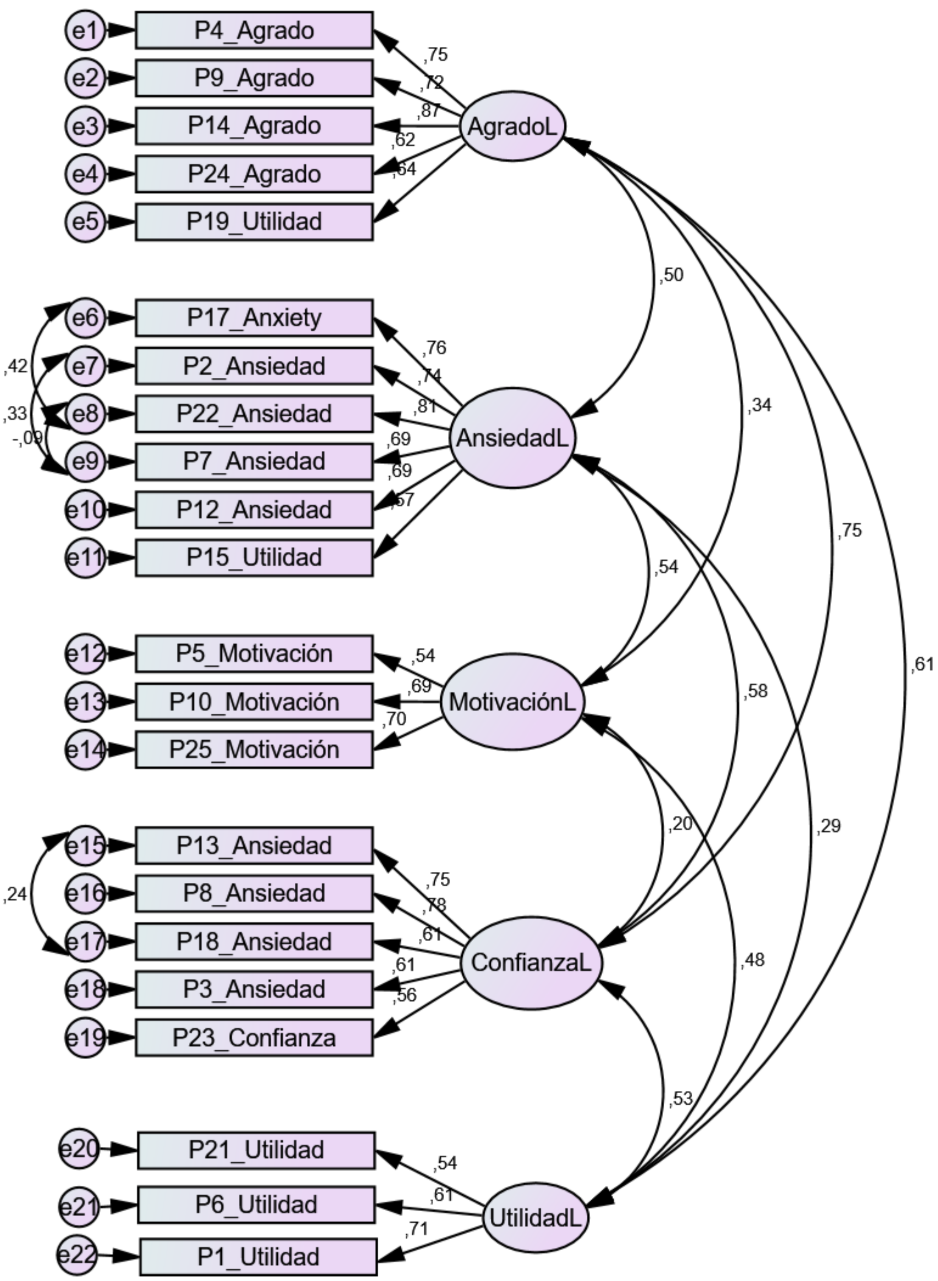


Figura 1. Ecuación estructural estimada en la explicación de los factores con la escala reordenada

Como se ha mencionado anteriormente, la estimación de los coeficientes estandarizados de regresión, del modelo de ecuaciones estructurales asociado al análisis factorial anterior, entre los ítems y los factores a los que están asociados según clasificación anterior, permiten estimar un índice de valor de estos factores como la media ponderada de los valores dados a cada uno de los ítems de su categoría. Para ello, vamos a estimar la ecuación estructural correspondiente que, por otro lado, nos permitirá demostrar la existencia de una asociación entre los cinco factores, que justifique el elevado valor de consistencia obtenido para los factores con la distribución original.

En la Figura 1 se muestra la ecuación estructural estimada por el método de máxima verosimilitud para los 22 ítems considerados, los cinco factores dimensionales y la organización hallada en el apartado anterior. Los nombres de los ítems identifican la pertenencia a cada factor en la escala original de Auzmendi.

Las medidas de ajuste absoluto, incremental y de parsimonia obtenidas para este modelo, así como los criterios de bondad ampliamente aceptados, se muestran en la Tabla 6. Todas ellas, unidas a la relevancia de todas las variables consideradas y al valor de los residuos, muestran la validez del modelo construido.

Tabla 6. Medidas de ajuste

Medidas de ajuste absoluto		Valor obtenido	Valor óptimo
Índice de bondad de ajuste	GFI	0.919	Valores mayores que 0.9
Raíz cuadrada media del error	RMSEA	0.048	Valores menores que 0.05
Probabilidad límite para RMSEA	PCLOSE	0.627	Valores menores que 0.05
Residuo cuadrático medio est.	SRMR	0.054	Valores menores que 0.08
Medidas de ajuste incremental			
Índice de ajuste normalizado	NFI	0.901	Valores mayores de 0.90
Índice de ajuste comparativo	CFI	0.95	Valores mayores que 0.90
Medidas de ajuste de parsimonia			
Chi cuadrado normalizada	NCS	1.956	Valores entre 1 y 3

Una vez estimada y validada la ecuación estructural analizaremos las correlaciones entre los cinco factores dimensionales: Agrado, Confianza, Utilidad, Ansiedad y Motivación. Los resultados se muestran en la Tabla 7. Todas las relaciones son significativas, y la relación más fuerte se observa entre los factores Agrado y Confianza, lo que nos indica que un mayor agrado hacia las matemáticas facilita una mayor confianza hacia dicha materia y viceversa. En el otro extremo se encuentran Motivación y Confianza, que, aunque significativa, su reducido valor nos indica que aunque Motivación por sí misma genera confianza, existen otros factores que pueden influir en ésta.

Tabla 7. Correlaciones entre factores dimensionales

Relación			Valor estimado
Agrado	<-->	Ansiedad	0,499
Agrado	<-->	Motivación	0,343
Agrado	<-->	Confianza	0,747
Agrado	<-->	Utilidad	0,607
Ansiedad	<-->	Motivación	0,541
Ansiedad	<-->	Confianza	0,578
Ansiedad	<-->	Utilidad	0,293
Motivación	<-->	Confianza	0,198
Motivación	<-->	Utilidad	0,480
Confianza	<-->	Utilidad	0,533

También son destacables, por su intensidad, las relaciones que nos indican que una elevada percepción de utilidad de las matemáticas incrementa el nivel de agrado mostrado por esta asignatura. Del mismo modo, un menor nivel de ansiedad está asociado con un mayor sentimiento de confianza. Es importante recordar que las respuestas a los ítems, presentadas de forma negativa, fueron invertidas.

Estimación de los factores

Una vez estimado el modelo de ecuaciones estructurales, se estimaron los 5 factores de dos formas. En la primera de ellas, los definimos como la media aritmética simple de los valores ordinales obtenidos en cada ítem. En la segunda, a partir de los coeficientes estandarizados de la regresión, que se muestran en la Figura 1, se calcularon las medias ponderadas con éstos como pesos. Los resultados de estos coeficientes se muestran en la Tabla 8. Las diferencias entre los coeficientes estandarizados en algunos factores son elevadas, como en los ítems 15 y 22 del factor Ansiedad, o el 8 y el 23 de Confianza.

Tabla 8. Coeficientes estandarizados de la regresión

Ítem	Estimación	Factor	Ítem	Estimación	Factor
P4	0,751	Agrado	P5	0,539	Motivación
P9	0,718		P10	0,687	
P14	0,869		P25	0,696	
P24	0,621		P8	0,783	Confianza
P19	0,641		P18	0,615	
P17	0,764	Ansiedad	P3	0,608	
P2	0,740		P23	0,564	
P22	0,807		P13	0,754	
P7	0,694		P6	0,614	Utilidad
P12	0,694		P1	0,710	
P15	0,571		P21	0,535	

Estos valores muestran la necesidad de asignar distintas ponderaciones a los ítems de un mismo factor. Una vez construidos los 5 factores, los resultados descriptivos de los mismos son los que se muestran en la Tabla 9. Se observan grandes diferencias entre los valores calculados con la escala dada por Auzmendi, salvo en Motivación, que, como se ha visto anteriormente, contiene los mismos ítems que los propuestos por la autora.

Tabla 9. Estadísticos descriptivos de las diferentes ordenaciones

Factor	Ordenación Auzmendi Media simple		Ordenación propuesta Media simple		Ordenación propuesta Media ponderada	
	Media	Desviación típica	Media	Desviación típica	Media	Desviación típica
Agrado	2.5803	0.8749	2.6005	0.8552	2.6093	0.8596
Ansiedad	3.1016	0.8053	3.1373	0.9183	3.1370	0.9275
Motivación	3.5752	0.8578	3.5752	0.8578	3.5748	0.8622
Confianza	3.8325	0.7236	3.2206	0.8144	3.2010	0.8252
Utilidad	3.3227	0.6669	3.6520	0.7454	3.6907	0.7434

Por último, vamos a analizar, mediante el contraste de comparación de distribuciones de Wilcoxon, la existencia de diferencias significativas entre los factores así calculados. Los resultados se muestran en la Tabla 10. Se ha optado por este contraste debido a la ausencia de normalidad de las variables construidas. Todos los factores calculados con la media ponderada calculada con la nueva organización, son significativamente diferentes a los obtenidos con la media simple y la organización de Auzmendi, salvo Motivación. También se han hallado diferencias significativas entre las dos medias simples de los factores Ansiedad, Confianza y Utilidad. Por último, las diferencias entre las medias calculadas con la nueva propuesta son también significativas al medir el Agrado, la Confianza y la Utilidad. En este último caso, el cálculo de la media simple subestima los valores de Agrado y Utilidad, mientras que la Confianza está sobreestimada.

Tabla 10. Resultados del contraste de Wilcoxon

Factor	Propuesta Auzmendi vs. Media Ponderada	Propuesta Auzmendi vs. Media simple	Media simple vs. Media Ponderada
Agrado	0.001	0.121	0.000
Ansiedad	0.015	0.020	0.890
Motivación	0.648	-	0.648
Confianza	0.000	0.000	0.000
Utilidad	0.000	0.000	0.000

CONCLUSIONES

Al realizar un estudio estadístico en general, y sobre actitudes en el caso que nos ocupa, tiene tanta importancia que el instrumento de medida que utilicemos esté correctamente calibrado como la construcción de factores no medibles a partir de los ítems. El uso incorrecto de ambas puede llevar a conclusiones erróneas.

Por ello, este trabajo ha tenido como objetivos: revisar un instrumento de medida de la actitud hacia las matemáticas ampliamente utilizado, primero analizando los ítems a partir de la definición existente en la literatura sobre los 5 factores dimensionales sobre los que se sustenta, y segundo, confirmando la nueva reordenación mediante el análisis de la consistencia interna; y la elaboración de un análisis factorial exploratorio que ha confirmado los cambios propuestos inicialmente. El segundo objetivo del trabajo es el consistente en poner en duda la idoneidad de construir los factores como la suma o media simple de las respuestas a los ítems, método ampliamente utilizado en la literatura, no sólo de actitudes hacia las matemáticas, sino en aquellos en los que se utilizan escalas tipo Likert. Esto se ha conseguido, en primer lugar, midiendo la importancia relativa de cada ítem con su factor, así como las diferencias existentes entre unos y otros y, en segundo lugar, demostrando la existencia de diferencias significativas entre los valores de los factores con las distintas formas de calcularlos.

Es común diseñar los cuestionarios de forma previa, y aplicar sobre los datos recogidos un análisis factorial confirmatorio, que permite agrupar los ítems de un cuestionario en torno a un factor común definido previamente, pero en los casos en los que puede existir una elevada asociación entre los factores, como es el caso, esta técnica presenta grandes limitaciones ya que pueden ser validadas escalas con ítems incluidos en un factor que realmente aportan información de otro. Por tanto, esta técnica debe ser complementada y revisada con una explicación basada en la teoría que subyace tras el instrumento, como se ha realizado en el apartado relativo a éste, en la metodología, ya que la capacidad discriminante de la técnica se ve reducida debido a esta asociación.

Por otro lado, la estimación de los factores no medibles como son la confianza o la ansiedad a través de la suma de los valores de cada ítem o de la media simple impone la condición de que todas las respuestas a los ítems tienen la misma relevancia en la explicación del factor, independientemente del contenido de la pregunta. Los coeficientes de la ecuación estructural entre los factores y los ítems o las comunalidades del análisis factorial pueden ser medidas de la importancia que cada ítem tiene.

Referencias

Aiken, L. R Jr. (1974). Two Scales of Attitude toward Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *5*, 67-71.

Arbuckle, J. L. (2014). AMOS (Version 23.0) [Programa Informático]. Chicago: IBM SPSS. Recuperado de https://www.ibm.com/es-es/marketplace/structural-equation-modeling-sem

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria: Características y medición*. Bilbao: Mensajero.

Casas, J. C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y Madrid, M. J. (2016). Identificando las relaciones dimensionales de la Escala de Actitudes hacia las Matemáticas propuesta por Auzmendi en maestros en formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 600). Alicante: SEIEM.

Dörfer, C., Duque, U. y Soledad, G. (2016). Medición de la actitud hacia las matemáticas en estudiantes de licenciatura en administración: un estudio piloto. *VinculaTégica. EFAN, 2*(1), 1329-1348.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Sclaes: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and males. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*, 324-326.

Fernández, R. y Aguirre, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (23), 107-116.

Fernández, R., Solano, N., Rizzo, K., Gomezescobar, A., Iglesias, L. M. y Espinosa, A. (2016). Las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes y maestros de educación infantil y primaria: revisión de la adecuación de una escala para su medida. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad-CTS, 11*(33), 227-238.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E.,... Jansen, A. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. Springer International Publishing.

Hart, L. (1989). Classroom, sex of student, and confidence in learning mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 242-260.

Hart, L. E. y Walker, J. (1993). The role of affect in teaching and learning mathematics. *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, 22-38.

Jiménez, E. y Flores, W. O. (2017). Actitudes hacia las matemáticas: un estudio en una escuela rural de la Costa Caribe Sur de Nicaragua. *Revista Universitaria del Caribe, 18*(1), 7-16.

Nie, N., Hull, C. y Bent, D. (2016) IBM SPSS Statistics (Version 23.0) [Programa Informático] Chicago: IBM SPSS. Recuperado de https://www.ibm.com/es-es/marketplace/spss-statistics

Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2017). A los futuros maestros no les agradan las Matemáticas… pero las consideran útiles. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 367-376). Zaragoza: SEIEM.

Petriz, M. A., Barona, C., López, R. M. y Quiroz, J. (2010). Niveles de desempeño y actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de la licenciatura en administración en una universidad estatal mexicana. *Revista mexicana de investigación educativa, 15*(47), 1223-1249.

Sandman, R. S. (1980). The Mathematics Attitude Inventory: Instrument and User's Manual. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 148-149.

LA FACETA COGNITIVA EN EL CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

The cognitive facet in prospective teachers' knowledge of statistical tests

López-Martín, M. M.[a], Batanero, C.[a] y Gea, M. M.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo del trabajo fue evaluar la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de profesores de Educación Secundaria y Bachillerato en formación sobre los contrastes de hipótesis. Se propone a una muestra de 70 futuros profesores una tarea en la que se les pide detallar los errores previsibles de sus estudiantes en la realización de un contraste de hipótesis. La clasificación de las respuestas obtenidas implica un conocimiento medio de esta faceta y la identificación de ciertos errores descritos en la literatura. Hay, sin embargo, poca conciencia de los errores relacionados con el nivel de significación y p-valor y en otros casos los errores descritos son imprecisos.

Palabras clave: *contraste de hipótesis, conocimiento didáctico-matemático, futuros profesores.*

Abstract

The aim of this study was to assess the cognitive facet of the didactic-mathematical knowledge of prospective secondary and high school teachers on statistical tests. The written productions in a sample of 70 prospective teachers in a task in which they were asked to detail the foreseeable mistakes of their students in the realization of a hypothesis test are analysed. The classification of the responses obtained suggest a medium knowledge of this facet and the identification of certain errors described in the literature. However, there is limited awareness of the errors related to the level of significance and p-value and in other cases the errors described are imprecise.

Keywords: *statistical tests, didactic-mathematical knowledge, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

El contraste de hipótesis es ampliamente utilizado para obtener conclusiones de una población no observada en su totalidad, en base a la información extraída de una muestra de dicha población. Dicho tema se ha visto reflejado tanto en las directrices curriculares anteriores de Bachillerato (MEC, 2007) como en las pruebas de acceso a la universidad en los últimos 15 años (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016). Constituye además uno de los temas en las oposiciones al cuerpo de profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Asimismo, McLean (2002) resalta la importancia de unos conocimientos básicos de contraste de hipótesis, como parte de la cultura estadística de un ciudadano bien formado. Sin embargo, este tema no es sencillo, como se muestra en algunas revisiones de la literatura (Castro Sotos, Vanhoof, Van den Nororgate y Onghena, 2007; Harradine, Batanero y Rossman, 2011).

Uno de los factores que determina la correcta enseñanza de un tema es el conocimiento del profesor, que ha sido objeto de una amplia investigación en los últimos años (véase, por ejemplo, Dawson, Jaworski y Wood, 2013; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Llinares y Krainer, 2006). En este trabajo nos basamos en el modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor, descrito, entre otros trabajos, en Godino (2009) y Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), que

López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). La faceta cognitiva en el conocimiento de futuros profesores sobre el constraste de hipótesis. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 300-309). Gijón: SEIEM.

caracteriza los conocimientos del profesor a partir de la dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta-matemática. La dimensión didáctica del CDM tiene en cuenta seis componentes: epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, cada una de las cuales se relaciona con la misma faceta de la idoneidad didáctica (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), que los autores introducen para diseñar o evaluar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos centramos en la componente cognitiva, que implica el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015). Para evaluarla, en este trabajo analizamos las respuestas proporcionadas en una muestra de 70 futuros profesores a una pregunta sobre los errores previsibles de los estudiantes en el contraste de hipótesis.

ANTECEDENTES

La investigación sobre el conocimiento del profesor en relación con el contraste de hipótesis es escasa y se ha concentrado en el conocimiento matemático del tema (Harradine et al., 2011). Así, Haller y Krauss (2002) encuentran errores al interpretar el *p*-valor o probabilidad de encontrar un valor del estadístico muestral igual o más extremo que el observado, suponiendo la hipótesis nula cierta, en profesores responsables de la enseñanza de métodos de investigación. Por su parte, Liu y Thompson (2009) realizaron entrevistas a ocho futuros profesores tratando de comprender sus dificultades con el contraste de hipótesis. Los sujetos mostraron una concepción determinista del contraste y falta de comprensión de la lógica del mismo. No hemos encontrado antecedentes que describan el conocimiento didáctico sobre este tema. Para nuestro trabajo es necesario, sin embargo, tener en cuenta las investigaciones que describen errores en los estudiantes, para comparar sus resultados con los errores citados por los futuros profesores.

Entre los resultados más relevantes encontramos errores referidos al planteamiento del contraste que ocurren cuando, por ejemplo, los estudiantes no identifican el tipo de contraste (bilateral y unilateral) (Espinel, Ramos y Ramos, 2007). Respecto al planteamiento de las hipótesis, es frecuente confundir la hipótesis nula con la alternativa y plantear hipótesis no complementarias, es decir, hipótesis que no cubren el espacio paramétrico (Vallecillos, 1999; Vera, Díaz y Batanero, 2011). Alonso y Cruz (2008) sugieren que los libros de texto de Bachillerato solo reflejan la complementariedad de las hipótesis alternativa y nula, sin señalar la importancia que tienen en el planteamiento del problema. Igualmente, se ha observado el uso de los estadísticos muestrales en el establecimiento de las hipótesis, sin tener en cuenta que éstas deben ser definidas considerando los parámetros poblacionales (Espinel et al., 2007; Harradine et al., 2011; Ramos, Espinel y Ramos, 2009; Vallecillos, 1999; Vera et al., 2011).

El principal error conceptual consiste en intercambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación, considerándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, una vez que la decisión de rechazarla ha sido tomada (Birnbaum, 1982; Vallecillos, 1999). Badenes-Ribera, Frías-Navarro, Monterde-i-Bort y Pascual-Soler (2015) y Caperos y Pardo (2013) encontraron errores similares con respecto a la interpretación del *p*-valor. En otros casos, los estudiantes confunden estadístico y parámetro o no recuerdan la expresión de la distribución muestral (Batanero, 2000). A todo ello se ha de añadir llevar a cabo la tipificación erróneamente, realizar un uso incorrecto de la tabla de probabilidades de la Normal e interpretar erróneamente los resultados obtenidos en el contraste (Espinel et al., 2007).

El estudio sistemático y clasificación de estos errores nos ha permitido elaborar una pauta para analizar el conocimiento que tienen los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato sobre las dificultades a las que previsiblemente se enfrentarán sus estudiantes al trabajar con el contraste de hipótesis. A continuación, presentamos el método, resultados y discusión de nuestra investigación.

MÉTODO

El estudio contó con la participación de 70 estudiantes que se preparaban para ser futuros profesores de Secundaria y Bachillerato, dentro del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, especialidad de Matemática, obligatorio para los que desean concursar a una plaza de profesor. Sólo el 56% de ellos eran licenciados en Matemáticas o Estadística y el resto habían cursado Ingeniería, Arquitectura u otras ramas de ciencias. Sin embargo, todos reconocen haber realizado una o más asignaturas de estadística y más de la mitad (57%) indicaron tener experiencia de enseñanza.

La evaluación se llevó a cabo como parte de un taller formativo sobre inferencia, realizado dentro de una asignatura de Innovación Docente e Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. En primer lugar, los participantes resolvieron un problema de contraste de hipótesis similar a los planteados en los años anteriores en las PAU, solicitándoles que planteasen las hipótesis, eligieran el contraste adecuado, lo desarrollaran, tomasen una decisión adecuada sobre el rechazo de la hipótesis nula e interpretasen los resultados en el contexto del problema. Una vez corregido el problema, los futuros profesores desarrollaron la tarea que analizamos en este trabajo y que estuvo dirigida a desarrollar y evaluar la faceta cognitiva de su conocimiento didáctico-matemático. Dicha tarea se trabajó individualmente y consistió en responder con el mayor detalle posible a la siguiente pregunta:

> **Tarea:** ¿Podrías indicar los errores que podrían cometer los estudiantes al realizar un contraste de hipótesis?

Recogidas las respuestas de los estudiantes, se realizó un análisis de contenido de las mismas. Este tipo de análisis es propio de la investigación cualitativa y es utilizado en el estudio sistemático de documentos escritos (Raigada, 2002). Mediante un procedimiento cíclico e iterativo se clasificaron los errores descritos por los estudiantes en los siguientes apartados: a) errores en el planteamiento de las hipótesis; b) errores en la selección o planteamiento del contraste; c) errores conceptuales; d) errores procedimentales; y e) errores de interpretación del resultado del contraste.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se analizaron un total de 264 errores descritos, que supone una media de 3,8 errores citados por cada participante y una desviación típica de 1,4. En la Tabla 1 se recoge la frecuencia y porcentaje del tipo de errores citados por cada participante. Observamos un desempeño medio en los futuros profesores en la tarea, ya que el procedimiento de contraste es laborioso y el número de conceptos involucrados alto, por lo que es también alto el número de posibles errores. Los errores más citados son los relativos al planteamiento de las hipótesis y la interpretación de resultados, así como procedimentales y conceptuales. Seguidamente comentamos con más detalle los errores citados, que se han clasificado, cuando ha sido posible, teniendo en cuenta los descritos en los antecedentes.

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan diferentes tipos de errores

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
Planteamiento de las hipótesis	48	68,6
Selección o planteamiento del contraste	19	27,1
Conceptuales	39	55,7
Procedimentales	44	62,9
Interpretación del resultado del contraste	46	65,7
Otros	7	10,0

Errores en el planteamiento de las hipótesis

Confunde hipótesis nula y alternativa. En esta categoría se incluyen las respuestas que citan la posible confusión entre las hipótesis nula y alternativa, error descrito por Vallecillos (1999) y Vera et al. (2011). A continuación, se muestra un ejemplo:

MGG: Considero que el mayor problema que se le presenta al alumnado en los contrastes de hipótesis es saber diferenciar entre la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, cometiendo el error al confundirlas y por lo tanto teniendo un contraste erróneo.

Hipótesis no complementarias. Otros estudiantes aluden a la posibilidad de construir hipótesis no complementarias, error recogido en investigaciones realizadas con estudiantes (Espinel et al., 2007; Vallecillos, 1999). En dicho caso, las hipótesis del contraste no cubrirían en su totalidad los valores posibles del espacio paramétrico. Como ejemplo se muestra la respuesta de JLS.

JLS: A la hora de hacer un contraste de hipótesis, si por ejemplo tenemos una distribución normal, los alumnos podrían no plantear correctamente las hipótesis nula o alternativa (deben de ser complementarias).

Otros errores al plantear las hipótesis. Junto a los errores manifestados anteriormente, algunos estudiantes citan hacer uso de los estadísticos muestrales en el planteamiento de las hipótesis, confundir una hipótesis unilateral con otra bilateral, uso de una notación no adecuada (Espinel et al., 2007; Inzunsa y Jiménez, 2013; Vera et al., 2011). En otros casos, la respuesta es imprecisa, pues no se indica el error.

JVP: Plantear mal la hipótesis nula.

En la Tabla 2 observamos el desglose de los 48 (68,6%) participantes que han identificado al menos uno de los errores asociados al planteamiento de la hipótesis, la mayor parte sobre la confusión entre la hipótesis nula y alternativa. Es menos frecuente reconocer que las hipótesis podrían no ser complementarias y un 20% cita otros errores o son imprecisos.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores en el planteamiento de las hipótesis

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
Confunde hipótesis nula y alternativa	34	48,6
Hipótesis no complementarias	6	8,6
Plantea mal las hipótesis	14	20,0

Errores en la selección o planteamiento del contraste

Error al elegir la distribución muestral. La elección de la distribución muestral adecuada es fundamental para proseguir el contraste, pues todos los cálculos posteriores, por ejemplo, el *p*-valor o la región crítica se basan en ella. Algunos participantes indican que los estudiantes podrían elegir una distribución muestral incorrecta. Como ejemplo, se muestra la respuesta de JSM, que se refiere al cálculo incorrecto de los parámetros que determinan la distribución normal.

JSM: No toma bien la normal, por ejemplo, en lugar de poner $N(\mu,\sigma/\sqrt{n})$ pone solo $N(\mu,\sigma)$ para la muestra.

No identificación del tipo de contraste (bilateral o unilateral). Se han incluido las respuestas que hacen referencia a los errores que pueden cometer los estudiantes cuando no interpretan correctamente el enunciado del problema y, por tanto, son inconsistentes con la definición de las regiones crítica y de aceptación. El hecho de que el contraste sea bilateral implica la existencia de dos regiones (una a izquierda y otra a derecha, con probabilidades de $\alpha/2$ respectivamente) mientras que, si es unilateral, bien a izquierda o a derecha, únicamente se contará con una región de rechazo con una probabilidad de α. A continuación, se muestra la respuesta dada por JCR.

JRC: Confusiones con el carácter bilateral/unilateral de las colas de distribuciones.

Respuesta imprecisa. Se han considerado aquellas respuestas en las que el estudiante no indica claramente en qué consiste el error de planteamiento, lo que podría enmascarar un desconocimiento de estos errores.

JML: No identificar el contraste adecuadamente.

Fueron sólo 19 (27,1%) los participantes que señalaron como posibles errores algunos relacionados con el planteamiento de las hipótesis, y 9 de ellos son imprecisos, lo que indica que el tipo de errores que es posible realizar al elegir el contraste adecuado es poco conocido por los estudiantes de la muestra.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores en el planteamiento del contraste

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
No elección de la distribución adecuada	6	8,6
No identificación del tipo de contraste (bilateral o unilateral)	7	10,0
Respuesta imprecisa	9	12,9

Errores conceptuales

Confusión de los errores Tipo I y Tipo II. Una vez planteada la hipótesis nula, existe la posibilidad de cometer errores que depende de la decisión tomada: Error Tipo I, cuando la hipótesis nula es rechazada siendo cierta y el Error Tipo II, cuando la hipótesis nula no es rechazada siendo falsa. La importancia de diferenciarlos se debe a que la probabilidad asociada al primer error (nivel de significación) queda determinada antes de la realización del mismo, mientras que la probabilidad asociada al segundo error es variable y depende de varios factores.

EHB: No distinguir los errores de tipo I y los de tipo II.

Interpretación incorrecta del nivel de significación. Algunos estudiantes sugieren errores de comprensión del nivel de significación, aunque generalmente son poco precisos, pues no se indica con claridad el cambio entre los dos términos de la probabilidad condicionada o la creencia de que este valor es la probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis nula, son algunos de los errores asociados a dicho concepto (Birnbaum, 1982; Falk, 1986, Vallecillos, 1999). Por tanto, no queda claro si realmente conocen los errores típicos asociados a la interpretación del nivel de significación. Como ejemplo, se muestra la respuesta dada por MEG.

MEG: Comprender el concepto de nivel de significación.

Interpretación incorrecta del p-valor. El *p*-valor es definido como la probabilidad de obtener el valor dado u otro más extremo bajo la aceptación de la hipótesis nula. Sin embargo, dicho término es interpretado como probabilidad de que la hipótesis sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico o bien, como la probabilidad de que el valor obtenido del estadístico se deba al azar o como probabilidad de la hipótesis nula (Batanero, 2000). Sólo uno de los participantes hace referencia a este error:

MSM: Confusión del nivel de significación y el p-valor.

Confusión entre estadístico y parámetro. En tanto que los parámetros poblacionales corresponden a medidas de una población, los cuales son desconocidos y constantes, los estadísticos se caracterizan por ser valores conocidos y variables de una muestra a otra, aunque los estudiantes los suelen confundir (Vallecillos, 1999; Vera et al., 2011). Algunos participantes citaron esta confusión:

CBF: Tomar la media de la muestra y no de la población.

Errores al aplicar el Teorema Central del Límite. Este teorema asegura que la suma de variables aleatorias independientes, con varianza no nula pero finita, tiende a distribuirse normalmente a medida que aumenta el tamaño muestral y permite identificar la distribución muestral del estadístico. Algunos estudiantes como IPM indican que un error podría ser su aplicación incorrecta del mismo.

IPM: Al formar la distribución de la media muestral, es posible que no aplique bien el Teorema Central del Límite, se olvide de dividir por $\sqrt{n}$ o sólo divida por n. Otro posible error es que directamente no aplique el Teorema Central del Límite.

Más de la mitad de los participantes (39) describieron algún error conceptual, con el 41,4% de estudiantes citando la confusión entre estadístico y parámetro, siendo el segundo error conceptual más citado la confusión entre los tipos de errores. Apenas se ha aludido a los errores de interpretación del nivel de significación y del *p*-valor, y cuando se hace es en forma muy imprecisa. Ello nos hace sospechar que los estudiantes pudieran no ser conscientes de este error, que de acuerdo a la investigación previa está muy extendido. El error asociado al Teorema Central del Límite también ha sido citado con poca frecuencia.

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores conceptuales

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
Confunden los errores Tipo I y Tipo II	11	15,7
Interpretación incorrecta del nivel de significación	7	10,0
Interpretación incorrecta del *p*-valor	1	1,4
Confunde estadístico y parámetro	29	41,4
Aplicación incorrecta del Teorema Central del Límite	4	5,7

Errores procedimentales

Error en el cálculo del p-valor. El cálculo del *p*-valor puede ser erróneo debido a una comprensión deficiente sobre el concepto de probabilidad condicionada (Falk, 1986), cuando se calcula como probabilidad simple, o bien, si en lugar de tomar la desigualdad apropiada para el tipo de contraste, (por ejemplo, la región mayor que el estadístico) se toma la contraria. Los estudiantes que indican este error procedimental suelen ser muy imprecisos y no indican claramente en qué consiste:

ILG: No calcular bien el p-valor.

Determinación del punto crítico. Mientras que en el cálculo del *p*-valor se parte de un valor del estadístico para calcular la probabilidad, para determinar el punto crítico se realiza la operación inversa, pues se parte del nivel de significación para determinar el valor del estadístico que corresponde a dicha probabilidad, lo que es citado en forma poco concreta por algunos estudiantes.

DCC: También es frecuente que fallen a la hora de buscar los valores que vienen dados por el nivel de significación del contraste.

Determinación incorrecta de las regiones de rechazo/no rechazo. La región de rechazo está constituida por aquellos valores del estadístico de contraste que se alejan mucho de la hipótesis nula, siendo poco probable que ocurra si la hipótesis es verdadera. Una incorrecta definición de la región de rechazo puede implicar conclusiones contrarias a las reales. El error de intercambiar las regiones de un contraste fue descrito por Vallecillos (1999).

AGS: Un error común puede ser el realizar tomar la región de rechazo en los dos extremos (Bilateral) en lugar de tomarla solo en uno (Unilateral).

Error de tipificación. Generalmente, la distribución muestral es una distribución normal con una media y varianza determinada a partir de las características de la población en estudio. Para el cálculo del *p*-valor, regiones o puntos críticos, se recurre a la tipificación de la variable para convertirla en una Normal estándar. Ello requiere una serie de operaciones con desigualdades donde el estudiante podría cometer errores, como lo recoge la respuesta de IPM. Por otro lado, un estudiante indica que se puede cometer error en el manejo de desigualdades.

IPM: Como los alumnos trabajan con la distribución N(0,1), deben tipificar, y es posible que no lo hagan, lo que causaría un grave error puesto que no saben calcular los datos en la distribución normal correspondiente, o también es posible que tipifiquen de forma errónea, o que simplemente se confundan en los cálculos.

Lectura incorrecta de las tablas estadísticas. Independientemente del proceso empleado, el uso adecuado de las tablas estadísticas adquiere cierta importancia pues un error en la lectura de la tabla podría provocar, entre otros, un cálculo incorrecto del *p*-valor o la determinación incorrecta de las regiones de rechazo y no rechazo. Este tipo de error ha sido señalado por el estudiante LPM.

LPM: Es normal que se equivoquen en la lectura de las tablas.

Error en el cálculo de probabilidades con la distribución normal. En algunos casos se citan los errores de cálculo de probabilidades con la distribución normal:

ACR: El año pasado di clases particulares a un adolescente que estaba en segundo de bachillerato de sociales y los errores que más cometía eran sobre todo al calcular probabilidades con la distribución normal.

Determinación del estadístico de contraste. Con poca precisión, algunos estudiantes sugieren errores al determinar el estadístico de contraste, queriendo indicar errores en el cálculo del valor crítico que corresponde a un cierto nivel de significación:

ECL: […] determinar el valor del estadístico en el nivel de significación α […].

Errores de cálculos. Dentro de esta categoría se han incluido aquellas respuestas que hacen alusión a los posibles errores de cálculo que se cometen en la elaboración del contraste.

LJ: No saber o equivocarse al realizar los cálculos.

Los errores procedimentales citados son bastante variados y numerosos, aunque la mayor parte de las veces hay poca precisión al describirlos. El error procedimental que parece más claro es el de lectura de las tablas de la distribución normal, tipificación y determinación de las regiones, mientras el resto se describe en forma muy difusa.

Tabla 5. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores procedimentales

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
Error en el cálculo del *p*-valor	2	2,9
Determinación del punto crítico	5	7,1
Determinación incorrecta de las regiones de rechazo/no rechazo	10	14,3
Error de tipificación	17	24,3
Lectura incorrecta de las tablas estadísticas	21	30,0
Error en el cálculo de probabilidades con la distribución normal	4	5,7
Determinación del estadístico de contraste	10	14,3
Errores de cálculo	5	7,1

Errores de interpretación

No saber cuándo rechazar o no rechazar la hipótesis nula. Por la experiencia docente en clases particulares o de otro tipo, se indica que el estudiante sabe aplicar el procedimiento, pero no llega a tomar la decisión pues no conoce la regla para ello. Este es un error poco citado en la literatura.

ACR: El año pasado di clases particulares a un adolescente que estaba en segundo de bachillerato de sociales […]. También cometía errores al ver si rechazaba o no la hipótesis, no era capaz de retener cuándo rechazaba o cuándo no.

Error en la interpretación del resultado o contextualización del mismo. Otra forma de expresar el mismo error anterior es la dificultad en contextualizar los resultados del contraste. Algunos estudiantes rechazan una hipótesis, pero no saben explicar qué significa este rechazo, en términos del enunciado dado.

ACG: Por último, es bastante común que el alumno no sepa concluir bien el ejercicio, debido a que no sabe cómo interpretar los resultados obtenidos, bajo el procedimiento más mecanizado.

Utilización del término "acepta" la hipótesis nula. El contraste de hipótesis está basado en la información proporcionada por la muestra, por lo que, si la hipótesis nula es rechazada, sólo se puede indicar que los datos de la muestra ofrecen cierta evidencia sobre su falsedad. Sin embargo, si no se rechaza, no implica que sea cierta; por ello, no es conveniente utilizar el término "aceptación".

BDM: Que, si les sale que hay que aceptar el contraste, es decir, si el p-valor es mayor que el valor α, ellos digan que se acepta la hipótesis nula en vez de decir que no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula.

En la Tabla 6 mostramos los errores sobre interpretación del contraste, donde se muestra la importancia que otorgan a la interpretación y contextualización de los resultados; con mucho menor frecuencia se citan el resto de errores como *no saber cuándo rechazar o no rechazar* y la importancia de cuidar el lenguaje a la hora de concluir evitando emplear la palabra aceptar. Por último, se ha encontrado una respuesta en relación a *no incluir el nivel de significación en la conclusión*.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que citan errores de interpretación

	N. Estudiantes	*Porcentaje*
No saber cuándo aceptar o rechazar la hipótesis nula	14	20,0
Error de interpretación o contextualización de resultados	32	45,7
Utilización del término "acepta" la hipótesis nula	7	10,0
No incluir el nivel de significación en la conclusión	1	1,4

Los errores descritos a lo largo de esta sección se completan con 3 estudiantes que citan la no comprensión de la terminología y cuatro los errores de interpretación de los datos del enunciado. Por último, señalar que únicamente dos participantes no dieron respuesta alguna a la pregunta planteada en este estudio, este hecho nos podría indicar la existencia de ciertas dificultades a la hora de identificar los errores que pueden tener los estudiantes de Bachillerato cuando abordan este tema.

CONCLUSIONES

Los 70 participantes identificaron diferentes errores posibles en el desarrollo de un contraste de hipótesis, aunque con un número pequeño (3,8 errores por participante). Muchos de los errores señalados coinciden con los identificados en la literatura; por ejemplo, confundir hipótesis nula y alternativa, confundir estadístico o parámetro o plantear hipótesis no complementarias (Batanero, 2000; Vallecillos, 1999). Igualmente se alude a la confusión entre contraste unilateral o bilateral, confusión de la distribución muestral e interpretación de resultados, encontrados en Espinel et al. (2007) o Vera et al. (2011). También se identifican errores de tipificación y lectura de la tabla normal, que no son tan específicos del contraste de hipótesis pero que ocurren con frecuencia entre los estudiantes en este y otros temas. En muchos casos se describen los errores con poca precisión, lo que nos indica que, en realidad, su conocimiento de cómo los estudiantes razonan y actúan en un contraste de hipótesis es limitado; por ejemplo, cuando se alude a "hipótesis mal planteadas" o "no saber plantear bien el contraste". También se describen errores poco frecuentes como la confusión en el tipo de error.

En consecuencia, aunque se observa un cierto grado de desarrollo de la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de estos profesores (en el modelo de Godino, (2009)) en lo que se refiere al contraste de hipótesis, sería necesario desarrollar de una forma más completa dicha faceta en estos futuros profesores, haciéndoles conocer mejor el desarrollo de un contraste de hipótesis y los posibles errores de los estudiantes. Además, sería necesario desarrollar también en ellos el resto de las facetas de su conocimiento didáctico-matemático sobre este tema. En particular, sería importante desarrollar su faceta instruccional para proporcionarles modelos y situaciones didácticas que ayuden a mejorar el conocimiento de los estudiantes sobre el contraste de hipótesis y evite en el futuro los errores de aplicación descritos en los antecedentes.

En este sentido, sería también deseable formarles en métodos alternativos de aproximación al contraste de hipótesis. Como se indica en Batanero, Díaz y López-Martín (2017) o Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011), no hay una única aproximación al contraste de hipótesis (en general, a la inferencia estadística) y es posible hoy día, gracias a la simulación, comenzar con aproximaciones informales. Todo ello teniendo en cuenta que una aproximación informal por sí sola no asegura que los estudiantes no cometan errores conceptuales (Silvestre y Sánchez, 2016).

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Alonso, I. G. y Cruz, J. A. G. (2008). Inferencia estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González, *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM,* (pp. 219-228). La Laguna: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Badenes-Ribera, L., Frías-Navarro, D., Monterde-i-Bort, H. y Pascual-Soler, M. (2015). Interpretation of the p-value: A national survey study in academic psychologist from Spain. *Psicothema, 27,* 290-295.

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Batanero, C., Díaz, C. y López-Martín, M. M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemático*s. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/batanero.pdf

Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics, 4,* 24-27.

Caperos, J. M. y Pardo, A. (2013). Consistency errors in p-values reported in Spanish psychology journals. *Psicothema, 25,* 408-414.

Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van den Nororgate, W. y Onghena, P. (2007). Student´s misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review, 2*(2), 98-113.

Dawson, A. J., Jaworski, B. y Wood, T. (2013). *Mathematics teacher education: Critical international perspectives*. Dordrecht, The Netherlands: Routledge.

Espinel, M. C., Ramos, R. M. y Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. *Números, 67,* 15-23.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Haller, H. y Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research, 7*(1), 1–20.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study.* New York: Springer.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Inzunsa, S. y Jiménez, J. V. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de futuros profesores universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 179-211.

Liu, Y. y Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. *Pedagogies, 4*(2), 126-138.

López-Martín, M. M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática, 5*(8), 33-59.

LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez, y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.

McLean, A. (2002). Statistacy: Vocabulary and hypothesis testing. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Raigada, J. L. P. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic Studies, 3*(1), 1-42.

Ramos, C. E., Espinel, M. C. y Ramos. R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *SUMA, 61,* 35-44.

Silvestre, E. y Sánchez, E. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informal: introducción a las pruebas de significancia en el bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 509-518). Málaga: SEIEM.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute, 58,* 201-204.

Vera. O., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *Unión, 27,* 41- 61.

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M. y Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society (A), 174*(2), 247-295.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE LOS PRIMEROS CURSOS DE LA ESO

History of mathematics in mathematics textbooks for the first years of secondary education

Madrid, M. J.[a], Maz-Machado, A.[b], León-Mantero, C.[b] y López-Esteban, C.[c]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba, [c]Universidad de Salamanca

Resumen

La historia de las matemáticas es considerada una herramienta motivadora con numerosas ventajas en su aplicación a la enseñanza de las matemáticas. A pesar de esto, su uso no está extendido en las aulas de los distintos niveles. Este trabajo presenta un estudio de caso sobre la inclusión de contenidos explícitos sobre la historia de las matemáticas en libros de texto de Matemáticas de primero y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Para llevarlo a cabo, se ha realizado un análisis descriptivo de libros de texto de la Editorial Edelvives utilizando la técnica del análisis de contenido. Los resultados muestran la escasa relevancia que se le da a la historia de las matemáticas en estos libros de texto y como esta, independientemente del curso, suele aparecer de forma breve, como algo complementario o en muchos casos como ejercicios destinados a la búsqueda de información.

Palabras clave: *matemáticas, historia de las matemáticas, ESO, libros de texto.*

Abstract

History of mathematics is considered a motivating tool with many advantages in its application to mathematics teaching. Despite this fact, its use is not extended in the classrooms of different levels. This paper presents a case study on the inclusion of explicit content about history of mathematics in Mathematics textbooks of the first and second years of Compulsory Secondary Education. To carry it out, it has been made a descriptive analysis of textbooks of the publishing house Edelvives. The technique applied is content analysis. The results show the little relevance that history of mathematics has in these textbooks. Independently of the year, it usually appears briefly as something complementary and in many occasions, these books only include exercises that aim to search for information about it.

Keywords: *mathematics, history of mathematics, Secondary Education, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas es un campo de esta disciplina que puede utilizarse con distintos fines en el proceso de enseñanza aprendizaje de contenidos matemáticos. Entre las múltiples propuestas y consideraciones que se han realizado durante las últimas décadas sobre los beneficios y aportaciones de la inclusión de la historia de las matemáticas en el aula, se incluye la propuesta de Rico (1997). Este considera la historia de las matemáticas como un organizador curricular, indicando que la información histórica puede aportar motivaciones, ejemplos y ejercicios curiosos para los alumnos.

Por su parte Arcavi (1991) plantea dos beneficios del uso de historia en el aula: sensibilizar al profesor sobre las posibles dificultades que pueden experimentar sus alumnos en matemáticas y a su vez ayudar a reexaminar los conceptos, a no tomar las ideas como algo garantizado, sino a favorecer su discusión.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2018). La historia de las matemáticas en libros de texto de matemáticas de los primeros cursos de la ESO. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 310-319). Gijón: SEIEM.

Barbin (1991) destaca además los efectos positivos que pueden producirse a través de la lectura de textos originales, que permiten a profesores y alumnos conocer la naturaleza de la actividad matemática, como se elaboró el conocimiento matemático, etc.

Ernest (1998) valora la incorporación de la historia para facilitar entre otras muchas mejoras, la consideración del origen de las matemáticas como algo intercultural, proveer a los profesores de una herramienta con la que anticiparse a los futuros errores de sus alumnos y en definitiva mejorar la percepción que tienen los alumnos de las matemáticas y sus actitudes hacia ella.

Bidwell (1993) expone que la historia de las matemáticas permite humanizar las matemáticas favoreciendo que los estudiantes conecten con esta asignatura, acercándoles a las vidas y obras de matemáticos de otros tiempos, a las matemáticas en otras culturas, etc.

Destacan las palabras de Fauvel (1991) que proporciona múltiples razones para el uso de la historia de las matemáticas:

- Como elemento motivador del alumnado.
- Para ayudar a los alumnos a cambiar su percepción sobre esta materia.
- Para enseñar al alumnado como se han desarrollado los conceptos.
- Para comparar las técnicas que se utilizaban en la antigüedad con las actuales y así poder establecer el valor de las modernas.
- Para conocer las dificultades y errores que han surgido a lo largo de los años y así favorecer tanto que el profesor comprenda cuales son las posibles dificultades que tendrán sus alumnos, como que estos se den cuenta que no son los únicos con problemas.
- Para animar a los alumnos a conocer más sobre esta materia.
- Para desarrollar un acercamiento multicultural y explicar el papel de las matemáticas en la sociedad.
- Como oportunidad para la investigación.
- Para favorecer la realización de actividades relacionadas con otras asignaturas distintas de las matemáticas, favoreciendo el aprendizaje interdisciplinar.

En este sentido, Wang, Qi y Wang (2017) categorizan los valores educativos de la historia de las matemáticas incluidos en distintas propuestas de inclusión en el aula realizadas en China. Para ello se proponen seis dimensiones en las que encuadran los valores implícitos en estas propuestas:

- La armonía del conocimiento.
- La belleza de las ideas o los métodos.
- El placer de los interrogantes.
- La mejora de las capacidades.
- El encanto de las culturas.
- La disponibilidad de la educación moral.

En definitiva, a lo largo de los últimos años distintos estudios y discusiones se han realizado sobre la utilidad de incluir la historia de las matemáticas en el aula. Teniendo en cuenta estos beneficios se han realizado propuestas para la inclusión de la historia de las matemáticas en las aulas. Por ejemplo, Bagni (2001) realizó investigaciones experimentales sobre si la introducción de esta en la enseñanza de los números complejos facilita la aceptación de éstos por parte de los alumnos.

Papadopoulos (2014) presenta el uso del método exhaustivo de Arquímedes para calcular el número π con alumnos de primaria.

Sin embargo, pese a sus reconocidos beneficios, como índica González (2004) por distintas razones no siempre resulta sencillo concretar cómo utilizar la historia de las matemáticas en el ámbito escolar; ya sea por no saber cómo adaptarla al nivel educativo, a los temas y problemas concretos, porque el profesor no posee los conocimientos históricos necesarios, etc. Por ello, teniendo en cuenta la importancia que posee en la enseñanza en general y también en el caso de la enseñanza de las matemáticas el libro de texto, se plantea el interrogante de cómo es la inclusión de esta disciplina en él.

Libros de texto en la enseñanza de las matemáticas

Un libro de texto es siguiendo la propuesta de Gómez (2011, p. 51) "una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido". Considerando además que, dentro de los libros de texto, el género más conocido es de los manuales escolares: "un manual es un libro de texto que es utilizado en la escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza" (Gómez, 2011, p. 51).

Además, los libros de texto de matemáticas no pueden ser considerados exclusivamente una presentación secuenciada de definiciones, conceptos, operaciones, propiedades, estructuras y teoremas matemáticos (Rico, 1997). No incluyen solo conocimientos de la materia que exponen ni son documentos exclusivamente formales sino que son materiales docentes con propósitos educativos. Por eso, junto con conceptos y procedimientos incluyen distintas informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático permitiendo enriquecerlo y a su vez transmiten una serie de significados que facilitan la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001).

La relevancia del libro de texto en la enseñanza de las matemáticas ha sido reconocida en múltiples ocasiones, por ejemplo, ya el informe Cockcroft (1985) indicaba que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula" (p. 114).

Igualmente, Monterrubio y Ortega (2009) afirman que el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, de forma que incluso en muchas ocasiones, el propio libro de texto determina el currículo real que se imparte en las aulas.

Pero además de ser un recurso para el aula, el libro de texto se ha convertido en el objeto de estudio de numerosas investigaciones en educación. Ya Schubring (1987) apuntaba en este sentido que teniendo en cuenta que la práctica docente viene en múltiples ocasiones más determinada por los libros de texto utilizados para la enseñanza que por los decretos y órdenes ministeriales, es necesario analizar dichos libros.

En esta línea, Gómez (2011) afirma que dada su importancia y su influencia, se puede considerar el análisis de los manuales escolares como una línea más dentro de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Y dentro de esta línea se han estudiado entre otras cuestiones las contribuciones que los libros de texto han aportado a la historia de la educación matemática, se ha analizado la variedad y riqueza de sus contenidos, su incidencia en el aula y su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados (González y Sierra, 2004).

Entre los numerosos ejemplos de distintas investigaciones en libros de texto de matemáticas, se encuentran las de Monterrubio y Ortega (2009, 2011) acerca de modelos de análisis y valoración de manuales escolares de matemáticas, Azcarate y Serradó (2006) analizan las tendencias didácticas presentes en los libros de texto de matemáticas para la ESO, Balcaza, Contreras y Font (2017) que analizan cómo se desarrolla la optimización matemática en tres libros de texto de bachillerato o el estudio del concepto de continuidad a partir de manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX (Sierra, González y López, 2003).

Esta diversidad de estudios realizados en las últimas décadas, continúa poniendo de manifiesto la relevancia de los libros de texto en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto, en un momento como el actual en el que el auge de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, implantadas ya en la gran mayoría de aspectos de nuestra sociedad incluido el entorno escolar y proporcionando numerosos recursos tanto visuales como informáticos para su uso en las aulas, ha hecho que el protagonismo de los libros impresos haya disminuido, sin embargo el libro de texto es todavía un importante recurso educativo y tiene cabida aún en muchas aulas.

Teniendo en cuenta tanto la relevancia que aún posee el libro de texto en la enseñanza actual como las distintas teorías que inciden en los beneficios de la utilización de la historia de las matemáticas en el aula, el objetivo de este trabajo es conocer si se incluyen referencias explícitas a la historia de las matemáticas en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura Matemáticas, que según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato forma parte de los cursos 1º y 2º de ESO y en caso afirmativo analizar para qué contenidos se incluye la historia de las matemáticas y cómo se incluye.

METODOLOGÍA

La investigación que se realizará será cualitativa, exploratoria, descriptiva y muestral (Fox, 1981). En el análisis se ha puesto el foco en la inclusión de contenidos explícitos sobre la historia de las matemáticas en libros de texto de la asignatura Matemáticas para los dos primeros cursos de la Educación Secundaria.

Se realizará un estudio de caso de libros de 1º de la ESO y 2º de la ESO de la editorial EDELVIVES. Para la elección de los libros se tuvo en cuenta:

- Idioma: Los libros estaban escritos en castellano.
- Contenidos: La editorial dispone de libros de matemáticas de los dos primeros cursos de la ESO.
- Uso: La editorial se utiliza ampliamente en institutos y colegios.
- Disponibilidad: Por tanto, la muestra elegida es intencional y por conveniencia.

Como técnica de investigación se utilizó el análisis de contenido, porque es uno de los métodos empleados frecuentemente para la investigación en Educación Matemática (Fernández-Cano y Rico, 1992).

Se definieron como unidades de análisis las unidades temáticas de cada uno de los manuales estudiados. Para ello se leyeron y analizaron todos los contenidos utilizados en los libros y posteriormente se categorizaron.

Para el análisis, el punto de partida no fueron un conjunto de categorías preestablecidas sino que las categorías se determinaron y consensuaron mediante una triangulación realizada por expertos del área de Didáctica de la Matemática tras un primer análisis de las obras.

Título del libro	
Autores	
Año de publicación	
Editorial	
¿Se incluyen menciones a la historia de las matemáticas?	
Historia de las matemáticas (Únicamente si la respuesta a la pregunta anterior es positiva).	
¿Con qué contenidos se relaciona la historia de las matemáticas?	Números y álgebra
	Geometría
	Funciones
	Estadística y probabilidad
Contenido que incluye menciones a la historia de las matemáticas	
¿Dónde aparece la historia de las matemáticas?	En la presentación de la unidad
	En las explicaciones teóricas
	En ejercicios y problemas
	En imágenes o fotografías
	En explicaciones complementarias

La división por contenidos se ha realizado teniendo en cuenta los bloques en los que el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, organiza los contenidos matemáticos tanto para las asignaturas: Matemáticas (1º y 2º ESO), Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (3º y 4º ESO) y Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas (3º y 4º ESO).

El bloque de "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas" que también se incluye en estas asignaturas, no se ha tenido en cuenta porque tal y como se indica en el Real Decreto 1105/2014 debe desarrollarse de modo transversal y simultáneamente al resto de bloques.

RESULTADOS

Los primeros libros analizados son Matemáticas ESO 1, volumen 1 (Mejía, Romero y Ocaña, 2015a), volumen 2 (Mejía, Romero y Ocaña, 2015b) y volumen 3 (Mejía, Romero y Ocaña, 2015c), de la editorial EDELVIVES.

La portada de los libros (similar para los tres) lleva entre otras, una imagen del dibujo de Leonardo da Vinci el *Hombre de Vitruvio o Estudio de las proporciones ideales del cuerpo humano*. Aunque esta imagen no esté directamente relacionada con la historia de las matemáticas sí puede inspirar conversaciones relativas a la historia y su relación con las matemáticas, concretamente en este caso con la proporcionalidad, favoreciendo además la realización de actividades relacionadas con otras asignaturas como Educación Plástica, Visual y Audiovisual.

El análisis de los libros muestra que se incluyen menciones explícitas a la historia de las matemáticas en 6 de los 13 temas. Además, en los temas en los que se incluyen, estas no son numerosas limitándose en ocasiones a una única mención por tema.

Destaca la inclusión de la historia de las matemáticas en la primera parte del tema de números naturales dedicada a sistemas de numeración. Aparecen imágenes relacionadas en la presentación de la unidad, se habla de ella en contenidos teóricos, se incluye en imágenes y en distintos ejercicios sobre sistemas de numeración, como el egipcio, el romano y el sistema de numeración decimal. Esta inclusión permitirá como indicaba Fauvel (1991) comparar los sistemas de numeración que se utilizaban en la antigüedad con los actuales para establecer el valor de los modernos.

También en este tema al hablar de ordenación de números naturales, se incluye una explicación complementaria al margen acerca de la historia del uso del signo igual.

En el resto de temas la historia de las matemáticas se incluye o bien como un elemento complementario en el margen de la página, por ejemplo, se menciona con un breve comentario y se incluye una imagen de Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi para el álgebra y también se incluye una imagen de Euclides para la definición de ángulo.

En este sentido la aparición del teorema de Pitágoras, lleva también a la inclusión de una foto al pie con un breve comentario acerca del autor; se propone también para este teorema la visualización de un video en el que se indica que aparece la historia.

No ocurre lo mismo en otros casos, por ejemplo, la criba de Eratóstenes y la recta de Euler se incluyen como contenidos, pero no se menciona a estos matemáticos.

Otra forma de aparición se basa en ejercicios de búsqueda de información. Por ejemplo, la inclusión de un ejercicio dentro del tema Tablas y Gráficas para el contenido de Funciones, sobre la función normal o campana de Gauss lleva a proponer lo siguiente:

"Busca información sobre el matemático Gauss. ¿A qué campos de las matemáticas dedicó sus estudios?" (Mejía, Romero y Ocaña, 2015b, p.183).

En este sentido, entre los ejercicios más interesantes, desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, destaca el siguiente por plantear tanto la lectura de obras originales como la evolución de los conceptos:

> Investiga junto a un grupo de compañeros de clase quién fue Euclides de Alejandría y sobre qué trata su obra más importante: Los Elementos. Busca, a continuación, las definiciones que en ella dio del punto, la recta y el plano hace más de 2000 años y compáralas con las que acabas de estudiar. ¿Son parecidos? (Mejía, Romero y Ocaña, 2015c, p. 223).

Finalmente, la historia de las matemáticas, en este caso las fechas de nacimiento de matemáticos como Ada Lovelace, Arquímedes de Siracusa o Leonardo de Fibonacci entre otros, se utiliza como excusa para plantear un ejercicio de representación y ordenación del conjunto de los números enteros: "Dibuja una línea temporal y representa en ella el año de nacimiento de los siguientes matemáticos" (Mejía, Romero y Ocaña, 2015a, p. 71).

Además, problemas como el de los granos de trigo en el tablero de ajedrez que históricamente han formado parte de numerosos textos matemáticos, sí se incluyen pero sin hacer referencia a aspectos de tipo histórico, por ejemplo su resolución en distintos libros a lo largo de la historia que podrían resultar interesantes, como muestran los planteamientos de Gómez (1999).

En resumen, en esta obra las menciones explicitas a la historia de las matemáticas no son numerosas y se incluyen principalmente en el tema de números naturales y en los temas geométricos.

En los libros Matemáticas ESO 2, volumen 1 (Romero, Ocaña y Mejía, 2016a), volumen 2 (Romero, Ocaña y Mejía, 2016b) y volumen 3 (Romero, Ocaña y Mejía, 2016c) de la editorial EDELVIVES, se incluyen también menciones a la historia de las matemáticas en 10 de los 15 temas (aunque nuevamente en muchos casos se trata de una única mención a lo largo de todo el tema).

Destacan fundamentalmente los ejercicios para investigar y en ocasiones posteriormente exponer o crear un mural, ya sea de forma individual, por parejas o en grupos y normalmente recomendando el uso de Internet. Se pregunta sobre distintos aspectos:

- El origen de los números enteros y su evolución a lo largo de la historia.
- El origen de las fracciones y, en concreto, el origen de las palabras fracción y quebrado.
- La evolución de los números decimales a través de la historia.
- El origen del álgebra y su evolución a lo largo de la historia.

- El papiro de Rhind. Además, se pregunta también por algún ejercicio concreto que aparezca en el papiro de Rhind y en otro ejercicio pide nuevamente enunciar y plantear alguna de las ecuaciones que aparecen en ese documento histórico.
- El matemático Pitágoras de Samos.
- El conocimiento del teorema de Pitágoras en las civilizaciones anteriores a los griegos.
- La figura de Tales de Mileto y las aplicaciones que de sus conocimientos hizo en su vida.
- La presencia de los poliedros regulares en la historia y los diferentes matemáticos que los han estudiado.

En definitiva, se destaca fundamentalmente la labor de la historia de las matemáticas como procuradora de oportunidades para la investigación y como fuente para conocer la evolución de los conceptos, planteando incluso la lectura de un texto original.

Junto a estos ejercicios, se incluyen breves menciones a la historia de la matemática en las explicaciones teóricas de la criba de Eratóstenes, del algoritmo de Euclides (mencionando su VII libro de los *Elementos*), de la regla de Laplace o del teorema de Pitágoras y sus aplicaciones a la agrimensura.

A su vez se incluyen imágenes y comentarios al margen al tratar distintos temas. Por ejemplo se habla de Eratóstenes al hablar de su criba, de Pierre Simón Laplace al hablar de la regla de Laplace, para el teorema de Pitágoras se incluyen en los márgenes la tablilla de Yale con un comentario y otro comentario acerca del triángulo pitagórico en el antiguo Egipto, al hablar del teorema de Tales se incluye al margen una imagen y un comentario sobre Tales de Mileto (Figura 1), también aparece una imagen al margen de cinco bolas de piedra tallada que según la obra datan del final del Neolítico para hablar de poliedros regulares.

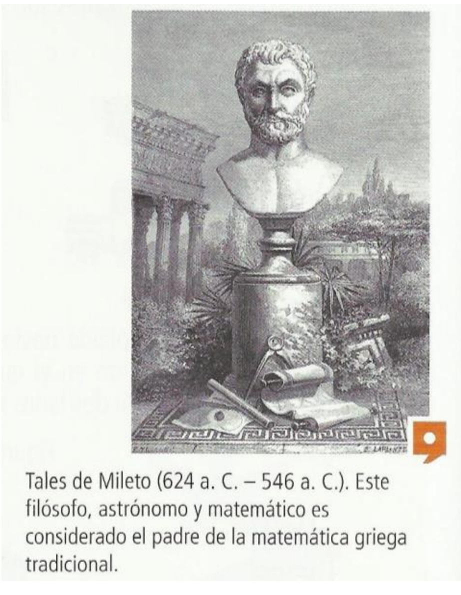


Figura 2. Imagen y comentario al margen sobre Tales (Romero, Ocaña y Mejía, 2016c, p. 252)

Nuevamente algunos contenidos como la recta de Euler, la fórmula de Euler o los sólidos platónicos no llevan ninguna mención al matemático que les da nombre.

En otro tipo de ejercicios se habla de la conjetura de Goldbach diciendo que es uno de los problemas matemáticos abiertos más antiguos, para plantear simplemente después la comprobación de esta conjetura en distintos números. Algo similar ocurre para la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado, se incluye el histórico problema del epitafio de la tumba del matemático griego Diofanto de Alejandría aunque desde el punto de vista histórico solo se realiza un comentario sobre que el autor dedicó parte de su vida a la resolución de problemas algebraicos y posteriormente se plantea el problema. En ninguno de los dos casos se utiliza la historia con otros objetivos.

Sin embargo, entre las aplicaciones más destacables de la historia de las matemáticas se podría considerar la siguiente que hace hincapié en contrastar las ventajas de las técnicas modernas con las antiguas y además favorece la comprensión del origen de las matemáticas como algo intercultural:

> En la antigüedad, los chinos no utilizaban el signo "-" para representar los números negativos, sino que escribían estos en color rojo para diferenciarlos de los positivos, que se escribían en negro. De este hecho viene la expresión "números rojos", que se utiliza cuando una persona, empresa o institución deben dinero, es decir, cuando su saldo es un número negativo.
>
> Sin efectuar las operaciones, escribe de color rojo las que vayan a tener signo negativo y en negro aquellas que vayan a ser positivas (Romero, Ocaña y Mejía, 2016a, p. 48).

Nuevamente los contenidos en los que predomina la historia de las matemáticas son los de números y álgebra y geometría (fundamentalmente geometría plana). Prueba de ello es que tanto en la presentación de la unidad *Ecuaciones y sistemas de ecuaciones* como en la *Triángulos. Teorema de Pitágoras* aparecen imágenes, comentarios y preguntas relacionadas directamente con la historia de las matemáticas. Incluso en la presentación de la unidad *Semejanza. Teorema de Tales* aparece entre otras imágenes *El hombre de Vitruvio* de Leonardo da Vinci, que si bien no está directamente relacionado con la historia de las matemáticas, si puede evocar conversaciones al respecto.

En definitiva, en estos libros la presencia de la historia de las matemáticas es mayor, aunque queda prácticamente relegada a la búsqueda y exposición de información o a la inclusión de datos de algunos autores.

CONCLUSIONES

El estudio realizado muestra que la historia de las matemáticas aunque sí se incluye en los libros de texto de matemáticas analizados, no tiene en ellos una gran relevancia. Prueba de esto es que en los libros analizados queda en general relegada a comentarios e imágenes en el margen de la página o a ejercicios de búsqueda de información de forma autónoma por parte de los alumnos.

La comparativa entre libros, muestra una mayor relevancia en el segundo curso (dentro de la escasa relevancia que posee con respecto al conjunto de los libros). A su vez en este curso se puede observar cómo el enfoque del uso de la historia de las matemáticas se centra en la investigación con 9 ejercicios destinados a ello.

Son escasos sin embargo en los libros los ejercicios que trabajan la historia de las matemáticas utilizando fuentes originales o planteando la evolución de los conceptos en el tiempo.

En cuanto a los contenidos trabajados, en las obras se muestra que la historia de las matemáticas se incluye mayoritariamente en los temas relativos a números y álgebra y a geometría, mientras que para los contenidos de funciones y estadística y probabilidad su aparición es mucho menor e incluso en algunos casos no se realiza mención ninguna.

En resumen, pese a que distintos investigadores de la educación matemática destacan las posibilidades de la historia de las matemáticas como herramienta para las aulas, el estudio de caso de libros de textos de matemáticas de 1º y 2º ESO refleja como esta tiene en general muy poca relevancia, dejando su aplicación al interés del profesorado.

La continuación de este trabajo pasa por analizar libros de otras editoriales para poder generalizar cómo se incluye la historia de las matemáticas en los textos de matemáticas, se pueden comparar también manuales de las asignaturas Matemáticas aplicadas a las enseñanzas académicas o aplicadas de los cursos 3º y 4º ESO para comprobar cómo es la evolución de esta inclusión a lo largo de los distintos cursos.

Referencias

Arcavi, A. (1991). Two benefits of using history. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 11.

Azcarate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista De Educación, 340*, 341-378.

Bagni, G. T. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos: una investigación experimental en la educación media superior. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-62.

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(59), 1061-1081. doi: 10.1590/1980-4415v31n59a11

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 12-13.

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *MathematicsTeacher, 86*, 461-464.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School, 27*(4), 25-31.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Fernández-Cano, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación matemática*. Madrid: Síntesis.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Universidad de Navarra.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2*(3), 19-29.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 45*, 17-28.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (3), 389-408.

Mejía, D., Romero, R. y Ocaña, J. M. (2015a). *Matemáticas ESO 1. Volumen 1.* Zaragoza: Edelvives.

Mejía, D., Romero, R. y Ocaña, J. M. (2015b). *Matemáticas ESO 1. Volumen 2.* Zaragoza: Edelvives.

Mejía, D., Romero, R. y Ocaña, J. M. (2015c). *Matemáticas ESO 1. Volumen 3.* Zaragoza: Edelvives.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, *5*(3), 105-127.

Papadopoulos, I. (2014). How Archimedes helped students to unravel the mystery of the magical number pi. *Science y Education, 23*(1), 61-77. doi: 10.1007/s11191-013-9643-0.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial Del Estado, 3,* 03 de enero de 2015, 169-546.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori.

Romero, R., Ocaña, J. M. y Mejía, D. (2016a). *Matemáticas ESO 2. Volumen 1.* Zaragoza: Edelvives.

Romero, R., Ocaña, J. M. y Mejía, D. (2016b). *Matemáticas ESO 2. Volumen 2.* Zaragoza: Edelvives.

Romero, R., Ocaña, J. M. y Mejía, D. (2016c). *Matemáticas ESO 2. Volumen 3.* Zaragoza: Edelvives.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41-50.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas: organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1), 21-49.

Wang, X. Q., Qi, C. Y., y Wang, K. (2017). A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics. *Science y Education, 26*(7-9), 1029-1052. doi: 10.1007/s11191-017-9937-8

ENRIQUECIMIENTO DE TAREAS Y PROBLEMAS DE MODELADO INVERSO: UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES EN FORMACIÓN

Tasks enrichment and inverse modelling problems: an experience with prospective teachers

Martinez-Luaces, V.[a], Rico, L.[a], Fernández-Plaza, J. A.[a] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación expone el marco de un estudio sobre enriquecimiento de tareas escolares realizadas por futuros profesores y algunos de sus resultados. La experiencia que se presenta proviene del trabajo realizado con 74 profesores en formación, matriculados en el Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria, impartido por la Universidad de Granada en el curso 2016-2017. El estudio se centra en la reformulación en modo inverso de unos problemas enunciados en modo directo por el grupo de docentes participantes. Las respuestas proporcionadas fueron estudiadas e interpretadas utilizando el Análisis Didáctico, una metodología de análisis basada en categorías didácticas. Se observa que los futuros profesores elaboran una amplia diversidad de formulaciones, pero muestran un dominio pobre de la reflexión didáctica en lo que respecta al análisis de significados.

Palabras clave: *análisis didáctico, enriquecimiento de tareas, Enseñanza Secundaria, formación de profesores, modelización, problemas inversos.*

Abstract

This communication exposes the framework of a study on the enrichment of school tasks carried out by future teachers and some of their results. The experience presented comes from the work carried out with 74 teachers in training, enrolled in the Master's Degree in Teaching Secondary Education, taught by the University of Granada in the 2016-2017 academic year. The study focuses on the reformulation of the problems in the reverse mode posed directly by the group of participating teachers. The answers provided were studied and interpreted using Didactical Analysis, a methodology of analysis based on didactic categories. Future teachers are able to elaborate a wide diversity of formulations; however they show poor mastery of the didactic reflection with regard to the analysis of meanings.

Keywords: *didactical analysis, tasks enrichment, Secondary school, teaching training, courses modelling, inverse problems.*

INTRODUCCIÓN

Como en otras muchas disciplinas, distinguimos en los problemas de matemáticas básicamente dos tipos de enunciados de problemas: enunciados directos y enunciados inversos. En ese segundo tipo es frecuente la posibilidad de combinarlos con tareas de modelización, opción que hemos llamado Problemas de Modelado Inverso. Esos problemas pueden originarse por reformulación de enunciados de problemas tradicionales de modelización, planteados mediante enunciados directos (Martinez-Luaces, 2013, 2016).

Martínez-Luaces, V., Rico, L., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Enriquecimiento de tareas y problemas de modelado inverso: Una experiencia con profesores en formación. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 320-329). Gijón: SEIEM.

Este documento continúa esa línea de investigación, que se centra en el enriquecimiento de tareas para los escolares de Enseñanza Secundaria, que son formuladas por profesores en formación.

Por el contexto en que se realiza, el trabajo atiende a la formación de los profesores de matemáticas de Secundaria y particularmente se ocupa de su conocimiento profesional. Nuestro interés se enfoca en revelar su conocimiento sobre los contenidos matemáticos escolares, debido a que es mediante esos conceptos y procedimientos cómo se determinan los significados necesarios para su planificación, implementación y evaluación. Como método de estudio empleamos el denominado Análisis Didáctico, siguiendo pautas ya establecidas en Rico, Lupiáñez y Molina (2013) y en Rico y Moreno (2016).

Durante la primera fase del trabajo de campo se propone a los participantes en el estudio la reformulación, como problema inverso, del enunciado de un problema directo de modelización matemática; además se les solicita una comparación de ambos enunciados. En particular, se les pide que indiquen aquellas características conceptuales y didácticas que han tenido en cuenta en la modificación de la tarea.

Las producciones de los docentes en formación que han resultado de esta experiencia se analizan a través de aquellas categorías correspondientes a tres de las dimensiones curriculares: análisis conceptual o de significados, análisis cognitivo y análisis de instrucción. Con estas herramientas, se estudian, describen y categorizan las respuestas dadas por los sujetos de la muestra, que incluyen tanto los problemas reformulados como los comentarios sobre las tareas propuestas.

Por razones de extensión, optamos en este trabajo por centrarnos en el análisis conceptual considerando los enunciados, directo e inverso, junto con la comparación de sus correspondientes significados. Más concretamente, el objetivo es comparar los significados de las tareas, directa y la propuesta de tarea inversa que realizan los futuros profesores.

Como ejemplo escogemos un problema sobre el que se logran caracterizar nueve tipos distintos de reformulaciones, que incluyen la determinación de subtipos. Se identifican y describen diversas estrategias para la reformulación de ese problema y para el enriquecimiento de sus tareas, así como para su utilización con escolares de Enseñanza Secundaria Obligatoria o Bachillerato.

Si bien han aparecido propuestas muy creativas, los profesores en formación han optado por reformulaciones convencionales que, en ocasiones dan lugar a una trivialización del problema planteado.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo aborda el análisis de los enunciados inversos de los problemas matemáticos y del conocimiento sobre los contenidos matemáticos escolares del docente, que se manifiestan mediante Análisis didáctico de las tareas propuestas.

El marco teórico se centra fundamentalmente en los elementos considerados para analizar los enunciados de las tareas inversas propuestas por los futuros profesores. Se describen los fundamentos básicos de los problemas inversos y, seguidamente, se presenta el marco que sustenta a los elementos que han servido para el análisis.

Problemas inversos

En contraste con los problemas de modelización, los problemas inversos tienen escasa presencia en el currículo de Secundaria.

Los expertos, sin proporcionar una clasificación exhaustiva general, catalogan los problemas en directos e inversos. Groestch (2001), considera como problemas directos aquellos que proporcionan la información necesaria para seguir un procedimiento bien definido y estable, que conduce a una única solución correcta.

En esencia, hay dos tipos de problemas inversos. Para caracterizarlos correctamente, es conveniente esquematizar las componentes de un problema directo como se observa en la Figura 1. En este esquema los datos iniciales y un cierto procedimiento son conocidos y están disponibles; lo que se solicita es un determinado resultado.

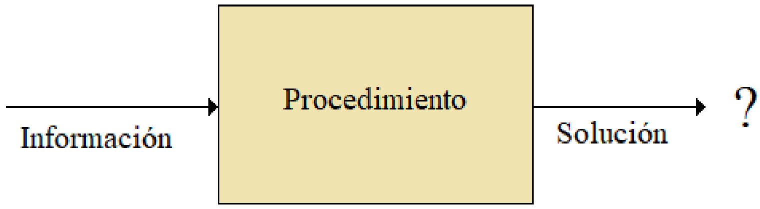


Figura 3. Esquema para los problemas directos

En una primera modalidad de problema inverso – *problema de causalidad* – se plantea la pregunta de cuáles pueden ser las causas que provocan un cierto efecto, por ejemplo, cuál puede ser la función (que será la primitiva o integral indefinida) que por derivación da lugar a cierta función dada. Un esquema de este tipo de problema se puede observar en la Figura 2.

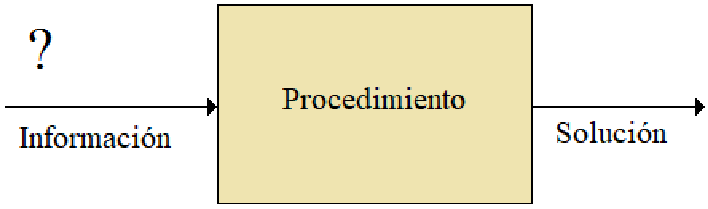


Figura 4. Esquema para los problemas inversos de causalidad

Se puede plantear una segunda modalidad de problema inverso, llamada *problema de especificación*, en la cual se conocen tanto la causa como el efecto y lo que se solicita es el nexo entre ellos (por ejemplo, cuando se pide la demostración de cierta propiedad, en la que hipótesis y tesis son conocidas). En este caso el esquema correspondiente se observa en la Figura 3.

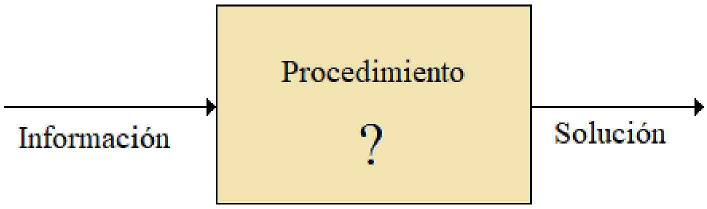


Figura 5. Esquema para los problemas inversos de especificación

En esta investigación, el procedimiento es siempre conocido, por lo que el tipo de problema de especificación no es objeto de este estudio.

Es en la modelización y en las aplicaciones a otras disciplinas donde los problemas inversos tienen mayor riqueza por su variedad de sentidos y son más apropiados para propósitos educativos. Por esta razón, presentamos y estudiamos un caso en que se combinan la modelización matemática y los problemas inversos, de los cuales surgen los que hemos llamado *problemas de modelado inverso*.

Para precisar esta interacción entre problemas inversos y de modelización, el documento de discusión preliminar para el estudio ICMI 14, plantea que el término "modelización" se centra en la dirección que va del mundo real a las matemáticas, mientras que el término "aplicación" va en dirección opuesta. A su vez, el término "modelización" enfatiza el proceso que tiene lugar, mientras que la palabra "aplicación" enfatiza el objeto involucrado, particularmente los ejemplos de la vida real que son susceptibles a cierta manipulación matemática (Blum, 2002).

Con atención a las consideraciones anteriores, estudiamos un caso en que se combinan la modelización matemática y los problemas inversos, que ejemplifica los llamados problemas de modelado inverso (Martinez-Luaces, 2013, 2016).

El análisis didáctico como herramienta para analizar el conocimiento profesional

El conocimiento profesional del docente ha sido tema de estudio por parte de varios investigadores, que se inician con los aportes de Shulman (1986), quien distingue tres categorías de conocimiento del contenido: el conocimiento del contenido de la materia, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular. Otros investigadores – particularmente los de la Universidad de Michigan – han analizado las opiniones de profesores en ejercicio, a través de encuestas y entrevistas, llegando a elaborar un modelo denominado MKT por sus siglas en inglés (Mathematical Knowledge for Teaching). En dicho modelo (Hill, Ball y Schilling, 2008; Ribeiro y Carrillo, 2012) se establecen dos dominios diferentes: el conocimiento del contenido (que se divide en: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático) y el conocimiento didáctico del contenido (dividido en conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo) (Ribeiro y Carrillo, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, el conocimiento profesional del docente – en sus múltiples dominios y subdominios – ayuda al docente a establecer el significado de los conceptos, para luego implementarlos en sus clases y evaluarlos, siguiendo un método que Rico y colaboradores denominan Análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Rico y Moreno, 2016).

El Análisis didáctico se estructura de acuerdo a cuatro tipos de análisis, cada uno con distinto objeto de estudio, según la dimensión del currículo escolar de matemáticas considerada. En primer lugar, comienza con el análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares, donde el docente identifica, selecciona y organiza conceptos y procedimientos aptos para la instrucción. Nuestra noción de significado se basa en las tres componentes del triángulo semántico de Frege, según lo considerado por Rico (2012): estructura conceptual, sistema de representación y modos de uso.

METODOLOGÍA

Esta investigación es un estudio exploratorio, ya que presenta un primer trabajo de un estudio sistemático, relacionado con la transformación de problemas directos a enunciados inversos por parte de futuros docentes de Educación Secundaria.

El estudio tiene como objetivo describir y caracterizar las producciones de futuros profesores cuando inventan enunciados de problemas de modelado inverso, basados en un problema directo previo. Teniendo en cuenta que se trata de futuros docentes, se les solicita enmarcar sus propuestas como enriquecimiento de una tarea destinado a estudiantes de Educación Secundaria. Por ello, sus respuestas se analizan considerando la comparación que han hecho de ambos problemas en cuanto a significación, autenticidad, elementos y variables de tarea.

La muestra para el trabajo empírico presentado la constituye un grupo de 74 profesores en formación de la asignatura "Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria", del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria impartido en la Universidad de Granada (España), en el curso académico 2016-2017.

La experiencia se lleva a cabo en dos sesiones de trabajo. En la primera, se propone a los futuros profesores un problema de modelado directo, trabajado previamente (Martínez-Luaces, 2016). El objetivo de la tarea consiste en reformular el problema como actividad de enriquecimiento para estudiantes de secundaria. Dichas reformulaciones se utilizan para explicar los problemas inversos.

Una segunda sesión incluye la propuesta de un nuevo problema directo – *problema de la oveja* – a los futuros profesores. Su enunciado describe una oveja pastando en un campo cuadrado de lado L. La oveja está atada en el punto medio del lado sur del terreno y la cuerda que ata a la oveja tiene una longitud R como se muestra en la Figura 4. En dicha figura, A representa el área del sector accesible a la oveja. Sea $r = \frac{R}{L}$ la relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del lado del campo y sea $f = \frac{A}{L^2}$ la fracción del área total en la que la oveja puede pastar. Obviamente f es función de r y la relación entre ambas variables se puede obtener por integración. Un posible problema directo consiste en solicitar a los estudiantes que obtengan f para uno o más valores de r, por ejemplo: ¿qué fracción del área total es accesible a la oveja si la cuerda mide las tres cuartas partes de la longitud del lado del terreno?

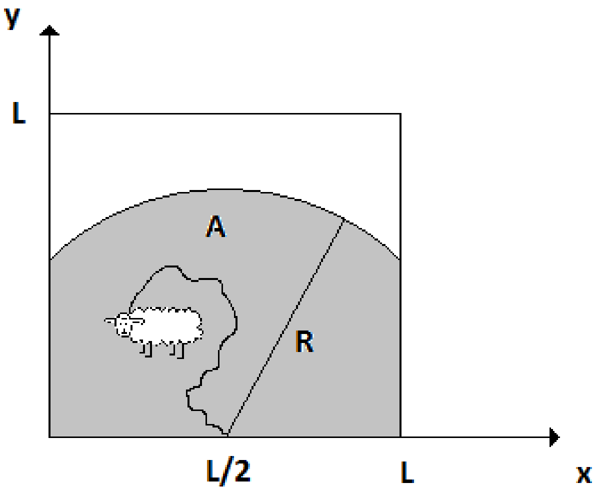


Figura 6. Parte del terreno accesible a la oveja

La tarea propuesta pide expresamente a los participantes que reformulen el enunciado como problema inverso. Se solicita a los futuros docentes analicen ambos enunciados comparativamente.

Datos y organización

No todas las respuestas recibidas corresponden a reformulaciones inversas; las producciones no planteadas en forma inversa no se tuvieron en cuenta para el estudio. En segundo lugar, varios participantes propusieron más de una reformulación; de hecho, algunos de ellos enunciaron hasta tres problemas inversos. Algunos trabajaron individualmente mientras que otros prefirieron trabajar en parejas. Por estos motivos, la unidad de información de nuestro estudio, no son los sujetos, sino las respuestas recogidas, que se codifican según respuestas (R1, R2, etc). Los 74 participantes proporcionaron un total de 40 reformulaciones, planteadas como problemas inversos.

Instrumento de análisis

La información recogida se organizó en una tabla de doble entrada en la que cada respuesta considerada, era desglosada atendiendo a variables teóricas tomadas del análisis didáctico. El equipo de investigación analizó las reformulaciones inversas propuestas por los futuros profesores en términos del enunciado propuesto y el análisis de los significados correspondiente. A medida que la investigación fue avanzando el instrumento se fue perfeccionando, llegando a tener en su versión final un total de siete columnas que se describen a continuación.

En las primeras columnas del instrumento se proporciona información sobre la respuesta analizada y el alumno que la propuso (columna 1) y sobre el enunciado del problema, en el que se consideró tipo de enunciado (columna 2) y cambio propuesto con respecto al problema original, formulado de manera directa (columna 3).

Las variables 4, 5, 6 y 7 – todas bajo el título común "análisis de los significados" – corresponden a los aspectos de significado: contenido matemático (columna 4), sistemas de representación (columna 5), significados y modos de uso (columna 6) y situación (columna 7).

En la Figura 5 se pueden observar algunos ejemplos de cómo se utilizó el instrumento de análisis para la organización de la información recogida. Consideramos en la figura exclusivamente las variables que son analizadas en este estudio.

	Enunciado		Análisis de los Significados			
	Tipo	Cambio	Contenido Matemático	Sistema de Representación	Sentidos y Modos de Uso	Situación
R1 (A14 a)	Función Inversa	Geometría trapezoidal	Similar,área y región	N/M	Espacio y forma	Educativa o laboral
R2 (A15 a)	Secuencial	Longitud de cuerda	Equivalencia de áreas	N/M	Espacio y forma, Incertidumbre	N/M
R3 (A15 b)	Iso-superficial	Ubicación de estaca	Equivalencia de áreas	N/M	Espacio y forma, Incertidumbre	N/M
R4 (A15 c)	Dinámico	Tiempo, velocidad	Longitud de arco y área bajo una curva	N/M	Espacio y forma, Incertidumbre	N/M

Figura 7. Parte del instrumento utilizado

RESULTADOS

Las reformulaciones del problema de la oveja, propuestas por los futuros profesores dieron lugar a nueve grupos, en algunos casos divididos en varios subgrupos.

De las producciones obtenidas, la mayoría se basaba en una inversión de la función o en la trivialización el problema. Como ejemplo del primer caso (inversión de la función original), se puede citar la respuesta codificada como (R8), en la que se pide “hallar $r = \frac{R}{L}$ (relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del terreno) tal que $f = \frac{3}{4}$ (es decir que la oveja pueda acceder a un área que sea $f = \frac{3}{4}$ del área total)”.

Un ejemplo de trivialización del problema se observa en (R6) donde se pregunta: “¿qué longitud mínima ha de tener la cuerda para que la bestia se lo coma todo? razónalo.” Obviamente este problema se reduce a hallar la distancia entre el punto $(L/2\,,0)$, que es donde está atada la oveja, y el punto $(L\,,L)$, que es el punto más alejado del terreno. Esto hace que el problema original – que requería considerar diversas funciones y calcular integrales definidas – ahora se reduce a aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, o eventualmente, utilizar el teorema de Pitágoras. En cualquier caso, la resolución es inmediata.

En términos de creatividad, un ejemplo interesante se observa en la (R2) en el cual se mantiene la geometría del terreno y la posición de la estaca, como se puede ver en la Figura 6.

En esta reformulación se proporciona el dato correspondiente a la longitud de la cuerda $R = \frac{L}{3}$ y se asume que "a lo largo de un día, la oveja come toda la hierba en el área accesible" y la primera pregunta es sobre la longitud R' , que deberá tener la cuerda "el día siguiente para que la oveja pueda pastar la misma cantidad de hierba". Luego se repite la pregunta para el tercer día y para el cuarto día, para finalmente preguntar "¿después de cuántos días la oveja no encontrará más la misma cantidad de hierba para pastar?"

Como se puede ver, se invierte el orden de las variables involucradas, se mantienen la geometría y la posición de la estaca, pero ahora el problema es de tipo secuencial.

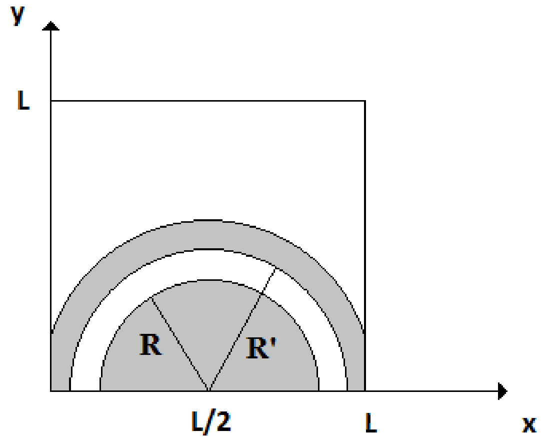


Figura 8. Propuesta de problema inverso secuencial

Los distintos grupos de reformulaciones no serán estudiados en este trabajo por razones de extensión del artículo, en su lugar se exponen algunas reformulaciones especialmente creativas propuestas por los futuros profesores, como las que se muestran en las Figuras 7, 8 y 9. En el primero, el futuro docente propone atar dos cabras montesas en esquinas opuestas de un terreno cuadrado de lado L, como en la Figura 7. Se pide "que ocupen la máxima área posible cada una, pero sin coincidir en ningún punto" y se sabe que "una de las áreas tiene que ser mayor que la otra". Se pregunta por el tamaño de cada cuerda y cuánta área tendrá disponible cada cabra.

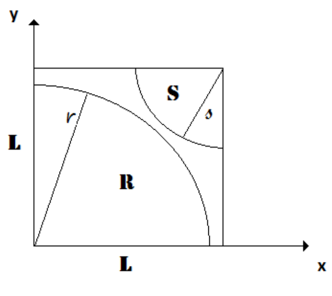


Figura 9. Problema de las dos cabras montesas

Es obviamente un problema de optimización, que depende de dos variables y que no va a tener un máximo sino un supremo que no será alcanzable para ningún par de valores de longitud de cuerda.

El segundo ejemplo propone un terreno rectangular, de base L y altura $2L$, con un cambio en la posición de la estaca, ubicada ahora en el punto $(L/3\ ,\ 0)$, como se puede ver en la Figura 8.

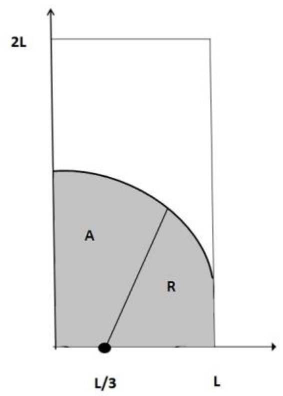


Figura 10. Problema de longitud de terreno, con cambio de geometría y de posición de estaca

El futuro profesor dice que "la longitud de la cuerda es tres quintas partes del lado del terreno" y además el "área total accesible a la oveja es $400 \ m^2$" y la pregunta es "¿cuál es el área del terreno que no resulta accesible a la oveja?". Se trata de un problema distinto para el que resulta fundamental calcular la longitud de terreno.

En el último ejemplo hay dos ovejas atadas al mismo punto con cuerdas de longitud $R = 3/4\,L$ y las dos se encuentran en el punto P, como se observa en la Figura 9. La oveja α corre a lo largo del segmento PQ con una cierta velocidad que se proporciona en función de L y la oveja β corre a lo largo del arco PSQ. Se plantean varias preguntas, siendo particularmente interesante la última – ya que se invierte la función – en la que se pide la velocidad que debe tener la oveja β para llegar al punto Q al mismo tiempo que la oveja α.

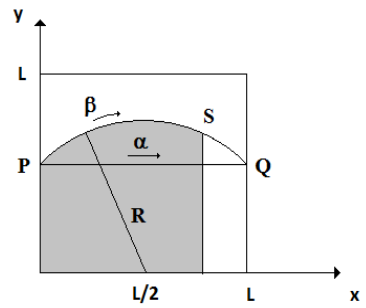


Figura 11. Problema dinámico con dos ovejas

Los resultados que aquí se presentan y analizan se refieren a resultados del análisis de los significados de los enunciados propuestos, obtenidos a partir de las producciones y los comentarios que los participantes en el estudio incluyeron en el formulario que se les suministró con el problema.

Análisis de significados

En esta sección se muestran los resultados observados en algunas categorías utilizadas para analizar las producciones de futuros docentes, correspondientes a las columnas del instrumento, relacionadas con el análisis de significados.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En lo que refiere al contenido matemático, más de la mitad de las respuestas (20 de las 34, ya que en 6 casos no hacen mención sobre el contenido) responden que se trata de un problema de áreas. Otras respuestas frecuentes fueron "longitud de arco" (7 de 34), "ecuaciones" y "funciones" (cada una con 5 de las 34 respuestas). Sorprendentemente, solamente 3 respuestas mencionan la palabra "integrales" y sólo 2 plantean que "trigonometría" es parte del contenido matemático utilizado. Además de lo anterior, hay opciones minoritarias que mencionan el Teorema de Pitágoras, "perímetros", "medida", entre otras.

- Con respecto a los sistemas de representación, cabe destacar que solamente 12 de las 40 respuestas obtenidas lo mencionan explícitamente. De las 12 respuestas antes citadas, 7 observan que se trata de datos presentados en forma simbólica y acompañados de un diagrama pictórico, 4 sólo hacen mención a la representación pictórica y 1 hace lo mismo con la representación simbólica.
- En cuanto a "sentidos y modos de uso", los estudiantes que responden la pregunta (37 de las 40 respuestas) afirman que la tarea es sobre "espacio y forma"; más precisamente, 17 de esas 37 respuestas (casi un 50%) optan por esta interpretación. Las otras respuestas se distribuyen de la siguiente manera: aproximadamente el 25% (9 de 37) dicen que la tarea es sobre "cambio y relaciones", algo menos del 25% (7 de 37) responden que es una tarea de "cantidad" y los cuatro restantes, más del 10%, lo clasifican como "incertidumbre y datos".
- En cuanto a la situación o contexto, una gran mayoría expresa su opinión a favor del campo "educativo o laboral". Cuatro de los futuros profesores colocan la tarea en el entorno "público" y solo uno la califica como "personal". Además de esto, otros mencionan el término comparativo "similar", sin más aclaraciones.

CONCLUSIONES

En la reformulación de problemas directos para transformarlos en inversos, varios futuros profesores han sido especialmente creativos tanto en la reformulación como en el enriquecimiento de tareas. Sin embargo, la gran mayoría opta por un enfoque estándar y, en algunos casos, por una trivialización del problema.

En el trabajo con los futuros docentes, se identifican nueve grupos diferentes de problemas inversos, algunos de los cuales incluían hasta cuatro variantes, y en casi todos los casos los participantes agregan a su propuesta de reformulación, el análisis de la tarea correspondiente.

A los participantes en este estudio no se les pide que resuelvan los problemas propuestos por ellos, por lo que este es un aspecto a indagar en futuras investigaciones.

A partir de este estudio descriptivo, se identifican y caracterizan una serie de estrategias para plantear problemas inversos.

Los futuros profesores consideran a sus propias reformulaciones mayoritariamente como un problema de áreas y en menor proporción, como problema de longitudes, funciones y planteo y resolución de ecuaciones. Muy pocos mencionan las integrales o la trigonometría como contenido matemático utilizado en la tarea propuesta.

Pocos participantes prestan atención a los sistemas de representación y de los que lo hacen en su mayoría mencionan una doble representación pictórica y simbólica.

Casi la mitad de los futuros docentes entiende que se trata de una tarea de "espacio y forma" y una gran mayoría de los mismos sitúa la tarea en el ámbito "educativo y laboral". En ambos casos aparecen también otras opciones minoritarias.

El Análisis didáctico ha sido una herramienta útil para estudiar y caracterizar las producciones de los participantes, no solo en lo que se refiere al problema reformulado en sí, sino también en el análisis de las tareas propuestas, relacionadas con el problema inverso correspondiente.

En lo que refiere al instrumento utilizado, se elabora una plantilla, que fue evolucionando con el agregado de columnas, el desglose o la eliminación de las mismas, según las respuestas obtenidas. Este proceso dinámico no puede considerarse terminado, por lo que se espera que el instrumento evolucione y sea susceptible de nuevas modificaciones en futuros trabajos.

Las posibles continuaciones de la investigación podrían incluir la ampliación de la muestra y la comparación con resultados en otras universidades y en otros países.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de los profesores Antonio Moreno Verdejo y Luis Rico Romero, del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria de la Universidad de Granada.

La investigación se ha realizado con apoyo del proyecto de investigación «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I, y del Grupo de Investigación FQM-193: Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational studies in mathematics*, *51*(1), 149-171.

Groetsch, C. W. (2001). Teaching Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematicae*, *24* (1), 89-94.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Martinez-Luaces, V. (2013). Inverse modelling problems in linear algebra undergraduate courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(7), 1056-1064.

Martinez-Luaces, V. (2016). Inverse Modeling Problems and their Potential in Mathematics Education. En M. Vargas (Ed.), *Teaching and Learning: Principles, Approaches and Impact Assessment*, pp. 151-185. New York: Nova Publishers.

Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M, Palarea (Eds.), *Actas del XV Simposio de la SEIEM*, pp. 513-521. Ciudad Real: SEIEM.

Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2012). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. PNA, Vol 6 (3), pp. 105-114.

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Ed. Pirámide.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE INTERVALOS ALEATORIOS

Development of the reasoning of high school students on random intervals

Martínez-Pérez, S.[a] y Sánchez, E.[a]

[a]Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

Resumen

Se presenta una actividad de aprendizaje que requiere que los estudiantes, con apoyo de software, construyan intervalos aleatorios y determinen si un valor dado se encuentra en ellos; consideramos que esto puede ser usados para introducir el estudio de los intervalos de confianza ya que se ha documentado que en el tratamiento de los intervalos de confianza existen una serie de falsas concepciones (Castro-Sotos, Vanhoof, Noortgate y Onghena, 2007). En los resultados se muestran los razonamientos de los estudiantes después de haber trabajado en la actividad.

Palabras clave: *intervalos aleatorios, nivel de confianza, variable aleatoria, probabilidad, frecuencia relativa.*

Abstract

A learning activity is presented that requires students, with software support, to construct random intervals and determine if a given value is in them; we consider that this can be used to introduce the study of confidence intervals since it has been documented that in the treatment of confidence intervals there are a series of false conceptions (Castro-Sotos, Vanhoof, Noortgate and Onghena, 2007). The results show the students' reasoning after having worked with the activity.

Keywords: *random intervals, confidence level, random variable, probability, relative frequency.*

PROBLEMÁTICA

La importancia de la inferencia estadística radica en el hecho de que es la herramienta principal de la estadística, la cual se refiere, de acuerdo con Pratt, Johnson-Wilder, Ainley y Manson (2008, p. 2) a la "identificación de patrones en forma de tendencias o parámetros estadísticos en la población" utiliza las herramientas proporcionadas por la matemática, para hacer afirmaciones sobre poblaciones a partir del análisis de una muestra, con el fin de elaborar predicciones y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, muchas veces presente en la vida cotidiana; la estimación de parámetros y el contraste de hipótesis son dos temas importantes en la inferencia estadística (Ben-Zvi, 2006).

Respecto al contraste de hipótesis y la estimación de parámetros, Cumming (2012) realizó una comparación entre los resultados que arrojan los dos procedimientos a un problema dado, llegó a la conclusión de que el contraste de hipótesis suele ser limitado mientras que los IC proporcionan un panorama amplio ya que dan un rango de posibles resultados.

Entender un intervalo de confianza requiere la coordinación de conceptos como población, muestra, distribución, variación, representatividad, probabilidad, azar, muestreo, conceptos que presentan de manera individual dificultades de comprensión. Esto genera falsas concepciones que han sido documentadas en algunos trabajos (Fidler, 2006; Fidler et al., 2004; Castro-Sotos et al., 2007 y Kalinovski, 2010), entre las más frecuentes Garfield, delMas, y Chance (2004) señalan: hay un 95% de probabilidad de que el intervalo de confianza incluya la media muestral, hay un 95% de probabilidad de que la media poblacional este entre los dos valores (límite superior y límite

Martínez-Pérez, S. y Sánchez, E. (2018). Desarrollo del razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre intervalos aleatorios. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 330-337). Gijón: SEIEM.

inferior), 95% de todos los datos están incluidos en el intervalo, un intervalo ancho significa menos confianza, un intervalo de confianza más angosto es siempre mejor (a pesar del nivel de confianza).

En Hogg y Craig (1978) se presentan a los intervalos aleatorios IA, como una forma de introducir a los IC. Los IA se construyen considerando una variable aleatoria y una distribución de probabilidad. Aunque el texto está dirigido a estudiantes de nivel superior, en el presente trabajo se considera que, con ayuda de la tecnología, en este caso el software Fathom, se puede elaborar una actividad de aprendizaje, que introduzca una red de nociones de los IA's en estudiantes de bachillerato.

ANTECEDENTES

Aunque los intervalos de confianza se han enseñado durante años en cursos introductorios de estadística, muy poca investigación ha sido realizada sobre la comprensión de ellos de los estudiantes (Belia et al., 2005; Castro-Sotos et al., 2007). Algunas de ellas se desarrollan con estudiantes de nivel universitario, por ejemplo: Olivo (2008) a través de un test busca conocer si los estudiantes construyen e interpretan de manera correcta a los IC.

En niveles menores se encuentran las investigaciones de Pfannkuch, Wild y Parsonage (2012) quienes realizaron un trabajo con estudiantes de 14 años utilizando el método Bootstrap para generar actividades que permitieran tener un acercamiento a los intervalos de confianza a través visualizaciones dinámicas desarrolladas con el software VIT, de tal forma que los estudiantes generaran una noción intuitiva sobre lo que es un intervalo de confianza y que además hicieran inferencias. Propusieron un marco teórico para el desarrollo de ideas sobre intervalo de confianza.

Por otro lado, Prodromu (2013) realizó un trabajo de investigación con estudiantes de secundaria a quienes aplicó una actividad en la cual debían calcular una proporción a través de la toma repetida de muestras de diferentes tamaños, con ayuda de un software. Para cada muestra debían estimar la proporción requerida y luego establecer un intervalo alrededor de dicha proporción. En sus conclusiones, la autora menciona que se debe tocar el tema del nivel de confianza ya que es importante.

En el presente trabajo se retoma el hecho de que se debe abordar el nivel de confianza ya que es el que influye en las predicciones o inferencias que se elaboran sobre el intervalo de confianza.

METODOLOGÍA

Experimentos de diseño

Para realizar el presente trabajo se utilizaron los experimentos de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) que se desarrolla en tres fases las cuales se describen a continuación.

En la primera se desarrolló la actividad, nosotros usamos los principios de diseño para apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de estudiantes propuestos por Cobb y McClain (2004) para elaborarla. Dichos principios deben considerar cinco aspectos: 1) El enfoque de las ideas estadísticas centrales, en este trabajo serán población, muestra, intervalos aleatorios, frecuencia relativa, probabilidad; 2) la actividad de instrucción; 3) estructura de la actividad de clase, se debe comenzar señalando aspectos importantes, variables a considerar y la manera en que se mediaran, el tema que se va tratar, desarrollo de las actividades y por último discusión hecha de los estudiantes acerca de los resultados que obtuvieron; 4) herramientas informáticas utilizadas por los estudiantes, se elabora una simulación en el software Fathom; 5) discurso en el aula, se refiere a el lenguaje que se debe utilizar, el cual deberá contemplar las posibles sentencias que se espera que el estudiante haga sobre las ideas centrales, por ejemplo: la muestra representa a la población, la frecuencia relativa tiende a la probabilidad.

En la segunda fase se llevó a cabo la experimentación, la toma de datos fue a través de hojas de trabajo donde los estudiantes escribieron sus respuestas, para el análisis de ellas buscamos palabras o ideas que fueran comunes y las colocamos en códigos, este proceso de agrupación de respuestas se plantea en la Teoría Fundamentada propuesta por Glaser y Strauss (1967).

En la tercera fase se hizo un análisis retrospectivo, mismo que se llevó a cabo al final de cada aplicación para rediseñar la actividad y volver a aplicar.

Actividad

Se planteó la siguiente situación a los estudiantes:

De una urna con 10 bolas numeradas del 0 al 9 se sacan dos bolas, considera el ***intervalo*** *formado por los valores enteros que se encuentran entre el mínimo de los valores sacados y el máximo de ellos (considerando los extremos), ¿cuál es la probabilidad de que dicho intervalo contenga al número ocho?*

*Contener al ocho significa que el ocho se encuentra entre los valores mínimo y máximo o que es uno de ellos.

Se elaboraron preguntas orientadas a observar tres aspectos: las nociones sobre frecuencia relativa, probabilidad y ley de los grandes números; la variabilidad y la generalización.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se describen el desarrollo y los resultados de cada aplicación

Primera versión, primera aplicación (33 estudiantes de 17-18 años, cursaban Estadística y Probabilidad I)

Se presentó la situación a los estudiantes, se discutió sobre la forma en que se resolvería, se mencionó que se podría hacer una simulación física, se les pidió que escribieran los pasos en una tabla de dos columnas (plan de simulación); en la primera columna tenían que escribir los pasos de una simulación física y en la otra columna los pasos para hacer la simulación en Fathom, finalmente tenían que responder las preguntas basándose en los resultados observados en la simulación.

La actividad incluye 8 incisos divididos en dos partes, la primera parte tiene la intención de conocer si los estudiantes observan la variabilidad y la ley de los grandes números, incisos 1 al 5; en los incisos 1 y 3 se les solicita a los estudiantes que con ayuda de la simulación obtuvieran 10 y 100 intervalos cinco veces, respectivamente y que escribieran sus frecuencias relativas, en los incisos 2 y 4 se les pidió que con base en las frecuencias relativas obtenidas estimaran la probabilidad de que el intervalo contenga al número 2. La intención de aumentar el número de intervalos era que observaran que entre más intervalos la frecuencia relativa presentaba menos variación, mismo que se les cuestionó en el inciso 5.

Después de revisar las respuestas del inciso 4 se encontraron tres códigos: moda, media y máximo/mínimo. En el primero se colocaron todas las respuestas que mencionan que la probabilidad de que un intervalo contuviera al dos era el valor que más se repite; en el segundo, las respuestas de los alumnos que calcularon la media y en el último, las respuestas donde los estudiantes indicaron que la probabilidad es el valor máximo o mínimo de todos los que obtuvieron. Los ejemplos de las respuestas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Ejemplos de respuestas del inciso 4

Código	Respuesta
Moda	0.6 porque es el que se repite
Media	5 porque es el promedio
Máximo/mínimo	0.3 porque es el más chico

Para el inciso 5 se determinaron tres códigos: obviedad, desapercibido y pelotas; en el primero se colocaron las respuestas en las que se manifestaba que la diferencia consistía en la cantidad de intervalos, en el segundo código se colocaron las respuestas en las que se escribió que no había diferencia y en el tres las respuestas en las que se escribió que si hay cambio pero que se debe a que el número de bolas en la urna es la que aumenta. Los ejemplos de las respuestas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Ejemplos de respuestas del inciso 5

Código	Respuesta
Obviedad	Si, la causa es el aumento de intervalos
Desapercibido	No, no hay mucha diferencia, de hecho, son muy similares, si acaso varían por los decimales.
Pelotas	Si, porque tiene más pelotas

Los incisos 6, 7 y 8 tienen como objetivo observar si los estudiantes utilizan los resultados anteriores para generalizar; en el inciso 6 se le cuestiona al estudiante que si tuviera 1000 intervalos ¿cuántos contendrían al dos? En el inciso 7 se plantea que la probabilidad de que un intervalo contenga al 3 es del 43% y se le cuestiona al estudiante sobre el significado de esta aseveración. Finalmente, en el inciso 8 se pregunta que si de 100 intervalos 23 contienen al siete ¿qué significa?

Para el inciso 6 se determinaron 3 códigos: similitud, mitad y software. En similitud se colocaron las respuestas en las que el estudiante considera que los resultados serían similares a los incisos 2 y 4; en mitad los estudiantes respondieron que sería la mitad o 500 y en el código software los estudiantes escribieron el valor que la simulación les mostró.

En el inciso 7 se encontraron cuatro códigos: baja, repetición, valor y preciso. En el código baja se colocaron las respuestas que mencionan que la probabilidad es poca o baja; en el código repetición los estudiantes respondieron usando el mismo enunciado del inciso; en el código valor están las respuestas de los estudiantes que consideran que el 43% corresponde a la probabilidad de obtener un tres; en el código preciso se pusieron las respuestas que indican que de 100 intervalos 43 (430 de 1000) contendrían al tres.

Finalmente, para el inciso 8 se encontraron cuatro códigos: baja, repetición, valor y preciso. En el código baja se colocaron las respuestas que mencionan que la probabilidad es poca o baja; en el código repetición los estudiantes respondieron usando el mismo enunciado del inciso; en el código valor están las respuestas de los estudiantes que consideran que la probabilidad de obtener un siete en 23%; en el código preciso se pusieron las respuestas que indican que hay una probabilidad del 23% de que un intervalo contenga al siete.

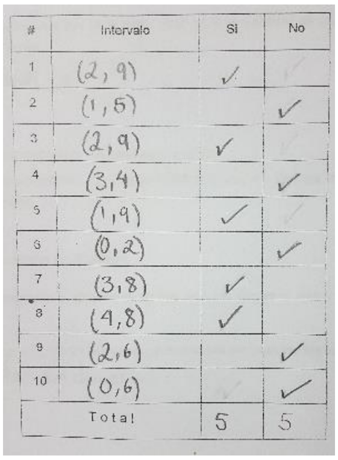
De esta aplicación concluimos que los estudiantes para entender mejor la situación debían hacer una simulación física ya que perdieron de vista que la cantidad de bolas numeradas era la misma y lo que iba aumentando era el número de intervalos obtenidos, para ellos el aumento consistía en meter más bolas a la urna; también se consideró que un polígono de frecuencias podría mostrar al estudiante la diferencia entre pocos y muchos intervalos además de que los estudiantes podrían determinar hacia que valor tienden las frecuencias relativas. También se decidió cambiar el dos por el ocho porque en algunas respuestas se observó que los estudiantes escribieron que la probabilidad de que un intervalo contenga al dos (esta probabilidad es 0.511…) es la mitad y cuando obtenían resultados se podría pensar que llevar a cabo la toda la actividad no tenía sentido porque al final confirmaban que estaban en lo correcto.

Por último, los estudiantes no estaban familiarizados con el software Fathom, lo que implicó que para la elaboración de la simulación tuvimos que hacer un paréntesis para explicar las herramientas y las funciones, cuando estuvieron haciendo la simulación la mayoría de los estudiantes presentaron dificultades tanto para el llenado del plan de simulación como para el uso de las herramientas, lo que provocó que fueran perdiendo interés y como consecuencia no pusieran atención en el desarrollo de la actividad; por lo anterior se determinó que para la siguiente versión ya no se pediría el llenado del plan de simulación.

Segunda versión, segunda aplicación (20 estudiantes de 17-18 años, cursaban Estadística y Probabilidad II)

Se plantea la misma situación al estudiante, solo que ahora se trabajará con el número ocho, la actividad se dividió en dos partes, en la primera se hace una simulación física y en la segunda se debe hacer la simulación en Fathom, en ambas se deben contestar preguntas.

Para la simulación física (incisos 1 al 5), se proporcionó a cada estudiante una bolsa que contenía las 10 bolas numeradas del 0 al 9, extrajeron 2 bolas sin reemplazo, esto último fue cuestionado, la mayoría de los estudiantes argumentó, que si se hacía el reemplazo podría salir la primera bola en la segunda extracción y entonces ya no se formaría un intervalo. La pareja de números extraída la anotaban en una tabla (Figura 1), tachaban en la casilla de SI, si el ocho estaba contenido en el intervalo o tachaban en la casilla NO en caso contrario.



#	Intervalo	Si	No
1	(2, 9)	✓	
2	(1, 5)		✓
3	(2, 9)	✓	
4	(3, 4)		✓
5	(1, 9)	✓	
6	(0, 2)		✓
7	(3, 8)	✓	
8	(4, 8)	✓	
9	(2, 6)		✓
10	(0, 6)		✓
	Total	5	5

Figura 1. Ejemplo de la tabla llenada por los estudiantes

Se solicitó a cada estudiante obtener 10 intervalos (inciso 1), después en un pizarrón se anotaron todos los resultados y se construyó una tabla de frecuencias (incisos 2 y 3), se generó la discusión, los alumnos observaron y determinaron que la probabilidad era 3 o 4 (inciso 4).

Elaboraron la simulación, pero de acuerdo con la experiencia anterior sólo hicieron una parte, la que consistía en insertar las bolas, tomar dos y determinar si se captura o no al ocho, la otra parte que era la de elaborar el polígono de frecuencias ya se entregó hecha.

Se pidió en la hoja de trabajo que obtuvieran 10 intervalos, luego 100 y luego 1000 (inciso 6), se les pidió que describieran lo que sucedía en la gráfica (inciso 8), con las respuestas de este inciso el código generado fue *gráfica* ya que se pudo respondieron que con pocos intervalos los puntos en la gráfica están muy dispersos y conforme va aumentando el número de intervalos los puntos de la gráfica (Figura 2) se "alinean" a una recta que tiene cierto valor (entre 0.3 y 0.4) y al mismo tiempo contestan que la probabilidad está entre 0.3 y 0.4.

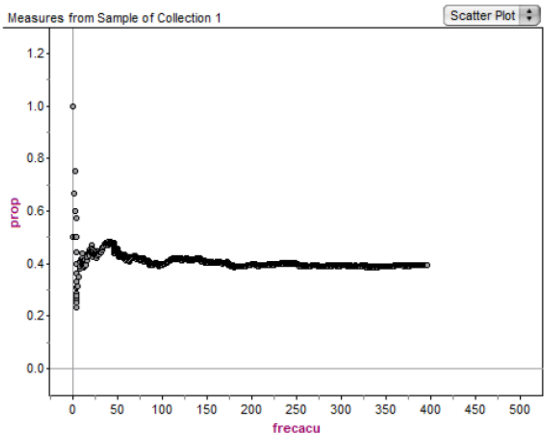


Figura 2. Gráfica elaborada en la simulación

En el inciso 9 (inciso seis de la primera versión), se pregunta que si tuvieran 1000 intervalos ¿cuántos contendrían al ocho?, se les hizo la aclaración que no usaran software; los códigos resultantes son *valor* y *aproximación*, en el primero en los estudiantes responden con el valor que observan en la gráfica (0.3 o 0.4) 300 o 400; en el código *aproximación* las respuestas contienen afirmaciones como: aproximadamente 300 o 400 o daban un rango de valores.

Los incisos 10 y 11, incisos 7 y 8 de la primera versión, los códigos generados son los mismos que en la primera versión.

De esta aplicación se concluye que la simulación física ayuda a entender mejor la situación, sin embargo, siguen las dificultades para elaborar la simulación en Fathom, aun cuando los pasos son casi similares que en la simulación física. Siguen presentando pocas nociones de probabilidad, frecuencia relativa y ley de los grandes números. La gráfica fue muy útil para que los estudiantes observaran que para pocos intervalos no se puede dar una estimación precisa ya que las frecuencias están muy dispersas y que para un número de intervalos grande las frecuencias se estabilizan alrededor de un valor además que ayudó al estudiante a hacer una aproximación sobre cuántos intervalos contendrían al ocho.

Tercera versión, tercera aplicación (16 estudiantes entre 16-17 años, no han cursado Estadística y Probabilidad)

La situación es la misma que en la segunda aplicación, se realiza la simulación física, la modificación fue que ahora los datos que se anotan en el pizarrón son frecuencias relativas, una vez que están todas, se pregunta por la probabilidad y mencionan que es el valor que más se repite.

Ahora se les propone que se considere que fueron 160 intervalos los que se obtuvieron y que de esos 49 contienen al 8 y se comparó con el valor que más se repite (son similares).

La simulación ya se les dio hecha pues siguen presentando problemas en el momento de elaborarla, se les explicó en qué consistía haciendo la comparación con la simulación física. Las preguntas son las mismas que en la versión anterior excepto que no deben hacer una tabla de frecuencias.

La intención en esta aplicación era observar que tanto influía en los estudiantes el hecho de que no hicieran la simulación pues en las aplicaciones anteriores se confundían y distraían mucho. El hecho de que la simulación se les proporcionara ya terminada evitó que se dispersaran cuando tratan de hacerla ya que las dificultades que se les van presentando genera que pierdan concentración.

Los códigos resultantes en esta aplicación fueron iguales a los de la aplicación anterior, lo que nos lleva a concluir que los razonamientos son similares aún cuando los estudiantes de las primeras dos aplicaciones se encontraban cursando la materia de Estadística y Probabilidad.

Conclusiones generales

De las dos últimas aplicaciones concluimos que los estudiantes logran entender que dadas muchas repeticiones habrá poca variabilidad, mismo que fue documentado por Inzunza (2017), quien en sus resultados encuentra que es posible que estudiantes con pocos antecedentes matemáticos y de probabilidad pueden realizar conexiones correctas entre el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad a partir de la visualización del comportamiento de los datos esto fue posible con el polígono de frecuencias generado por la simulación esto se pudo constatar con las aproximaciones que dieron en sus respuestas.

Otra dificultad observada es que los estudiantes tienen dificultades para expresar lo que observan ya que de acuerdo con Sánchez y Valdez (2017) no cuentan con lenguaje probabilista el cual es fundamental que el alumno lo adquiera.

Finalmente hemos determinado que con la actividad se ha trabajado la parte probabilística sin embargo falta considerar que tanto usa el estudiante los resultados en la siguiente situación: si se metieran en una urna todos los posibles intervalos que se pueden formar con los números del 0 al 9, ¿qué tan confiando estarías de obtener uno que contenga al ocho?

Referencias

Belia, S., Fidler, F., Williams, J. y Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standard error bars. *Psychological Methods*, *10*(4), 389-96.

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students informal inference and argumentation. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. Recuperado de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2D1_BENZ.pdf

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, *2*, 98-113.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y McClain, K. (2004). Principles of Instructional Design for Supporting the Development of Students Statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp. 375-396). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cumming, G. (2012). Inference by eye: Pictures of confidence intervals and thinking about levels of confidence. *Teaching Statistics*, *29*(3), 89-93.

Fidler, F., Thomason, N., Cumming, G., Finch, S. y Leeman, J. (2004). Editors can lead researchers to confidence intervals, but can't make them think: Statistical reform lessons from medicine. *Psychological Science*, *15*, 119-126.

Fidler, F. (2006). Should Psychology abandon p values and teach CIs instead? Evidence based reforms in statistic education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Institute. Recuperado de http://www.stat.auckland.ac.nz/*iase/publications.php (online).

Garfield, J. B., del Mas, R. C. y Chance, B. L. (2004). Tools for teaching and assessing statistical inference. Recuperado de http://www.gen.umn.edu/research/stat_tools.

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine Publishing Company.

Hogg, R. y Craig, A. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics* (pp. 200-234). New York, USA: Macmillan Publishing Co., Inc.

Huck, S. W. (2009). *Statistical Misconceptions*. New York: Taylor and Francis Group.

Inzunza Casares, S. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 69-86.

Kalinowski, P. (2010). Identifying misconceptions about confidence intervals. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Olivo, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Pfannkuch, M., Wild, C. y Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM Mathematics Education,* 44, 899-911.

Pfannkuch, M., Forbes, S., Harrawary, J., Budgett, S. y Wild, C. (2013). "Bootstrapping" students' understanding of statical inference. *Teaching y Learning, Research Iniciative*, 1-18.

Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 107-129.

Prodromu, T. (2013). Informal Inferential Reasoning: Interval Estimates of Parameters. *International Journal of Statistics and Probability, 2*(2).

Sánchez, E. y Valdez, J. C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11*, 127-143.

DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

High school students' definitions and examples of independence and dependence on events

Megías, A. I.[a], Gea, M. M.[b] y Batanero, C.[b]

[a]IES Martín García Ramos, [b]Universidad de Granada

Resumen

El concepto de independencia estadística es fundamental para comprender el experimento compuesto y el muestreo; no obstante, la investigación realizada es muy escasa. Para complementarla, el objetivo de este estudio fue analizar las definiciones que proporcionan una muestra de 52 estudiantes de primer y segundo curso de Bachillerato de la dependencia e independencia de sucesos y los ejemplos que proponen de sucesos dependientes e independientes. Aunque la mayoría proporciona definiciones correctas, pocos son capaces de proponer ejemplos adecuados y el contexto de estos ejemplos se reduce en gran medida a los juegos de azar. No obstante, se observa mejor desempeño en los estudiantes de segundo curso.

Palabras clave: *dependencia e independencia, definición, ejemplo, estudiantes de Bachillerato.*

Abstract

The concept of statistical independence is fundamental to understand compound experiments and sampling; nevertheless, the research carried out is very scarce. To complement this research, this study was aimed to analyse the definitions and examples of dependence and independence of events provided by a sample of 52 1st and 2nd year high school students. Although most of them provide correct definitions, few are able to propose suitable examples and the context of these examples is greatly reduced to games of chance. However, better performance is observed in the 2nd year students.

Keywords: *dependence and independence, definition, example, high school students.*

INTRODUCCIÓN

La probabilidad es, en la actualidad, un contenido importante en el currículo. La identificación, estimación y cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso se introduce en Educación Primaria (MECD, 2014), siendo en cuarto curso de Educación Secundaria cuando se introducen la independencia y dependencia de sucesos, que se tratan también de manera informal en cursos previos (Fernandes, Correia y Contreras, 2013), y cuya comprensión es necesaria en el estudio de la correlación y regresión que se realiza en el primer curso de Bachillerato, junto a los teoremas de la probabilidad total y de Bayes introducidos en el segundo curso de Bachillerato de ambas especialidades. También se requiere en el estudio de la inferencia estadística, introducida en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales en segundo curso de Bachillerato (MECD, 2015).

A pesar de la importancia del tema en la formación de nuestros estudiantes, no siempre se dedica el tiempo suficiente a su enseñanza y la escasa investigación previa indica que los estudiantes finalizan sus estudios con errores y sesgos de razonamiento (Borovcnik, 2012), entre los que destacamos la representatividad o la recencia positiva y negativa (Sánchez y Valdez, 2015). Dicha investigación está generalmente basada en la respuesta a preguntas de opción múltiple, donde los

Megías, A. I., Gea, M. M. y Batanero, C. (2018). Definición y ejemplos de dependencia e independencia de sucesos por estudiantes de bachillerato. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 338-347). Gijón: SEIEM.

estudiantes deciden si dos sucesos concretos son o no independientes, por lo que los resultados podrían variar al realizar un estudio con preguntas de respuesta abierta. Para aportar información sobre este tema, el objetivo de este trabajo es analizar las definiciones que los estudiantes de Bachillerato proporcionan y los ejemplos que proponen sobre la independencia y dependencia de sucesos. En lo que sigue se describen los fundamentos y métodos utilizados, se presentan y discuten los resultados y se finaliza con algunas conclusiones.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El interés de que un estudiante sea capaz de proporcionar una definición adecuada de los conceptos que estudia fue resaltado por Zazkis y Leikin (2008), pues una definición adecuada, incluso usando un vocabulario informal, muestra la comprensión de un concepto. Vinner (1991) indicó que las definiciones de los conceptos en el currículo y los libros de texto determinan el conjunto de propiedades que se incluirán en la enseñanza y modelan la imagen del concepto que crean los estudiantes. Para enunciar correctamente una definición, según Leikin y Winicki-Landman (2001), además de nombrar los conceptos implicados en la misma y que previamente se encuentran definidos, se deben establecer sus condiciones necesarias y suficientes. Desde el punto de vista matemático, definir supone dar un nombre a un objeto que previamente existía y estaba caracterizado por unas propiedades. Así, en la enseñanza, la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997).

Aunque definir un concepto pueda parecer una actividad sencilla, en una investigación previa, donde se pidió definir la probabilidad simple y condicional a una muestra de profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas, 2013), se observaron errores o imprecisiones en ambas definiciones en el 25% de la muestra, lo que nos ha llevado a realizar este trabajo, donde también se solicitan ejemplos, pues la comprensión de una definición se manifiesta implícitamente cuando esta se aplica.

Nos centramos en el concepto de independencia, que es aparentemente sencillo, pero, tanto en la historia de la probabilidad como en la resolución de problemas por parte de los estudiantes, se han descrito numerosas dificultades (Borovcnik, 2012; Huerta y Arnau, 2017). La independencia está ligada a la probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si y sólo si la probabilidad de uno de ellos no cambia si se condiciona por el otro; es decir, dos sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A|B)=P(A)$ o $P(B|A)=P(B)$; o lo que es lo mismo, $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Algunas investigaciones muestran errores en la aplicación de la dependencia e independencia de sucesos aleatorios como la investigación de Sánchez (1996) con 88 profesores de matemáticas en secundaria. Algunos de los participantes confundieron los sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes y otros participantes creían que para que dos sucesos sean independientes tienen que pertenecer a experimentos aleatorios diferentes, aunque esto no es necesario.

En un trabajo más reciente, D'Amelio (2004) propuso un problema sobre independencia a estudiantes universitarios en una carrera de humanidades, encontrando estudiantes que usaban la regla de adición de probabilidades, en lugar de utilizar la regla de la multiplicación, para probar la independencia de dos sucesos. Como en investigaciones previas, estos estudiantes confundían los sucesos mutuamente excluyentes e independientes. Resultados muy similares fueron obtenidos en las investigaciones de Cordani y Wechsler (2006).

Los anteriores estudios de evaluación se realizan utilizando preguntas de opción múltiple, donde las posibles respuestas del estudiante están fijadas de antemano. Un tipo de investigación que permite profundizar mejor en la comprensión de estos conceptos es realizado por Kataoka, Hernandez y Borim (2010), con 34 alumnos de máster, 22 de grado y 27 de secundaria, a los que piden explicar el significado de un suceso independiente. También dio a los estudiantes ejemplos de sucesos obtenidos en experimentos de lanzamientos de dados, en los que el estudiante tenía que decidir si eran o no independientes. Fue frecuente que los estudiantes asociaran la independencia al hecho de que los experimentos fuesen sucesivos (y no simultáneos); igualmente, muchos no diferenciaron entre independencia y sucesos mutualmente excluyentes.

Nuestro trabajo utiliza preguntas abiertas; en concreto, se pide definir la dependencia e independencia de sucesos y proporcionar ejemplos de los mismos. Con ello se completan las investigaciones anteriores y la desarrollada por Contreras et al. (2013) en una muestra de futuros profesores.

METODOLOGÍA

La muestra estuvo formada por 52 estudiantes, 21 de primer curso y 31 de segundo curso de Bachillerato, que realizaban sus estudios en tres centros distintos de la provincia de Málaga, uno privado y los otros dos públicos. El motivo de elegir estudiantes de Bachillerato fue tomar cursos en los que se había dado el tema de probabilidad en cursos previos, hecho que se validó con el profesor de cada centro, y además, que tuviesen la madurez suficiente para dar una definición sobre dependencia e independencia de sucesos aleatorios. Las edades de los estudiantes se encuentran entre los 16 y 19 años, la mayoría de 17 y 18. Aunque la muestra es intencional y reducida, porque los centros públicos se encuentran en un pueblo de la provincia con pocos estudiantes en Bachillerato, el escaso tamaño de muestra se compensa con el profundo análisis de las respuestas de los participantes.

La tarea propuesta a estos estudiantes se presenta en la Figura 1 y es similar a la utilizada por Contreras et al. (2013) aunque, en su caso, se pregunta por la probabilidad simple y condicional y no por la independencia o dependencia.

1. Explica con tus propias palabras la diferencia entre dos sucesos independientes y dos sucesos dependientes.
2. Pon un ejemplo de dos sucesos que sean independientes y otro ejemplo de dos sucesos que sean dependientes.

Figura 1. Tarea propuesta a los estudiantes

La tarea se realizó por escrito, de forma individual y habiendo estudiado el bloque de contenidos de estadística y probabilidad del curso 2016/17 en cada centro participante. Se trata de un estudio descriptivo, esencialmente exploratorio, y para clasificar las respuestas se utiliza el análisis de contenido, que es un estudio sistemático de documentos que permite identificar variables y categorías en los mismos para realizar inferencias (Sandín, 2003). En nuestro caso, las respuestas se clasifican en categorías, que parten de las determinadas en Contreras et al. (2013), y los códigos se asignan a las categorías mediante varias revisiones y comparaciones, siguiendo el proceso cíclico típico de la investigación cualitativa (Sandín, 2003). A continuación, se presentan y discuten los resultados.

TIPOS DE DEFINICIONES

En primer lugar, se clasificaron las definiciones aportadas por los estudiantes, diferenciando las respuestas dadas para sucesos dependientes e independientes. Para considerar la definición correcta, según Leikin y Winicki-Landman (2001), se comprobó que el estudiante incluyese las condiciones necesarias y suficientes para la dependencia o independencia, además de incluir otros conceptos previamente definidos. En el siguiente ejemplo, el estudiante define correctamente tanto la independencia como la dependencia entre sucesos, pues explica una condición necesaria y suficiente, que consiste en que, en el caso de dependencia de un suceso, su probabilidad incluye la de obtener el otro, que cambia como consecuencia de ello y en el caso de independencia, no existe esta influencia. Además, el estudiante incluye en la definición otros conceptos previos como suceso y probabilidad:

> Dos sucesos dependientes son aquellos donde la probabilidad de que uno suceda influye en la probabilidad de que el otro suceda; sin embargo, en dos sucesos independientes, uno no influye en el otro para nada (E1).

Hemos considerado que la definición aportada por el estudiante es imprecisa cuando cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001), al incluir condiciones necesarias o suficientes para definir la dependencia e independencia, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias. Un ejemplo se muestra a continuación, donde aparentemente el estudiante comprende el suceso e incluye una condición necesaria de la dependencia (la influencia del otro suceso), pero el vocabulario usado es muy pobre y no se llega a aludir a la probabilidad, que es lo que cambia en el caso de la definición de dependencia; en la definición de independencia no se indica que el cambio de la probabilidad condicionada se produce al incluir el suceso en la condición:

> Dos sucesos independientes son aquellos en los que en la probabilidad condicionada no cambian son iguales, da lo mismo. En cambio, dos sucesos dependientes dependen cada uno de ellos y si se hace algo cambia (E2).

Otro ejemplo de definición imprecisa de independencia es el que sigue. El estudiante indica que los sucesos no tienen relación (lo que es una condición suficiente), pero ha añadido una característica que no es cierta, puesto que la dependencia de dos sucesos, en general, no se deduce del enunciado de un problema; por otro lado, no se indica qué se entiende por relación entre los sucesos:

> Los dos sucesos independientes no tienen una real relación entre ambos y para comparar no se puede sacar únicamente por el enunciado (E3).

La definición sería incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes o se confunden conceptos implicados en las mismas. Un ejemplo de definición incorrecta de dependencia e independencia se reproduce a continuación, donde se comete un error al aplicar la fórmula del producto para dar la definición. El estudiante indica que, en el caso de sucesos independientes, la probabilidad de la unión es igual a la probabilidad del suceso; sin embargo, la condición que se cumpliría en este supuesto es que la probabilidad condicionada sería igual a la probabilidad simple o bien que la probabilidad de la intersección sería igual al producto de probabilidades. Esta confusión en el uso de la regla del producto y la regla de la suma al definir la independencia de sucesos fue también encontrada entre estudiantes universitarios en la investigación de D'Amelio (2004):

> Los sucesos son independientes cuando al realizar $P(A\cup B)$, el resultado es igual a $P(B)$. Por el contrario, dos sucesos son dependientes cuando $P(A\cup B)\neq P(B)$ (E4).

Los resultados obtenidos en la definición de la dependencia de sucesos se presentan en la Tabla 1, en la que se observa que la mayor proporción de estudiantes ofrecen definiciones correctas (38,5%), a lo que podemos añadir otro 17,3% que da una definición básicamente correcta, aunque imprecisa. Por otro lado, el 23,1% responden incorrectamente y el 21,1% no es capaz de proporcionar una definición, por lo cual, sumados estos dos porcentajes, los resultados son bastante peores que los reportados por Contreras et al. (2013) en la definición de probabilidad condicional; aunque ello es lógico, teniendo en cuenta que dicha muestra estuvo constituida por futuros profesores. Nuestros resultados indican la necesidad de reforzar el concepto, puesto que casi la mitad de los estudiantes de Bachillerato de la muestra no es capaz de definirlo, ni siquiera en forma imprecisa.

Tabla 1. Frecuencia de tipo de definición de suceso dependiente por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Correctas	4	16	20
Correcta pero imprecisa	4	5	9
Incorrecta	5	7	12
Blanco	8	3	11
Total	21	31	52

Completamos estos resultados con la Figura 2, que permite comparar más fácilmente los porcentajes obtenidos en los dos grupos de estudiantes y observar el mejor desempeño de los estudiantes de segundo curso, donde más de la mitad da una definición correcta que, sumadas a las que contienen una pequeña imprecisión, se acercan al 68%, muy cerca de los resultados de Contreras et al. (2013) con futuros profesores. Los estudiantes de primer curso destacan por la alta proporción de aquellos que no son capaces de dar una definición (38,1%), mostrando menor conocimiento del tema.

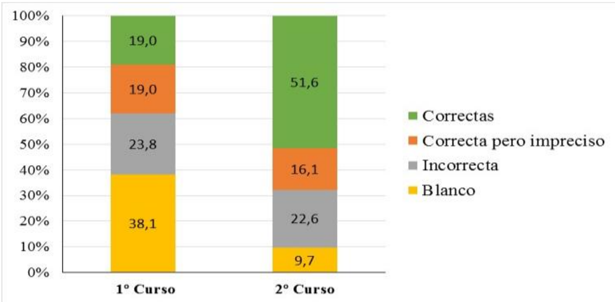


Figura 2. Porcentaje de tipo de definición de sucesos dependientes por curso

La Tabla 2 refleja los resultados obtenidos para las definiciones de sucesos independientes, que son en su mayoría correctas (55,8%). En cuanto a las respuestas correctas pero imprecisas, representan el 11,5% y las incorrectas el 13,5% siendo el porcentaje más bajo que en la definición de dependencia. Por último, han contestado en blanco un 19,2%; sin embargo, hacemos notar que no hemos encontrado en las definiciones la confusión entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes que Cordani y Wechsler (2006), D'Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) describen en sus investigaciones. Interpretamos este hecho porque nosotros hemos pedido al estudiante dar la definición, mientras que en dichas investigaciones se propusieron ejemplos de sucesos independientes y mutuamente excluyentes que los estudiantes no discriminaron. Por el contrario, sí se ha confirmado la confusión entre la necesidad de que se cumpla la regla del producto y la regla de la suma en la definición de la independencia descrita por D'Amelio (2004), aunque esto ocurre en casos muy aislados.

Tabla 2. Frecuencia de tipos de definición de suceso independiente por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Correctas	7	22	29
Correcta pero imprecisa	3	3	6
Incorrecta	3	4	7
Blanco	8	2	10
Total	21	31	52

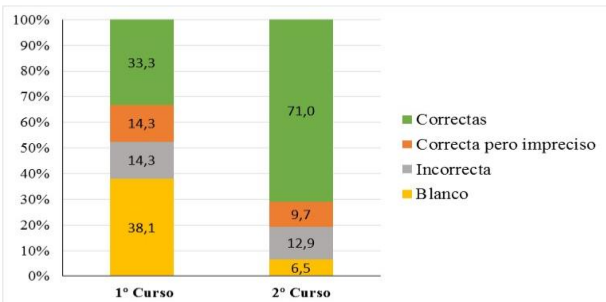


Figura 3. Porcentaje de tipos de definición de sucesos independientes por curso

Igual que en la definición de sucesos dependientes, los resultados son mucho mejores en el segundo curso (Figura 3), hasta el punto que el 71% de las definiciones dadas por estos alumnos son correctas frente a sólo el 33% en los estudiantes de primero, lo que confirma el mejor conocimiento, a la vez que madurez, de los segundos. Además, estos apenas dejan las definiciones en blanco, lo que contrasta con el alto porcentaje de sus compañeros de primero (38,1%) que no llegan a dar la definición.

EJEMPLOS PROPORCIONADOS POR LOS ESTUDIANTES

En la segunda tarea propuesta se pidió a los estudiantes proporcionar un ejemplo de sucesos dependientes e independientes, tanto para comprobar si realmente han comprendido el concepto o simplemente reproducen la definición y si analizan la fenomenología que les asocian. Aunque se pidió un ejemplo, algunos estudiantes dieron dos, que se han clasificado, dependiendo de si al ejemplo se aplica o no el concepto y cómo se aplica, en correctos, incorrectos (según sea uno o los dos ejemplos incorrectos) e imprecisos (correctos pero al menos uno de ellos es impreciso). Además, se ha hecho una clasificación paralela de los ejemplos para estudiar el contexto en que se proponen, que puede ser los juegos de azar o alguno de los contextos considerados en el informe PISA (ME, 2009).

Ejemplos de sucesos dependientes

El ejemplo proporcionado se considera correcto cuando se puede aplicar el concepto de dependencia en dicho ejemplo, de modo que la probabilidad de cada uno de los sucesos descritos depende del otro suceso. Así, en el siguiente ejemplo, el estudiante proporciona de manera correcta dos situaciones en que se produce la dependencia de sucesos, extraídos de su experiencia personal:

> Dependientes es, por ejemplo, si en la casa hay dos comidas y mi hermana elige una, yo me tengo que comer la otra, dependiendo de lo que ella elige.
>
> Si mi amigo va a una fiesta iré y si ella no va no iré; depende de lo que ella diga (E5).

En el siguiente ejemplo se muestra la respuesta de un estudiante que proporciona un ejemplo incorrecto de sucesos dependientes, pues los sucesos propuestos (ser rey y ser espadas) son independientes, ya que la probabilidad del suceso “rey de espadas” es igual a 1/40 que es el producto de la probabilidad “ser rey (1/4)” y “ser espada (1/10). Este ejemplo es precisamente el utilizado por Sánchez (1996) en su cuestionario en un ítem de respuesta cerrada y, la respuesta de este estudiante, que ha proporcionado espontáneamente este ejemplo, indica que confunde independencia y ser sucesos mutuamente excluyentes:

> Dependientes: Que salga el rey al coger una carta de la baraja y que sea de espadas (E6).

Otro estudiante ha respondido de forma incorrecta en el primero de los dos ejemplos dados sobre sucesos dependientes ya que, generalmente, aprobar un examen no depende de otro. El segundo ejemplo sería una respuesta correcta pero imprecisa, pues en caso de lluvia sería más probable resbalar o tener un accidente similar, aunque el estudiante no lo indica.

> Dependientes: Aprobar un examen habiendo aprobado otro anteriormente. Romperse una pierna según la probabilidad de que llueva (E7).

El siguiente ejemplo proporcionado por un estudiante es impreciso, pues no indica si el experimento se hace con o sin reemplazamiento; si hubiese sido con reemplazamiento sería independiente:

> Dependiente: Sabiendo que ha salido bola blanca, la probabilidad de que la segunda sea verde (E8).

El 26,9% de los estudiantes sugieren dos ejemplos correctos y sólo un estudiante da ejemplos correctos pero imprecisos (1,9%). El porcentaje de los que dan solo un ejemplo correcto es un 7,7% y aunque las repuestas incorrectas son sólo un 11,5%, podemos apreciar que hay mayoría de respuestas en blanco con un porcentaje del 51,9%, confirmando que es más difícil dar un ejemplo correcto que la definición del concepto. Al comparar los cursos, los de segundo curso, en mayor porcentaje, proporcionan dos respuestas correctas y hay un menor porcentaje de respuestas en blanco.

Tabla 3. Frecuencia de número y tipo de ejemplos de sucesos dependientes por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Dos ejemplos correctos	3	11	14
Correctos pero imprecisos	0	1	1
Un sólo ejemplo correcto	2	2	4
Dos ejemplos incorrectos	1	5	6
Blanco	15	12	27
Total	21	31	52

Ejemplos de sucesos independientes

Como en el caso de sucesos dependientes, se clasificaron los ejemplos según se aportasen dos ejemplos correctos, correctos pero alguno de ellos con alguna imprecisión, uno solo correcto o todos incorrectos o en blanco. A continuación, se muestran los ejemplos de dos estudiantes, ambos correctos, el primero de ellos proporcionado desde la experiencia personal:

> Independiente es, por ejemplo, que mi hermana vaya al cine y yo a la biblioteca (E5).
>
> Independiente: Sabiendo que a Juan le gusta el verde, la probabilidad que haga sol mañana (E8).

Tabla 4. Frecuencia de número y tipo de ejemplos de sucesos independientes por curso

	1º Curso	2º Curso	Total
Dos ejemplos correctos	4	12	16
Correctos pero imprecisos	0	2	2
Un sólo ejemplo correcto	1	1	2
Dos ejemplos incorrectos	4	3	7
Blanco	12	13	25
Total	21	31	52

Observando la Tabla 4 podemos afirmar que el porcentaje de ejemplos correctos es del 30,8%, de correctas pero imprecisas es un 3,8%, coincidiendo este porcentaje con el de respuestas en las que tan solo hay un ejemplo correcto. En cuanto a respuestas incorrectas, el porcentaje es de 13,5% y destacamos el elevado número de respuestas en blanco (48,1%). En la Figura 4 se resumen los datos obtenidos a partir de las Tablas 3 y 4, confirmando la elevada ausencia de respuesta en los ejemplos de sucesos dependientes e independientes. Añadimos que los ejemplos de sucesos independientes y los ejemplos de probabilidad condicionada tienen el porcentaje más alto de respuestas incorrectas.

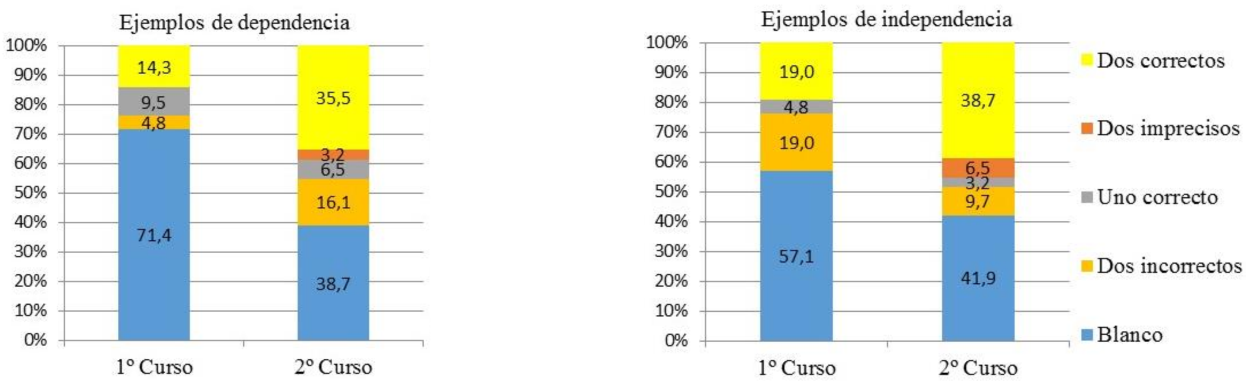


Figura 4. Porcentaje de tipo y número de ejemplos por curso

Contextos propuestos en los ejemplos

Se han analizado los contextos en las respuestas de los estudiantes según los recogidos en las pruebas de evaluación PISA, organizadas por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) (ME, 2009). En dichas pruebas participan estudiantes de secundaria (15 años) de 65 países, incluida España; por lo tanto, sería deseable que los contextos sugeridos en PISA se muestren en los ejemplos que proponen. Los contextos considerados han sido: personal, profesional, social y científico. Se añade el de juego de azar por su peso en el cálculo de probabilidades. A continuación, se presenta cada uno de los contextos junto a un ejemplo extraído de las respuestas.

- Situación personal*:* Son problemas relacionados con las actividades del día a día del propio individuo, su familia y su grupo de iguales. Como ejemplo, podría ser la práctica de deporte, familia, juegos, salud o transporte personal, deportes, o viajes. Así, el siguiente ejemplo se ha clasificado en esta categoría, pues pertenece a la vida personal del estudiante (aprobar una asignatura es algo que le concierne directamente).

  Probabilidad de aprobar una asignatura según la nota sacada en los exámenes (E9).

- Situación profesional: Son problemas que se centran en el mundo laboral que el estudiante encontrará en el futuro o que conoce por sus familiares o maestros. Se trata de problemas sobre medida, control o coste de un proceso de producción o una construcción, sobre diseño en carpintería, arquitectura o jardinería; coste o salario de mano de obra, etc. El ejemplo que reproducimos en lo que sigue pertenece a un estudio de mercado y de producción que se usa en las empresas para saber si un producto tendrá o no el éxito de venta que se pretende.

  Que se venda un producto depende del precio (E10).

- Situación Social: En este caso, se incluyen los problemas que el estudiante podría encontrar en su comunidad más amplia que la familiar (comunidad de vecinos, ayuntamiento o ciudad, su país, etc.). El siguiente ejemplo es uno de los más frecuentes en el contexto social. Cuando una pareja está esperando un hijo, todos quieren saber el género del bebé, y antes de ir a la consulta suelen hacer predicciones sobre el género del niño que se espera.

  Probabilidad de que sea niña si se tiene un niño (E11).

- Situación Científica: Los problemas clasificados en esta categoría están relacionados con la aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología. Algunos problemas relacionados con la ciencia tratan de la meteorología, ecología, medicina, genética, o física. Esta situación es más abstracta que el resto, ya que implica la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema matemático.

  Cuando veo el tiempo y sé que va a llover cojo el paraguas (E13).

- Juegos de azar: Hemos separado en este contexto los juegos de azar como la lotería, los juegos de cartas, experimentos con bolas en urnas, etc., y otros juegos que aparecen en los medios de comunicación. Por un lado, son muy frecuentes en los libros de texto, pues tienen espacios muestrales finitos y permiten aplicar en forma sencilla la probabilidad. Por otro, es el contexto en que se originó históricamente el cálculo de probabilidades (Batanero, Henry y Parzys, 2005). Los dos siguientes ejemplos son de sucesos dependientes e independientes usando bolas de colores.

  Independencia: Sacar bola roja y bola azul sabiendo que hay 5 bolas rojas y 5 azules en una urna. Dependencia: Sacar bola azul sacado previamente bola roja (E12).

En la Tabla 5 se muestra el número total de ejemplos propuestos en cada contexto. Como se puede observar, el 34,6% de los ejemplos dados está relacionados con juegos de azar, ocupando el porcentaje más alto de respuestas. El porcentaje de respuestas dadas en el contexto personal es del 27,5% y el más bajo corresponde al contexto profesional, al que le pertenece un porcentaje del 9,1%. Los ejemplos en contexto social y científico están aproximados (15,6% y 13%, respectivamente).

Tabla 5. Frecuencia de ejemplos propuestos en cada contexto

	1º Curso	2º Curso	Total
Juegos de azar	15	20	35
Personal	9	18	27
Profesional	0	9	9
Social	2	13	15
Científico	1	12	13
Total	27	72	99

En la Figura 4 presentamos los porcentajes de los contextos usados por curso, donde vemos algunas diferencias importantes. Aunque en ambos cursos los contextos más usados han sido los juegos de azar y personal, aparecen en mayor proporción en el primer curso (33,3%), en particular, los juegos de azar (55,6%). El contexto profesional sólo aparece en segundo curso, donde son mucho más frecuentes los contextos social y científico; de lo que se deduce que estos estudiantes comprenden mejor las aplicaciones del tema a diversas áreas fuera de los juegos de azar.

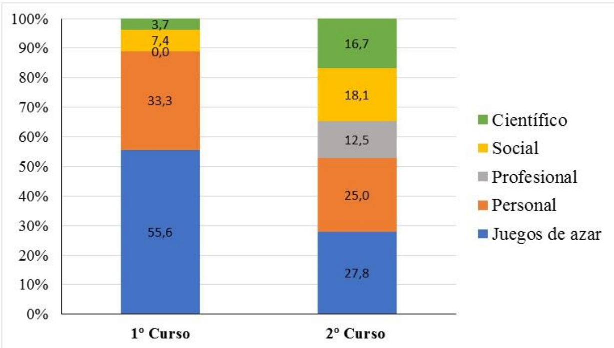


Figura 5. Porcentaje de contextos en los ejemplos propuestos en cada curso

CONCLUSIONES

El trabajo muestra mejores resultados en los estudiantes de segundo curso de Bachillerato, que en su mayoría fueron capaces de proporcionar definiciones correctas de la dependencia e independencia de sucesos y ejemplos pertinentes de estos conceptos en contextos variados. No obstante, es todavía alta la proporción de estudiantes, y especialmente en primer curso, que falla en las tareas propuestas.

La principal razón de proporcionar una definición incorrecta fue añadir condiciones innecesarias que reflejan sus sesgos de razonamiento, en forma similar a otras investigaciones, como las de Contreras et al. (2013). Aunque el principal sesgo de confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes citado por Cordani y Wechsler (2006), D'Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) no se refleja explícitamente en las definiciones, sí aparece dicho sesgo en casos aislados en los ejemplos proporcionados de sucesos independientes. Es preocupante la proporción de estudiantes que es incapaz de dar un ejemplo, incluso cuando proporcionan una definición del concepto. Por otro lado, sobre todo en primer curso, apenas se citan contextos diferentes a los juegos de azar.

Estos resultados, aunque no son generalizables por el escaso tamaño de muestra, pueden orientar la acción del profesor para mejorar el aprendizaje de estos conceptos, donde sería necesario que el estudiante adquiriese una definición correcta, que pueda apreciar sus aplicaciones en diferentes contextos, más allá de los juegos de azar y sea capaz de explicarla según las condiciones necesarias y suficientes que la determinan.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 5-27.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM

Cordani, L. K. y Wechsler, S. (2006). Teaching independence and exchangeability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Brasil): International Association for Statistics Education. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/icots7/3I1_CORD.pdf

D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 138-144). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fernandes, J. A., Correia, P. F. y Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4,* 5-26.

Huerta, P. H. y Arnau, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 87-106.

Kataoka, V., Hernandez, H. y Borim, C. (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. En C. Reading (Ed.). *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics. Lubjana: International Statistical Institute*. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C132_KATAOKA.pdf

Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 62-73.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 219-248.

Ministerio de Educación. (2009). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de alumnos de la OCDE. Informe español*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México: Cinvestav.

Sánchez, E. y Valdez, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 131.148.

EVALUACIÓN DE LA CULTURA ESTADÍSTICA EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA: INTERPRETACIÓN Y ARGUMENTACIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Evaluation of statistical literacy in prospective teachers of primary education: interpretation and argumentation of statistical graphs

Molina-Portillo, E.[a], Contreras, J. M.[a], Ruz, F.[a] y Contreras, J.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Los últimos compendios internacionales en educación estadística (Ben-Zvi, y Makar, 2016; Ben-Zvi, Makar, y Garfield, 2017) inciden en la necesidad de fomentar en el aula el desarrollo de la interpretación y la argumentación estadística, elementos de la cultura estadística que permitirán fundamentar procedimientos y compartir conclusiones. Debido a que de los conocimientos y destrezas actuales de los futuros profesores de educación primaria para interpretar y argumentar la información estadística dependerá en el futuro su práctica profesional, vemos necesaria una evaluación que indique si es pertinente o no un refuerzo educativo en su formación actual. En este trabajo, evaluamos las destrezas lingüísticas (Gal, 2002), de una muestra de 653 futuros profesores de educación primaria, a la hora de interpretar y resumir una noticia que se fundamenta en un diagrama de barras.

Palabras clave: *cultura estadística, gráficos estadísticos, interpretación, argumentación, futuros profesores.*

Abstract

Actual international compendiums in statistical education (Ben-Zvi, and Makar, 2016, Ben-Zvi, Makar, and Garfield, 2017) emphasize the need to promote the development of statistical interpretation and argumentation in the classroom, elements of the statistical literacy that will allow to insure procedures and share conclusions. Due to prospective teachers, professional practice in the future will depend on their current knowledge and skills to interpret and argue statistical information, we need an evaluation that show whether or not educational reinforcement is relevant in their current training. In this work, we evaluate the lenguage skills (Gal, 2002), of a sample of 653 prospective teachers of primary education, when interpreting and summarizing a new that is based on a bar chart.

Keywords: *statistical literacy, statistical graphs, interpretation, argumentation, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

La noción de "cultura o alfabetización estadística", statistical literacy en inglés, surge con la idea de reconocer la necesidad de la estadística en la sociedad, así como su inclusión en educación básica. Como indica Batanero (2002) la estadística es parte de la herencia cultural necesaria para que el ciudadano pueda desenvolverse en la actual sociedad de la información.

Entre las definiciones más relevantes de alfabetización estadística consideramos como precursora la descrita por Wallman (1993), quien la define como: "la habilidad de entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que inundan nuestra vida diaria, unida a la habilidad de apreciar las

Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Ruz, F. y Contreras, J. (2018). Evaluación de la cultura estadística en futuros profesores de educación primaria: Interpretación y argumentación de gráficos estadísticos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 348-357). Gijón: SEIEM.

contribuciones que el razonamiento estadístico puede hacer en público y en privado a las decisiones personales y profesionales". Como señala Rumsey (2002), la noción "alfabetización estadística" es demasiado amplia y, entre otras muchas concepciones de qué es ser estadísticamente culto (Watson, 1997; Schield, 1999; Ben-Zvi y Garfield, 2004; Chick y Pierce, 2011), destaca en la literatura la definición de Gal (2002). En ella, se distinguen dos componentes básicos interrelacionados: "a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante".

La escuela juega un papel fundamental en el desarrollo de la competencia estadística de los estudiantes, quienes a su vez entienden por qué, y cómo, las estadísticas son útiles para percibir e interpretar el mundo y su complejidad (Frankenstein, 1998). Por tanto, la cultura estadística se presenta como un resultado esperado de la escolarización (Garfield y Ben-Zvi, 2007). Sin embargo, muchos profesores no se consideran bien preparados para enseñar estadística, ni para enfrentar las dificultades de sus alumnos (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2011). Es por ello que a menudo, los profesores de matemáticas ven la estadística como un capítulo marginal en el plan de estudios de matemáticas y por tanto minimizan o ignoran su enseñanza (Moore 1998, Ben-Zvi y Makar, 2016).

Uno de los elementos fundamentales para ser estadísticamente culto, sobre todo en la escuela, es ser capaz de interpretar el significado de los elementos estadísticos, evaluarlos críticamente y proporcionar argumentos sólidos a la hora de argumentar las conclusiones que se deriven de estos. Por ello este trabajo, más allá de una evaluación estandarizada del nivel competencial alcanzado en la lectura de datos representados mediante gráficos estadísticos, trata de evaluar la interpretación y argumentación que realizan una muestra de 653 futuros profesores inmersos en el tercer curso del Grado de Educación Primaria, a la hora de resumir la información que aparece en una noticia de prensa que contiene un diagrama de barras adosadas.

DESTREZAS LINGÜÍSTICAS EN LA CULTURA ESTADÍSTICA

Watson y Kelly (2007) indican que la relación entre el lenguaje y la comprensión del sujeto (en este caso la estadística) es compleja. Como los autores indican, hasta hace relativamente poco tiempo, la medición de la comprensión estadística se ha centrado en procedimientos con respuestas numéricas y no en descripciones de terminología, debido principalmente a que los profesionales que analizan la alfabetización estadística, tienen tendencia a centrarse más en aspectos procedimentales, como encontrar probabilidades de eventos, dibujar gráficas o calcular promedios, que en la alfabetización. Los aspectos propios de la alfabetización tales como comunicar resultados o ser capaces de describir los conceptos involucrados correctamente, a menudo reciben poca o ninguna atención.

El concepto de cultura estadística propuesto por Gal (2002), basado en el de Watson (1997), se concreta mediante un modelo que distingue dos componentes: de conocimiento y de disposición. La componente de conocimiento se compone de cinco elementos cognitivos: habilidades lingüísticas, destrezas estadísticas, conocimientos matemáticos, conocimiento del contexto y cuestionamiento ó evaluación crítica. Mientras que la componente de disposición se compone de dos: creencias y actitudes ante la estadística, y postura crítica de la información obtenida mediante procedimientos estadísticos. En este modelo, Gal destaca que la comprensión de los mensajes estadísticos requiere de habilidades de procesamiento textual, principalmente, a la hora de interpretar el texto que acompaña y contextualiza al dato estadístico, o que explica un gráfico o tabla. De esta manera, el emisor puede comunicar de manera clara y precisa su opinión, oralmente o por escrito, con suficientes evidencias para que otro interlocutor juzgue su razonabilidad. En este sentido, debido a la ausencia de datos o imposibilidad de conocer la procedencia de ellos, en la mayoría de los casos, los consumidores de información tendrán que hacer ciertas suposiciones, o incluso inferencias. Por tanto, es fundamental hacer énfasis en habilidades que faciliten la comprensión, interpretación y posterior comunicación de la información estadística.

La destreza lingüística a la hora de la interpretación y posterior comunicación de la información estadística requiere de ciertas habilidades tales como una actitud crítica hacia los datos y el conocimiento del contexto en el que se ubican. En la sociedad de la información, los mensajes pueden ser creados por emisores con diversas habilidades lingüísticas y de cálculo; que pueden tener objetivos concretos, como convencer al lector o al oyente de adoptar un punto de vista específico o rechazar otro, y, por tanto, pueden usar argumentos unilaterales o presentar información selectiva (Clemen y Gregory, 2000). Por tanto, los receptores de los mensajes estadísticos, han de ser capaces de dar sentido a una amplia gama de mensajes, formulados en diferentes niveles de complejidad y en diferentes estilos de escritura o habla (Wanta, 1997). Es por ello que, sobre todo en edades tempranas, los encargados de la enseñanza de la estadística deben hacer hincapié en el cuestionamiento de los datos y cómo varía la interpretación de éstos en función del contexto donde se ubiquen. De esta forma, se podrá lograr una correcta interpretación y posterior argumentación de la información estadística por parte de los estudiantes, de manera que puedan enfrentarse con garantías ante la información estadística que puedan encontrar en cualquier ámbito de su vida y, en concreto, en los medios de comunicación.

De forma análoga, Watson y Moritz (2000) señalan que existen tres niveles de comprensión lingüística para ser estadísticamente culto. El primero de ellos relativo a una comprensión básica de la terminología estadística, el segundo sobre una comprensión del lenguaje y conceptos estadísticos cuando están integrados en el contexto de una discusión social más amplia, y el tercero, que implica una actitud de cuestionamiento aplicables a conceptos más sofisticados que nos permitan contradecir las afirmaciones hechas sin una base estadística adecuada. La estadística requiere de la comprensión básica de los conceptos estadísticos, mientras que la alfabetización requiere de la capacidad de expresar esa comprensión en palabras, no en fórmulas matemáticas, por tanto, se ha de hacer hincapié en poder describir adecuadamente el significado de los conceptos que son la base del pensamiento estadístico.

En el caso de la argumentación estadística, las nuevas tendencias en investigación en ciencias han cambiado el foco de atención hacia las perspectivas socioculturales en vez de estudiar las estructuras gramaticales formales (Andriessen, 2006). Esta nueva forma de argumentación tiene como objetivo comprometer a otros en el proceso de investigación, desarrollando habilidades de construcción del conocimiento de forma colaborativa, con críticas que construyan el saber de forma colectiva. Es decir, la argumentación es una herramienta natural para la articulación de conclusiones informales (Ben-Zvi, 2006). En esta línea, Abelson (2012) propone dos dimensiones para la argumentación informal: i) extraer conclusiones lógicas desde los datos (interpretación) y ii) proporcionar argumentos convincentes basados en el análisis de datos (retórica y narrativa).

Así, el interés de los profesores encargados de la enseñanza de la estadística, tiene que ir más allá de la descripción de los niveles de comprensión del concepto personal de los estudiantes (Watson y Kelly, 2003). Se trata de cuestionar si es posible mejorar la capacidad de los estudiantes para explicar el vocabulario estadístico y, en caso afirmativo, cuánto tiempo puede conllevar dicha mejoría, ya que es probable que la enseñanza específica del vocabulario produzca los resultados deseados a corto plazo. Es por ello que se plantea necesario una formación más específica para los profesores en este campo, ya que como demuestran algunas investigaciones (Malone y Miller, 1993) algunos profesores de matemáticas no siempre usan una terminología correcta en su lenguaje de instrucción, y en su lugar utilizan el lenguaje cotidiano. Como inciden Watson y Kelly (2007) algunos profesores pueden incluso sentirse incómodos con la terminología estadística y, por lo tanto, evitar el uso de estos términos en la instrucción para evitar tener que explicar a la clase el significado de los conceptos formales subyacentes. Esto puede provocar una problemática ya que algunos términos tienen acepciones diferentes en su uso diario y su uso especializado. La capacidad de discernir el significado de los términos estadísticos dentro de los contextos de lenguaje natural es un aspecto primordial, dado que esta es la manera, como indica Schmit (2010), en la que la mayoría de los estudiantes se encontrarán con la estadística en la vida cotidiana. Con demasiada frecuencia, el analfabetismo estadístico implica la incapacidad de comprender lo que se lee, así como no observar los matices de la gramática o pasar por alto las distinciones técnicas (Schield, 1999).

Ben-Zvi (2006) afirma, que, en el caso de los de profesores en formación, se debería fomentar en el aula el desarrollo de una valoración de la argumentación estadística en el que prevaleciera el discurso, principalmente para dar fundamento a los procedimientos utilizados y que permita compartir sus ideas y resultados entre ellos. Es decir, una habilidad importante que todos los estudiantes deben aprender como parte de sus programas educativos es ser capaces de evaluar adecuadamente las pruebas (datos) y las exposiciones basadas en ellos (Lin y Huang, 2013).

Analizando los antecedentes previamente mencionados, surge la necesidad de medir la capacidad de comprensión de dicha información por parte los "consumidores", término con el que Gal (2002) define a los ciudadanos receptores de información estadística, y valorar si son estadísticamente cultos. Es decir, consumidores informados, capaces de hacer juicios sólidos y de tratar de manera analítica y crítica la información. Dado el papel relevante de la escolarización en la formación de los próximos consumidores de datos estadísticos y, en concreto, del desarrollo de la competencia en comunicación lingüística y matemática durante la educación obligatoria, nos proponemos focalizar nuestra investigación en los encargados de dicha formación, los futuros profesores de educación primaria. En concreto, y dado que de sus conocimientos y destrezas actuales para interpretar y posteriormente comunicar la información estadística dependerá en el futuro su práctica profesional, vemos necesaria una evaluación más allá del nivel competencial puramente estadístico alcanzado, que indique si es pertinente o no un refuerzo educativo en su formación actual.

METODOLOGÍA DE EVALUACIÓN Y MUESTRA

Un ciudadano estadísticamente culto debe dominar las habilidades lingüísticas necesarias, es decir, debe ser capaz de leer, interpretar y evaluar razonadamente la información estadística que aparece en los medios de comunicación, ya sean datos o resúmenes de ellos, representados mediante tablas o gráficos. Pero como afirma Schield (2000), existe una dificultad general a la hora de leerlos y comprenderlos, destacando principalmente la complejidad de identificar las descripciones y comparaciones correspondientes.

Como indican Friel, Curcio y Bright (2001), el gráfico es un objeto semiótico complejo, en el que se han de identificar los elementos estructurales que lo componen para hacer una interpretación correcta de él, ya que cada tipología tiene sus propios convenios de construcción e interpretación. Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011) identifican los siguientes: i) *El título y las etiquetas* indican el contenido contextual y cuáles son las variables en él representadas. Este elemento aparece también en las tablas; ii) *El marco del gráfico*, que incluye los ejes, escalas, y marcas de referencia en cada eje. Dicho marco proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas. Puede haber diferentes tipos de marcos y sistemas de coordenadas (lineales, cartesianas bidimensionales o multidimensionales, polares). En las tablas también se incluyen leyendas que diferencian las variables representadas, sus valores y diferentes tipos de frecuencias y porcentajes; iii) *Los especificadores del gráfico*, es decir, los elementos visuales usados para representar los datos, como los rectángulos (en el histograma) o los puntos (en el diagrama de dispersión). Los autores nos alertan de que no todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender, sugiriendo el siguiente orden de dificultad: posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas), posición en una escala no homogénea (gráficos bivariantes), longitud (gráficos poligonales), ángulo o pendiente (gráfico de sectores, discos), área (diagrama de áreas, pictogramas), volumen (cubos, mapas estadísticos) y color (mapas estadísticos codificados mediante color).

Para evaluar la cultura estadística de los futuros profesores de educación primaria, hemos optado por utilizar un gráfico actual sustraído de los medios de comunicación, ya que como señala Watson (1997), los medios de comunicación proporcionan ejemplos, como titulares, datos, gráficos o tablas, que podrían servir para relacionar la estadística y la probabilidad con los eventos cotidianos. En concreto el gráfico, que consta de dos barras adosadas, informa de una serie temporal de dos variables estadísticas (número de sociedades mercantiles creadas y disueltas en España) entre los años 2008 y 2012. En dicho gráfico, creado de forma sesgada o incorrecta por dicho medio de comunicación, se ha omitido el eje de coordenadas y la escala con la que se representan sendas variables tiene distinta proporcionalidad. Este sesgo nos permitirá evaluar si se realiza una interpretación crítica de la información estadística contenida en el gráfico. La elección de este tipo de gráfico no es casual, ya que éste forma parte de los gráficos que recomiendan enseñar la mayoría de currículos de educación primaria, y entre ellos el currículo español del que han sido partícipes los estudiantes evaluados. Por tanto, las destrezas estadísticas y matemáticas necesarias para la comprensión e interpretación de dicho gráfico se presuponen adquiridas, permitiendo así focalizar nuestro estudio en las demás componentes de la cultura estadística.

Como instrumento de recogida de información se ha diseñado y validado un cuestionario específico para tal fin (Contreras, Molina-Portillo, Godino y Batanero, 2017; Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D., y Díaz-Levicoy, 2017). Mediante dicha herramienta se plantea la tarea que, basada en el gráfico de barras adosadas mencionado, pone en juego conocimientos estadísticos básicos sobre dicho gráfico, evalúa el conocimiento del contexto y valora la competencia lingüística en la comunicación de su interpretación. Esto es, dicha herramienta permite valorar, no solamente el nivel alcanzado en la lectura de datos estadísticos presentes en dicho gráfico, así como las destrezas matemáticas necesarias, sino que también evalúa la habilidad lingüística, el conocimiento del contexto y la evaluación crítica que se manifiesten en la comprensión, interpretación, comunicación y argumentación de la noticia, respectivamente. Asimismo, esta herramienta permitirá evaluar las creencias y actitudes de los futuros profesores perceptibles en la interpretación y argumentación de la noticia, así como la postura crítica adoptada por los sujetos de estudio, es decir, favorecerá el estudio de la componente de disposición planteada por Gal. Conforme a lo expuesto por Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001), en esta tarea se mide la lectura crítica de gráficos *más allá de los datos* que requiere previamente la lectura de los datos, así como leer dentro de los datos.

Figura 1. Gráfico de barras adosadas

Para la gráfica anterior se les pidió a los futuros profesores de educación primaria que realizaran la siguiente tarea: "*El alumno ha de resumir la noticia indicando los datos representados y las relaciones que se establecen entre los mismos*". En el análisis "a priori" de la lectura, interpretación y argumentación del gráfico estadístico utilizado se aspira a concluir los siguientes resultados. Se espera que los futuros profesores identifiquen al menos que el gráfico representa una serie temporal de dos variables estadísticas que indican, para los años del 2008 al 2012, el número de sociedades creadas y disueltas en España. También sería necesario identificar el texto circundante, por ejemplo, que el eje horizontal representa una serie temporal para los años del 2008 al 2012 y el eje vertical representa la frecuencia (número de sociedades mercantiles creadas y disueltas en cada año), así como el título y las etiquetas de dicho gráfico, que indicarán el contenido contextual de éste.

Para poder hacer una correcta interpretación, así como un posterior resumen y argumentación de la noticia, sería necesario la percepción de las incorrecciones o sesgos que el gráfico presenta. Así, el futuro profesor ha de identificar que se ha omitido el eje de ordenadas y, en aras de facilitar la lectura del gráfico, se muestran las cantidades de empresas creadas/disueltas sobre las propias barras. Además, las escalas con las que se representan las dos variables comparadas tienen distintas proporciones. Con el cumplimiento de dichos requisitos mínimos se valorará que los sujetos de estudio poseen las destrezas estadísticas y conocimientos matemáticos básicos para alcanzar el nivel competencial de lectura de datos estadísticos representados mediante dicho gráfico. Asimismo, se demostrarán las habilidades lingüísticas básicas necesarias para la comprensión de la noticia.

La correcta argumentación de la noticia requiere mantener una postura crítica aplicando, en caso necesario, razonamientos que contradigan las afirmaciones realizadas sin una adecuada fundamentación estadística. En concreto, se ha de percibir que el tipo de gráfico elegido no parece adecuado para la fundamentación estadística de la noticia, dado que el número de empresas que quiebran un año es una proporción del total de las empresas existentes y no del número de empresas que se crean ese mismo año. En segundo lugar, el diagrama tampoco parece dar respuesta al titular de la noticia "*Si una empresa quiebra, ¿a quién reclama el cliente?*", por lo que estamos basando la información que se pretende transmitir en unos datos estadísticos inapropiados. Y, finalmente, una adecuada argumentación debería analizar la intencionalidad de la noticia. Así, el sesgo de proporcionalidad de las barras, dándole mayor proporción al número de empresas quebradas, deja entrever cierto propósito de hacer que el ciudadano tema la quiebra de la empresa en la que invirtió y, junto al titular, no tener opción de recuperar su dinero. Por tanto, para la correcta formulación de la argumentación se requieren, además de las habilidades lingüísticas necesarias, un conocimiento del contexto general en el que se basa la noticia junto a un cuestionamiento de la información presentada. De igual forma, mediante dicha argumentación se podrá percibir creencias y actitudes hacia la estadística, así como el posicionamiento crítico ante una noticia que no está fundamentada estadísticamente en datos ni gráficos adecuados. Este análisis nos permitirá también incidir en la línea expuesta por Abelson (2012), valorando la extracción de conclusiones lógicas y el aporte de argumentos convincentes basados en los datos.

La población de interés en esta investigación son los futuros profesores del Grado en Maestro en Educación Primaria. El cuestionario ha sido aplicado a una muestra de 653 estudiantes de tercer curso del Grado de Primaria de la Universidad de Granada. Dichos estudiantes han cursado dos asignaturas previas relacionadas con la matemática y su didáctica, en las cuáles han estudiado, entre otros, el gráfico estadístico considerado en el trabajo. Además, dado que se estudia el contenido estadístico de un gráfico elemental, los futuros profesores deben tener conocimientos suficientes de éste ya que forma parte del currículo de matemáticas de educación primaria, secundaria y bachillerato que han cursado (MEC,2014; MEC 2014b).

Para esta evaluación se ha llevado a cabo un análisis cualitativo de los resúmenes de la noticia realizados por los futuros profesores. Posteriormente se ha realizado un estudio descriptivo de las respuestas de los alumnos para dicha tarea, clasificado los resultados en función de si la respuesta es correcta (respuesta correcta), si se realiza un resumen correcto de la información estadística sin identificar los sesgos presentes ni establecer correctamente las relaciones entre los datos (respuesta parcialmente correcta) o si los alumnos realizan un análisis incorrecto de la información (respuesta incorrecta). Concretamente, la respuesta correcta engloba aquellos resultados en los que podemos observar se cumplen las siete componentes enumeradas por Gal, desde aquellas que involucran los elementos cognitivos hasta los elementos de la componente de disposición.

En un término medio se encuentran las respuestas parcialmente correctas donde se engloba aquellos resultados en los que, pese a hacer una argumentación correcta de la noticia, no se observa una actitud crítica ni en la comunicación de la información estadística presentada ni en su interpretación, pues no se identifican los sesgos de la gráfica.

Finalmente, y para el estudio detallado del grado de cultura estadística presente en aquellos que responden incorrectamente a la tarea, se ha realizado un análisis de categorías del tipo de respuestas, analizando y presentando las frecuencias y porcentajes con que aparece cada una de las categorías en el global de la muestra. Dentro de las respuestas incorrectas se han agrupado los errores observados que aparecen en la noticia relacionada con el gráfico de barras en torno a seis categorías, más otra que indican aquellos que no responden a la tarea (0.7).

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN

El análisis cualitativo de las respuestas aportadas por los futuros profesores de educación primaria (Tabla 1) muestra una baja comprensión gráfica de los estudiantes participantes en el estudio. Esta baja comprensión gráfica se observa tanto a la hora de la interpretación gráfica, como en la posterior comunicación y redacción de la información estadística implícita en la tarea que nos ocupa.

En el gráfico de barras, el porcentaje de estudiantes que resumen correctamente la información, indican los datos representados y detallan las relaciones que se establecen entre ellos, apenas llegó al 25,1%. Por tanto, son muy pocos los estudiantes que alcanzan los niveles más altos en la lectura de gráficos señalados por Curcio (1989) y Friel, Curcio y Bright (2001). Para el gráfico de barras adosadas proporcionado, el porcentaje de interpretación parcialmente correcta de la información fue ligeramente mayor, dándose en el 26,8% de los estudiantes. El análisis incorrecto de la información estadística se presenta en un mayor porcentaje (48,1%). Estos resultados muestran una dificultad manifiesta a la hora de interpretar, argumentar y comunicar la información estadística presente en los medios de comunicación.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de tipos de respuestas

Tipo de gráfico		Frecuencia	Porcentaje
Gráfico de dos barras adosadas	Incorrecto	314	48,1
	Parcialmente correcto	175	26,8
	Correcto	164	25,1

En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos tras el análisis de las respuestas. La mayoría de las respuestas incorrectas (27,7%) radican en un uso inadecuado de la terminología estadística a la hora de realizar el resumen de la noticia no alcanzando en algunas ocasiones ni el primer nivel de comprensión lingüística descrito por Watson y Moritz. Otro error importante que encontramos en esta evaluación (16,1%), es tratar de resumir la noticia solamente teniendo en cuenta el titular y el subtitular de la noticia, sin hacer referencia a los elementos estadísticos de ella. Esta categoría la componen el conjunto de futuros profesores que no son capaces de relacionar el título de la noticia con la información gráfica, ya que tratan dos variables distintas: reclamación por parte del cliente (título) y creación y disolución de empresas creadas (gráfica), por tanto, están realizando una incorrecta lectura de datos estadísticos presentes en el gráfico. El resto de categorías, aunque de poca representatividad, indican una falta de percepción de los elementos necesarios para comunicar correctamente la información, así como errores en la lectura del gráfico estadístico. Los demás tipos de respuestas (correcta y parcialmente correcta) revelan que más de la mitad de los futuros profesores demuestran destrezas estadísticas, conocimientos matemáticos y habilidades lingüísticas básicas que permiten comprender e interpretar adecuadamente la noticia. Sin embargo, entre ellos solo el 25,1% demuestra además habilidades lingüísticas, comprensión del contexto y posicionamiento crítico necesarios para la adecuada argumentación de la noticia.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de tipos de respuestas a la tarea 1

	Frecuencia	Porcentaje
0.1 Utiliza una terminología inadecuada	181	27,7
0.2 Reproduce los datos sin resumir la información	3	0,5
0.3 Solo identifica las empresas creadas	10	1,5
0.4 Solo refiere la información gráfica sin relacionar con la noticia	11	1,7
0.5 Solo refiere la noticia sin hacer referencia a la gráfica	105	16,1
0.6 Analiza incorrectamente la gráfica	2	0,3
0.7 No responde	2	0,3
1.1 Parcialmente correcta	175	26,8
2.1 Realiza correctamente la tarea	164	25,1
Total	653	100,0

CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

Los resultados muestran una deficiente comprensión gráfica de los futuros profesores participantes en el estudio, tanto a la hora de la interpretación, como de la argumentación de la exposición del resumen de la información. Los estudiantes, en un porcentaje muy alto, no son capaces de realizar una lectura comprensiva que les permitan realizar una interpretación correcta del contenido de la noticia, tanto del título, como del gráfico. Esto, provoca en los futuros profesores errores de percepción, inducidos principalmente al no relacionar el contenido textual de la noticia con el gráfico, es decir al no contextualizar la noticia.

Otro aspecto importante de la evaluación ha sido la poca habilidad crítica expuesta por los estudiantes. En la mayoría de los resúmenes de la noticia, se ha percibido una escasa actitud crítica, lo que llevaba a los futuros profesores a no cuestionarse los sesgos presentes en la gráfica. Por tanto, en la clasificación de Friel, Curcio y Bright (2001) estos alumnos ni siquiera eran capaces de leer dentro de los datos, y en muy pocas ocasiones más allá de los datos. Siguiendo el modelo de Watson y Moritz (2000), aunque los alumnos tienen una comprensión básica de la terminología estadística, por lo que al menos alcanzan el nivel 1 de su modelo, la mayoría presentan una baja comprensión del lenguaje estadístico relacionado con contextos sociales y en muy pocos, menor al 25%, realizan con profundidad una crítica en sus argumentaciones estadísticas. Este resultado concuerda con las investigaciones de Malone y Miller (1993) quienes inciden en que el uso del lenguaje cotidiano, no correcto, puede provocar una mala argumentación a la hora de comunicar la información estadística.

En el caso de la argumentación realizada en los resúmenes estadísticos, los estudiantes, además de presentar errores de redacción en un porcentaje muy alto de casos, no logran fundamentar sus razonamientos a través de una retórica basada en los elementos estadísticos de la noticia. Por lo que sus razonamientos y su narrativa no son convincentes en la mayoría de las ocasiones.

Todo lo expuesto, nos lleva a pensar que la baja formación de los futuros profesores, tanto en comprensión como en comunicación de la información estadística, pueda provocar que no logren ser competentes en su futura tarea como docentes, especialmente a la hora de formar ciudadanos estadísticamente cultos. Es por ello que, como indica Ben-Zvi (2006), sea necesario una formación más específica para los profesores en este campo, principalmente en el discurso, que les permitiría dar fundamento a los procedimientos utilizados y compartir sus ideas y resultados.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Abelson, R. P. (2012). Statistics as principled argument. *Psychology Press.* New York Taylor y Francis Group.

Andriessen, K. (2006). Do we need to be cautious in evaluating suicide statistics? The *European Journal of Public Health, 16*(4), 445-445.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números. *Revista de didáctica de las matemáticas, 76*, 55-67.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas interamericanas de enseñanza de la estadística*, 5-7.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 7-18.

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. En *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.*

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016). International Perspectives on the Teaching and Learning of Statistics. En *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 1-10). Springer International Publishing.

Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (2017). *International handbook of research in statistics education*. Springer.

Chick, H. L. y Pierce, R. (2011). Teaching for statistical literacy: Utilising affordances in real-world data. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(2), 339-362.

Clemen, R. y Gregory, R. (2000). Preparing adult students to be better decision makers. *Adult numeracy development: Theory, research, practice*, 73-86.

Contreras, J. M., Molina-Portillo, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207-216). SEIEM.

Curcio, F. R. (1989). *Developing Graph Comprehension.* Elementary and Middle School Activities. National Council of Teachers of Mathematics, Association Drive, Reston, VA.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, *32*(2) 124-158.

Frankenstein, M. (1998). Reading the world with math: Goals for a critical mathematical literacy curriculum. En E. Lee, D. Menkart y M. Okazawa-Rey (Eds.), *Beyond Heroes and Holidays: A Practical Guide to K-12 Anti-Racist, Multicultural Education and Staff Development*, Washington, DC: Network of Educators on the Americas.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372-396.

Malone, J. y Miller, D. (1993). Communicating mathematical terms in writing: Some influential variables. En M. Stephens, A. Waywood, D. Clarke y J. Izard (Eds.), *Communicating mathematics: Perspectives from classroom practice and current research* (pp. 177-190). Hawthorn, VIC: The Australian Council for Educational Research Ltd.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.*

Ministerio de Educación y Ciencia. (2014b). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D. y Díaz-Levicoy, D. (2017). Interpretación crítica de gráficos estadísticos incorrectos en la sociedad de la comunicación: un desafío para futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4787-4792.

Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association, 93*, 1253-1259.

Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10*(3), 6-13.

Schield, M. (1999). Statistical literacy: Thinking critically about statistics. *Of Significance, 1*(1), 15-20.

Schield, M. (2000). Statistical literacy and mathematical reasoning. Proceedings of *the Ninth International Conference on Mathematics Education (ICME-9)*, Tokyo, Japan.

Schmit, J. (2010). Teaching Statistical Literacy as a Quantitative Rhetoric Course. En *American Statistical Association Joint Statistical Meetings, Vancouver, Canada* (Vol. 31).

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), 1-8.

Wanta, W. (1997). *The public and the national agenda: How people learn about important issues.* Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical literacy using the media. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press and The International Statistical Institute.

Watson, J. M. y Kelly, B. A. (2003). The vocabulary of statistical literacy. En Educational research, risks, y dilemmas: *Proceedings of the joint conferences of the New Zealand Association for Research in Education and the Australian Association for Research in Education.*

Watson, J. M., y Kelly, B. A. (2007). Sample, random and variation: The vocabulary of statistical literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 741-767.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). Development of understanding of sampling for statistical literacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(1), 109-136.

QUÉ ELEMENTOS MATEMÁTICOS IDENTIFICAN LOS FUTUROS PROFESORES EN LAS RESOLUCIONES DE ESTUDIANTES A UN PROBLEMA DE COMPARACIÓN DE RAZONES

What mathematical elements are identified by prospective teachers in students' resolutions to a ratio comparison problem

Monje, J.[a], Pérez-Tyteca, P.[a] y Fernández, C.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es examinar qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores de secundaria en las resoluciones de los estudiantes en un problema de comparación de razones, usando como guía un documento teórico sobre un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. 18 futuros profesores de matemáticas participaron en una tarea profesional donde tenían que interpretar respuestas de estudiantes con diferente nivel de comprensión a un problema de comparación de razones sobre ofertas utilizando como guía un modelo de progresión sobre el aprendizaje de este contenido. Los resultados indican que la capacidad de identificar los elementos matemáticos dependió de los elementos implicados en ellas, teniendo mayor dificultad en las resoluciones más conceptuales.

Palabras clave: *mirada profesional, futuros profesores de matemáticas, razón, comparaciones relativas.*

Abstract

The aim of this study is to examine what mathematical elements do prospective secondary school teachers identify in students' resolutions to a ratio comparison problem using as a guide a theoretical document on a progression model in the learning of the comparison of ratios. 18 prospective mathematics teachers took part in a professional task where they had to interpret students' answers with different level of comprehension to a problem of ratio comparison about offers using as a guide a students' learning progression model of this content. The results indicate that the ability to identify the mathematical elements in the resolutions depended on the mathematical elements involved in them, having major difficulty in the most conceptual resolutions.

Keywords: *professional noticing, prospective mathematic teachers, ratio, relative comparisons.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han destacado la importancia de que los profesores adquieran la competencia docente mirar profesionalmente, para aprender a identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, analizar estos aspectos y usar este análisis para tomar decisiones informadas. Esto es, que desarrollen destrezas para analizar la práctica de forma sistemática (van Es y Sherin, 2002). Esto les ayudará a estar mejor preparados para buscar propuestas de acción con el propósito de que los estudiantes progresen en el aprendizaje.

Concretamente, en el área de matemáticas, y poniendo el foco sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, la idea que subyace es que la actividad de comprender y analizar el pensamiento

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Fernández, C. (2018). Qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores en las resoluciones de estudiantes a un problema de comparación de razones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 358-367). Gijón: SEIEM.

matemático de los estudiantes es un proceso de "reconstrucción e inferencia" de la comprensión a partir de la interpretación de lo que el estudiante escribe, dice, o hace. De esta manera, la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica dar sentido a las producciones de los estudiantes yendo más allá de indicar solo lo que es erróneo en su respuesta. Requiere ser capaz de determinar de qué modo las respuestas de los estudiantes son o no significativas desde el punto de vista del aprendizaje matemático (Hines y McMahon 2005; Wilson et al. 2013). De acuerdo con Jacobs, Lamb y Philipp (2010), esta competencia se caracteriza mediante tres destrezas: (a) identificar en las producciones de los estudiantes los elementos matemáticos importantes; (b) interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados; y (c) tomar decisiones basadas en dicha interpretación que permita el progreso conceptual del estudiante. Estos autores consideran que "existe una relación anidada entre las tres destrezas, de modo que decidir cómo responder en base a la comprensión de los estudiantes solo puede ocurrir si los profesores interpretan la comprensión de los estudiantes, y estas interpretaciones solo se pueden hacer si los profesores prestan atención a los detalles de las estrategias de los estudiantes" (p. 197). Así, es esencial que los futuros docentes y/o docentes en ejercicio, en primer lugar identifiquen los elementos matemáticos implicados en las producciones de sus estudiantes para así poder interpretar su comprensión y tomar decisiones que les ayuden a progresar en su aprendizaje.

Por otra parte, las investigaciones están mostrando que proporcionar a los estudiantes para maestro y profesor de matemáticas un marco de referencia, podría ayudarles a centrar su mirada hacia aspectos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes (Levin, Hammer y Coffey, 2009). En este sentido, proporcionarles un modelo de cómo los estudiantes de primaria o secundaria progresan en su aprendizaje en relación a los conceptos matemáticos puede dotarles de un lenguaje matemático para describir el pensamiento de estos y permitirles identificar los objetivos de aprendizaje, anticipar e interpretar el pensamiento matemático de sus estudiantes y dar respuesta con una instrucción apropiada a su progresión en el aprendizaje (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

El análisis de la adquisición por parte de los futuros profesores de secundaria de estas tres destrezas en los programas de formación constituye una importante línea de investigación dentro de la cual se han abordado diferentes dominios matemáticos: el concepto de límite de una función en un punto (Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo, 2018), la clasificación de cuadriláteros y el concepto de derivada (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018), ecuaciones (Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson, 2017), signo igual y equivalencia (van den Kieboom, Magiera y Moyer, 2017). Sin embargo, pocos estudios se han realizado con futuros profesores de secundaria (Nickerson, Lamb, y LaRochelle, 2017; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016) por la falta de artefactos (vídeos y repuestas de estudiantes de secundaria) y por la dificultad de encontrar modelos de progresión en el aprendizaje de los estudiantes de secundaria. Nuestro trabajo realiza un aporte en este sentido, al ser los participantes futuros profesores de secundaria y utilizar como guía para centrar la mirada de estos un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. Además, otro aporte relevante es la tarea profesional utilizada, ya que el problema en relación a la comparación de razones que aparece en la tarea profesional se presta a numerosas resoluciones teniendo en cuenta diferentes elementos matemáticos implicados en la comprensión de la comparación de razones. El objetivo de este estudio es examinar qué elementos matemáticos identifican los futuros profesores de secundaria en las resoluciones de los estudiantes en un problema de comparación de razones, usando como guía un documento teórico sobre un modelo de progresión en el aprendizaje de la comparación de razones. Para la elaboración del documento teórico se ha llevado a cabo una revisión de los estudios previos realizados en el campo de la Didáctica de la Matemática en relación con el aprendizaje de los estudiantes de primaria y secundaria de la comparación de razones.

Revisión de estudios previos sobre comparación de razones

El término relativizar hace referencia a poner algo "en relación con" (Gómez y García, 2014), como expresión de una comparación multiplicativa. La comparación de dos cantidades multiplicativamente es uno de los modos de crear una razón (Lobato y Ellis, 2011). Una razón puede ser interna o externa según sea la naturaleza de las magnitudes implicadas en ella. La razón interna es una relación en una magnitud o sistema, mientras que la razón externa expresa una relación entre magnitudes o dos sistemas (Freudenthal, 1983). Así, de acuerdo con Vergnaud (1983), la diferencia entre ambos tipos de razones se sustenta en el carácter escalar o funcional de la relación multiplicativa entre las cantidades, según sea de un mismo espacio de medida o de dos espacios diferentes de medida respectivamente. En un mismo espacio de medida o conjunto, hay ciertas relaciones multiplicativas que comparan la medida de una parte del mismo con la medida de la otra parte (parte-parte) o que comparan la medida de un subconjunto con la medida del conjunto del cual es parte (parte-todo) (Lamon, 2012). Cuando esto ocurre podemos utilizar expresiones coloquiales como "de cada" o "por cada" que llaman a un razonamiento basado en los esquemas parte-todo o parte-parte. Por el contrario, las relaciones multiplicativas definidas entre elementos de conjuntos distintos, de acuerdo con Singer y Resnick (1992), no admiten esta clase de razonamientos, aunque admiten expresiones coloquiales como las anteriores.

Para favorecer la comparación de razones con referentes distintos resulta útil recurrir a la normalización (Gómez y García, 2014;). Normalizar es un proceso de "reconceptualización de un sistema en relación a una unidad fijada o estándar" (Lamon, 1994, p.94). Es, por tanto, un complejo de técnicas que permiten, mediante la transformación del referente, visualizar ciertas razones (Freudenthal, 1983). Existen, según Fernández (2009), dos maneras para normalizar razones, "una en la que se cambian los referentes mediante escalas de manera que las magnitudes o tamaños resulten normales o familiares y otra en la que se unifican los antecedentes o los consecuentes de las razones para favorecer la comparación" (p.52).

Fijando la atención en las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de razón y proporción, podemos identificar en investigaciones precedentes algunas estrategias correctas, como son la búsqueda de la razón unitaria, la estrategia de la fracción, el producto cruzado y la construcción progresiva (Fernández, 2009). También podemos identificar métodos para comparar razones, como el método unitario y el método del común múltiplo (Hoffer, 1988).

En Monje (2017) se analizaron las respuestas de 339 estudiantes a una tarea de comparación de razones con distinto referente, caracterizando las resoluciones atendiendo a criterios como la interpretación o no del descuento como una cantidad relativa (pensamiento relativo/ no relativo), la naturaleza de la relación multiplicativa empleada (uso de razón interna o externa), el esquema de pensamiento usado (parte-todo o parte-parte), la relación entre cantidades empleada para unificar los referentes (pago/compro; descuento/compro o descuento/pago) o la técnica de normalización empleada (uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva y sus métodos asociados para comparar razones: método de la unidad y método del común múltiplo). De este trabajo se desprende que existe una progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con distinto referente que queda recogida en la Tabla 1

Tabla 1. Modelo de Progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con distinto referente

Nivel 0. Incoherente En este nivel se incluyen las respuestas imprecisas o no identificadas, es decir, el estudiante no deja suficientes rastros para interpretar su resolución. También se incluyen aquellas respuestas en blanco o con anotaciones inconexas que carecen de sentido.
Nivel 1. Respuestas no relativas En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que no relativizan, o bien porque comparan diferencias de cantidades absolutas o bien porque se centran en una sólo en una parte de los datos.

Nivel 1. A. Comparan diferencias
Miran las diferencias entre cantidades de la misma variable, por ejemplo, el dinero que me ahorro en cada oferta o al hacer toda la compra o en un ítem, estas diferencias son las que compara para dar respuesta a la tarea.
Nivel 1. B. Ignoran parte de la información
Se centran sólo en una variable (como el número de ítems) ignorando el resto de información que aporta el enunciado o en aspectos afectivos o subjetivos para dar respuesta a la tarea.

Nivel 2. Tendencia relativa
En este nivel se incluyen las respuestas de los estudiantes que pese a interpretar el descuento como una cantidad relativa, no tienen éxito en su tentativa de comparar cantidades relativas. Tropiezan con dificultades ligadas al referente (del descuento o del pago) o a la elección de los ítems y/o precios.
Nivel 2. A. Dificultades con el referente
Cuando comparan cantidades relativas no se percatan de que la unidad de referencia del descuento es distinta, pierden de vista el conjunto total de ítems que intervienen en cada oferta.
Nivel 2. B. Dificultades en la elección de los ítems y/o precios
Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes para los que, o bien la elección inadecuada del número de ítems o bien la unificación de los precios, actúan como condicionantes en la comparación de los descuentos, lo que desvirtúa la ventaja de alguna oferta.

Nivel 3. Respuestas relativas
En este nivel los estudiantes interpretan el descuento como una cantidad relativa estableciendo comparaciones relativas exitosas.

Para organizar y categorizar las actuaciones de quienes interpretan el descuento como una cantidad relativa, atender además los siguientes elementos matemáticos:

- *Naturaleza de la relación multiplicativa empleada*: *Enfoque escalar* (uso de la razón interna) o *enfoque funcional* (uso de la razón externa)
- *Esquema de pensamiento* (en el enfoque escalar): *parte-todo y parte-parte*
- *Referentes. Presentación de la relación entre cantidades: pago/compro; descuento/compro o descuento/pago*
- *Técnica de normalización o algoritmos*: *uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva* y sus métodos asociados para comparar razones*: método de la unidad* y *método del común múltiplo*.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes (matemáticos, ingenieros y economistas) son 18 futuros profesores de matemáticas de educación secundaria que estaban matriculados en el Máster de Profesorado de Educación Secundaria en el curso 2017/2018 en la Universidad de Alicante. Estos futuros profesores estaban cursando una asignatura sobre el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria que constaba de diferentes módulos. En uno de estos módulos, que consta de 8 sesiones de 2 horas, se aborda el desarrollo del razonamiento proporcional. Como parte de este módulo, los futuros profesores participaron en una tarea profesional sobre comparación de razones (instrumento de recogida de datos).

Tarea profesional

La tarea constaba de un problema de comparación de razones, extraído de Monje (2017) en la que se mostraban tres ofertas comerciales con los descuentos normalizados de manera diferente y con distinto referente en la que había que determinar qué descuento es mejor (Figura 1).

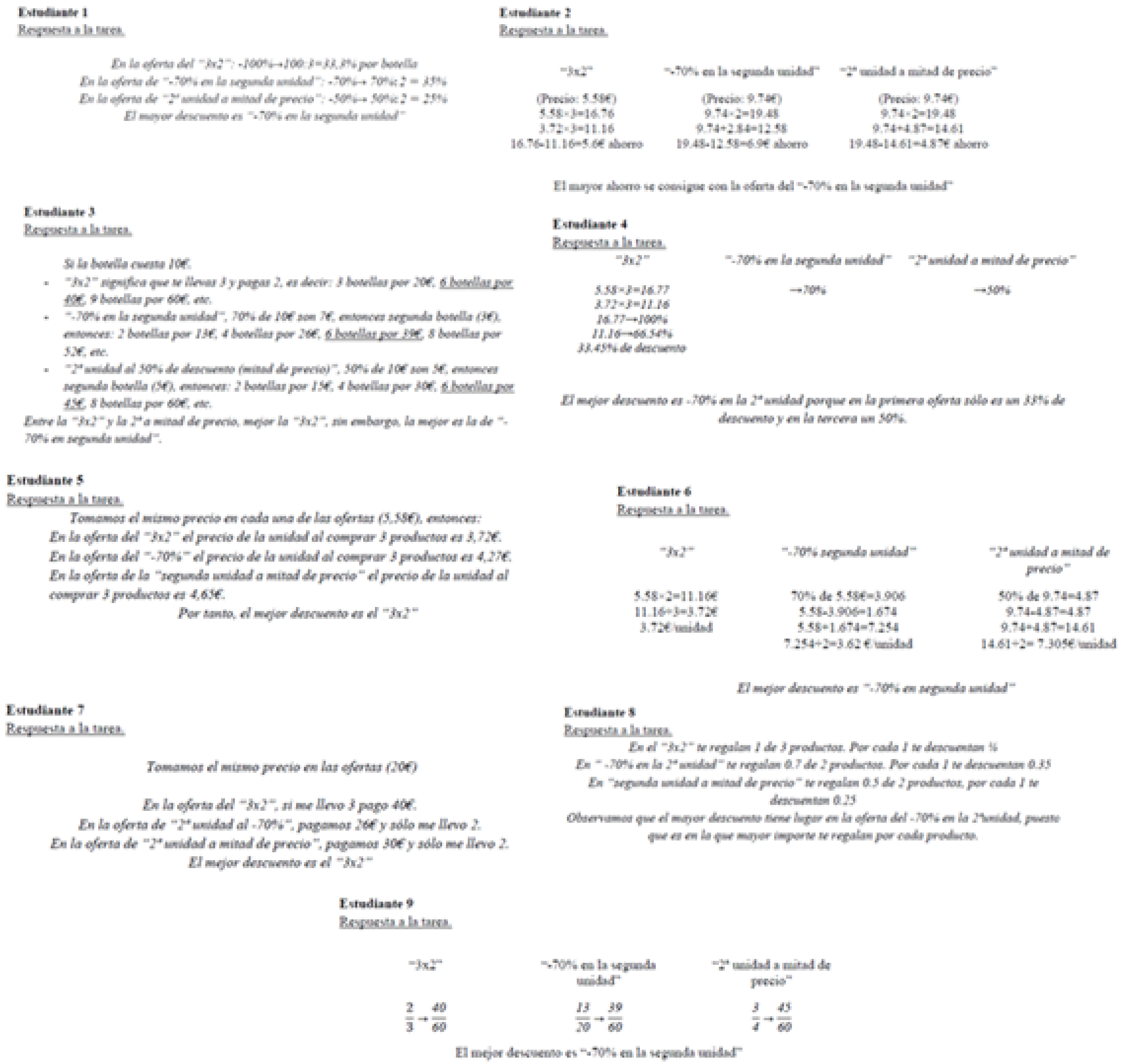
Figura 1. Tarea de comparación de razones

Además, se mostraban 9 resoluciones de diferentes estudiantes al problema, que reflejaban diferentes características de la comprensión (diferentes niveles de progresión) (Figura 2). La segunda es una respuesta no relativa, la primera, tercera, octava y novena son respuestas relativas y de la cuarta a la séptima son de tendencia relativa.

Para cada una de ellas los futuros profesores debían responder a las siguientes cuestiones en relación a las destrezas de la competencia mirar profesionalmente:

1. *Analiza cada una de las actuaciones de los diferentes estudiantes atendiendo a los niveles del documento teórico. Justifica el nivel indicando los conceptos y elementos matemáticos implicados.*
2. *Si fueras el profesor de cada uno de estos estudiantes, ante las respuestas no relativas y de tendencia relativa que has considerado, ¿qué tarea/s propondrías para que el estudiante progrese en su comprensión? Justifica tu respuesta.*

Para la resolución de la tarea profesional, los futuros profesores disponían de un documento teórico que recogía el modelo de la progresión en el aprendizaje de la comparación de razones con referentes distintos adaptada de Monje (2017) (Tabla 1). Este documento no solo contenía el modelo de progresión sino actividades/problemas y ejemplos de respuestas que facilitaban su uso. Para que los futuros profesores se familiarizaran con él, el modelo de progresión se aplicó en diferentes contextos de comparación de razones previamente a la resolución de la tarea profesional. Además, antes de proporcionarles la tarea profesional, los futuros profesores habían resuelto el problema de comparación de razones.



Estudiante 1
Respuesta a la tarea.

En la oferta del "3x2": -100%→100:3=33,3% por botella
En la oferta de "-70% en la segunda unidad": -70%→ 70%:2 = 35%
En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio": -50%→ 50%:2 = 25%
El mayor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Estudiante 2
Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
(Precio: 5.58€)	(Precio: 9.74€)	(Precio: 9.74€)
5.58×3=16.76	9.74×2=19.48	9.74×2=19.48
3.72×3=11.16	9.74+2.84=12.58	9.74+4.87=14.61
16.76-11.16=5.6€ ahorro	19.48-12.58=6.9€ ahorro	19.48-14.61=4.87€ ahorro

El mayor ahorro se consigue con la oferta del "-70% en la segunda unidad"

Estudiante 3
Respuesta a la tarea.

Si la botella cuesta 10€.
- *"3x2" significa que te llevas 3 y pagas 2, es decir: 3 botellas por 20€, 6 botellas por 40€, 9 botellas por 60€, etc.*
- *"-70% en la segunda unidad", 70% de 10€ son 7€, entonces segunda botella (3€), entonces: 2 botellas por 13€, 4 botellas por 26€, 6 botellas por 39€, 8 botellas por 52€, etc.*
- *"2ª unidad al 50% de descuento (mitad de precio)", 50% de 10€ son 5€, entonces segunda botella (5€), entonces: 2 botellas por 15€, 4 botellas por 30€, 6 botellas por 45€, 8 botellas por 60€, etc.*

Entre la "3x2" y la 2ª a mitad de precio, mejor la "3x2", sin embargo, la mejor es la de "-70% en segunda unidad".

Estudiante 4
Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% en la segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×3=16.77	*→70%*	*→50%*
3.72×3=11.16		
16.77→100%		
11.16→66.54%		
33.45% de descuento		

El mejor descuento es -70% en la 2ª unidad porque en la primera oferta sólo es un 33% de descuento y en la tercera un 50%.

Estudiante 5
Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en cada una de las ofertas (5,58€), entonces:
En la oferta del "3x2" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 3,72€.
En la oferta del "-70%" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,27€.
En la oferta de la "segunda unidad a mitad de precio" el precio de la unidad al comprar 3 productos es 4,65€.
Por tanto, el mejor descuento es el "3x2"

Estudiante 6
Respuesta a la tarea.

"3x2"	*"-70% segunda unidad"*	*"2ª unidad a mitad de precio"*
5.58×2=11.16€	70% de 5.58€=3.906	50% de 9.74=4.87
11.16÷3=3.72€	5.58-3.906=1.674	9.74-4.87=4.87
3.72€/unidad	5.58+1.674=7.254	9.74+4.87=14.61
	7.254÷2=3.62 €/unidad	14.61÷2= 7.305€/unidad

El mejor descuento es "-70% en segunda unidad"

Estudiante 7
Respuesta a la tarea.

Tomamos el mismo precio en las ofertas (20€)

En la oferta del "3x2", si me llevo 3 pago 40€.
En la oferta de "2ª unidad al -70%", pagamos 26€ y sólo me llevo 2.
En la oferta de "2ª unidad a mitad de precio", pagamos 30€ y sólo me llevo 2.
El mejor descuento es el "3x2"

Estudiante 8
Respuesta a la tarea.

En el "3x2" te regalan 1 de 3 productos. Por cada 1 te descuentan ⅓
En " -70% en la 2ª unidad" te regalan 0.7 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0.35
En "segunda unidad a mitad de precio" te regalan 0.5 de 2 productos, por cada 1 te descuentan 0.25
Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta del -70% en la 2ªunidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.

Estudiante 9
Respuesta a la tarea.

"3x2"	"-70% en la segunda unidad"	"2ª unidad a mitad de precio"
$\frac{2}{3}\rightarrow\frac{40}{60}$	$\frac{13}{20}\rightarrow\frac{39}{60}$	$\frac{3}{4}\rightarrow\frac{45}{60}$

El mejor descuento es "-70% en la segunda unidad"

Figura 2. Transcripciones presentadas en la tarea profesional

Análisis de datos

Los datos de este trabajo son las respuestas de los futuros profesores a la primera de las preguntas planteadas en la tarea profesional. Estos datos se han analizado siguiendo un procedimiento de carácter inductivo (Strauss y Corbin, 1994) en el que se han ido generando categorías a medida que se han ido analizando los datos, centrando nuestra atención en los elementos identificados por los futuros profesores en cada una de las resoluciones mostradas. Se ha procedido a triangular los análisis entre dos investigadores de modo que se han ido refinando las discrepancias en la clasificación. El análisis ha generado las siguientes categorías:

- Estudiantes que han realizado una identificación parcial: solo nombrando el elemento o reproduciendo retóricamente la información del documento teórico proporcionado sin aportar evidencias concretas de la respuesta.
- Estudiantes que han realizado una identificación completa aportando evidencias de las respuestas de los alumnos que justifican los elementos.
- Estudiantes que han identificado elementos solo en algunas resoluciones.
- Estudiantes que han identificado elementos en todas las resoluciones mostradas.

RESULTADOS

El análisis de los datos ha revelado que casi la totalidad de los estudiantes para profesor (17 de los 18 participantes) sólo han identificado elementos matemáticos en algunas de las resoluciones, no siendo capaces de hacerlo en los nueve casos. Sólo un estudiante ha identificado elementos en todas las resoluciones. Este resultado indica que la destreza de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes en el problema de comparación de razones fue difícil para los futuros profesores y dependió de los elementos matemáticos implicados en las respuestas.

	Estudiante 1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Naturaleza de la relación mult.	Escalar	Escalar	Funcional	Funcional	Escalar	Funcional	Escalar	Funcional	Escalar
Esquema de pensamiento	Parte-todo	Parte-todo	Parte-parte	Parte-todo	Parte-parte	Parte Parte	Parte todo	Parte-parte	Parte - parte
Referentes	Descuento/pago	Pago/descuento	Pago/compra	Porcentaje/descuento	Compra/pago	Compra/pago	Compra/descuento	Compra/regalo	———
Técnica de normalización	Metodo de la unidad	Uso de algoritmo de producto y comparación de diferencias	Construcción progresiva	Producto cruzado. Comparación	Precio unitario	Precio unitario	Relación entre cant.	Cociente	mcm mínimo común múltiplo
Nivel de interpretación	Nivel 0. Incoherente	Nivel 1.A. Comparan diferencias	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 2. Tendencia relativa Nivel 2.B. Dificultades en la elec.	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 1.B Ignora parte de la info.	Nivel 3. Respuesta relativa	Nivel 3. Respuesta relativa

Figura 3. Respuesta del EP2

Cinco de los 18 futuros profesores únicamente identifican parcialmente los elementos; es decir, no aportan evidencias concretas que apoyen sus afirmaciones. Un ejemplo es el estudiante para profesor EP2 (Figura 3), que simplemente nombra, sin aportar evidencia alguna, los elementos matemáticos que considera implicados en cada resolución.

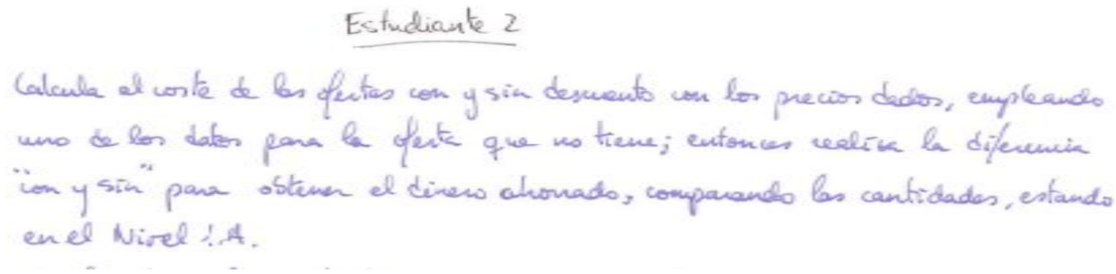
Los 13 futuros profesores restantes han identificado parcialmente los elementos en algunas resoluciones y en otras han hecho una identificación completa aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, el estudiante para profesor EP10 (Figura 4) muestra evidencias del elemento matemático *enfoque funcional* cuando escribe "tiene un enfoque funcional ya que está relacionando botellas con euros", en cambio identifica parcialmente otros elementos cuando menciona *el método del común múltiplo* y la estrategia de *construcción progresiva* sin ofrecer argumentos que justifiquen su elección.

ESTUDIANTE 3

Este estudiante tiene nivel 3, ya que interpreta el descuento como una cantidad relativa, estableciendo comparaciones relativas exitosas. Está utilizando el método del común múltiplo y tiene un enfoque funcional ya que está relacionando botellas con euros, se basa en una construcción progresiva.

Figura 4. Fragmento de respuesta del EP10

Por otra parte, los futuros profesores tuvieron más dificultades en identificar los elementos matemáticos en algunas resoluciones. 11 de los 13 futuros profesores que han realizado identificaciones completas en algunas resoluciones, identifican los elementos en la respuesta no relativa (respuesta 2) aportando evidencias. Por ejemplo, el EP5 (Figura 5), identifica el elemento "Hallan diferencias o no relativiza" cuando explicita "calcula el coste de las ofertas con y sin descuento con los precios dados…entonces realiza la diferencia 'con y sin' para obtener el dinero ahorrado", a su vez identifica la comparación de cantidades absolutas al señalar "comparando las cantidades" refiriéndose al dinero ahorrado.


Estudiante 2

Calcula el coste de las ofertas con y sin descuento con los precios dados, empleando uno de los datos para la oferta que no tiene; entonces realiza la diferencia "con y sin" para obtener el dinero ahorrado, comparando las cantidades, estando en el Nivel 1.A.

Figura 5. Fragmento de respuesta del EP5

Con respecto a las respuestas de tendencia relativa, únicamente dos futuros profesores han realizado identificaciones completas en las 4 resoluciones mostradas. Los 11 restantes- de los 13 que habían realizado identificaciones parciales y completas- aunque han realizado este tipo de identificación en alguna resolución de tendencia relativa, no han sido capaces de aportar evidencias en todas ellas. Por ejemplo, el estudiante EP7, al analizar la respuesta 5, evidencia el elemento *elección inadecuada de ítems* cuando afirma "al comparar descuentos de 3 ítems", en cambio, al analizar la respuesta 6, no nombra ninguno de los elementos matemáticos implicados.

De los 13 futuros profesores que han realizado alguna identificación completa, 7 lo han hecho en alguna respuesta relativa aunque sólo uno de ellos ha sido capaz de hacerlo para las 4 resoluciones mostradas. El estudiante para profesor EP15 aporta evidencias para alguna respuesta relativa pero no para otras. En el caso de la respuesta 1, identifica el elemento *enfoque funcional* poniendo la evidencia "ya que calcula la razón haciendo el cociente entre el descuento y las unidades de cada oferta". Sin embargo, para el caso de la respuesta 8 nombra los elementos: *enfoque escalar, relación parte-todo, método de la unidad* sin aportar evidencias.

Por tanto, los elementos que los futuros profesores han identificado de manera completa con mayor facilidad han sido: *hallan diferencias, comparan diferencias* – presentes en la respuesta no relativa – y *elección inadecuada de ítems, no unificación de precios, uso de referentes distintos* – implicados en las respuestas de tendencia relativa –.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es analizar cómo los futuros profesores de matemáticas identifican los elementos matemáticos en diferentes resoluciones de estudiantes de secundaria a un problema de comparación de razones. En concreto se ha utilizado un problema de comparación de ofertas comerciales en las que aparecían razones con diferente normalización y distinto referente.

Los resultados muestran que ningún futuro profesor ha sido capaz de identificar todos los elementos matemáticos presentes en las resoluciones de los estudiantes, aportando evidencias que respalden sus argumentos. Sin embargo, 13 de los 18 futuros profesores participantes fueron capaces de identificar los elementos matemáticos de manera completa (aportando evidencias de las respuestas) en al menos una resolución. Este resultado es relevante, ya que estos futuros profesores comienzan a centrar su mirada hacia aspectos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, la tarea profesional utilizada (un problema y diferentes resoluciones de estudiantes de secundaria con distinto nivel en la progresión de la comprensión del concepto) y el modelo de progresión dado como guía (documento teórico) puede haber contribuido a la estructuración de la mirada profesional. Por tanto, nuestra investigación aporta información para el diseño de entornos de aprendizaje en los programas de formación que favorezcan el desarrollo de esta destreza (Kupra et al., 2017; Nickerson et al., 2017).

Además, aunque los datos obtenidos indican que la destreza de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes en el problema de comparación de razones fue difícil para los futuros profesores, el desarrollo de esta destreza dependió de los elementos matemáticos implicados en las respuestas. Así, los elementos matemáticos relacionados con un pensamiento no relativo son los que han resultado más fáciles de identificar, mostrando evidencias concretas, para los futuros profesores. Otros elementos presentes en las respuestas de tendencia relativa, como son *elección inadecuada de ítems, no unificación de precios* y *uso de referentes distintos* también han sido identificados con facilidad por la mayoría de los estudiantes, siendo capaces de mostrar evidencias concretas que los sustentan. Estos tres elementos caracterizan las dificultades de cuatro de las respuestas de tendencia relativa mostradas. Con relación a los elementos implicados en las respuestas relativas, estos han sido los más difíciles de identificar por los futuros profesores. En la mayoría de casos los futuros profesores hacen referencia únicamente a la descripción de la estrategia empleada sin profundizar en los elementos matemáticos implicados en ella. Este resultado parece estar indicando que las respuestas más conceptuales (respuestas que implican conocer la relación de las cantidades, el tipo de razón o el esquema de pensamiento) son las más difíciles de identificar por los futuros profesores. Esto puede ser debido a que los futuros profesores tienen un conocimiento más procedimental de los conceptos matemáticos implicados en el razonamiento proporcional (Buforn, Llinares y Fernández, 2018). Sin embargo, para poder desarrollar las destrezas implicadas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es necesario que los futuros profesores tengan un conocimiento conceptual de los elementos matemáticos implicados. Como trabajo futuro se pretende examinar la relación entre el conocimiento que tienen los futuros profesores sobre la comparación de razones (examinando las resoluciones de los futuros profesores al problema) y cómo identifican los elementos matemáticos implicados en las resoluciones.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada, en parte, con el apoyo del Proyecto EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y en parte, con el apoyo del proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación a la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 76*(23), 229-251.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias 36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students’ mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matematica, 13*¸ 39-61.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods.* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Krupa, E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-72). London: Springer.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, N.Y: Sunny Press.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers, 3rd edition*. Nueva York: Routledge Taylor y Francis Group.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). *Novice teachers' attention to student thinking. Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Lobato, J. y Ellis, A. (2011). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Monje, J. (2017). *La re-constitución del objeto mental "relativamente" en futuros maestros* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Nickerson, S., Lamb, L. y LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 381-398). London: Springer.

Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 231-246.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks, Sage Publications.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

van den Kieboom, L. A., Magiera, M. T. y Moyer, J. C. (2017). Learning to notice student thinking about the equal sign: K-8 pre-service teachers' experiences in a teacher preparation program. En E. O. Schack et al. (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 141-159). Springer International Publishing AG.

van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS. ¿CÓMO SURGE UN MODELO?

Mathematical modelling within the process of solving contextualized problems. How does a model arise?

Montejo-Gámez, J.[a], Fernández-Ahumada, E.[b] y Adamuz-Povedano, N.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Córdoba

Resumen

Este estudio indaga en el proceso de resolución de problemas contextualizados en los que intervienen elementos de modelización matemática. La literatura previa incide en el carácter procesual de la modelización que implica cambios de representación y el desarrollo de ciertas habilidades. Estas características permitieron proporcionar una definición que establece tres dimensiones sobre las que enfocar las cuestiones de investigación a la hora de estudiar el proceso de modelización de profesores en formación inicial. El análisis combinado de registros de audio y escritos reveló la gran variedad de modelos que surgieron para abordar problemas abiertos, así como baja dedicación a la interpretación de los resultados entre los participantes. La importancia de la validación de los modelos quedó también de manifiesto.

Palabras clave: *modelización matemática, resolución de problemas, análisis de procesos.*

Abstract

This study looks into the process of solving contextualized problems involving mathematical modelling elements. Previous literature points to modelling as a process that entails both change of representations and development of certain skills. These features enabled to provide a definition that establishes three dimensions to focus research questions when examining modelling processes carried out by pre-service teachers. The combined analysis of audio and written records revealed a wide range of models to deal with open problems, as well as individuals' low levels of commitment to interpret results. The relevance of validating the models was also exposed.

Keywords: *mathematical modelling; solving problems; analysis of processes.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La sociedad global de la información que se está desarrollando durante los últimos años acentúa la necesidad de que los individuos cuenten con una formación matemática sólida que permita desarrollar una ciudadanía activa (Maaß y Gurlitt, 2010). Para responder a esta necesidad, la investigación en Educación Matemática y las políticas educativas internacionales vienen apostando por modelos educativos basados en el desarrollo de la competencia matemática, que promueven la aplicación del conocimiento matemático a la vida diaria (De Lange, 2003; OECD, 2013; Van den Heuvel-Panhuizen, y Drijvers, 2014). En los últimos años el debate sobre qué capacidades debe incorporar la competencia matemática apunta hacia destrezas relacionadas con la resolución de problemas abiertos presentados en contexto. Este tipo de actividades matemáticas generan situaciones que estimulan el desarrollo de procesos matemáticos como el razonamiento, la matematización y la generalización, promoviendo de esta manera el compromiso de los estudiantes con la comprensión y la aplicación de los contenidos matemáticos escolares (De Lange, 2003).

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). Gijón: SEIEM.

La resolución de problemas contextualizados está íntimamente ligada a la noción de modelización en Educación Matemática (Castro y Castro, 1997), de forma que el proceso de creación, uso e interpretación de un modelo matemático no solo incluye habilidades de resolución de problemas (Niss y Højgaard, 2011), sino que también promueve el pensamiento crítico y la reflexión sobre la importancia de las matemáticas (Kaiser, Blomhoj, y Sriraman, 2006). Desde esta perspectiva, la presente comunicación explora el proceso de modelización para analizar necesidades formativas de profesores en formación inicial. La primera dificultad que surge es cómo debe entenderse el término modelización matemática para la investigación, cuestión que se debate en la siguiente subsección.

Modelización en Educación Matemática. Enfoque adoptado y precedentes

Durante los últimos años se ha discutido el concepto de modelización desde enfoques muy diversos dentro de la Educación Matemática, por lo que no existe definición consensuada por los investigadores de modelización. No obstante, el análisis de las diferentes aproximaciones presentes en la literatura revela tres características complementarias entre sí y que se pueden conjugar para dar una definición operativa de modelización matemática útil en la presente investigación: (i) está asociada al proceso de resolución de problemas contextualizados. En este sentido, como se indicaba anteriormente, Castro y Castro (1997) señalaron que la modelización es “fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real” (p. 110). Por su parte, Borromeo-Ferri (2006) y Blum y Leiß (2007) propusieron esquemas teóricos basados en procesos cíclicos donde el proceso de modelización se identifica con una propuesta de solución a una situación problemática planteada (Borromeo-Ferri, 2006, proporcionó una revisión sobre otros esquemas que siguen este enfoque). De forma análoga, Ärlebäck (2009) utilizó diagramas centrados en la secuencia temporal de las tareas realizadas por estudiantes para describir el proceso de resolución de problemas de Fermi; (ii) involucra un cambio de lenguaje o de representación, ya sea entre el mundo real y las matemáticas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009) o entre diferentes descripciones matemáticas (García, Gascón, Higueras y Bosch, 2006). Esta característica de la modelización invita a la discusión sobre qué es un modelo matemático, cuestión que fue abordada por Less y Harel (2003), entre otros; (iii) está asociada al desarrollo de ciertas destrezas matemáticas. Bajo esta premisa, Niss y Højgaard (2011) contemplaron la modelización como una competencia matemática que debe trabajarse en la matemática escolar. En esta línea, Blomhøj (2004) describió la modelización como una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática. García et al. (2006), por su parte, hicieron hincapié en el doble valor didáctico de la modelización matemática, destacando que se puede utilizar como herramienta didáctica para la enseñanza de otros contenidos matemáticos o trabajar específicamente el desarrollo de la competencia de modelización matemática. La conjunción de las tres características destacadas anteriormente permite entender *modelización* en el contexto de esta investigación como *el proceso de descripción de una situación problemática dada que se desarrolla a partir de ciertas destrezas de los individuos y que permite utilizar las matemáticas para dar respuesta a la situación*. En este contexto, un *modelo* sería una descripción (que puede englobar diferentes representaciones) de una situación problemática que permite utilizar las matemáticas para darle respuesta.

La propiedad principal de la definición dada, que fue la que se asumió para este trabajo, es que presenta la modelización matemática como un proceso que evoluciona a lo largo del tiempo. Por tanto, para analizar este proceso deben distinguirse etapas dentro del mismo. En este sentido, el ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007) distingue siete fases en las que se divide el proceso de modelización: comprensión de la tarea (F1), simplificación y estructuración (F2), matematización (F3), trabajo matemático (F4), interpretación (F5), validación (F6) y exposición (F7). Estas etapas idealmente conforman un proceso cíclico, pero la investigación revela que la complejidad de las relaciones que se establecen al resolver problemas contextualizados rompe este orden *a priori* esperable (Ärlebäck, 2009; Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014). A pesar de ello, el ciclo de Blum y Leiß proporciona categorías para focalizar el análisis del proceso de modelización que son de utilidad en este estudio, que busca dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo surge la resolución de un problema matemático planteado en contexto?

Existen diversos precedentes que centraron el interés en el análisis del proceso de modelización. En Educación secundaria, Ärlebäck (2009) utilizó un diagrama de evolución temporal para estudiar las praxeologías desarrolladas por alumnos que resolvieron problemas de Fermi. Gallart et al. (2014) estudiaron el transcurso de las acciones de estudiantes para resolver problemas abiertos y el efecto de utilizar este tipo de tareas sobre el rendimiento en pruebas PISA. Socas, Ruano y Hernández (2016) analizaron los errores cometidos por los alumnos resolviendo problemas de modelización. En el contexto de formación de profesores de secundaria, Bukova-Güzel (2011) examinó las propuestas planteadas por los participantes a la hora de proponer y resolver problemas de modelización matemática e hizo un seguimiento de las dificultades encontradas en las fases del ciclo. Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-Güzel (2017) llevaron a cabo un seguimiento del proceso de modelización según las fases del ciclo de Blum y Leiß ante un problema que involucraba razonamiento geométrico y medida.

OBJETIVOS

De forma general, se busca conocer cómo se determina la propuesta de solución ante un problema abierto y contextualizado que ofrecen profesores de matemáticas en formación inicial, a partir del análisis del proceso de modelización matemática desde las tres dimensiones consideradas en la literatura, con el fin de extraer consecuencias para la formación de profesorado. Específicamente se persigue:

O1: Conocer las causas que conducen a ofrecer una propuesta de resolución de una situación abierta presentada en contexto realista desde el análisis de la secuenciación de eventos que dan lugar a dicha propuesta.

O2: Comprender el proceso de modelización a partir de la descripción de las fases del ciclo de Blum y Leiß, los modelos utilizados y las dificultades encontradas por los docentes en formación inicial.

METODOLOGÍA

Esta investigación se planteó desde un enfoque pragmático (Peirce, 1878/1992), que condujo a diseñar la investigación buscando acceder al proceso de resolución de problemas y describir el comportamiento de los profesores en formación inicial para una posterior lectura en clave formativa. En consecuencia, se adoptó una aproximación cualitativa basada en el análisis de registros de audio y conjugando dos visiones del transcurso del tiempo. Concretamente, el primer objetivo específico se abordó desde una perspectiva longitudinal al tiempo. Debido a la extensión de esta comunicación, sin embargo, se ofrecen resultados solo de un grupo para ilustrar el tipo de respuesta que ofrece el análisis planteado. A su vez, el segundo objetivo se afrontó de forma transversal al tiempo, lo que permite ofrecer resultados sintetizados sobre toda la muestra analizada.

Muestra, procedimiento de recogida de información e instrumento utilizado

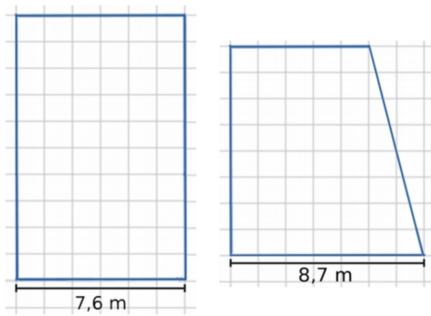
La muestra estuvo compuesta por 22 docentes en formación inicial, 9 de ellos matriculados en el máster de formación del profesorado (MFP) y 13 matriculados en el primer curso del grado de Educación primaria (GEP). Los participantes trabajaron por equipos organizados de la siguiente forma: grupo 1 (2 hombres y 2 mujeres de GEP), grupo 2 (4 mujeres y 1 hombre de GEP), grupo 3 (3 mujeres y 1 hombre de GEP), grupo 4 (2 hombres y 1 mujer de MFP), grupo 5 (3 mujeres de MFP) y grupo 6 (2 hombres y 1 mujer de MFP). Todos ellos trabajaron para resolver una situación abierta presentada en un contexto escolar. Esta actividad (Figura 1) fue diseñada siguiendo los principios de la matemática realista (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) y de las *Modelling Elicit Activities* (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000), con el objeto de estimular la modelización matemática asociada al pensamiento visual en respuesta a un análisis de necesidades formativas de maestros en formación inicial de Educación primaria (Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano y León-Mantero., 2017). El resultado del procedimiento de recogida de información proporcionó 6 registros escritos que recogieron las soluciones proporcionadas por los participantes y 6 grabaciones de audio que recogieron el proceso completo de desarrollo de la solución propuesta por cada grupo. No hubo interacciones entre los diferentes grupos.

Procedimiento de análisis y variables

Para analizar los procesos de modelización se ha llevado a cabo un análisis de las grabaciones de audio y se han utilizado los registros escritos como herramienta auxiliar. El procedimiento siguió las pautas marcadas por Andrews (2013), que consisten en una audición inicial de cada registro para obtener la transcripción de todas las intervenciones, seguida por una segunda audición en la que se identificaron las fases del ciclo de modelización, finalizando con una tercera audición dedicada a la contabilización de tiempos invertidos en cada fase. En una segunda etapa, haciendo uso de las transcripciones y de los registros escritos, se analizaron las interacciones para identificar los modelos utilizados y las dificultades surgidas en torno a cada uno de los modelos, así como para consolidar la identificación de las fases.

El análisis del proceso se centró en la evolución temporal de los grupos, focalizando el interés sobre la secuenciación de las fases, las causas de la aparición de los diferentes modelos y las dificultades que condicionaron la propuesta de resolución ofrecida. Como se comentó anteriormente, en esta comunicación se muestra tan solo el análisis del proceso del grupo 6 (2 hombres y 1 mujer) por razones de espacio. El segundo objetivo se abordó mediante el recuento de los tiempos totales invertidos en cada fase, la categorización de los modelos considerados y la influencia de las dificultades sobre la configuración de los mismos.

"*El director del CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar* ***exactamente la cuarta parte del aula*** *y estar delimitadas con una valla especial. El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más, por lo que ha pedido a los maestros de infantil que le expliquen si se puede habilitar la ludoteca en su aula y cómo hacerlo.*



Aula de 3 años ***Aula de 4 años***

a) El maestro de los niños de 3 años cree que la ludoteca podría estar en su aula (tenéis debajo un plano del aula a escala), pero no sabe cómo situarla. Justificad razonadamente si lleva razón y, en caso de que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.

b) Aplicad el método obtenido en a) para saber si puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los diez metros de valla y cuánta valla sobraría. El plano a escala de este aula lo tenéis a continuación.

c) Si el método aplicado en a) no funciona en el aula de 4 años, decid por qué e inventad uno nuevo que sí funcione en las dos aulas. Usadlo para explicar cómo habría que situar la valla en cada una de las aulas y cuánta valla sobraría en cada caso."

Figura 12. Tarea utilizada en el presente estudio

RESULTADOS

Análisis del proceso de modelización

El grupo analizado empleó un total de 37 minutos en proporcionar un método para situar la ludoteca en un aula cualquiera (véase tarea propuesta en la Figura 1). El proceso (Figura 2) se inició con la lectura del enunciado del apartado (F1) tras la que, a propuesta de una participante, surgió el modelo A (F3), consistente en un problema de optimización del perímetro en el que la ludoteca ocupaba una esquina del aula. Este modelo no se tuvo en consideración en ese momento, ya que otro participante propuso el modelo B, consistente en dividir el largo del aula en cuatro partes iguales y utilizar tres paredes para delimitar la ludoteca. La introducción de este segundo modelo suscitó alternancia entre diferentes fases: primero se validó el modelo para esta situación (F6), lo que generó dudas sobre la facilidad de la tarea. Esto les llevó a hacer cálculos para representar su solución (F4) y a volver a la lectura del enunciado para asegurarse de que habían entendido bien (F1), lo que les permitió validar el modelo B para el primer apartado (F6). A continuación, leyeron el segundo apartado (F1) y rápidamente se dieron cuenta de que el modelo B no era aplicable a la segunda aula (F2). No obstante, se dieron cuenta de que debían utilizar otras figuras geométricas para determinar un nuevo modelo y que era necesario dividir el área de la segunda aula en cuatro (F3), lo que les llevó a calcular el área de la segunda aula y, como consecuencia, de la segunda ludoteca (F4). Este cálculo les llevó a considerar el modelo C (F3), que consistía en un cuadrado apoyado en una esquina del aula de lado la raíz cuadrada de este área. Al contemplar este nuevo modelo, los participantes calcularon las dimensiones reales de su propuesta (F4) y discutieron cómo argumentar la imposibilidad de aplicar el modelo B en este caso (F7) y cómo describir la solución que aportaba el nuevo modelo (F1 y F7). De esta forma, el grupo pasó al último apartado (F1), en el que los participantes comenzaron discutiendo sobre la validez del modelo C en el caso más general (F6). Llegaron a la conclusión de que sí era válido y discutieron cómo redactar su aplicación a la primera aula (F7). La aplicación del modelo C al primer apartado les llevó a hacer cálculos (F4) cuyos resultados, al ser erróneos, condujeron a invalidar el modelo C para la primera aula (F6). Esta situación llevó al grupo a la búsqueda de una alternativa (F3). Una participante propuso el modelo D, basado en un rectángulo situado en una esquina de área la cuarta parte del aula y que necesitaba 10 m o menos de valla. Otro compañero interpretó el modelo D utilizando un caso particular, modelo E, que consistió en el rectángulo cuyas dimensiones son las mitades de las dimensiones del aula y que fue invalidado ya que requería utilizar 12,76 m de valla (F6). Esta circunstancia condujo a una discusión (F3) en la que surgieron alternativas basadas en triángulos rectángulos como el modelo F (escaleno) o el modelo G (isósceles), que el grupo consideró óptimo respecto al gasto de valla. Los participantes iniciaron la validación de G para los dos apartados y la descripción escrita del mismo (F6 y F7), hasta que una participante se percató de que el modelo C había sido erróneamente descartado. Esto hizo que el grupo volviera a considerar este modelo y lo validara para el primer apartado (F6). De esta forma los compañeros de grupo aceptaron el modelo C y lo propusieron como modelo general, que es el que describieron en el registro escrito (F7).

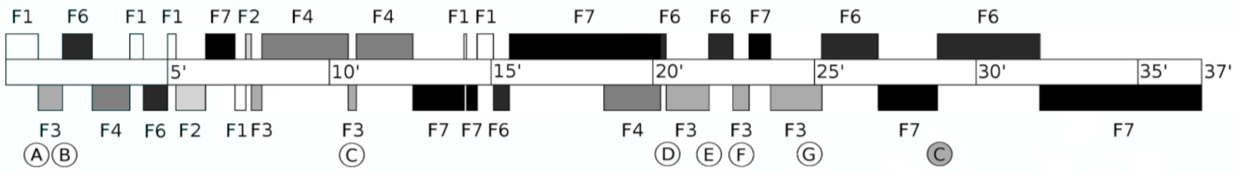


Figura 2. Evolución temporal del proceso seguido por el grupo 6 en términos de las fases del ciclo de modelización y de los modelos surgidos

Descripción de los modelos surgidos

- **Fases del ciclo de modelización y tiempo invertido en las mismas**

El tiempo que necesitaron los grupos para materializar una propuesta de solución fue de aproximadamente 40 minutos, excepto el grupo 3 que necesitó una hora y quince minutos.

Las distribuciones de los tiempos invertidos por los grupos en las diferentes fases fueron, en términos generales, similares entre sí. No obstante, la elaboración de los modelos utilizados por los grupos 2 y 5 condujeron a un mayor esfuerzo en la fase de matematización, ya que los recintos se fueron construyendo siguiendo estrategias de ensayo y error, y la consiguiente menor dedicación al trabajo matemático. Por lo demás, la contabilización de los tiempos invertidos por los participantes en cada una de las fases del ciclo reveló predominio de las fases de matematización, de exposición y de trabajo matemático (la Figura 3 muestra la distribución completa). Por el contrario, los participantes dedicaron menor tiempo a la validación, a la simplificación y prestaron especial poca atención a la interpretación.

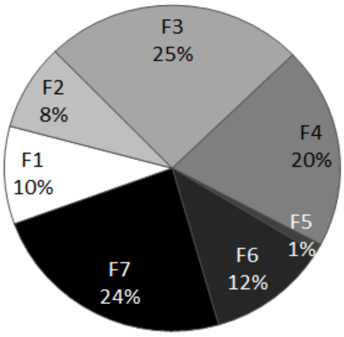


Figura 3. Distribución del tiempo total empleado por los participantes según las diferentes fases del ciclo de modelización

- **Modelos consideradas a lo largo de los procesos**

Los modelos utilizados por los participantes para modelizar la situación a lo largo de los procesos de resolución presentaron mucha riqueza de ideas y se pueden distribuir en cuatro categorías, que van desde los enfoques más geométricos a otros más algebraicos. La primera de ellas, puramente geométrica, engloba distintas aproximaciones que buscaron dividir las aulas en cuatro partes iguales (Figura 4a). La segunda categoría está constituida por modelos basados en el cálculo de la cuarta parte del área de las aulas y la construcción de recintos que ocupaban dicha cuarta parte, comprobando para cada recinto conseguido si se disponía de valla suficiente (Figura 4b). Las estrategias de la tercera categoría eligieron una figura geométrica apoyada en una esquina (cuadrados, rectángulos, triángulos o círculos) y buscaron ajustar una o varias dimensiones de esa figura para conseguir el área deseada (Figura 4c) para después comprobar si se disponía de valla suficiente. Finalmente, los enfoques más algebraicos (cuarta categoría) buscaron incluir la condición del uso de 10 m de valla o menos junto a la restricción sobre el área (Figura 4d).

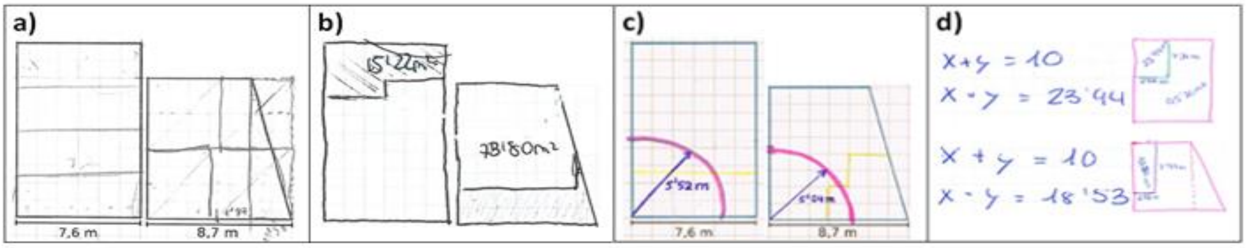


Figura 4. Ejemplos de los modelos empleados

De todas las ideas surgidas durante los procesos de resolución de la tarea, los modelos que finalmente se propusieron como solución fueron:

Grupo 1. Sistema de ecuaciones basado en un rectángulo de área la cuarta parte del aula (categoría 4). Este modelo resultaba adecuado, pero condujo a una solución que no satisfacía la condición del área (debido a errores en los cálculos). Los participantes de este grupo trabajaron fundamentalmente de forma algebraica considerando decimales.

Grupo 2. Polígono irregular construido sobre tres paredes del aula (categoría 2). Al igual que en el caso anterior, el modelo era viable pero la solución aportada contenía errores de cálculo. Este grupo trabajó tanto con decimales como con la cuadrícula que se aportaba en el dibujo que acompañaba la tarea, ya que buscaron el número de cuadrados que debían englobar para cumplir con la condición de la cuarta parte del área.

Grupo 3. Rectángulo apoyado en una esquina del aula y de área la cuarta parte de la misma (categoría 2). Este modelo aportó una solución correcta a la situación planteada, su enfoque fue esencialmente geométrico pero utilizando unidades reales.

Grupo 4. Polígono irregular construido sobre una esquina del aula (categoría 2). Este modelo, de enfoque geométrico resultó válido y la solución aportada en base al mismo, correcta.

Grupo 5. Cuarto de círculo apoyado en una esquina (categoría 3). El grupo 5 propuso este modelo y resolvió la situación correctamente. Para la solución aportada, el grupo trabajó exclusivamente de forma algebraica y utilizando decimales. No obstante, durante el proceso trabajó simultáneamente con la cuadrícula y haciendo cálculos para obtener su correspondencia en metros cuadrados.

Grupo 6. Cuadrado apoyado en una esquina (categoría 3). Este modelo, con enfoque algebraico, también resultó adecuado y el grupo llegó a una solución correcta.

- **Dificultades encontradas y cuestiones que surgieron**

En cuanto a las dificultades surgidas, los participantes del estudio evidenciaron dudas en el trabajo con números decimales y en el redondeo. En este sentido, el grupo 2 se preguntó si el significado de la palabra *"exactamente"* en el enunciado obligaba a considerar todos los decimales, mientras que el grupo 4 optó por evitar decimales, usando expresiones de tipo 7,6/6 para expresar el lado de la cuadrícula en unidades reales. Por su parte, el grupo 3 se planteó la fiabilidad del redondeo utilizado al constatar que uno de sus modelos propuestos quedaba invalidado por una décima. Del mismo modo, los participantes mostraron indicios de baja capacidad de cálculo y dependencia de dispositivos para resolver operaciones sencillas (el grupo 3, incluso, lo utiliza para multiplicar por 10). De hecho, se observaron errores en todos los grupos a la hora de ejecutar cálculos de áreas y perímetros de rectángulos, así como en la manipulación de expresiones algebraicas. Estos condujeron en ocasiones a soluciones incorrectas o a conflictos que dificultaron el trabajo del equipo. Esto ocurrió con los grupos 1 y 6: el primero trabajó con un modelo adecuado pero no validó los resultados obtenidos mientras que el grupo 6 abandonó momentáneamente un modelo válido debido a que obtuvo un valor incorrecto para las dimensiones de la ludoteca. Otro foco de dificultades que mostraron los profesores en formación está relacionado con la concepción de área y la conexión entre las dos unidades naturales que ofrecía la tarea (Sistema Métrico y área de la cuadrícula). En este sentido, el grupo 2 buscó calcular el número de cuadrados del aula rectangular dividiendo su área (en m²) entre el lado del cuadrado (en m). Por su parte, el grupo 5 expresó explícitamente dudas sobre si la "*cuarta parte*" mencionada en el enunciado se refería al área *"en metros cuadrados o en cuadraditos"*. En el grupo 4, a su vez, se cuestionó la imposibilidad de repetir el método aplicado a la segunda aula si el plano de esta estaba dibujado a una escala diferente. El uso adecuado de las unidades fue otra cuestión que generó discusión, sobre todo en los estudiantes del grado de Educación primaria. Concretamente, el grupo 2 se planteó expresamente la cuestión de qué unidad utilizar para trabajar, mientras el grupo 1 llegó a cuestionar la validez de su planteamiento algebraico (Figura 4d) al observar que una de sus ecuaciones estaba expresada en unidades cuadradas y otra en unidades lineales. A diferencia de los cálculos erróneos, este tipo de dificultades se solventaron o evitaron de manera que no fueron determinantes para la propuesta de resolución de los grupos. El tercer conjunto de dificultades encontradas por los participantes está relacionado con la comprensión del enunciado. A este respecto, el grupo 5 manifestó dudas sobre si la aplicación del mismo modelo debía implicar la obtención de una solución idéntica. Otra cuestión que se derivó de la lectura del enunciado fue la posibilidad de usar toda la valla, duda que expresaron los grupos 1 y 5, al abordar el problema. Esta visión contrasta con la de los grupos 4 y 6, que asumieron implícitamente la tarea como un problema de optimización de la valla. Especialmente significativa fue la duda surgida entre los componentes del grupo 3. Asumieron que *"ocupar exactamente la cuarta parte"* implicaba dividir las aulas en cuatro partes idénticas, lo que les supuso una dificultad para abordar el segundo apartado. Finalmente, deben destacarse las dificultades surgidas del conflicto entre la tarea y las expectativas de los participantes. Los grupos 6 y 2 hicieron alusiones explícitas a que podrían estar equivocándose porque la tarea les resultaba muy sencilla. De hecho, dos grupos de alumnos del máster de secundaria manifestaron preocupación porque el modelo obtenido es "*muy rebuscado*" o "*por ensayo y error*" (grupo 4) o "*lo hemos hecho como niños chicos*" (grupo 6). Por el contrario, los integrantes del grupo 1, del grado de Educación primaria, se mostraron preocupados porque su solución no era apropiada para alumnos de primaria.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta comunicación presenta un análisis empírico de la modelización matemática vista como un proceso asociado a la resolución de problemas contextualizados. Las investigaciones desarrolladas sobre modelización en Educación Matemática inciden en sus dimensiones temporal, de representación y competencial, características que permitieron proporcionar una definición novedosa que establece tres dimensiones sobre las que enfocar las cuestiones de investigación. La aplicación de esta noción permite indagar en el proceso de modelización de profesores en formación inicial, lo que abre vías de investigación por explorar en el campo de la formación del profesorado de matemáticas. Un procedimiento basado en audiciones repetidas de las interacciones entre participantes (Andrews, 2013) en combinación con el análisis de registros escritos permitió aportar información sobre los elementos que intervienen en la propuesta de un determinado modelo. Las fases del ciclo de modelización proporcionaron etapas a las que prestar atención específica.

Los resultados del estudio aportan información relevante para entender las causas que conducen a un grupo a proporcionar cierta solución a un problema. El análisis del proceso seguido por un grupo reveló gran riqueza de ideas válidas que no se consideraron o materializaron, así como un nivel alto de fluidez en las interacciones entre iguales a la hora de abordar un problema contextualizado. Las fases de Blum y Leiß no se desarrollaron respetando su carácter cíclico, de acuerdo a lo señalado por Ärlebäck (2009), Blum y Borromeo-Ferri (2009) y Gallart et al. (2014). Se encontró también desequilibrio entre los tiempos invertidos en las mismas, constatándose muchos periodos de tiempo dedicados a cálculos relacionados con cambios de unidades (trabajo matemático), propuestas de diseño de la ludoteca (matematización) y, sobre todo, a explicarse entre ellos y escribir la propuesta (exposición). Por el contrario, los participantes dedicaron poca atención a la validación y escaso tiempo a interpretar sus modelos o soluciones. Estos resultados pueden deberse a las características de la tarea, que por una parte solicitaba una descripción completa de los modelos (promoviendo las explicaciones y la redacción) y por otra parte permitió a los grupos trabajar matemáticamente sin perder la conexión con el contexto del problema. En cuanto a los modelos utilizados, se encontraron diversos diseños válidos para la ludoteca y no se detectaron preferencias generalizadas por enfoques geométricos ni por aproximaciones algebraicas. Del mismo modo, los participantes mostraron preferencias equilibradas en cuanto al uso de unidades del sistema métrico o de la escala para afrontar la tarea planteada. En este sentido, no se detectaron tendencias diferenciadas entre los maestros y los profesores de secundaria en formación inicial (a pesar de las diferencias formativas). En relación con las dificultades encontradas en los procesos, se ha descubierto facilidad para generar propuestas de modelos, pero incapacidad operativa general en la fase de trabajo matemático a la hora de hacer cálculos y algunas dudas en la concepción de área o en el manejo de resultados de mediciones con diferentes unidades, que fueron más acusadas en los alumnos del grado de Educación primaria. Estos resultados están parcialmente de acuerdo con los obtenidos por Hıdıroğlu et al. (2017), que mostraron dificultades de los profesores en formación dentro de ambas fases. Respecto a la fase de validación, sin embargo, los hallazgos de este estudio están en la línea de Hıdıroğlu et al. (2017), como con Gallart et. al (2014) y Bukova-Güzel (2011), aunque son menos significativos: en este caso los participantes dedicaron poco tiempo a validar y en ocasiones, no fueron conscientes de que debían hacerlo. Al igual que se señaló respecto a la fase de interpretación, es posible que la fuerte conexión con el contexto que permitió mantener la tarea objeto de estudio tenga influencia sobre estos resultados, debe indagarse más en este respecto.

Del presente estudio se desprenden consecuencias de interés en la formación del profesorado de matemática. Tanto en el caso de Primaria como en Secundaria se ha observado la necesidad de trabajar situaciones de medida sobre el contexto de trabajo, especialmente en lo que se refiere al significado de unidad de medida y a la medición directa. También ha quedado de manifiesto la importancia de trabajar situaciones de optimización perímetro-área. En el caso del profesorado de Secundaria, además, se ha constatado la idoneidad de trabajar situaciones de optimización dentro de un contexto, que aleje de la noción abstracta de derivadas y establece andamios para comprender los problemas de optimización y la utilidad de herramientas abstractas como las derivadas. Todas estas pautas pueden recogerse en actividades de modelización adecuadas, que pueden utilizarse como una herramienta metodológica (García et al., 2006). Por último, la riqueza de información que han aportado los registros de audio deja de manifiesto su utilidad como herramienta que permite encontrar ejemplos de actuaciones útiles para la formación didáctica del profesorado de matemáticas.

Para concluir es necesario señalar algunas limitaciones que se detectaron durante la investigación y deberán paliarse en futuros trabajos. Las más relevantes afectan a la validez externa de los resultados hallados. En primer lugar, es destacable la fuerte inversión de tiempo que requirió el análisis según la metodología empleada. La alta complejidad de las interacciones que se estudiaron y el procedimiento reiterativo de observación permitieron obtener gran riqueza de información, pero es necesario encontrar herramientas para analizar el proceso que permitan ampliar la muestra considerada. En segundo lugar, la tarea concreta empleada pudo repercutir en los resultados de manera determinante. Como se ha señalado previamente, el presente análisis dejó dudas sobre si diferentes enunciados de la misma tarea hubieran alterado el tiempo invertido en las fases de interpretación o validación. En este sentido es interesante estudiar la modelización desde la modulación de diferentes variables de la tarea: la formulación de la tarea o la inclusión o eliminación de la escala, de la cuadrícula o de la representación pictórica son variables que deben tenerse en cuenta. El efecto de la tarea también puede condicionar el comportamiento dentro de una misma fase. Por ejemplo, 'matematizar' implicó diferentes acciones en grupos que ofrecieron diferentes modelos. Sería de gran interés discernir qué acciones se pueden encontrar en cada fase del ciclo, para lo que es necesario disponer de problemas de diferente índole y muestras diversas. Un procedimiento basado en la búsqueda de categorías emergentes podría ayudar a establecer subfases dentro del ciclo de modelización que serían de utilidad para sistematizar el análisis. Se emplaza esta posibilidad para futuros trabajos.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological theory of didactics. En M. Pytlak, T. Rowland y W Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7),* (pp. 1010-1020). CERME: Rzeszów (Poland).

Andrews, P. (2013). Finnish Mathematics Teaching from a Reform Perspective: A Video-Based Case-Study Analysis. *Comparative Education Review, 57*(2), 189-211.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling. A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems, *Teaching Mathematics and Its Applications, 30*, 19-36.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. En B. L. Madison y L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: The National Council on Education and the Disciplines.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, *38*(3), 226-246.

Hıdıroğlu, Ç. N., Dede, A. T., Kula-Ünver, S. y Bukova-Güzel, E. (2017). Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(3), 873-892.

Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 82-85.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5,* 157-189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers, En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591-646.

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2010). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, January 28th–February 1st March 2009, Lyon (France) (pp. 1941-1950). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.

Peirce, C. S. (1878/1992). How To Make Our Ideas Clear. En N. Houser y C. Kloesel (Eds.), *The Essential Peirce 1 (*pp. 124-141). Bloomington: Indiana University Press.

Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Av. de Investigación en Educación Matemática, 9,* 21- 41.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Amsterdam: Springer.

CÓMO INTERPRETAN ESTUDIANTES PARA MAESTRO RESPUESTAS DE ALUMNOS DE PRIMARIA A PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES

How prospective teachers interpret primary students' answers to fractions division-measure problems

Montero, E.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]ESCUNI Centro Universitario de Magisterio, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta comunicación es caracterizar la interpretación que hacen estudiantes para maestro (EPM) de las respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Los participantes fueron 21 EPM del tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria, que participaron en un experimento de enseñanza, que tenía como objetivo desarrollar una mirada profesional en el dominio de las fracciones y sus operaciones. Los EPM realizaron las siguientes tareas: resolver problemas, y anticipar y analizar respuestas de alumnos de Primaria. Se les proporcionó información teórica sobre la progresión en el desarrollo de los problemas de división-medida basada en los trabajos de Empson y Levi (2011). Los resultados muestran que al final del experimento los EPM han ampliado su repertorio de las estrategias usadas por los alumnos de Primaria y han mejorado la interpretación de las mismas.

Palabras clave: *fracciones, problemas de división-medida, mirada profesional, progresión en el aprendizaje.*

Abstract

The purpose of this communication is to characterize the interpretation of pre-service teachers (PST) to the answers of Primary students to fractions division-measure problems. The participants were 21 PST enrolled in the 3rd year of undergraduate studies in Primary Education. The experiment was focused in developing their professional noticing in fractions and their operations. PST did the following tasks: solving problems, and anticipate and analyze Primary students' answers. They were provided with theoretical formation on the progression of the strategies applied to solve fractions division-measure problems, based in the works of Empson and Levi (2011). Results show that PST expanded their repertory of the strategies used by the Primary students as well as a better interpretation of such strategies.

Keywords: *fractions, division-measure problems, professional noticing, progression in teacher knowledge.*

INTRODUCCIÓN

Una de las tareas profesionales de los maestros es saber interpretar y dotar de significado las respuestas de los estudiantes, la cual es considerada una de las destrezas de la "mirada profesional" (van Es y Sherin, 2008; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Estudios previos han mostrado que los maestros pueden mejorar la "mirada profesional" sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, aunque ello no sea fácil, y que se puede comenzar a abordar en los programas de formación inicial. Evidencias de este desarrollo se pueden encontrar en las investigaciones de Fernández, Llinares y Valls (2013), en el contexto de la proporcionalidad con futuros maestros de Primaria.

Montero E. y Callejo, M. L. (2018). Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 378-386). Gijón: SEIEM.

Uno de los dominios matemáticos en los que se ha mostrado que tanto los alumnos de primaria como los propios estudiantes para maestro (EPM) tienen dificultades es el de las estructuras multiplicativas, y en particular los problemas de división-medida (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002). En esta comunicación nos centraremos en los problemas de división-medida con fracciones, correspondientes a la estructura de «isomorfismo de medidas» (Vergnaud, 1994).

Pocas investigaciones se han centrado en cómo interpretan los EPM problemas con fracciones (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016) y lo han hecho en la línea de caracterizar el conocimiento que utilizan los EPM cuando resuelven tareas profesionales, pero no de desarrollar este conocimiento. Fernández, Callejo y Márquez (2012) propusieron un problema de división-medida con fracciones a EPM y les pidieron valorar cuatro respuestas de estudiantes de Primaria a este mismo problema; los resultados muestran que hubo EPM que no resolvieron el problema correctamente pero, en cambio, supieron interpretar y valorar las respuestas de los estudiantes y, por otro lado, algunos EPM tuvieron dificultad para interpretar y valorar respuestas con procedimientos incorrectos pero resultados correctos o que utilizaban procedimientos distintos a los que ellos habían empleado. Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014) propusieron a EPM resolver un problema de reparto con números naturales cuyo resultado es una fracción e interpretar las respuestas de siete estudiantes; los resultados muestran la necesidad de profundizar en el conocimiento que los EPM tienen sobre las fracciones, como por ejemplo no expresar la unidad de medida; por otra parte algunos EPM mostraron dificultades para comprender e interpretar las estrategias de los estudiantes, en particular las que eran diferentes a los que ellos habían utilizado. Los resultados de ambos trabajos muestran la importancia de desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza (MKT) para que los EPM puedan interpretar las respuestas de los estudiantes y poder proponerles tareas para que avancen en su comprensión.

En esta comunicación nos centramos en caracterizar la interpretación que hacen EPM de las respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Estos EPM habían participado en un experimento de enseñanza con el objetivo de desarrollar la mirada profesional sobre este tipo de problemas.

MARCO TEÓRICO

En los últimos años, la adquisición y el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" es un objetivo de los programas de formación y una línea de investigación en Didáctica de la Matemática. Van Es y Sherin (2008) han subrayado la importancia de identificar lo que es relevante en una situación de enseñanza-aprendizaje, usar el conocimiento del contexto y hacer conexiones entre los eventos específicos y los principios más amplios. Por su parte Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la competencia docente "mirar profesionalmente" centrándose en el pensamiento matemático de los niños y han señalado tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) decidir las acciones a desarrollar en la clase.

Para desarrollar estas destrezas es importante que los futuros maestros tengan referencias en las que apoyarse, como la progresión en el desarrollo de la comprensión de los conceptos o procedimientos matemáticos. En el contexto de las operaciones con fracciones, Empson y Levi (2011) han elaborado una progresión en el desarrollo de las estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones, dentro de los problemas que denominan de "grupos múltiples". Esta progresión consta de tres etapas e indica cómo van evolucionando las estrategias a lo largo del tiempo.

Modelado directo y Adición repetida. Se representa cada grupo fraccionario, ya sea dibujando o por una fracción. Por ejemplo, en el problema siguiente "Tengo 12 chocolatinas y quiero dar ¾ de chocolatina a cada niño, ¿a cuántos niños puedo dar?", se divide cada chocolatina en cuartos, se agrupa 3 cuartos juntos que se dan a 1 niño. Se continúa este proceso hasta que se usen todos los cuartos en que se han dividido las 12 chocolatinas. Como hay 16 grupos de ¾, se puede dar a 16 niños.

Estrategias de agrupamiento y combinación [pensando aditivamente]. En este caso no se representa cada grupo fraccionario sino que se crea un agrupamiento más eficiente al combinar grupos fraccionarios. Se utiliza estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo: 3 chocolatinas para 4 niños; 3 chocolatinas más, 4 niños más, etc.

Estrategias multiplicativas [con proporcionalidad, proceso constructivo, o directamente con multiplicación]. Se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la multiplicación. Por ejemplo: 3 chocolatinas para 4 niños. Si tenemos 12 chocolatinas, hay 4 grupos de 3 chocolatinas, luego se puede dar a 4 x 4 = 16 niños.

En esta progresión subyace la idea de construir el concepto de fracción como cantidad usando el concepto de unidad iterativa (Steffe y Olive, 2010). En el ejemplo de la primera estrategia se usa la fracción unitaria ¼ que se va iterando sucesivamente; cada tres iteraciones se tiene un grupo de ¾; se termina las iteraciones cuando se alcanza 12 unidades. En la segunda se utiliza una fracción no unitaria, ¾, que se va iterando hasta llegar a 12 unidades. En la tercera hay un salto cualitativo respecto de las anteriores, pues se pasa de estrategias aditivas a multiplicativas, usando la idea de proporcionalidad.

En este contexto nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo anticipan EPM de Primaria respuestas de niños a un problema de división-medida con fracciones?
- ¿Cómo clasifican EPM de Primaria las estrategias empleadas por niños de 5º Primaria resolviendo dos problemas de división-medida con fracciones?
- ¿En qué medida la anticipación y las tareas profesionales realizadas en el experimento de enseñanza han ayudado a los EPM a clasificar las estrategias de los estudiantes de Primaria?

MÉTODO

Los participantes fueron 21 estudiantes para Maestro en Educación Primaria que estaban cursando la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II" de 3er curso del Grado en Maestro en Educación Primaria. Esta asignatura incluye dos bloques: i) Fracciones y ii) Magnitudes y su medida.

Para el bloque de las fracciones se diseñó un experimento de enseñanza que se desarrolló en 8 sesiones de 2 horas. Se han seleccionado aquellos EPM que participaron al menos en 6 sesiones y asistieron a las dos sesiones en que se recogieron los datos de la investigación.

El objetivo del experimento de enseñanza era: Desarrollar en los EPM una mirada profesional del pensamiento matemático de los alumnos sobre las fracciones y sus operaciones. Para desarrollar esa mirada se trabajó con los EPM una propuesta de iniciación a las fracciones (Empson, 1995) y una progresión de las estrategias de resolución de problemas de división-medida (Empson y Levi, 2011).

En las cuatro primeras sesiones se le pidió a los EPM analizar las estrategias empleadas por niños de Primaria en problemas de reparto equitativo donde el resultado es una fracción. Trabajaron en grupos de 2 o 3 y luego discutieron en gran grupo. Disponían de un documento teórico: "*Using Sharing Situations to help children learn fractions*" (Empson, 1995), que propone los problemas de reparto como una vía de iniciación a las fracciones.

En la quinta sesión se pidió a los EPM resolver un problema y anticipar dos posibles estrategias de resolución de niños de Primaria a este problema. Disponían del documento sobre "*Progresión en el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de 'Grupos Múltiples'*", elaborado a partir de Empson y Levi (2011). También podían clasificar las estrategias usando la categoría de fracción como operador.

En las sesiones sexta y séptima se pidió a los EPM describir las estrategias utilizadas en una selección de sus respuestas anticipatorias dadas en la sesión anterior. Estas respuestas fueron seleccionadas atendiendo a la variedad de estrategias y modos de representación. Trabajaron por parejas y luego discutieron en gran grupo.

En la octava sesión los EPM debían analizar de las respuestas de tres niños de 5º de Primaria a dos problemas: (a) Describiendo cada una de las respuestas; (b) Interpretando la comprensión de cada uno de los alumnos sobre las estrategias de resolución de problemas de división-medida; (c) Haciendo una propuesta para cada uno de los alumnos para mejorar su comprensión.

Instrumentos de recogida de datos

Los datos de la investigación se recogieron en las sesiones 5 y 8 y son las respuestas de los EPM a tres tareas:

- Resuelve el siguiente problema como si fueras un profesor de Matemáticas de Primaria: *Tengo 12 chocolatinas. ¿A cuántos niños puedo alimentar con estas chocolatinas si doy tres cuartos (3/4) de chocolatina a cada niño?*
- Resuelve el mismo problema de dos maneras distintas como si fueras un niño de Primaria.
- Indica en la "Progresión en el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de Grupos Múltiples" según Empson y Levi (2011), dónde se hallan las respuestas de los 3 niños de 5º de Primaria a los dos problemas (Figura 1).

El texto entregado a los EPM mostraba únicamente las respuestas de los tres niños de 5º de Primaria, que debían ser clasificados atendiendo a las siguientes características: El niño A emplea modelización directa con representación simbólica; el niño B estrategia multiplicativa con representación simbólica; el niño C modelización directa con representación icónica.

Análisis de datos

Las categorías para clasificar las respuestas de los EPM fueron las siguientes:

- Modelado Directo y Adición Repetida.
- Estrategias de Agrupamiento y combinación [pensando aditivamente].
- Estrategias Multiplicativas [con proporcionalidad, proceso constructivo, o directamente con multiplicación].
- Fracción como operador.

<table>
<tr><td>Niño</td><td>Problema de las chocolatinas

Tengo 12 chocolatinas. ¿A cuántos niños puedo alimentar con estas chocolatinas si doy tres cuartos (3/4) de chocolatina a cada niño?</td><td>Problema de las galletas

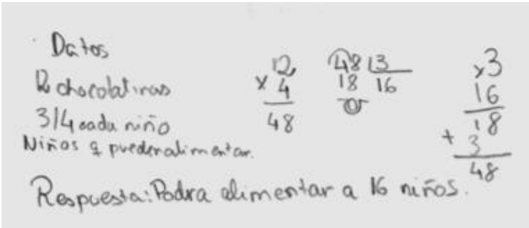
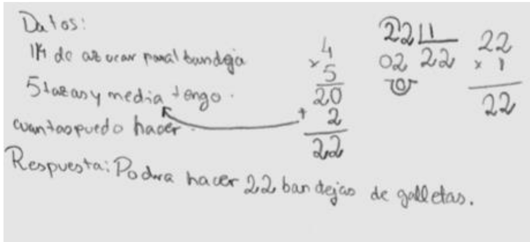
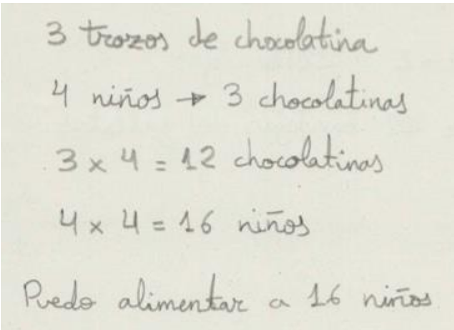
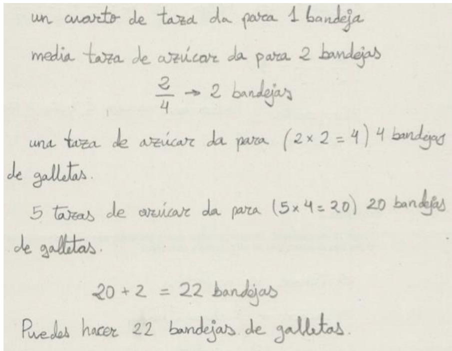
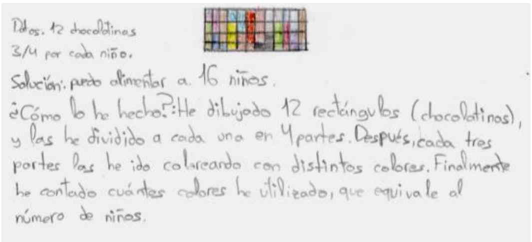
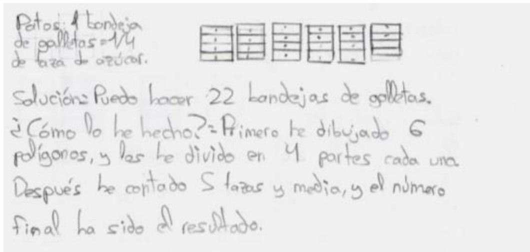
Para hacer una bandeja de galletas necesitamos utilizar un cuarto de una taza de azúcar. Si tienes 5 tazas y media, ¿cuántas bandejas de galletas puedes hacer?</td></tr>
<tr><td>A</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>B</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>C</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 1. Respuestas de los niños A, B y C a los problemas de las chocolatinas y las galletas

RESULTADOS

Presentamos los resultados en tres apartados correspondientes a los tres instrumentos de recogida de datos.

Estrategias de los EPM resolviendo un problema

Los EPM resolvieron el problema de las chocolatinas empleando sólo dos tipos de estrategias: fracción como operador y modelización directa (Tabla 1).

Tabla 1. Estrategias empleadas por los EPM resolviendo el problema de las chocolatinas

Progresión estrategias (Empson y Levi (2011)					
I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador	No contesta o respuesta errónea
8 (38.1%)	0	0	0	12 (57.1%)	1 (4.7%)

La Figura 2 muestra dos ejemplos de respuestas de los EPM correspondientes a los dos tipos de estrategias.

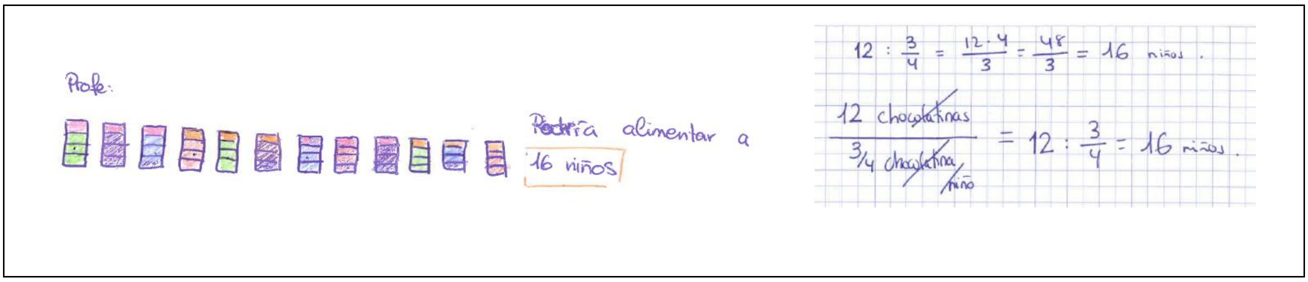


Figura 2. Ejemplos de resolución por modelización directa y usando la fracción como operador

Anticipación de respuestas de alumnos de Primaria

Cuando se pidió a los EPM que resolvieran el problema como niños de Primaria emplearon mayoritariamente estrategias de Modelización directa (MD): 19 de los 21 EPM emplearon esta estrategia al menos en una ocasión y 10 de ellos en sendas resoluciones. De los 9 EPM que se aventuraron a emplear estrategias diferentes de la MD en una de las respuestas, 5 lo hicieron en la segunda resolución, mientras que 4 siguieron el camino inverso, dejando la MD para la segunda resolución. Solo un EPM empleó estrategias diferentes de la MD en ambos casos, primero con la fracción como operador y posteriormente con una estrategia multiplicativa. Un EPM no supo contestar correctamente en ninguno de sus dos intentos (Tabla 2).

Tabla 2. Estrategias empleadas por los EPM resolviendo el problema de las chocolatinas de dos formas distintas como si fueran niños de Primaria (niño 1 / niño 2)

Niño 1/Niño 2	I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador	No contesta o errónea
I.1. Modelización directa	10	0	1	1	2	1
I.2. Adición repetida	0	0	0	0	0	0
II. Aditivas: agr. y comb.	1	0	0	0	0	0
III.Multiplicativas	2	0	0	0	0	0
Fracción operador	1	0	0	1	0	0
No contesta o errónea	0	0	0	0	0	1

Clasificación de las estrategias usadas por niños de Primaria

En cuanto a la clasificación por parte de los EPM de las estrategias empleadas por los tres niños de Primaria, menos de la cuarta parte clasificó correctamente las estrategias del niño A (23.8% chocolatinas y 19% galletas); la mayoría las clasificó como operador (61.9% y 57.1% respectivamente) y otros como multiplicativas (14.3% y 23.8%). Todos los EPM clasificaron correctamente las respuestas del niño B a ambos problemas. Por último, más de la mitad de los EPM clasificó correctamente las estrategias del niño C (66.7 y 57.1%); los demás clasificaron las estrategias como adición repetida y aditivas (Tabla 3).

Tabla 3. Clasificación de estrategias empleadas por los tres niños en los problemas de las chocolatinas (x/) y de las galletas (/y)

	Progresión estrategias Empson y Levi (2011)				
	I.1. Modelización directa	I.2. Adición repetida	II. Aditivas: agrupamientos y combinaciones	III. Multiplicativas	Fracción como operador
Niño A	5 / 4	0	0	3 / 5	13 / 12
Niño B	0	0	0	21/ 21	0
Niño C	14 /12	3 / 4	4 / 5	0	0

Nota. Las celdas sombreadas corresponden a las respuestas correctas.

Algunas de las razones dadas por los EPM para justificar su clasificación fueron las siguientes: Pablo (nombre ficticio) clasificó correctamente la respuesta del niño A en el problema de las chocolatinas como Modelización directa, destacando que el niño entiende el significado de la fracción 3/4, porque divide las 12 chocolatinas en cuartos y luego procede a agruparlos de 3 en 3.

> *"Realizar este proceso de averiguar los trozos totales y luego dividirlos entre los que reparte, nos indica que entiende perfectamente lo que representa el numerador y el denominador, pero no sabemos si sabe operar con fracciones."*

También clasificó correctamente la respuesta del niño B en el mismo problema como Estrategia multiplicativa identificando los agrupamientos que hace interpretando qué puede haber detrás de lo escrito por el niño.

> *"El alumno es capaz de anticipar que con tres chocolatinas podrá alimentar a 4 alumnos. Tras este agrupamiento llega un paso que me genera bastantes dudas: 3 x 4 = 12 chocolatinas. Este dato ya lo conocía y por tanto puedo suponer que al conocer las chocolatinas 12 y haber obtenido un agrupamiento de tres chocolatinas busca el número de agrupaciones que puede hacer: 3 x ____ = 12. La operación típica o habitual hubiera sido una división pero realmente la finalidad es la misma."*

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta comunicación es caracterizar la interpretación que hacen EPM, que han participado en un experimento de enseñanza, de las respuestas dadas por alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones. Los resultados muestran que al final del experimento los EPM han ampliado su repertorio de las estrategias usadas por los alumnos de Primaria y han mejorado la interpretación de las mismas. Las respuestas a las preguntas de investigación permiten constatar cómo se ha producido este progreso de la sesión 5 a la 8.

- ¿Cómo anticipan EPM de Primaria respuestas de niños a un problema de división-medida con fracciones?

Los resultados muestran que los EPM emplearon solo dos tipos de estrategias cuando se les pidió resolver el problema de las chocolatinas: modelización directa y fracción como operador. Estas estrategias están en los extremos de la progresión; no usaron estrategias aditivas de combinación ni multiplicativas. Este hecho parece que ha condicionado las respuestas anticipatorias de las estrategias que podían usar niños de Primaria, como indicamos a continuación.

Hemos visto que de los 21 EPM, 19 usaron la modelización directa como una forma de resolución por los alumnos de Primaria, y de ellos 10 la utilizaron en las dos respuestas de anticipación. De los 9 restantes, solo 2 consideraron que la fracción como operador era una posible forma de resolución de los alumnos de Primaria; los 7 restantes usaron estrategias aditivas de agrupamiento o multiplicativas, por tanto fueron capaces de ir más allá de sus propias resoluciones. No siempre la primera respuesta anticipatoria fue una de las que ellos habían utilizado resolviendo el problema.

Por otra parte, en conjunto, pocos EPM propusieron ejemplos de estrategias aditivas de agrupamiento y multiplicativas. Y además algunos no fueron capaces de dar una segunda respuesta.

Estos resultados muestran la necesidad de proporcionar información acerca de las estrategias de resolución de problemas de los alumnos de Primaria, como han señalado otros trabajos (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014). El trabajo conjunto compartiendo las distintas respuestas anticipatorias requirió a los EPM hacer el esfuerzo de comprender aquéllas que eran diferentes de las propias. Esta dificultad también ha sido señalada en el trabajo de Jakobsen, Ribeiro y Mellone (2014).

- ¿Cómo clasifican EPM de Primaria las estrategias empleadas por niños de 5º de Primaria resolviendo dos problemas de división con fracciones?

Casi las tres cuartas partes de los EPM han clasificado correctamente las estrategias de modelización directa con representación icónica del niño C. En cambio, menos de la cuarta parte interpretaron correctamente la estrategia de modelización directa con representación simbólica del niño A; la mayoría la interpretaron como operador (alrededor del 60%) o como estrategias multiplicativas (entre 14% y 24%) que se encuentran en el otro extremo de la progresión. Por tanto, los EPM han identificado más fácilmente las estrategias de modelización directa con representación icónica que con representación simbólica. Esto muestra la necesidad de profundizar, por una parte, en la característica de la estrategia modelización directa, que es el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa, dividiendo el todo en fracciones unitarias, ya sea mediante un dibujo o de forma numérica.

Todos los EPM clasificaron correctamente las estrategias multiplicativas del niño B, por lo tanto parece que esta estrategia, que no utilizaron cuando resolvieron el problema y que apenas aparece en las respuestas anticipatorias, la saben identificar. Aunque hay que hacer notar que algunos EPM identificaron incorrectamente como multiplicativas las estrategias usadas por el alumno A. Por ello también hay que profundizar más en la diferencia entre las estrategias aditivas y las multiplicativas; en las primeras se usa la idea de unidad iterativa y en las segundas la idea de proporcionalidad.

- ¿En qué medida la anticipación y las tareas profesionales realizadas en el experimento de enseñanza han ayudado a los EPM a clasificar las estrategias de los niños?

Hemos visto un avance de los EPM en cuanto a la interpretación de las estrategias de los alumnos de Primaria. Consideramos que las tareas de anticipación que se pusieron en común y fueron objeto de debate, así como la información teórica proporcionada, ayudaron a interpretar las estrategias usadas por dichos alumnos de Primaria. Asimismo, los EPM interpretaron y discriminaron con un alto nivel de corrección las estrategias multiplicativas. En cambio, tuvieron más dificultad en interpretar las estrategias aditivas. En un segundo ciclo del experimento de enseñanza sería necesario enfatizar el uso de la unidad iterativa en las estrategias aditivas.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R y EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO)/ FEDER, Gobierno de España.

Referencias

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W. y Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, *76*(9), 652-659.

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM.

Fernandez, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast 10*, 441-468.

Greer B., Verschaffel L. y De Corte E. (2002) "The Answer is Really 4.5": Beliefs about Word Problems. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Mathematics Education Library* (pp. 271-292). Dordrecht: Springer.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*, 135-150.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 1-27.

Steffe, L. P. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*, 244-276.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

LA MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL EN LA SELECCIÓN DE TAREAS DE LA MAGNITUD LONGITUD Y SU MEDIDA

Professional noticing of pre-services kindergarten teachers in the selecting tasks of length magnitude and its measurement

Moreno, M.[a], Sánchez-Matamoros, G.[b], Pérez-Tyteca, P.[a] y Valls, J.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

La adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los/las estudiantes, implica interrelacionar las destrezas de identificar estrategias, interpretar/anticipar la comprensión y tomar decisiones de acción. Esta investigación pone el foco en la mirada profesional de los/las estudiantes para maestro/a de educación infantil sobre la magnitud longitud y su medida, a través del uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual. El objetivo es analizar cómo los/las estudiantes para maestro/a, haciendo uso de la trayectoria, anticipan la comprensión de los niños y niñas desde tareas seleccionadas por ellos y toman decisiones para la progresión en el aprendizaje. Los resultados muestran la dificultad que tienen los/las estudiantes para maestro/a para establecer un objetivo coherente con la tarea seleccionada, anticipar la comprensión necesaria para resolverla y proponer nuevas tareas para seguir progresando en el aprendizaje.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, instrumento conceptual, trayectoria de aprendizaje, magnitud longitud y medida, educación infantil.*

Abstract

The acquisition of teaching competence professional noticing at the mathematical thinking of students implies to interrelate the skills of identifying strategies, interpreting/anticipating understanding and making action decisions. This research focuses on the professional noticing of pre-services kindergarten teachers about the magnitude length and its measurement using a learning trajectory as a conceptual instrument. The aim of this research is to analyse how pre-services kindergarten teachers, making use of this learning trajectory, anticipate the understanding of children from tasks selected by themselves and make decisions for the progression in the learning. The results show the difficulty that pre-service kindergarten teachers have to establish a coherent goal with the selected task, anticipate the understanding needed to solve it and propose new tasks to continue progressing in learning.

Keywords: *professional noticing, conceptual instrument, learning trajectory, magnitude length and its measurement, early childhood education.*

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado tiene como finalidad desarrollar las competencias profesionales propias de la función docente, en particular, la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia se conceptualiza, según Jacobs, Lamb y Philipp (2010), en tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar/anticipar la comprensión de estos y decidir cómo responder basándose en la comprensión interpretada/anticipada. Actualmente, los formadores de maestros/as han empezado

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Pérez-Tyteca, P. y Valls, J. (2018). La mirada profesional de estudiantes para maestro de educación infantil en la selección de tareas de la magnitud longitud y su medida. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 387-396). Gijón: SEIEM.

a diseñar tareas profesionales relacionadas con la planificación de sesiones de aula en la que los estudiantes para maestro deberán proponer objetivos de aprendizaje coherentes con las tareas seleccionadas, y anticipar posibles respuestas de los estudiantes pues, se considera que la competencia para realizar esta tarea profesional se puede empezar a desarrollar en la formación inicial (Smith y Stein, 2011). En este sentido, Ball, Thames y Phelps (2008) consideran que cuando los profesores escogen una tarea necesitan anticipar lo que los/las estudiantes harán y si la encontrarán fácil o difícil, lo que requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y el pensamiento matemático del estudiante. En este mismo sentido, Norton, McCloskey y Hudson (2011) subrayan la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para ayudarles a progresar en su aprendizaje. De acuerdo con Pochulu, Font y Rodríguez (2016), las tareas son las situaciones que el profesor propone a los estudiantes. Éstas son el punto de partida de la actividad del estudiante, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje.

Según la revisión realizada por Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) sobre investigaciones recientes, acerca de la adquisición de la mirada profesional, la mayoría describen cómo los/las estudiantes para maestro/a interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, son escasos los estudios que se centran en cómo los estudiantes para maestro anticipan respuestas de los estudiantes como una tarea profesional integrada en la planificación (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016). Para ayudar a los/las futuros/as maestros/as a establecer la relación entre el conocimiento matemático de las matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los/las estudiantes, necesario para adquirir la mirada profesional, se ha mostrado útil proporcionales una trayectoria hipotética de aprendizaje en la que puedan basarse y que funcione como guía para interpretar y anticipar la comprensión de los estudiantes y dar respuesta a su progresión en el aprendizaje (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

En nuestro caso, se trabaja con futuros maestros y maestras de educación infantil, planteándonos como objetivo analizar cómo anticipan características de la comprensión de los niños y niñas a partir de tareas de magnitud longitud y su medida, previamente seleccionadas por ellos, y proponen nuevas tareas para ayudarles a progresar en su aprendizaje.

MARCO TEÓRICO

En esta sección describimos la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida facilitada en el módulo de enseñanza, y la adaptación de la perspectiva de la génesis instrumental para caracterizar el aprendizaje del uso de dicha trayectoria.

Una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en educación infantil

El concepto matemático de magnitud longitud y su medida, entendida como el conocimiento de los diferentes atributos mesurables, las formas de medirlos y las unidades necesarias para expresar el resultado, es uno de los temas relevantes en la educación matemática infantil, al que no se le ha prestado la atención necesaria. En el actual currículum de educación infantil (BOE 5/2008, p. 1024; NCTM, 2000) se contempla la iniciación al aprendizaje de la magnitud longitud y su medida, como un aprendizaje progresivo, intuitivo y experimental (Alsina, 2011).

En esta investigación hemos adaptado la trayectoria de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida de Sarama y Clements (2009), que consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) la progresión en el aprendizaje considerando los elementos matemáticos que definen la magnitud longitud (reconocimiento, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (unidad de medida-unicidad, iteración, acumulación-, relación entre el número y la unidad de medida, y universalidad de la medida) (Tabla 1); y (c) tareas instruccionales.

Tabla 1. Una progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la magnitud longitud: Identifican las cualidades de la magnitud longitud. Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: Comparaciones indirectas. Ordenaciones de objetos. Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida. Reconocen la unicidad de la unidad de medida. Realizan iteraciones de la unidad de medida. Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida. Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones.

La génesis instrumental

Para caracterizar el aprendizaje de los estudiantes para maestro de educación infantil del uso de una trayectoria de aprendizaje, adaptamos la perspectiva de la génesis instrumental (Drijvers y Trouche, 2008; Verillon y Rabardel, 1995). Esta perspectiva diferencia entre artefacto e instrumento. En nuestra investigación, el artefacto es la información que debe ser aprendida (la trayectoria de aprendizaje). El instrumento se genera cuando el/la estudiante para maestro/a usa de manera significativa la trayectoria de aprendizaje proporcionada como una guía para realizar la tarea profesional propuesta: seleccionar una tarea, anticipar la comprensión de un/a niño/a que resolviese bien la tarea y proponer una nueva para que progrese en su aprendizaje. El proceso por el que la información de una trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento se llama génesis instrumental, y consiste en la formación de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de realizar las tareas (Drijvers y Trouche, 2008).

Los esquemas de uso son esquemas elementales básicos, directamente relacionados con el artefacto, y sirven como bloques de construcción de los esquemas de acción instrumental. Estos esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, son los que permiten al estudiante entender las potencialidades y restricciones de la información dada por la trayectoria de aprendizaje y se constituyen progresivamente en técnicas que le habilitan para dar una respuesta efectiva a las tareas a resolver. Por ejemplo, un primer esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el/la estudiante para maestro/a usa el modelo de progresión en el aprendizaje de la magnitud y su medida, para anticipar la comprensión de las situaciones de enseñanza-aprendizaje que podrían darse en el aula cuando selecciona una tarea y establece el objetivo de aprendizaje de la misma. Y un segundo esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el/la estudiante para maestro/a, a partir de la comprensión anticipada, usa los tipos de tareas y el modelo de progresión del aprendizaje para proponer nuevas tareas que favorezcan la progresión del aprendizaje.

La instrumentación de una trayectoria de aprendizaje implica la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental, lo que permitirá al estudiante para maestro/a usar toda la información de la trayectoria de aprendizaje (objetivos, progresión en el desarrollo de la comprensión y tareas) para gestionar las situaciones de enseñanza-aprendizaje y con ello adquirir la competencia docente de la mirada profesional.

Así pues, el objetivo de esta investigación se concreta en la siguiente pregunta:

- ¿Cómo los/las estudiantes para maestro/a de educación infantil anticipan las características de la comprensión que pondrán de manifiesto los niños y las niñas de infantil desde las tareas de magnitud longitud y medida seleccionadas, y cómo tomarán decisiones instruccionales para la progresión en el aprendizaje a través del uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual?

MÉTODO

Los participantes son 23 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) que realizaron el módulo de enseñanza "La longitud y su medida en Educación Infantil" cuando cursaban la asignatura "Aprendizaje de la Geometría", en el sexto cuatrimestre del "Grado en Maestro en Educación Infantil" de la Universidad de Alicante. Este módulo constaba de cinco sesiones de 100 minutos y en cada una de ellas los EPM debían resolver una tarea profesional. Para realizar las tareas profesionales se proporcionó a los/las EPM una trayectoria hipotética de aprendizaje, adaptada de Sarama y Clements (2009), como guía para interpretar y anticipar la comprensión de los/las alumnos/as y dar respuesta a su progresión en el aprendizaje (Sztajn et al., 2012). En las tres primeras sesiones del módulo, se les propusieron tareas profesionales compuestas por situaciones de enseñanza-aprendizaje (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos/as y maestra) y tres preguntas para que los/las EPM mirasen de forma estructurada la comprensión de los niños y niñas, es decir, identificaran los elementos implícitos en la situación de enseñanza-aprendizaje, interpretaran la comprensión de los niños y niñas que forman parte de la situación y propusieran nuevas tareas para que estos progresaran en su aprendizaje, apoyándose en la trayectoria hipotética de aprendizaje. Una vez realizadas las tareas profesionales en cada sesión se analizaron y discutieron, en gran grupo, sus respuestas.

Instrumento de recogida de datos

Previo a la implementación del módulo de enseñanza, se diseñó el instrumento de recogida de datos, que a su vez es una tarea profesional integrada en él (concretamente, la tarea profesional correspondiente a la sesión 4). De este modo, esta tarea profesional (Tabla 2) sirve tanto para trabajar los contenidos abordados en el aula, como para recoger los datos necesarios para esta investigación.

Tabla 2. Tarea profesional a resolver por los/las EPM

Selecciona una tarea de la magnitud longitud y su medida para Educación Infantil (libros, proyectos, web, etc.) e indica: 1. Objetivo de aprendizaje de la tarea. 2. Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea 3. ¿Qué características de la comprensión debería mostrar un niño que fuera capaz de resolverla? 4. ¿Qué tarea propondrías a continuación para avanzar en la comprensión de la magnitud longitud y su medida? Diséñala, indica el objetivo de aprendizaje y justifica tu respuesta.

El objetivo de esta tarea profesional es que los/las EPM anticipen las características de comprensión que podrían poner de manifiesto los niños y niñas, a partir de una tarea seleccionada por ellos/as, y tomen decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de los niños y niñas a partir de la comprensión anticipada. Así, la consigna inicial de la misma y el apartado 1 abordan la selección de la tarea, los apartados 2 y 3, la anticipación de la comprensión y el apartado 4 la toma de decisiones.

Análisis de Datos

Los datos son las respuestas de los/las EPM a la tarea propuesta en la sesión 4. El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado en dos fases (Figura 1). En la primera fase se analiza si la tarea seleccionada y el objetivo de aprendizaje, propuesto por los/las EPM, son coherentes. Este análisis ha proporcionado dos grupos de EPM, aquellos cuyas tareas y objetivos no son coherentes, y los que sí lo son. En la segunda fase, el análisis se centra en las respuestas de los/las EPM cuyas tareas y objetivos de aprendizaje propuestos son coherentes. En ellas se analiza si los EPM han anticipado la comprensión de los niños y niñas, a partir de los elementos matemáticos identificados, y si han propuesto nuevas tareas para favorecer la progresión en el aprendizaje. Este análisis ha dado lugar a tres grupos de estudiantes: los/las EPM que anticipan la comprensión de los niños y niñas desde esquemas de uso, los/las EPM que anticipan la comprensión desde el primer esquema de acción instrumental y, por último, los/las EPM que anticipan la comprensión y proponen nuevas tareas que pueden favorecer la progresión en el aprendizaje, instrumentando la trayectoria de aprendizaje. Los resultados obtenidos se describen en el epígrafe siguiente.

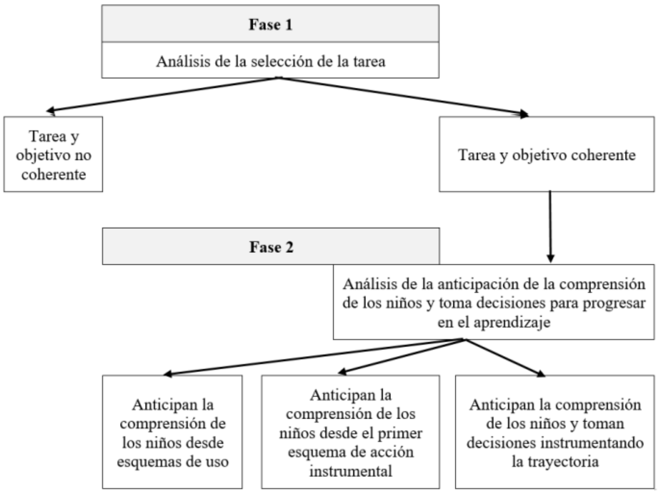


Figura 1. Fases del análisis realizado

RESULTADOS

Los resultados han sido organizados en dos secciones. En primer lugar, presentamos los resultados correspondientes a la selección de las tareas y coherencia con el objetivo propuesto. En segundo lugar, los correspondientes a la anticipación de la comprensión y la toma de decisiones para la progresión en el aprendizaje.

Selección de tareas y objetivos de aprendizaje

La selección de las tareas y su coherencia o no con el objetivo de aprendizaje ha caracterizado a los EPM en dos categorías: los/las EPM que han seleccionado una tarea, pero el objetivo propuesto no es coherente (15 de 23 EPM) y aquellos cuya tarea es coherente con el objetivo propuesto (8 de 23 EPM).

Para los/las EPM cuyas tareas y objetivos propuestos no son coherentes, la trayectoria de aprendizaje dada en el módulo es un artefacto, al no haber usado la información de ésta como una guía para resolver la tarea profesional propuesta, en este caso, proponer el objetivo en relación a la tarea seleccionada. Por ejemplo, María seleccionó la siguiente tarea y propuso dos objetivos de aprendizaje para esta:

> Tarea: Construir, con cinta adhesiva de dos colores distintos, dos caminos, uno curvado y largo y otro en línea recta. A continuación, se les preguntará ¿cuál es el más largo? Posteriormente comprobarán sus hipótesis con sus pies (unidad de medida).
>
> Objetivos: Reconocer la magnitud longitud como la propiedad de los objetos.
>
> Realizar comparaciones directas considerando la magnitud de manera intuitiva con diferentes unidades de medida.

María no ha usado el modelo de progresión para establecer los objetivos de aprendizaje. Si María lo hubiese usado habría establecido como objetivo de la tarea, “Realizar comparaciones mediante estimación perceptiva" o bien "realizar comparaciones directas". Tanto si las cintas tienen longitudes similares como si no, no sería necesario pasar a medir longitudes, si antes no se ha trabajado la conservación, las comparaciones directas por desplazamientos de objetos, o el uso de la transitividad para realizar comparaciones indirectas de más de dos objetos y ordenación. Por tanto, la tarea y los objetivos propuestos por María no son coherentes.

Por otra parte, se encuentran aquellos EPM que usan la trayectoria de aprendizaje como instrumento al proponer objetivos de aprendizaje coherentes con las tareas seleccionadas. Estos los hemos agrupado en función de la anticipación de la comprensión de los niños y niñas y la toma de decisiones realizada.

Anticipación de la comprensión de los niños y toma de decisiones para la progresión en el aprendizaje

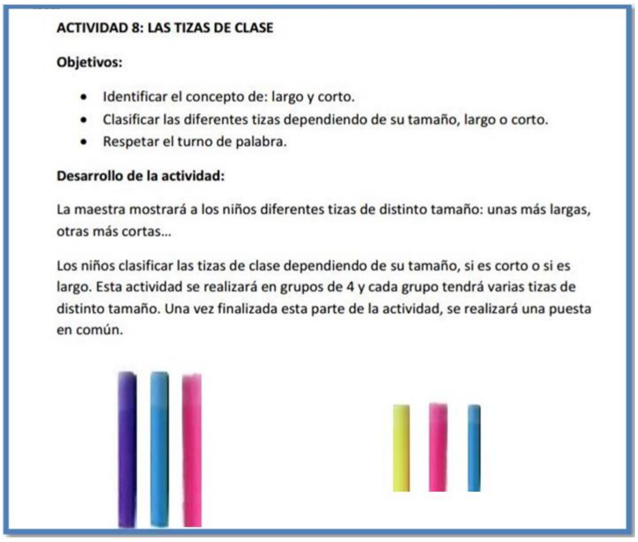
La anticipación de la comprensión de los niños y niñas, realizada por los/las EPM que presentaron una tarea coherente con el objetivo de aprendizaje propuesto, y la toma de decisiones llevada a cabo se ha caracterizado en tres categorías: a) anticipan la comprensión desde esquemas de uso, b) anticipan la comprensión desde el primer esquema de acción instrumental, y c) anticipan la comprensión y toman decisiones para la progresión en el aprendizaje instrumentando la trayectoria.

- **Anticipan la comprensión de los niños desde esquemas de uso**

En esta categoría se encuentran los/las EPM que anticiparon la comprensión de los niños y niñas desde errores conceptuales (2 de 8) y, en consecuencia, aunque anticiparon características de la comprensión de estos e incluso propusieron tareas para su progreso en el aprendizaje, en una situación de aula real, este progreso no se produciría, más bien podrían inducir a errores conceptuales. Estos EPM sólo han construido un primer esquema de uso al anticipar las características de la comprensión desde un error conceptual. Por ejemplo, Luisa selecciona la tarea que se muestra en la Figura 2. Para esta tarea Luisa propone como objetivo "adquirir y usar la transitividad" y lo justifica indicando, "con una tarea de clasificar longitudes, como queda reflejado en el desarrollo de la actividad: clasificar las tizas de clase dependiendo de su tamaño, si es corto o si es largo". Al anticipar la comprensión sobre magnitud y medida que mostraría un niño que resolviera esta tarea indica:

> Luisa: Los elementos matemáticos necesarios para realizar esta tarea son: (a) el reconocimiento de la magnitud longitud, para saber si las tizas son cortas o largas y poder clasificarlas, (b) transitividad, para comparar 3 tizas y clasificarlas. Las características de la comprensión que debería mostrar un niño capaz de resolver esta tarea son: usar la propiedad transitiva para realizar ordenaciones de objetos comparando la longitud de tres objetos utilizando uno de ellos (una de las tres tizas) como intermediario. Por estas características de la comprensión, el niño que es capaz de resolver esta tarea, estaría en el Nivel 3 de comprensión.

Luisa utiliza los términos clasificar y ordenar como sinónimos e indica como elemento necesario para resolver la tarea es la propiedad transitiva, lo que le lleva a considerar que un niño o niña de infantil que resolviera la tarea, pondría de manifiesto un nivel 3 de comprensión. Sin embargo, para realizar la tarea propuesta bastaría con clasificar las tizas en cortas y largas, a través de comparaciones directas o perceptuales.



ACTIVIDAD 8: LAS TIZAS DE CLASE

Objetivos:

- Identificar el concepto de: largo y corto.
- Clasificar las diferentes tizas dependiendo de su tamaño, largo o corto.
- Respetar el turno de palabra.

Desarrollo de la actividad:

La maestra mostrará a los niños diferentes tizas de distinto tamaño: unas más largas, otras más cortas...

Los niños clasificar las tizas de clase dependiendo de su tamaño, si es corto o si es largo. Esta actividad se realizará en grupos de 4 y cada grupo tendrá varias tizas de distinto tamaño. Una vez finalizada esta parte de la actividad, se realizará una puesta en común.

Figura 2. Tarea seleccionada por Luisa desde la página web: http://www.eduval.es/ucv/UD4_6.pdf

- **Anticipan la comprensión de los niños desde el primer esquema de acción instrumental**

A esta categoría han sido asignados los/las EPM que anticiparon la comprensión de los niños o niñas identificando los elementos y las características de su comprensión, si bien no fueron capaces de proponer nuevas tareas para que avanzaran desde la comprensión anticipada (4 de 8 EPM). Estos EPM han resuelto la tarea construyendo el primer esquema de acción instrumental y en algunos casos construyendo un segundo esquema de uso en relación a la toma de decisiones. Por ejemplo, Ana seleccionó la siguiente tarea y objetivo:

Tarea: Medir la sombra de tu pareja con los pies”.

Objetivo: Identificar la unidad de medida, “el pie”, y realizar iteraciones.

Al anticipar la comprensión sobre magnitud y medida que mostraría un niño que resolviera esta tarea indica:

Ana: Elementos de medida:

- Unidad de medida (iteraciones de la unidad de medida, medir la sombra con los pies).
- Acumulación: además de que midan la sombra con los pies quiero que den un número por respuesta (la sombra de mi amigo mide x pies).

La comprensión que debería mostrar un niño que fuera capaz de resolver la tarea, es de nivel 4.

Sin embargo, no tuvo en cuenta el modelo de progresión y las tareas propuestas en la trayectoria al proponer una nueva tarea de progreso:

Tarea: Medir la sombra con el metro y comparar las medidas.

La nueva tarea propuesta por Luisa no se corresponde con el modelo de progresión en el aprendizaje facilitado en la trayectoria de aprendizaje pues, aunque el niño o niña estuviese en el nivel 4, aún no se ha evidenciado que sean conscientes de la unicidad de la unidad de medida. Luisa debería proponer una tarea previa que permitiese evidenciar si el niño o niña de infantil tiene adquirida la unicidad de la unidad de medida antes de pasar a la universalidad de la misma. Por tanto, Luisa ha construido un segundo esquema de uso en relación a las decisiones de acción.

- **Anticipan la comprensión de los niños y toman decisiones de acción instrumentando la trayectoria de aprendizaje**

A esta categoría pertenecen los/las EPM que anticiparon la comprensión de los niños o niñas usando los elementos matemáticos identificados y propusieron nuevas tareas para que avanzaran en su aprendizaje, desde la comprensión anticipada (2 de 8 EPM), es decir, instrumentaron la trayectoria de aprendizaje al haber construido y coordinado ambos esquemas de acción instrumental, es decir, haber construido el primer esquema de acción instrumental al hacer uso del modelo de progresión para identificar los elementos matemáticos y usarlos para establecer las características de la comprensión, y el segundo esquema de acción instrumental al usar el modelo de progresión y las tareas propuestas en la trayectoria de aprendizaje para proponer nuevas tareas de progreso. Poniendo con ello de manifiesto la adquisición de la competencia docente de la mirada profesional. Por ejemplo, Isabel seleccionó la tarea que se muestra en la Figura 3.

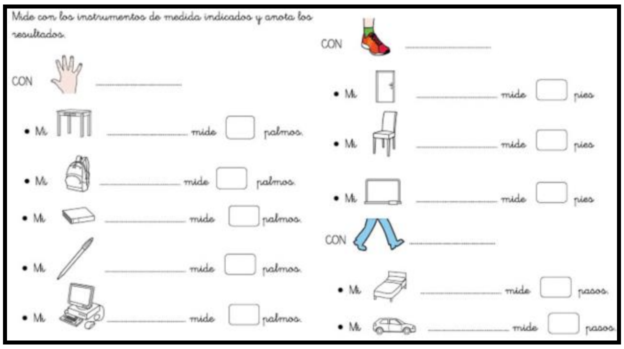


Figura 3. Tarea seleccionada por Isabel desde página web[1]

> Objetivo: Realizar equiparticiones de objetos y reconocer que la palabra-número, equivalente al número de iteraciones realizada, es el espacio cubierto por todas las unidades.

Isabel justifica la tarea y el objetivo indicando:

> Isabel: Los niños deben haber alcanzado el nivel de comprensión 4, ya que deberán ser capaces de realizar equiparticiones de objetos mediante la medida de su mano. Además, deberán identificar una unidad de medida como parte de la longitud de un objeto que se mide y ser conscientes de que deben realizar iteraciones de la misma (la mano) a lo largo de la longitud del objeto a medir, sin superposiciones ni saltos y contando las iteraciones.

Isabel, para plantear el objetivo y las características de la comprensión de un niño o niña, que fuera capaz de resolver la tarea, hace uso del modelo de progresión, identificando los elementos matemáticos y evidenciándolos desde la tarea a través de los siguientes procedimientos: realiza equiparticiones "mediante la medida de la mano", iteraciones de "la mano" y reconocen la palabra-número (acumulación), "al contar las iteraciones", y usándolos para establecer el nivel del comprensión, nivel 4. Por tanto, construye el primer esquema de acción instrumental. Además, planteó una nueva tarea que podría favorecer el progreso en el aprendizaje del niño o niña:

> Tarea: Comparar los resultados de medidas de longitudes de objetos realizadas por niños de distinta estatura.
>
> Objetivo: Adquirir la necesidad de utilizar una única unidad de medida por distintas personas para medir un objeto, en lugar de utilizar la propia mano".

Isabel, para proponer la nueva tarea, ha tenido en cuenta tanto el modelo de progresión en el aprendizaje como las tareas facilitadas en la trayectoria de aprendizaje al darse cuenta que el niño o niña necesita ser consciente de la universalidad de la unidad de medida. Por tanto, Isabel ha construido el segundo esquema de acción instrumental, y, en consecuencia, ha instrumentado la trayectoria y, con ello, ha adquirido la competencia docente de la mirada profesional.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es analizar cómo los/las EPM anticipan las características de la comprensión de los niños y niñas que resolvieran correctamente las tareas seleccionadas por ellos y toman decisiones para la progresión en el aprendizaje de estos, a través del uso de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual. Los resultados de la primera sección, muestran la dificultad de 15 EPM para proponer objetivos de aprendizaje coherentes con las tareas seleccionadas, lo que supondría que el aprendizaje pretendido con las tareas propuestas no se correspondería con la actividad que los niños y niñas deberían realizar para resolverlas y, como señalan Pochulu y colegas (2016), las tareas no se constituirían como el punto de partida de la actividad desarrollada para el aprendizaje. Asimismo, estos EPM no han hecho operativa la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje considerándola como un artefacto. Aunque en el módulo de enseñanza se ha trabajado la trayectoria de aprendizaje, a través de diferentes ejemplos de tareas con sus respectivos objetivos de aprendizaje, la existencia de estos 15 EPM nos informaría de la dificultad de identificar los elementos matemáticos implícitos en la resolución de una tarea, por lo que convendría reforzar la actividad de identificar elementos matemáticos previo a trabajar con trayectorias de aprendizaje.

Los resultados de la segunda sección proporcionan información sobre cómo relacionar la trayectoria de aprendizaje con la actividad matemática esperada en los niños y niñas, poniendo de manifiesto cómo usarla para anticipar las características de la comprensión y tomar decisiones idoneas para el aprendizaje. El uso que los/las EPM hacen de la trayectoria de aprendizaje varía desde la consideración de ésta como un artefacto hasta su instrumentación, pasando por momentos de construcción y coordinación de los esquemas de uso y de acción instrumental (Moreno y Llinares, 2017; Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo, Pérez-Tyteca y Valls, 2017). Los EPM que llegan a instrumentar la trayectoria de aprendizaje son los que establecen la relación entre el conocimiento matemático del concepto y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños y niñas.

Los que no han instrumentado la trayectoria de aprendizaje manifiestan dificultades con el conocimiento matemático del concepto magnitud y medida, como por ejemplo, confundir los conceptos de clasificar y ordenar; o bien, tienen dificultades para proponer nuevas tareas desde una progresión cognitiva y no curricular, a pesar de haber reconocido la comprensión de los niños y niñas, lo que resulta coherente con lo que señalan otras investigaciones (Choy, 2016; Santagata y Yeh, 2016; Wilson, Stanjn, Edgington y Myers 2015). Por tanto, sería conveniente trabajar de forma conjunta el curriculum y la progresión en el aprendizaje de la trayectoria para que los EPM fuesen conscientes de la necesidad de tomar decisiones de enseñanza acordes al nivel de comprensión de los niños y niñas.

A la vista de estos resultados, concluimos que el uso de una trayectoria como instrumento conceptual es una herramienta útil para describir los procesos mentales que llevan a cabo los/las EPM para anticipar las características de la comprensión y tomar decisiones para el progreso del aprendizaje. Asimismo, la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje y, por tanto, la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente, es un proceso complejo para los/las EPM, es progresivo y no uniforme, ya que la interrelación entre las destrezas de identificar, anticipar y tomar decisiones se ha manifestado en los/las EPM de maneras diferentes.

Notas

[1]Recuperado de https://www.google.es/search?q=tareas+sobre+la+longitud+para+educacion+infantilytbm=ischytbo=uysource=univysa=Xyved=0ahUKEwiLxJXY5bMAhWERhQKHb4_BgMQsAQIHAybiw=1366ybih=653#imgrc=dEO5irxmE_5jUM%3A

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido ayuda de los proyectos EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. I.C.E. Universitat de Barcelona. Hosori Editorial, S. L. (p. 176).

Choy, B. H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28,* 421-440.

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 363-392.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Moreno, M. y Llinares, S. (2015). Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 413-421). Alicante: SEIEM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R. A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 71-98.

Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil. BOE, 4, 474-482.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente": un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Santagata, R. y Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM, 48*(1-2), 153-165.

Sarama J. y Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston: NCTM.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*, 1-27.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41(5),* 147-156.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, *10*(1), 77.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

¿TIENEN LOS FUTUROS MAESTROS LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS ELEMENTALES?

Do future teachers have elementary mathematical knowledge?

Nortes-Martínez-Artero, R.[a] y Nortes-Checa, A.[a]

[a]Universidad de Murcia

Resumen

Los futuros maestros deben de dominar los contenidos de matemática elemental cuando acceden al Grado de Maestro de Primaria y todavía más cuando terminan. Para conocer si los tienen adquiridos, se les aplica a los alumnos de 2º y a los de 4º de la Universidad de Murcia a lo largo de tres cursos académicos la prueba de ingreso en el Cuerpo de Maestros de Madrid. De los 326 alumnos, tan solo uno contesta bien a las quince cuestiones, los de 2º no llegan al 20% de aprobados en ningún curso y en mujeres se reduce al 15%. En 4º uno de cada dos hombres aprueba y una de cada cuatro mujeres, aprobando en los tres cursos el bloque de números-estadística y suspendiendo el de medida-geometría. Aunque el porcentaje de aprobados en 4º duplica al de 2º, tan solo en 4º hombres se consigue superar el 50% de aprobados.

Palabras clave: *conocimientos matemáticos elementales, futuros maestros, enseñar matemáticas.*

Abstract

Future teachers must have a proper command of elementary mathematics when they start their degree in Primary Education. As they complete years, said command should improve. In order to explore these assumptions, second and four year students (during three consecutive academic years) were asked to do the test that candidates have to pass to become a teacher in the Region of Madrid. Out of 326 students, only one answers correctly the 15 questions, less than 20% of second year students pass (this is applicable to all the academic years surveyed) and for women pass rate is 15%. In the fourth year one in two men and one in four women pass. In the three years students pass the blocks on numbers-statistics and fail means-geometry. Although in the fourth year the percentage of students who pass is twice that of the second year, pass rate is over 50% only for men.

Keywords: *elementary mathematical knowledge, future teachers, didactics of mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Los futuros maestros acceden a los estudios del Grado de Maestro de Primaria con conocimientos matemáticos muy diversos. Los hay que vienen tras haber estudiado matemáticas en la ESO y en el Bachillerato y los hay que vienen sin haberlas cursado en la ESO y en el Bachillerato. Tanto unos como otros se encuentran que al llegar al Grado tienen que cursar asignaturas de Matemáticas y su didáctica y posteriormente en su profesión serán maestros de matemáticas.

La Real Sociedad Matemática Española (Gordillo, 2017) considera que no se puede ser un buen docente de Primaria sin conocer bien las matemáticas escolares y pide que sea obligatorio haber cursado matemáticas en bachillerato, y si no ha sido posible, que superen un examen que garantice el nivel adecuado de matemáticas e incluso que en las pruebas de oposiciones al cuerpo de maestro debería verificarse el dominio de la matemática elemental con una prueba específica. En la Comunidad de Madrid existe esa prueba eliminatoria de matemática elemental desde 2013 para el ingreso al Cuerpo de Maestros (CAM, 2013).

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). Gijón: SEIEM.

La Orden ECI/3857/2007 establece como primer objetivo de las competencias que los estudiantes de la profesión de maestro en la Educación Primaria deben "conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos" (p. 53747). Y en el módulo de Matemáticas: "adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.), conocer el currículo escolar de matemáticas, plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana…" (p. 53750).

La SEIEM en la editorial de su boletín 37, recordaba que "diversos estudios han puesto de relieve lo que nuestra experiencia constata: nuestros estudiantes muestran carencias significativas en el dominio de conocimientos elementales, incluso al nivel de lo requerido en la Educación Primaria" (SEIEM, 2014, p. 2).

El presente estudio no pretende adentrarse en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que desarrollan Montes, Carrillo y Contreras (2013) sino en los conocimientos de matemática elemental que debe conocer el maestro ya que como indican estos autores "entendemos que el profesor conoce (o necesita conocer) el contenido de la sesión que imparte" (p. 407) y ese es el propósito del presente trabajo.

MARCO TEÓRICO

Numerosas investigaciones analizan si los estudiantes que cursan el GMP están preparados y dominan los contenidos elementales que deben impartir. Los hay que señalan deficiencias de los estudiantes, otros que valoran el dominio de los contenidos escolares como competencia profesional, alguno se adentra en contenidos aritméticos y geométricos, otros los ligan a una competencia relacionada con la enseñanza-aprendizaje y otros que apuestan por una selección más rigurosa del alumnado. Todos ellos están de acuerdo en la necesidad de que los alumnos que acceden al GMP deben tener unos conocimientos matemáticos elementales.

El conocimiento matemático fundamental que establecen Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió (2014) constituye la base sobre la que construir en los estudiantes del Grado de Maestro de Primaria los cimientos para iniciarse en la enseñanza de las matemáticas en primaria, pero este conocimiento en la mayoría de los casos resulta insuficiente y para comprobarlo han administrado una prueba a los alumnos de 3º del GMP, justo después de finalizar la última de las asignaturas obligatorias de didáctica de las matemáticas, demostrando los resultados diferentes niveles de conocimiento matemático y "evidencian carencias graves en aspectos que no son tratados en el Grado por considerarse contenido que ya debería ser dominado" (p. 229).

Para rellenar lagunas de conocimientos matemáticos elementales hay Facultades de Educación, como la de la Universidad de Granada que tienen la asignatura *Bases matemáticas en la Educación Primaria* (9 créditos), que aparece en 1º, o en La Laguna con una asignatura titulada *Matemáticas* (6 créditos) en 2º, donde el contenido matemático es un conocimiento disciplinar, o en Sevilla con *Matemáticas específicas para maestros* (9 créditos) o en el caso de Murcia con *Matemáticas y su didáctica I y II* (21 créditos), en 2º y en 3º, en donde el desarrollo del programa debe permitir profundizar en contenidos de matemáticas elementales.

Salinas (2007) pone de manifiesto que a lo largo de su trayectoria como docente ha encontrado lagunas de conocimientos y errores conceptuales en contenidos matemáticos que deberían haberse adquirido y superado, llegando a asegurar que muchos de los alumnos que inician los estudios para maestro no dominan los contenidos referidos a matemáticas escolares, y Lacasa y Rodríguez (2013) indican que la preparación de los maestros para cumplir adecuadamente con su función docente depende de las características de los alumnos y del centro donde cursan sus estudios y llegan a asegurar que quienes acaban dominando mejor la didáctica de las matemáticas son quienes dominan mejor la materia que se enseña. Y añaden "si queremos tener maestros más capaces didácticamente (…) habría que apostar por una selección más rigurosa de los candidatos a las carreras de Maestro, por lo pronto en términos del nivel de conocimientos matemáticos" (p. 83).

Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo (2015) indican que los medios de comunicación han alertado a la opinión pública de la deficiente formación matemática de los maestros y que es imprescindible que los futuros maestros partan de un conocimiento matemático para abordar con garantías de éxito el conocimiento didáctico del contenido y profundizar en el conocimiento matemático especializado que requiere un maestro para realizar una buena práctica docente y en su reflexión final añaden "las autoridades educativas deberían definir con más precisión los conocimientos matemáticos previos exigibles a un estudiante para Maestro, puesto que la Universidad no parece el lugar más adecuado para volver sobre conocimientos que deberían haberse superado con anterioridad" (p. 58).

Martín del Pozo, Fernández-Lozano, González-Ballester y de Juanas (2013) en una encuesta llevada a cabo con 343 maestros tutores de prácticas, de edad media 45 años, (72,4% mujeres y 27,6% hombres) en 85 Centros Educativos de Primaria de la Comunidad de Madrid, les pidieron que valoraran el dominio de los contenidos escolares como competencia profesional, resultando ser la tercera competencia más valorada en cuanto a su importancia para la profesión y en cuanto a su utilización en la práctica docente indicando el 79% "porque si no, no se podrían enseñar" (p. 383), mientras que para el 21% restante indican que son contenidos tan básicos que el dominio no es relevante para la profesión.

Liñan y Contreras (2013) se hacen eco de numerosos autores que señalan algunas de las deficiencias de los estudiantes para maestro en el ámbito de la aritmética en su formación y apuntan la necesidad de mejorar los procesos de selección de los candidatos a Maestros en cuanto a sus conocimientos matemáticos básicos y se plantean si es competencia de los centros de formación inicial de maestros rellenar las lagunas de conocimientos con las que llegan los estudiantes para maestro.

Y García, Buforn y Torregrosa (2014) nos recuerdan que los contenidos geométricos suelen ser olvidados o tratados superficialmente en los currículos de primaria y secundaria debido a un mayor énfasis en la aritmética, en la educación primaria y en el álgebra en la educación secundaria y como consecuencia, es normal que los estudiantes para maestro tengan un conocimiento limitado sobre los contenidos y procesos geométricos.

Para Martin del Pozo et al. (2013) "el dominio de los contenidos aparece ligado a una competencia relacionada con su enseñanza y aprendizaje" (p. 366) y añaden que muchos autores indican que como no se puede enseñar lo que no se sabe, primero es necesario volver a enseñar a los futuros maestros los contenidos y después ocuparse de enseñarles como enseñar esos contenidos en Primaria.

Arce, Marbán y Palop (2017) en un reciente estudio con alumnos del Grado de Maestro de Primaria comprueban si el docente en formación es capaz de hacer "aquello que se supone va a tener que enseñar y exigir a sus futuros alumnos en término de conocimiento matemático" (p. 121), mostrando en los resultados la existencia de dificultades importantes en la interpretación de medidas y en equivalencia entre magnitudes, así como en la lectura e interpretación de datos según su formato de presentación, sobre todo cuando los datos provienen de la lectura y comprensión de un enunciado.

Castro, Gorgorió y Prat (2015) consideran que los estudiantes del Grado de Educación Primaria necesitan, al iniciar su formación, ciertos conocimientos matemáticos que incluyen elementos conceptuales y procedimentales y como la Aritmética es una componente básica de las Matemáticas en la Escuela Primaria también debería serlo en la formación matemática de los futuros maestros.

Tanto la SEIEM (2014) como la RSME (Gordillo, 2017) sugieren que para el ingreso en el Grado de Maestro de Primaria se debería de aplicar una prueba de conocimientos elementales, que los propios profesores del Área de Didáctica de las Matemáticas demandan pero hasta el momento ese consenso no se ha conseguido, tan solo algunas universidades han establecido esa prueba selectiva.

Siguiendo lo indicado por los estudios anteriores y las opiniones generalizadas sobre los conocimientos de matemáticas elementales de los alumnos que llegan al Grado, el objetivo de la presente investigación es comprobar los conocimientos matemáticos con que llegan los alumnos, cómo empiezan y cómo terminan los futuros maestros del Grado de Maestro de Primaria tras haber cursado las asignaturas de la materia Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas utilizando para ello la Prueba de Matemáticas para el ingreso en el Cuerpo de Maestros de Primaria de la Comunidad de Madrid, de contenidos correspondientes a 6º de Primaria (CAM, 2013).

MÉTODO

Participantes

Son estudiantes del Grado de Maestro de Primaria de 2º curso y de 4º curso, matriculados los cursos 13/14, 14/15 y 15/16, en número de 326, pertenecientes a la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia. En 2º curso en un total de 191 alumnos y en 4º curso de 135. De ellos en el curso 13/14 fueron 71 de 2º y 50 de 4º, en el curso 14/15 fueron 60 y 47 y en el curso 15/16 fueron 60 y 30, respectivamente. En total 101 hombres y 225 mujeres. De edades comprendidas entre 18 y 53 años y de media 21,9.

Instrumento

Prueba de Matemáticas para el ingreso en el cuerpo de maestros de Primaria de la Comunidad de Madrid de 2013. Consta de 15 cuestiones de contenidos correspondientes al currículo de Matemáticas de Primaria. Puntuadas con 0 o 1 según estuvieran bien o mal contestadas. Son cuestiones de números, medida, geometría y estadística y que en el estudio se agrupan en dos bloques números-estadística y medida-geometría. Se presenta en Anexo.

Desarrollo

A principio de los cursos 13/14, 14/15 y 15/16 se les pasó la prueba a los alumnos de 2º, curso, en donde comienzan a tener asignaturas de Matemáticas y su didáctica, y también a los alumnos de 4º una vez impartidos todos los créditos obligatorios de Matemáticas y su didáctica en 2º y 3º.

RESULTADOS

Se obtienen resultados considerando el total de participantes, por curso académico y por sexo, tanto de cada cuestión individual como en el total de la prueba. En la Tabla 1 se presentan media y desviación típica de cada cuestión y del total de los participantes, en la Tabla 2, media por curso académico y en la Tabla 3 media por sexo.

Tabla 1. Resultados de las cuestiones del total de la muestra

	OP1	*OP2*	*OP3*	*OP4*	*OP5*	*OP6*	*OP7*	*OP8*
Media	**0,107**	0,472	0,702	0,540	0,472	0,660	0,816	0,377
DT	0,310	0,500	0,458	0,499	0,500	0,475	0,388	0,485
	OP9	*OP10*	*OP11*	*OP12*	*OP13*	*OP14*	*OP15*	*OPM*
Media	0,132	**0,104**	0,537	0,181	**0,067**	0,221	0,328	3,804
DT	0,339	0,306	0,499	0,386	0,251	0,415	0,470	2,025

De las quince cuestiones, solo cinco son superadas por los alumnos, todas pertenecientes al bloque de números y estadística.

La puntuación más baja (OP13) se corresponde con un problema de geometría en donde se presentan dos círculos iguales tangentes, conocida la suma de sus áreas y se pide determinar el área y el perímetro del rectángulo en que están inscritos los círculos, siendo la mayoría de errores debidos a la no comprensión del enunciado. La segunda cuestión de puntuación más baja es de medida (OP10) en donde se desconoce la relación de unidades del SMD y a qué equivale una hectárea, tan solo el 10% contesta bien. La tercera cuestión con puntuación más baja corresponde al bloque numérico-estadístico (OP1) en donde se pide obtener todos los divisores del número 63 y señalar los números primos de entre un total de cinco y es contestada bien por el 11% de alumnos, desconociendo que hay más divisores que las bases de las potencias en la descomposición en factores del número 63 y no recordar los criterios elementales de divisibilidad.

Las puntuaciones más altas corresponden a un caso de proporcionalidad (OP7), a ordenar fracciones y números decimales (OP3) y en tercer lugar a calcular el precio de un libro conocido el precio de otro y la media de ambos (OP6). Dos de cada tres alumnos superan cada una de estas cuestiones. Solo un alumno de los 326 participantes supera las quince cuestiones, es de 4º, hombre y corresponde al curso 15/16.

Tabla 2. Resultados por curso del Grado

	OP1	*OP2*	*OP3*	*OP4*	*OP5*	*OP6*	*OP7*	*OP8*
2º	**0,099**	0,403	0,649	0,440	0,361	0,602	0,801	0,298
4º	**0,119**	0,570	0,778	0,681	0,630	0,741	0,837	0,489
	OP9	*OP10*	*OP11*	*OP12*	*OP13*	*OP14*	*OP15*	*OPM*
2º	0,079	**0,047**	0,482	0,141	**0,026**	0,152	0,283	3,246
4º	0,207	**0,185**	0,615	0,237	**0,126**	0,319	0,393	4,593

Los alumnos de 2º curso tan solo aprueban en tres cuestiones, correspondientes al bloque de números-estadística. Se mantienen las cuestiones del total de la muestra con las puntuaciones más bajas y con las puntuaciones más altas. La media en 2º es seis décimas inferior al total de la muestra.

Los alumnos de 4º curso aprueban en siete cuestiones, todas ellas pertenecientes al bloque numérico-estadístico. Se mantienen las tres cuestiones con puntuaciones más bajas, aunque variando el orden, y se mantienen en el mismo orden las tres con puntuaciones más altas. La media de 4º es superior en 1,3 puntos a la media de 2º y en ocho décimas a la media de todos los participantes.

Tabla 3. Resultados por sexo

	OP1	*OP2*	*OP3*	*OP4*	*OP5*	*OP6*	*OP7*	*OP8*
HOM	**0,188**	0,475	0,772	0,624	0,554	0,812	0,901	0,446
MUJ	**0,071**	0,471	0,671	0,502	0,436	0,591	0,778	0,347
	OP9	*OP10*	*OP11*	*OP12*	*OP13*	*OP14*	*OP15*	*OPM*
HOM	0,228	**0,139**	0,624	0,287	**0,109**	0,337	0,455	4,607
MUJ	**0,089**	**0,089**	0,498	0,133	**0,049**	0,169	0,271	3,443

En todas las cuestiones los resultados en hombres son superiores a los resultados en mujeres. Las más altas en ambos en las cuestiones 3, 6 y 7, del bloque números-estadística y las más bajas en las cuestiones 1, 10 y 13, al igual que en la Tabla 2.

Resultados por curso, año y sexo

Por curso del Grado y Año académico, en los tres cursos académicos, tanto en 2º como en 4º, las tres cuestiones más valoradas son la 3, 6 y 7, todas del bloque de números-estadística, llegando esta última en 4º del curso 13/14 a ser contestada bien por el 90% de los alumnos. La cuestión 13 del bloque de medida-geometría, es de las tres menos valoradas, tanto en 2º como en 4º y las cuestiones 9 y 10 en dos cursos académicos.

Hay dos datos muy representativos y es que la cuestión de divisibilidad no fue contestada correctamente por ningún alumno de 4º en el curso 14/15 y el segundo dato que los alumnos de 4º en el curso 15/16 tienen en la prueba una media superior a 5.

Por sexo y Año académico, en los tres cursos académicos, tanto hombres como mujeres, tienen las mismas tres cuestiones OP3, OP6 y OP7 como las de mejor puntuación, llegando esta última de proporcionalidad a ser contestada por el 96,6% en hombres en el curso 15/16.

En la Tabla 4, se presentan las medias por curso y por sexo en 2º, 4º y total.

Tabla 4. Medias por curso Académico, curso del Grado y sexo

	13/14	*14/15*	*15/16*	*HOM*	*MUJ*	*TOT*
2º	3,155	3,167	3,433	4,090	2,930	3,246
4º	4,600	4,113	**5,175**	**5,156**	4,271	4,593
TOT	3,752	3,583	4,109	4,607	3,443	3,804

Los alumnos de 4º del curso 15/16 superan la prueba y por género son los hombres los que consiguen aprobarla. Es en el curso 15/16 donde mayor diferencia hay entre resultados por curso, siempre a favor de los estudiantes de 4º, y por sexo también hay diferencia, mejor en hombres. Es en el curso 15/16 donde los resultados son mejores y mejores en hombres que en mujeres.

Diferencias significativas

De las quince cuestiones en trece hay diferencias significativas entre cursos siempre favorable a 4º y en las dos cuestiones que no la hubo una es de puntuación más baja (OP1) y la otra de puntuación más alta (OP7). En 2º, son 52 hombres y 139 mujeres, y hay diferencias significativas en once cuestiones (todas menos 2, 3, 8 y 13) y en el total de la prueba, siempre a favor de hombres. En 4º, son 49 hombres y 86 mujeres, y solo hay diferencias significativas en la primera cuestión y en el total de la prueba, mejor puntuación a favor de hombres.

Considerando los 326 alumnos, 101 hombres y 225 mujeres, y al aplicar una t-Student hay diferencias significativas a favor de hombres en once cuestiones, (todas menos OP2, OP3, OP8 y OP10) y en el total de la prueba (p<.001). Los totales aparecen en Tabla 5.

Tabla 5. Medias por curso del Grado, curso académico y sexo

	13/14	*14/15*	*15/16*	*H*	*M*
2º	3,155	3,167	3,433	4,090	2,930
4º	4,600	4,113	5,175	5,156	4,271
Todos	3,752	3,583	4,109	4,607	3,433

En 2º hay diferencias significativas (p<.001) y en el total a favor de hombres.

Al aplicar una F-Snédecor se comprueba que no hay diferencias significativas en 2º (p=.627), ni en 4º (p=.060), ni en el total (p=.167).

Medias por bloques de contenidos

Agrupadas las quince cuestiones en dos bloques, uno de Números-Estadística (N-E) y el otro de Medida-Geometría (M-G), los resultados vienen en la Tabla 6.

Tabla 6. Medias por bloques de contenidos

N-E	*13/14*	*14/15*	*15/16*	*HOM*	*MUJ*	*TOT*
2º	4,68	4,54	5,19	5,67	4,47	4,80
4º	6,13	5,69	6,97	6,73	5,92	6,21
M-G	*13/14*	*14/15*	*15/16*	*HOM*	*MUJ*	*TOT*
2º	1,41	1,60	1,41	2,28	1,16	1,47
4º	2,89	2,34	3,23	3,47	2,41	2,79

En números-estadística (N-E) se aprueba en 4º en todos los cursos académicos y por sexo, mientras que en 2º solo se consigue en el curso 15/16 y en hombres. En el caso de las cuestiones de medida y geometría (M-G) en ningún caso se supera, ni por cursos académicos, ni por sexo, ni por total de la muestra.

Alumnos que podrían estudiar el Grado y alumnos que pasarían la prueba eliminatoria de Oposición

En Tabla 7 se presentan porcentajes de alumnos aprobados por curso académico, curso del grado y sexo.

Tabla 7. Porcentaje de aprobados por variable de corte

APR	*13/14*	*14/15*	*15/16*	*HOM*	*MUJ*	*TOT*
2º	18,31	13,33	21,67	25,0	15,11	17,80
4º	40,0	25,53	47,37	53,06	27,91	37,04

- Si consideramos esta prueba de contenidos elementales como barrera para poder estudiar la primera asignatura de matemáticas en el Grado, vemos que son 34 los alumnos de 2º que la superan, el 17,8%.
- Si consideramos los alumnos de 4º que aprobarían esta prueba eliminatoria de oposición, hay 50 alumnos, el 37,04%.
- En el curso 13/14, son 13 los alumnos de 2º que la aprueban, es decir el 18,31% y 20 los alumnos de 4º, el 40%.
- En el curso 14/15, son 8 los alumnos de 2º que la aprueban, es decir el 13,33% y 12 los alumnos de 4º, el 25,53%.
- En el curso 15/16, son 13 los alumnos de 2º que la aprueban, es decir el 21,67% y 18 los alumnos de 4º, el 47,37%.
- En 2º curso, son 13 los hombres que aprueban, es decir el 25% y 21 mujeres, el 15,11%.
- En 4º curso, son 26 los hombres que aprueban, el 53,06% y 24 mujeres, el 27,91%.
- En 4º curso el porcentaje de aprobados duplica al de 2º, tanto por curso académico como por sexo y por total de la prueba. Pero tan solo es en 4º hombres los que consiguen superar el 50% de aprobados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Solo un alumno, de los 326 del estudio contestó bien a las quince cuestiones, el 0,003% y tan solo el 17,8% de los alumnos de 2º superan esta prueba, por lo que de ser considerada prueba específica para poder cursar el Grado de Maestro de Primaria quedaría reducido el número de estudiantes actuales, no superando en ningún curso el 25%, por lo que tan solo uno de cada cuatro alumnos estaría preparado para cursar la materia Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. En el caso de mujeres este porcentaje se reduce al 15%, cifra alarmante dado que en 2º siete de cada diez alumnos son mujeres. De las quince cuestiones solo tres de ellas son aprobadas, todas pertenecientes al bloque de números-estadística, no superando la prueba en ninguno de los tres cursos analizados, ni tampoco por sexo ni hombres ni mujeres.

En 4º curso, una vez que han cursado los 21 créditos obligatorios de la materia Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas el 37,04% superan la prueba por lo que de considerarse como prueba eliminatoria para el ingreso en el Cuerpo de Maestros tan solo uno de cada dos hombres y una de cada cuatro mujeres la aprobaría, variando entre el 25,53% y el 47,37% según el curso académico. De las quince cuestiones siete de ellas son aprobadas todas ellas pertenecientes al bloque de números-estadística, superando la prueba solo los hombres.

Considerando las cuestiones de números y estadística, los alumnos de 2º del curso 15/16 y los hombres de la muestra logran superar este bloque, mientras que los alumnos de 4º en todos los cursos académicos y por sexo lo aprueban.

Considerando las cuestiones de medida y geometría en todos los cursos académicos y por sexo, tanto en 2º como en 4º suspenden este bloque y que está en consonancia con las respuestas dadas por los alumnos que "les resulta más difícil entender los conceptos geométricos que los aritméticos" (Escolano, Gairín, Jiménez-Gestal, Murillo y Roncal, 2012, p. 130).

A la vista de los resultados podríamos contestar a las preguntas, ¿tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales?, ¿es esta la mejor prueba para medir el conocimiento sobre matemáticas elementales? Escolano et al. (2012) proponen "disponer de una prueba sobre competencia matemática fiable adaptada tanto al nivel universitario de los estudiantes de Magisterio, como a los objetivos de su formación profesional" (p. 130). Pero "más que alcanzar consenso sobre las características o contenidos de una posible prueba específica de acceso, lo que es esencial es alcanzar consenso sobre la necesidad de tal prueba" (SEIEM, 2014, p. 2).

Y como dice Pañellas (2016) hay que aprender de nuevo lo que ya fue aprendido para familiarizar a los futuros maestros con los contenidos elementales de la educación primaria, y lo aprendido y olvidado es debido, sin duda, a que fue simplemente memorizado sin conocer el proceso de su construcción.

Este estudio tiene las limitaciones propias de su muestra y del instrumento, la primera por ser incidental y aplicarla a los alumnos que estaban en ese momento en clase y la segunda es que de haberse utilizado otra prueba los resultados posiblemente diferirían de los de este estudio. Sin embargo, si pone de manifiesto que los conocimientos matemáticos elementales son esenciales para un futuro maestro y que es necesario adoptar algún criterio generalizado tanto para el ingreso en el Grado de Maestro de Primaria como en la selección de profesores de Primaria, porque aunque el porcentaje de aprobados en 4º duplica al de 2º, tan solo en 4º hombres se consigue superar el 50% de aprobados.

Referencias

Arce, M., Marbán, J. M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119-128). Zaragoza: SEIEM.

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: Inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

CAM. (2013). Procedimiento selectivo para el ingreso en el cuerpo de maestros 2013. Comunidad de Madrid. Matemáticas. Recuperado de htpp://www.madrid.org/

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, N. (2015). Conocimiento matemático fundamental en el Grado de Educación Primaria: sistema de numeración decimal y valor posicional. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 221-228). Alicante: SEIEM.

Escolano, R., Gairín, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo, J. y Roncal, L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del Grado de Educación Primaria. *Contextos educativos, 15*, 107-134.

García, A., Buforn, A. y Torregrosa, G. (2014). Un módulo de enseñanza centrado en desarrollar el razonamiento configural: características desde una perspectiva cognitiva. En M. T Tortosa, J. D. Álvarez y N. Pellín (Coords.), *XII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria*. Alicante: Universidad de Alicante.

Gordillo, F. (2017). Los maestros de primaria deberían hacer matemáticas en Bachillerato. Recuperado de http://www.teknlife.com/noticia/los-maestros-primaria-deberian-matematicas-bachillerato/

Lacasa, J. M. y Rodríguez, J. C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos matemáticos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En *TEDS-M Estudio Internacional sobre la formación inicial en Matemáticas de los maestros. IEZ. Informe español. Volumen II. Análisis secundario*. Madrid-MECD, pp. 65-97. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/teds-m-vol2-linea.pdf?documentId=0901e72b8171f9cf

Liñán, M. M. y Contreras, L. C. (2013). Debilidades y fortalezas en el conocimiento de los temas matemáticos en Geometría de los estudiantes para maestro. En A. Berciano, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-343). Santander: SEIEM.

Martín del Pozo, R., Fernández-Lozano, P., González-Ballesteros, M. y de Juana, A. (2013). El dominio de los contenidos escolares: competencia profesional y formación inicial de maestros. *Revista de Educación, 360*, 363-387.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKY y MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (p. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de educación, 367*, 36-62.

Orden ECI/3857/2007 de 27 de diciembre por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 312*, pp. 53747-53750.

Pañellas, M. (2016). Reaprender los conocimientos matemáticos básicos. Tribuna d´educació. Recuperado de http://www.tribunaeducacio.cat/reaprender-los-conocimientos-matematicos-basicos/

Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de magisterio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, (pp. 381-390). La Laguna: SEIEM.

SEIEM. (2014). Editorial. *Boletín de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 37*, 2.

Anexo. Prueba de Matemáticas

OP1	a) Hallar todos los divisores de 53. b) Marcar cuales de los siguientes números son primos: 57, 23, 77, 41. 121.
OP2	a) Escribir en números romanos: 1260 y 2013. b) Escribir en números arábigos: MCDLXV y MCCCXLIV.
OP3	Ordenar de menor a mayor los siguientes números expresando previamente las fracciones en números decimales: 4/5, 0,7, 2/3, 0,45, 3/4.
OP4	Calcular el número que falta en las siguientes igualdades: 3000: ___ = 0,3; 0,02 x ___ = 40.
OP5	De los 150 alumnos que habían reservado plaza para cursar 1º de ESO en un determinado instituto de Madrid, el 10% tuvo que quedarse en el colegio para repetir 6º de Primaria. De los que pasaron, el 20% se matriculó a última hora en otro centro. ¿Cuántos alumnos se matricularon en dicho instituto?
OP6	El precio medio de dos libros es 12,45 euros. Uno de ellos cuesta 14,50, ¿cuánto cuesta el otro?

OP7 El profesor de Educación Física ha mandado dar vueltas al patio a tres alumnos, Juan, Pedro y Ana, de 8, 6 y 4 años, respectivamente. Cada uno deberá dar un número de vueltas proporcional a su edad. El profesor le dice a Pedro que dé tres vueltas al patio. ¿Cuántas vueltas tendrán que dar año patio Juan y Ana?

OP8 Completa las igualdades: 3120,55 m = ___ km = ___ m = ___ cm; 34740 mg = ___ g = ___ cg.

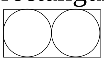
OP9 Expresar: a) 6,3 horas en horas y minutos y b) 3670 segundos en horas, minutos y segundos.

OP10 ¿Cuántas ha mide un campo rectangular de 2 km de ancho y 3000 m de largo?

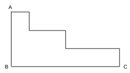
OP11 Un coche necesita 8 l de gasolina para recorrer 88 km. a) ¿Qué distancia puede recorrer con 15 l?, b) ¿Cuánta gasolina necesita para recorrer 121 km?

OP12 Un plano está dibujado a escala 1:20000. Calcular, en km, la distancia entre dos lugares distantes 15 cm en el plano.

OP13 La suma de las áreas de dos círculos iguales de la figura es 72π. Hallar el área y el perímetro del rectángulo en que están inscritos los círculos.



OP14 Calcular el perímetro de la figura siendo AB = 8 cm y BC = 20 cm.



OP15 A cierta hora del día, un poste de 12 m de alto proyecta una sombra de 18 m de largo. A esa misma hora, ¿qué longitud tendrá la sombra producida por un poste de 3 m de altura?

EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA COMPARTIDO POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE VIDEOS

Knowledge of the practice of mathematics shared between prospective teachers through video analysis

Oliveros, I.[a], Pascual, M. I.[a], Codes, M.[a] y Martín, J. P.[a]

[a]Universidad de Huelva

Resumen

En el contexto de una investigación sobre el conocimiento especializado que se moviliza a través del análisis de video y de la discusión en un entorno colaborativo, hemos seleccionado las prácticas definir y clasificar como punto de partida para reflexionar sobre el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) de estudiantes para maestro (EPM). En esta comunicación, presentamos los resultados obtenidos a través del análisis de contenido de los informes individuales y de la transcripción de las discusiones de grupo, con el objetivo de caracterizar el conocimiento sobre las prácticas matemáticas de los EPM, entendido desde el modelo MTSK. Hemos encontrado evidencias de conocimiento que nos permiten reflexionar sobre las relaciones que establecen los estudiantes para maestro entre las prácticas definir y clasificar, que pueden ser útiles para la construcción de materiales de formación inicial.

Palabras clave: *MTSK, definir, clasificar, análisis de videos, estudiantes para maestro.*

Abstract

Defined in a research about the Specialized Knowledge that is mobilized through video analysis and the discussion in a collaborative environment, we have selected the define and classify practices like a start point to reflect about the Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) in prospective teachers (PT). In this paper, we show the results obtained through the content analysis of the individual reports and of the transcription of the group discussion. Our aim is to characterize the knowledge of practices in mathematics of PT, framed in the MTSK model. We found evidences of knowledge that allows us to reflect about the relationships that prospective teachers do between define and classify practices that can be useful to construct materials for their education.

Keywords: *MTSK, to define, to classify, video analysis, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

En el marco de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, uno de los grandes retos es profundizar en cómo entiende el docente que se construye el conocimiento disciplinar en el área de matemáticas. Existe una estrecha relación entre el conocimiento sintáctico del profesor (Schwab, 1978) y el tipo de aprendizaje matemático que construyen sus alumnos, que si bien no presentan diferencias a nivel algorítmico con otros grupos de alumnos, alcanzan un mayor nivel de razonamiento y comprensión de la disciplina (Grossman, Wilson y Shulman, 1989). En el caso de los maestros de primaria, esta relación se estrecha aún más si tenemos en cuenta: i) es la etapa donde se inicia la construcción de muchos de los conceptos matemáticos básicos, ii) sirve como preparación y estructura la etapa de educación secundaria donde predominan los procesos de abstracción, y, iii) muchas de las prácticas matemáticas, como la

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M. y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón: SEIEM.

búsqueda de patrones, la construcción de clasificaciones, o la resolución de problemas, vertebran curricularmente la etapa.

De esta forma, se torna necesaria la pregunta ¿qué conocimiento sobre las formas de proceder en matemáticas evidencian los maestros? Como punto de partida hemos tomado la formación inicial de maestros de Educación Primaria y una actividad de formación en la que, a partir del análisis de vídeo y la reflexión conjunta, tres estudiantes para maestro (EPM) muestran su conocimiento sobre las prácticas de definir y clasificar. Dicha actividad se encuentra inmersa en la fase inicial de un experimento de enseñanza con el que se pretenden desarrollar destrezas relacionadas con el Conocimiento de la Práctica Matemática, en la que los EPM no han recibido instrucción previa. Así, el objetivo de nuestra investigación consiste en identificar qué conocimiento especializado compartido (que surge en informes individuales sobre la sesión visualizada y compartido en la discusión de grupo) movilizan tres estudiantes para maestros en un entorno de análisis de práctica docente a través de vídeos, en relación con las prácticas de definir y clasificar.

MARCO TEÓRICO

El conocimiento de la práctica matemática

La consideración del subdominio de Conocimiento de la Práctica Matemática, dentro del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK, (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán, 2013; Montes, Contreras, Carrillo, 2013) tiene su origen en la noción de conocimiento sintáctico construida por Schwab (1978) y supone un avance en el desarrollo del Conocimiento del Horizonte Matemático, en el sentido de las prácticas, incluido en el modelo MKT (Ball, Thames y Phepls, 2008; Ball y Bass, 2009). El conocimiento de la sintaxis de la disciplina matemática, se encuentra en la base de la capacidad docente para generar o validar los conocimientos matemáticos, y permite desarrollar una comprensión de los mismos que trasciende el cómo-para, en relación a la aplicación, hasta los porqués que los fundamentan (Grossman, Wilson y Shulman, 1989).

En esta línea, desde el modelo MTSK, se considera el subdominio de Conocimiento de la Práctica Matemática como aquél que aglutina cómo entiende el docente que se construyen las matemáticas, su conocimiento sobre el quehacer matemático y los distintos tipos de razonamiento y estrategias de las que se sirve la disciplina para generar nuevos saberes. Se consideraría que forma parte de este subdominio el conocimiento del profesor sobre cómo se construyen las definiciones matemáticas. El conocimiento de esta construcción incluye su conocimiento sobre las condiciones necesarias y suficientes para construir una definición, o sobre la potencialidad matemática de la misma; así como la flexibilidad para entender en términos de lógica proposicional, las repercusiones de una determinada definición construida. No obstante, el conocimiento profundo e incluso razonado de una determinada definición dada, quedaría excluido del Conocimiento de la Práctica Matemática y se consideraría Conocimiento de los Temas.

En el modelo MTSK (Figura 1), se encuadra el Conocimiento de la práctica Matemática (KPM) como uno de los tres subdominios que componen el Conocimiento Matemático, que se completa con el Conocimiento de los Temas y el Conocimiento de la Estructura de la Matemática.

Siguiendo a Ponte (1994), el conocimiento del profesor es, en gran medida, implícito. Este hecho se constata en el estudio de todos los subdominios de MTSK que, aunque se han delimitado a partir de varias investigaciones (Climent et al., 2016; Liñán y Contreras, 2013; Montes, Carrillo, Ribeiro, 2014; Sosa, Aguayo, Huitrado, 2013; Sosa, Flores-Medrano, Carrillo, 2015; entre otras), han necesitado la complementariedad de una entrevista como método de investigación. Especialmente, en el caso del conocimiento de la práctica matemática, es un conocimiento que no suele hacerse explícito en contextos de enseñanza y aprendizaje, ya que los elementos sintácticos no suelen abordarse de forma explícita en las aulas de Primaria. Esta limitación constituye una motivación más para el desarrollo de este trabajo, que tiene como objetivo indagar sobre el conocimiento sobre las prácticas de definir y clasificar, como parte de las prácticas matemáticas relativas a este subdominio, que se puede evidenciar en estudiantes para maestro.

Las prácticas de definir y clasificar

La acción de definir un objeto matemático tiene un papel esencial en la práctica matemática, ya que de ese proceso resultan el conjunto de propiedades que caracterizan el objeto y que son la base para establecer relaciones con otros elementos matemáticos. A su vez, una definición puede ser el origen de un nuevo concepto matemático tras un proceso de diferenciación y reconocimiento de propiedades particulares (Mariotti y Fischbein, 1997; Villiers, 1998). Por ejemplo, en el caso de los cuadriláteros, la condición de tener lados paralelos o no, induce a la definición de un nuevo objeto que es el paralelogramo. Este reconocimiento de características comunes, se encuentra en la base del proceso de clasificar, que lejos de ser una práctica matemática sencilla, provoca ciertos conflictos en los que el maestro debe mediar (Mariotti y Fischbein, 1997).

Definir y clasificar son dos prácticas matemáticas complementarias, dos caras de la misma moneda en el sentido en el que Sfard (1991) se refiere a las concepciones operacional y estructural de los objetos matemáticos. Para definir un objeto matemático, hay que conocer su naturaleza, percibir aquellas características que lo hacen diferente de otros objetos de una misma clase y sintetizar su singularidad con un lenguaje claro y preciso. De entre todos los objetos que verifican una definición, se pueden apreciar a su vez particularidades que marcan diferencias entre unos y otros. Esas particularidades, permiten clasificar todos los objetos que cumplen una determinada definición en otras subclases que comparten unas características generales, pero se diferencian en algunos matices.

Por ejemplo, para clasificar los paralelogramos debemos fijarnos en aquellos elementos que son diferentes en distintos paralelogramos, como son las posiciones relativas de sus lados o de sus diagonales, la medida de sus ángulos o de sus lados. Captar esas singularidades es necesario para establecer un criterio de clasificación y así diferenciar, por ejemplo, entre equiláteros y no equiláteros. Cuando definimos un rombo como un paralelogramo en el que todos los lados tienen la misma longitud, estamos sintetizando aquellas características que lo diferencian de otros polígonos (al ser paralelogramo es un polígono de cuatro lados con pares de lados opuestos paralelos) y de otros paralelogramos (como todos los lados tienen la misma longitud, es equilátero). La etiqueta “rombo” engloba todas esas características que diferencian a unos polígonos de otros, concretamente a unos cuadriláteros de otros y más específicamente, a unos paralelogramos de otros. Definir “rombo” no tendría sentido si no se hubiera clasificado previamente a los paralelogramos en equiláteros y no equiláteros. Pero esa clasificación, tampoco tendría sentido si no se hubiera definido antes esa clase de cuadriláteros que tiene sus pares de lados opuestos paralelos. Al definir, ponemos una etiqueta al resultado de sintetizar lo característico de una clase de objetos que es una subclase de otro conjunto de elementos con los que se comparten ciertas propiedades. Según el grado de especificidad, unos objetos se clasifican en otros y esa clasificación da lugar a nuevas definiciones de objetos matemáticos.

Desde un punto de vista didáctico, algunas decisiones en torno al desarrollo del currículo y a cómo aprende el alumno, están influenciadas por el modo en que el docente conoce la práctica de definir y su papel en la didáctica de la matemática (Zazkis y Leikin, 2008).

Según Vinner (1983, 1991), al hablar sobre un determinado concepto geométrico, se activa en nuestra memoria una serie de representaciones, experiencias, ideas… que, en la mayoría de los casos, distan mucho de ser una definición del concepto evocado. De esta manera, se recurre en nuestro conocimiento a lo que denomina imagen del concepto. Esta imagen se forma a partir de dibujos, representaciones y/o figuras que los estudiantes han visto ejemplificadas en alguna ocasión a lo largo de su experiencia, tanto escolar como no escolar. En este punto, el papel del maestro es esencial porque de él depende la variedad de ejemplos que se le presentan al alumno en el ámbito escolar y, por tanto, la calidad de esas imágenes conceptuales y su potencialidad para contradecir imágenes conceptuales erróneas (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Asimismo, Vinner y Hershkowitz (1983) denominan definición de un concepto al conjunto de propiedades y características adquiridas de manera memorística que los estudiantes aprenden para recitarla cuando se les solicite. En la mayoría de casos, esta definición se forma sin estar ligada con la imagen conceptual provocando un desajuste entre ambas.

En todo este proceso de generación de imágenes conceptuales y definiciones de conceptos, el maestro no solo interviene como generador de ejemplos que enriquezcan la imagen conceptual de un alumno, sino como "mediador entre los procesos mentales que requiere verificar si un objeto pertenece a una clase" (Mariotti y Fischbein, 1997, p. 246), cuando se genera una nueva definición constructiva de un objeto matemático (Villiers, 1998). De ahí la importancia del KPM que posea el maestro y la relevancia de indagar en él para actuar desde la formación inicial de maestros en su mejora.

Análisis de vídeos

Desde hace 20 años se viene potenciando el uso de vídeos como herramienta para la construcción de conocimiento y habilidades profesionales por parte de los estudiantes para maestro (EPM) (Blanco, 1996; Callejo, Llinares y Valls, 2007; Climent y Carrillo, 2007; Climent et al., 2016; Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares y Sánchez, 1998; Llinares, Valls y Roig, 2008; Sherin, 2003). Climent et al. (2016), observaron que para los EPM tiene más sentido el conocimiento generado a partir del análisis de un vídeo de una clase real de primaria que el que puedan construir a partir de la lectura de un documento escrito. Teniendo en cuenta las limitaciones temporales que afectan a las prácticas de los EPM, "el análisis de vídeos de situaciones de aula en la formación inicial puede suplir (al menos parcialmente) el papel que puede jugar la práctica en la formación del profesor en ejercicio." (Ídem, p. 99).

En los vídeos que se utilizan en la formación inicial se puede observar una situación real de un aula de primaria que permite analizar diferentes aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, dado que se registra la actuación del maestro y de toda la clase en general, lo que permite centrar la mirada tanto en el conocimiento profesional como en el aprendizaje de los estudiantes. Para Fortuny y Rodríguez (2012), es esencial el uso de esta herramienta para desarrollar la mirada profesional del futuro maestro y dotarle de conocimiento que le permita "interpretar las interacciones matemáticas del aula" (p. 37). Incluso proponen no solo el uso de vídeos de maestros expertos o noveles, si no el de grabaciones de los propios EPM en sus prácticas para mejorar su desarrollo profesional (De Gamboa, Badillo, Ribeiro, Montes y Sánchez-Matamoros, 2016). En nuestra investigación, hacemos uso del análisis de la práctica docente a través del vídeo focalizando las reflexiones en torno al desarrollo del conocimiento profesional de los EPM.

METODOLOGÍA

Esta investigación se aborda desde un enfoque interpretativo (Guba y Lincoln, 1994) de naturaleza cualitativa, por medio de un estudio de caso como diseño metodológico (Stake, 2005). Este estudio queda enmarcado como estudio de caso instrumental, ya que el caso sirve como detonante para examinar el conocimiento que se hace explícito en la discusión compartida después del análisis individual del vídeo, que es nuestro foco de interés.

Los participantes de este estudio, elegidos intencionadamente, son tres estudiantes del Grado de Educación Primaria a los que llamaremos Carla, Ismael y Ramón. En una primera etapa, los EPM analizaron individualmente el vídeo de una sesión de 5º de EP en la que se construye la definición de polígono a partir de la clasificación de figuras planas en base a distintos criterios; este análisis se realizó siguiendo un sistema de categorías (anexo I) y a partir de él, cada EPM realizó un informe. Posteriormente, se videograbó y se transcribió una reunión conjunta entre los tres EPM en la que se compartieron los análisis individuales. Finalmente, cada EPM elaboró una reflexión individual sobre todo el proceso.

Para realizar el análisis de las producciones de los EPM se ha utilizado como instrumento el modelo analítico MTSK. Tanto en los informes iniciales (I), como en la transcripción del vídeo de la discusión conjunta (D), se han diferenciado unidades de información, pudiéndose distinguir entre evidencias, indicios u oportunidades, según el grado de certeza sobre la información en el sentido de Escudero-Ávila et al. (2016). Se codificaron las unidades teniendo en cuenta la fuente (I, D), la inicial asignada a cada EPM (C, I, R) y los números de línea de transcripción o de informe en las que se aprecia la evidencia. Por ejemplo, utilizamos el código D-R 355-356 para referirnos a la unidad de información proveniente de la transcripción de la discusión conjunta, en la que Ramón manifiesta conocimiento en las líneas 355 y 356.

De acuerdo con el modelo de conocimiento especializado (MTSK) se abordarán los indicadores correspondientes al KPM (conocimiento de la práctica matemática) debido a la relación directa que guarda con las acciones de definir y clasificar. Estos indicadores están conformados por: *Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*. Estos indicadores están extraídos de la descripción del KPM de Carrillo et al. (en prensa) y como parte del KPM de Vasco y Climent (2018).

RESULTADOS

En función de los datos obtenidos con los instrumentos de recogida de información, se hace un análisis de contenido en base al marco teórico del MTSK. Se identifican los fragmentos más ricos en cuanto a evidencias, indicios y oportunidades que pretenden describir qué aspectos relacionados con el subdominio KPM se corresponden con el conocimiento movilizado por los EPM, que es nuestro foco de interés. (En los fragmentos también aparece la inicial del investigador, el cual formula preguntas para guiar la discusión).

Como se ha descrito anteriormente, el subdominio KPM no está dividido en categorías, sino que queda definido por unos indicadores. Comenzaremos el análisis exponiendo nuestros resultados sobre la identificación del indicador *Formas de validación y demostración* (D 162-185):

N: ¿Qué os parece eso de que parta de ejemplos para llegar o para que se construya esa definición de polígonos?

I: Como elemento matemático, construir una definición a partir de ejemplos, no está matemáticamente correcto. Se entiende, que, en una clase de primaria, lo que se quiere es que el concepto quede claro. A lo mejor, sí es una buena vía para que el niño lo entienda, pero matemáticamente no.

R: Que en sentido matemático tenga más o menos valor (…) sí, a partir de ejemplos puede tener menos valor, pero para los niños en primaria es una iniciación. Es más, nosotros en las clases en las demostraciones qué hacemos primero, probar con números y ya después, poniendo la demostración bien.

Se refuerza este comentario con esta unidad de información extraída del informe inicial de Ismael, que es quien detona la discusión sobre la validez del uso de los ejemplos en la construcción de la definición:

> “(…) con este tipo de actividad se intenta partir desde los ejemplos de polígonos para construir una definición (…) pero no nos ayuda a construirla desde argumentos válidos matemáticamente. No se debe generalizar a partir de un ejemplo o un conjunto de ejemplos” (I-I 29-32).

Ismael y Ramón exponen que construir definiciones a partir de ejemplos no es matemáticamente correcto, pero se utiliza este método porque es para EP. Estos dos EPM están en tercero del Grado de EP y están estudiando la demostración matemática, como se puede apreciar en la última parte de la intervención de Ramón, por eso establecen que el papel de los ejemplos al definir en matemáticas es como el que tienen al demostrar, para familiarizarse con la situación. Para hacerlo correctamente hay que prescindir de los ejemplos.

Sin embargo, en la discusión conjunta de los EPM aparece la idea de propiedades de los polígonos como elementos a partir de los cuales sí se puede construir de manera más general una definición matemática. Encontramos un indicio de ello en la siguiente declaración del informe inicial de Ramón, en la que relaciona la construcción de la definición con las propiedades de los polígonos.

> "Los contenidos que se tratan en la sesión son las figuras poligonales y las no poligonales, centrándose en las primeras para construir su definición. Los vértices, lados, simetría, ángulos de una figura". (I-R 33-35).

En relación al indicador *Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición* exponemos el siguiente fragmento de la discusión conjunta donde los EPM discuten sobre la información explícita que se construyó en el aula de primaria (D 293-323):

> R: Bueno, me hizo gracia que en la definición pusiera con lados rectos y sin ninguna curva, es lo mismo.
>
> N: ¿Tú hubieras recortado esa definición?
>
> R: Al final del video, un niño dice que no tener los lados curvos es lo mismo que tener todos los lados rectos. No haría falta decir las dos cosas. Pero esa definición es la definitiva.
>
> N: ¿Hubierais dejado esa definición o hubierais trabajado sobre ella?
>
> I: Yo creo que, si es la primera que se le está presentando y los niños han llegado a esa conclusión, como conclusión está bien, aunque sea redundante. Yo la dejaría así, y el próximo día cuando se vuelva a trabajar, proponer quitar esa parte. La vas decorando para que se parezca más a la definición que tenemos.
>
> N: (…) ¿Se supone que no debe tener algo redundante?
>
> I: No pasa nada, pero por construirla con economía, para que sea más simple, más fácil de recordar.
>
> C: Sí podría tener algo redundante para que los niños sepan las propiedades. Por ejemplo, que digan lados rectos y que no tenga curva, que el niño sepa también el concepto de curva. Veo bien que contraponga lo que dice para que los niños conozcan los dos procesos. Como idea previa.

Del fragmento anterior, también se identifica que los tres EPM manifiestan que en una definición solo deben estar explícitos los términos y propiedades necesarios. No le ven sentido a repetir las propiedades incluidas y, si lo hacen, es para construir una definición inicial que después irán ajustando para facilitar la comprensión de los niños. En un nivel de certeza de oportunidad, hemos encontrado que los EPM no saben con seguridad qué debe cumplir una definición matemática, aunque sí lo intuyen por economía del lenguaje.

Ramón, en su informe inicial, también resalta este carácter de la definición, estando de acuerdo con el alumno que hizo esta aportación en el video analizado. No compartía la redundancia de poner en una definición "tiene los lados rectos y ninguna curva":

> "En el momento de construir la definición de las figuras geométricas, ponen que tienen lados rectos y que no presentan ninguna curva. Más tarde, un alumno se da cuenta que no es necesario poner que no tienen curva, puesto que, al tener todos los lados rectos, ya está diciendo que no hay ninguna curva". (I-R 11-15).

Una de las apreciaciones que se puede hacer desde el modelo MTSK es la influencia de las concepciones sobre cada uno de los conocimientos del profesor. En este sentido, la concepción sobre la matemática que evidencia Ismael con su comentario "la va decorando para que se parezca más a la definición que tenemos" (D 293-323), guarda relación con una visión platónica de las matemáticas, donde el conocimiento es casi preexistente y la interacción humana con las matemáticas se reduce al descubrimiento de las mismas. Bajo este supuesto, tiene sentido que Ismael manifieste que las definiciones en matemáticas son únicas, y que no puede haber diferentes definiciones de un mismo concepto.

La visión de las matemáticas que hemos expuesto anteriormente se puede igualmente inferir en otras aportaciones de los EPM. Por ejemplo, en la discusión sobre la existencia única, o no, de clasificaciones (D 379-384):

N: ¿Cuál es el objetivo?

R: El objetivo para mí, era que crearan ellos mismos una clasificación. Viendo las figuras. En vez de decirles que pueden clasificarse por sus lados, vértices o ángulos; según su simetría, según (…)

I: De las clasificaciones que hay, que ellos las construyan.

R:Que ellos construyan las clasificaciones que hay, viendo las semejanzas.

En la siguiente intervención de Ramón, también se puede evidenciar la información anterior, cuando dice "la que es de verdad". Su concepción es que las clasificaciones ya están construidas y conocidas formalmente y tenemos que trabajar esas (D-R 374-376):

R: (…) la idea de la actividad es que clasifiquen ellos, como si los polígonos no fueran clasificados nunca y lo clasificaran por primera vez. Para que se den cuenta de que la clasificación que tienen ellos va a ser similar a la que es de verdad.

En el siguiente diálogo, los tres EPM siguen hablando del objetivo de la actividad. Ismael y Carla no reconocen la influencia mutua que existe entre los procesos de clasificar y definir. En el video que observan los EPM el proceso que se sigue es, clasificar los objetos y buscar una descripción que englobe a lo que se ha incluido en un mismo grupo excluyendo a otros, resultando como definición ese conjunto de propiedades. Podría indagarse sobre las relaciones entre clasificar y definir, porque Ramón, como indicio, sí reconoce como válido iniciar un proceso de clasificación que tenga como consecuencia la construcción de una definición, sin embargo, en la discusión conjunta no puede considerarse conocimiento compartido porque Ismael y Carla siguen sin reconocer la dependencia mutua entre los dos procesos (D 385-389):

I: Sí, pero después al final de todo, cuando hace la puesta en común, no hace hincapié en eso (la clasificación). Creo que hace hincapié en la definición. Si tu objetivo de todas las actividades era construir la definición, no le vería sentido que trabaje la clasificación.

C: Yo tampoco la veía muy (…)

R: Sí, es para construir la definición.

En el siguiente fragmento siguen hablando de la clasificación, pero mantienen que no existe una relación con la definición y que se trabaja en esta sesión para que los niños se familiaricen con las figuras. El comentario de Carla puede dar indicios de que entiende como clasificar, una actividad para identificar propiedades de las figuras. Sin embargo, parece resultarle un proceso irrelevante de cara a la definición (D 390-397):

N: Pero lo de la definición era antes. ¿No?

I: Si, pero al final de la actividad y hace la puesta en común, solamente pregunta por la definición. Entonces si tu objetivo final, si ha preguntado por eso, es la definición. Te puede servir para familiarizarte más, pero (…)

C: Yo sí la hubiera metido para que los niños manipulen qué es un polígono, qué no es, para eso sí. Pero como clasificación, no. Yo la hubiera metido en otra sesión.

De la misma forma, Ismael apoya de forma explícita la idea de Carla en un momento posterior de la discusión. Coincide con ella en no relacionar la clasificación de los polígonos con la definición de los mismos y que la clasificación es una actividad para identificar las características de estas figuras (D 398-404):

N: ¿Entonces qué hubierais hecho después de construir la definición de polígono?

I: Yo sí lo hubiese hecho así o parecida, pero lo que cambiaría es el objetivo. El objetivo no es que conozca la definición, el objetivo es que indaguen y vean las distintas características que tienen los polígonos. Además, si lo enlazas con la siguiente actividad, es cuando tiene sentido. Te has fijado que estos puedes clasificarlos así, ah pues esto es una característica. No la tienen todos, pero la tienen muchos. Por eso no me parece bien decir lo de criterios, me parece mejor características.

CONCLUSIONES

Con la exposición de los resultados de la investigación hemos querido resaltar varios hechos relevantes. De un lado, cómo el conocimiento individual expresado en los informes de los EPM ha pasado a ser compartido en distintos momentos de la discusión colaborativa. Respecto a cómo compartiendo el conocimiento éste ha sido aceptado por el grupo, no podemos concluir sobre la perdurabilidad del mismo en cada individuo, pero sí que en la mayoría de las ocasiones ha sido aceptado y utilizado para continuar en la reflexión de grupo. En la construcción de este conocimiento compartido, ha mediado el uso del vídeo como herramienta para desarrollar la mirada profesional del EPM. Este resultado coincide con otros estudios realizados con anterioridad (Fortuny y Rodríguez, 2012).

De otro lado, podemos hacer una síntesis del conocimiento compartido por los EPM que permite responder a nuestra pregunta de investigación. En este sentido, hemos podido constatar que, en relación a las prácticas de definir y clasificar, existe una disociación prevalente entre los EPM participantes de nuestro estudio. Los informantes no consideran que ambas prácticas guarden relación y, además, influenciados por su visión de las matemáticas, reducen la construcción de una definición o una clasificación, a un proceso de descubrimiento de las ya establecidas por la comunidad matemática.

Asimismo, otro hito relevante es la continua reflexión que hacen los EPM en relación con la matemática como disciplina y la matemática escolar. En distintos momentos de análisis, los informantes de esta investigación modulan su criterio en relación al rigor, según se refieran a las matemáticas como disciplina de conocimiento o a las matemáticas que se enseñan en educación primaria. Con esta afirmación, queremos resaltar que para los EPM que han participado en este estudio, el rigor y la generalidad que se aspira a alcanzar en la construcción de conocimiento matemático puede verse comprometido en la matemática que se enseña en el aula si eso repercute en la accesibilidad del conocimiento para los alumnos de la etapa.

El uso de los indicadores de KPM que hemos utilizado en este trabajo, refuerza la validez de los mismos. Así contribuimos a la consolidación del modelo MTSK, en general, y a la delimitación del subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática que ya se venía trabajando en investigaciones anteriores como Carrillo *et al.* (en prensa) y Vasco y Climent (2018).

Además, queremos añadir que si bien en esta investigación nuestro foco de interés se encuentra en el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), y nuestras reflexiones se centran en este subdominio de conocimiento, entendemos que el conocimiento profesional es holístico. De esta manera, igual que se ve influenciado por las creencias sobre las matemáticas del docente, se establecen otras relaciones con diferentes subdominios de conocimiento que podrían ser exploradas.

Finalmente, a partir de los resultados de esta investigación, encontramos necesario incluir tareas de construcción de Conocimiento sobre la Práctica Matemática en la formación inicial de profesores, lo que permitirá tener una visión más amplia y fundamentada de la matemática como disciplina de conocimiento, que influirá en la comprensión y el desarrollo de la matemática escolar.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del proyecto "*Elaboración de material didáctico electrónico basado en el análisis de buenas prácticas en el aula de matemáticas de primaria*", proyecto de innovación de la XIX Convocatoria de Ayudas a la Innovación Docente e Investigación Educativa para la Mejora de la Docencia en la Universidad de Huelva 2017/18.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(*5), 389-407.

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. *Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagungfür Didaktik der Mathematik in Oldenburg, Germany,* Recuperado de http://cor.to/HCK.

Blanco, L. J. (1996). *Aprender a enseñar matemáticas. Formación práctica de los profesores de primaria sobre resolución de problemas aritméticos*. Badajoz: ICE de la Universidad de Extremadura.

Callejo, M. L., Llinares, S. y Valls, J. (2007). El uso de videoclips para una práctica reflexiva. Comunicación en las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2995). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (en prensa). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.*

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Revista Investigación en la Escuela, 61*, 23-35.

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C., Barrera, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 85-103.

De Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Teacher's Knowledge and the use of connections in the classroom. En S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *Proceedings of ERME Topic Conference 3.* Available online. Berlin: ERME.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2. (pp 248-255). University of Stellenbosch: Stellenbosch.

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y Montes, M. A. (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del professor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 60-69). Huelva: Servicio de publicaciones Universidad de Huelva.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Grossman, P. L. Wilson, S. M. y Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: subject matter knowledge for teaching. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 23-36). Oxford: Pergamon Press.

Guba, E. y Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

Liñán, M. M. y Contreras, L. C. (2013). Debilidades y fortalezas en el conocimiento de los temas matemáticos en geometría de los estudiantes para maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: los vídeos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria, 13*, 29-44.

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en vídeos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 31-54.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M. A. Carrillo, J. y Ribeiro, C. M. (2014). Teachers' knowledge of infinity, and its role in classroom practice. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol 4. (pp. 234-241). Vancouver, Canadá: PME.

Ponte, J. P. (1994) Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). En J. P. Ponte y J. F. Matos (Orgs.), Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME) (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education* (pp. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sherin, M. G. (2003). New perspectives on the role of video in teacher education. *Advances in Research on Teaching, 10*, 1-27.

Sosa, L., Aguayo, L. M. y Huitrado, J. L. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. S. García, J. A. Hernández, y L. Sosa (Eds), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 279-299). México: Díaz de Santos, S.A.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), pp. 173-189.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *International Review of Mathematical Education*, *15*. 20-25.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

ASPECTOS DIDÁCTICOS DE LAS OBRAS MATEMÁTICAS DEL ILUSTRADO VENTURA DE ÁVILA

Didactical aspects of the mathematical works of the enlightened Ventura de Ávila

Oller-Marcén, A. M.[a]

[a]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

El siglo XVIII ha sido definido por algunos autores como "el siglo pedagógico y didáctico por excelencia". Comienzan a proliferar instituciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas y, por tanto, se multiplican los profesionales de la enseñanza y los textos específicamente dedicados a ello. En este trabajo abordamos el estudio de las obras dedicadas a la enseñanza de la matemática escritas por Ventura de Ávila, un autor relativamente desconocido pero que estuvo vinculado a distintas instituciones importantes en su tiempo y que ejemplifica bastante bien la figura del intelectual ilustrado de la época. En particular analizamos el contenido de sus textos dedicados a la enseñanza de la aritmética, el álgebra y la agrimensura centrándonos en los aspectos didácticos de sus obras. Como resultado se obtiene una visión general de las ideas de este autor acerca de la enseñanza de las matemáticas que resultan, en ciertos aspectos, innovadoras para su época.

Palabras clave: *historia de la educación matemática, siglo XVIII, ilustración, aspectos didácticos, Ventura de Ávila.*

Abstract

18th century has been defined by certain authors as "the didactical and pedagogical century par excellence". Institutions devoted to the teaching of mathematics started to proliferate and, consequently, the professionals of teaching and the texts specifically devoted to it multiplied. I this paper we study the works devoted to the teaching of mathematics that were written by Ventura de Ávila, a relatively unknown author who was, however, linked to different important institutions of that time and who exemplifies the figure of enlightened intellectual of his time. In particular, we analyse the content of his works devoted to the teaching of arithmetic, algebra and surveying, focusing on their didactical aspects. As a result, we obtain an overview of his ideas about the teaching of mathematics which are, in some aspects, rather innovative for that time.

Keywords: *history of mathematics education, 18th century, enlightenment, didactical aspects, Ventura de Ávila*.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Durante el siglo XVIII, los enfoques cuantitativos se van imponiendo a los cualitativos (Arenzana, 1988) y se va extendiendo progresivamente una concepción de la ciencia como motor del progreso y mejora de la vida de los ciudadanos (Mestre y Pérez García, 2004). Esta visión de la ciencia llevó inevitablemente a la necesidad de formar al pueblo, y así algunos autores consideran este siglo como "el siglo pedagógico y didáctico por excelencia" (Llopis y Carrasco, 1983, p. 17). La ciencia y la técnica comienzan a ser vistas como parte de la cultura y, por tanto, deben ser divulgadas (Lafuente y Valverde, 2003). Además, la matemática, vista desde Galileo como el lenguaje que permite comprender el mundo, juega un papel importante en la ciencia y su conocimiento debe ser extendido. Estos fenómenos se reflejaron, por ejemplo, en la progresiva tecnificación y

Oller-Marcén, A. M. (2018). Aspectos didácticos de las obras matemáticas del ilustrado Ventura de Ávila. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 417-426). Gijón: SEIEM.

profesionalización de actividades hasta entonces casi artesanales, como la agrimensura (Faus, 1995).

El desarrollo y la enseñanza de las matemáticas durante la segunda mitad del siglo XVIII tuvieron lugar en su mayor parte en instituciones ajenas a la universidad (Garma, 1980). Las sociedades de amigos del país, algunas órdenes religiosas, los seminarios de nobles o las diversas academias militares fueron los centros más activos desde el punto de vista de la investigación y, sobre todo, de la enseñanza (Maz, 2005). Algunas de estas instituciones jugaron, además, un papel fundamental en la introducción de nuevas ideas matemáticas en España (Navarro Loidi, 2013).

Por todo lo anterior, el siglo XVIII resulta una época interesante desde el punto de vista de la historia de la educación matemática. Muchos de los autores de textos de matemáticas de la época muestran una clara preocupación didáctica y pedagógica (Maz-Machado y Rico, 2015) y resulta interesante analizar aspectos como la fenomenología (León-Mantero, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y Madrid, 2017) o el tratamiento dado a distintos tópicos (Maz y Rico, 2004) en textos dirigidos a distintos colectivos y en diferentes periodos del siglo.

En este trabajo vamos a prestar atención a la obra de un autor relativamente desconocido que estuvo vinculado a varias de las instituciones anteriormente mencionadas, el burgalés Ventura de Ávila. Estudiante en la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona, docente en una escuela de Trinitarios calzados y en la escuela de matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País, se trata de un personaje que ejemplifica bastante bien la figura del científico ilustrado de la época. Preocupado por la enseñanza y la formación del pueblo, fue autor de múltiples obras dedicadas a la enseñanza de la lectura y de las matemáticas.

En concreto, además de presentar una breve reseña de la vida y de la obra matemática de este autor, nuestro objetivo principal consiste en realizar una descripción de las ideas de carácter pedagógico que se contienen las obras matemáticas de Ventura de Ávila.

METODO

El estudio realizado se trata de un estudio de caso que se enmarca dentro del paradigma cualitativo y es de tipo esencialmente exploratorio y descriptivo. Más concretamente, abordamos una investigación de carácter documental (McCulloch, 2004) y centrada, según la clasificación de Prior (2016, p. 172), en el contenido de los documentos analizados. Los criterios de autenticidad, credibilidad y significado señalados por Scott (1990) para investigaciones de este tipo se satisfacen gracias a que se han consultado las fuentes originales. Al tratarse de un estudio de caso, el cuarto criterio señalados por este autor (representatividad) es de menor importancia, aunque los datos obtenidos a partir de la información biográfica presentada favorecen la idea de que el autor escogido es representativo de su tiempo. Para el desarrollo de la investigación, se siguen las cuatro fases del método histórico propuesto por Ruíz-Berrio (1976): planteamiento, heurística, crítica y hermenéutica.

Tras el planteamiento de la investigación, presentado en la sección anterior, en la fase heurística se abordó la búsqueda y selección de las fuentes documentales. En nuestro caso se han estudiado las ocho obras dedicadas a la enseñanza de las matemáticas escritas por Ventura de Ávila. Algunas de ellas se hallan digitalizadas en la Biblioteca Digital Hispánica, también hay ejemplares de algunas de estas obras en la Biblioteca Nacional de Cataluña. Para este trabajo se ha recurrido también a la colección privada del autor, donde se encuentra un ejemplar en el que están encuadernadas juntas todas las obras estudiadas.

Finalmente, las fases crítica y hermenéutica están dedicadas al análisis e interpretación de las fuentes. En nuestro caso, se ha analizado el texto completo de cada una de las obras consideradas. Sin embargo, dado el interés específico en los aspectos didácticos, resulta de especial relevancia el estudio de los prólogos (o prefacios) puesto que (Genette, 1997), cuando existen, pueden proporcionarnos información muy diversa sobre múltiples aspectos como las motivaciones e intenciones del autor a la hora de escribir el texto, la génesis o el origen de las ideas que se presentan, el público al que se dirige, etc.

ASPECTOS BIOGRÁFICOS DE VENTURA DE ÁVILA

Apenas se sabe nada sobre la vida de Ventura de Ávila y la mayor parte proviene de la escasa información contenida en sus escritos. Por un problema propuesto en una de sus obras sabemos que pudo ser oriundo de Burgos. Sabemos también que, pese a no seguir la carrera militar, fue estudiante la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona, pero que ya había dejado de serlo para el año de 1764. Para 1774 sabemos que está afincado en Barcelona y es "Geómetra de su Magestad" o, más en concreto (Figura 1), "Geómetra del Real Tributo de Catastro del Principado de Cataluña".

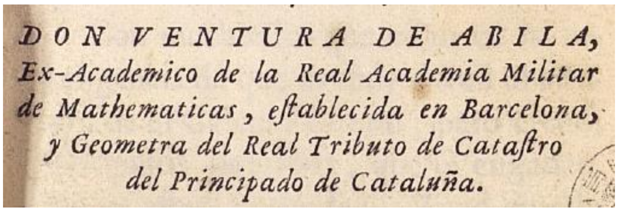

DON VENTURA DE ABILA,
Ex-Academico de la Real Academia Militar
de Mathematicas, eſtablecida en Barcelona,
y Geometra del Real Tributo de Cataſtro
del Principado de Cataluña.

Figura 1. Fragmento de la portada de una obra de Ventura de Ávila. Fuente: Biblioteca Nacional de Cataluña

A este respecto, Burgueño (2009) recoge trabajos cartográficos suyos de 1767, 1768 y 1778. En algún momento entre 1764 y 1774 ejerció el magisterio en el convento de los Trinitarios Calzados de Barcelona, que poseía escuela de niños (Barraquer y Roviralta, 1906, p. 340). En 1780 era Oficial en la Audiencia Territorial de Zaragoza y fue el primer profesor de la escuela de matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País, aunque sólo ostentó este cargo durante los meses de enero a octubre de ese año debido a diferencias de criterio con los curadores de la Sociedad (Forniés, 1978; Hormigón, 1980). Para 1782 sabemos que estaba jubilado en el Reino de Aragón y en 1786 abordó, como bibliotecario, el encargo del Duque de Osuna de crear una biblioteca pública en la Corte (López Ruíz y Aranda Muñoz, 1948). Burgueño (2009) señala que el nombre de Ávila aparece en la Guía de forasteros en Barcelona en el año 1787 pero no en 1798. Finalmente, Rodríguez Marín (1908, p. 51) lo menciona como administrador de los bienes del Duque de Osuna hacia 1810. Se carece de cualquier información posterior a esta fecha.

OBRAS MATEMÁTICAS DE VENTURA DE ÁVILA

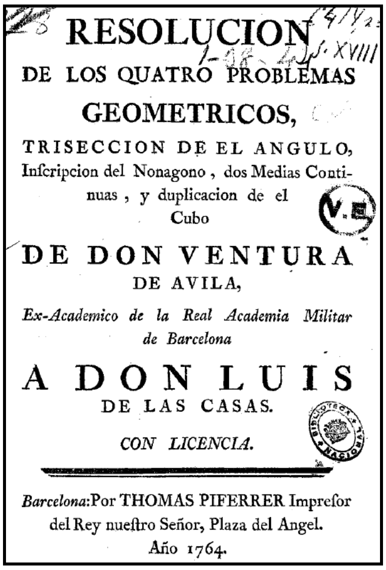
La mayor parte de las obras de Ventura de Ávila estuvieron dedicadas a la enseñanza de las matemáticas. Sabemos (Aguilar, 1981) que escribió al menos ocho textos dedicados específicamente a este tema. En la tesis doctoral de Arenzana (1988, pp. 329-341) se puede encontrar una breve descripción de los contenidos de estos trabajos:

1. *Explicación de las Principales Reglas de la Aritmética Practica, o sea de las cuentas que frecuentemente se ofrecen, distribuida en cuarenta y cuatro pequeños Diálogos, por cuyo medio en otros tantos días puede instruirse un Joven por sí mismo* (Ávila, 1786).
2. *Cálculo literal, o sea explicación del sumar, restar, multiplicar y partir cantidades literales, tanto que estén en figura de enteros, como que estén en la de quebrados, distribuida en diez y ocho Diálogos* (Ávila, s.f.a).
3. *Formación de potencias, y extracción de raíces de cantidades numéricas, y literales, distribuida en quince breves Diálogos, por cuyo medio en otros tantos días puede instruirse por sí mismo el que se halle impuesto en los setenta y dos Diálogos, que tiene dados a luz el Autor* (Ávila, s.f.b).

4. *Elementos de Álgebra, o sea reglas generales para encontrar lo que vale la incógnita en las ecuaciones de el primero, y segundo grado, en quienes no haya termino irracional, y resolución de setenta y cuatro problemas, distribuido todo en veinte y tres Diálogos* (Ávila, s.f.c).
5. *Aplicación del álgebra a la regla de tres simple, directa, e indirecta; a la de tres compuesta; a la de compañías sin tiempo; y con él; al interés simple; al interés compuesto; y a las aligaciones; en ocho Diálogos dividida* (Ávila, s.f.d).
6. *Regla general para medir cualquier pieza de tierra, heredad, estanque, partida, término, o corregimiento* (Ávila, 1774a).
7. *Suplemento a la regla general para medir cualquier pieza de tierra, heredad, estanque, partida, término, o corregimiento* (Ávila, 1774b).
8. *Reglas generales, que de la Aritmética numérica y literal, de la formación de potencias, y extracción de raíces de cantidades numéricas, y literales, y de la Álgebra decoran en la Academia de Matemáticas establecida en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa los Alumnos de este Real Cuerpo, y principios, o proposiciones generales que se han de tener presente para aplicar la Álgebra a muchos particulares* (Ávila, 1780).

Algunos de los textos anteriores pueden considerarse de forma conjunta. Así, se puede asumir que los textos 1 a 5 anteriores forman una única obra dedicada a la aritmética y al álgebra. Estas cinco obras están organizadas según una serie de diálogos numerados correlativamente que van, respectivamente, del 1 al 44, del 45 al 62, del 63 al 77, del 78 al 100 y del 101 al 108. De hecho, en algunos de los ejemplares conservados, como el de la Biblioteca Nacional de Cataluña (I-Verrié 753), la totalidad de los 108 diálogos aparecen encuadernados juntos comenzando con la 2ª edición (de 1786) del texto 1. Por otro lado, los textos 6 y 7 forman en la práctica, tal y como indica el título del segundo de ellos, una única obra dedicada esencialmente a la agrimensura. Finalmente, el último de los textos señalados no es más que un extracto de los cinco primeros utilizado con fines prácticos en su labor docente en la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País (Arenzana, 1988).

Respecto a la fecha de publicación desconocida de algunos de estos libros, sabemos que los cuatro primeros son anteriores a 1775 (Gaceta de Madrid, nº 20, 16 de mayo de 1775, p. 200). Además, en el *Suplemento a la regla general*, editado en 1774, se incluye un listado con las obras publicadas por el autor hasta ese momento. Allí aparecen, en ese orden, las obras 1 a 4. Por tanto, podemos concluir que los textos 1, 2, 3 y 4 se publicaron entre 1764 y 1774 y que el texto 5 se editó entre 1774 y 1786.



RESOLUCION
DE LOS QUATRO PROBLEMAS
GEOMETRICOS,
TRISECCION DE EL ANGULO,
Inſcripcion del Nonagono , dos Medias Conti-
nuas , y duplicacion de el
Cubo
DE DON VENTURA
DE AVILA,
Ex-Academico de la Real Academia Militar de Barcelona
A DON LUIS
DE LAS CASAS.
CON LICENCIA.
Barcelona: Por THOMAS PIFERRER Impreſor
del Rey nueſtro Señor, Plaza del Angel.
Año 1764.

Figura 2. Portada de la primera obra de Ventura de Ávila. Fuente: Biblioteca Digital Hispánica

Además de estas obras dedicadas a la enseñanza de diversos aspectos de las matemáticas, Ventura de Ávila publicó también un trabajo titulado *Resolución de los cuatro problemas geométricos, trisección de el ángulo, inscripción del nonágono, dos medias continuas, y duplicación de el Cubo* (Ávila, 1764). Se trata del primer trabajo publicado por el autor, posiblemente fruto de su periodo de aprendizaje en la Real Academia Militar de Matemáticas de Barcelona. Su contenido, no original, es de carácter más especializado e involucra técnicas de lo que hoy denominamos geometría analítica, materia cuya enseñanza no se generalizaría en España hasta el siglo siguiente (González Astudillo y Sánchez Sierra, 2015).

ASPECTOS PEDAGÓGICOS EN LA OBRA MATEMÁTICA DE VENTURA DE ÁVILA

Como hemos visto, Ávila dedicó una buena parte de su vida y de su obra a la enseñanza tanto de niños como de adultos. Esto se pone de manifiesto de forma muy clara en los títulos y portadas de sus obras en las que se mencionan repetidamente términos como ‘enseñar’, ‘instruirse’, ‘método’, ‘explicación’, etc. Así, prácticamente todas sus obras estaban dirigidas explícitamente a estudiantes, ya sea para enseñar a leer o para enseñar distintos aspectos de aritmética, álgebra o agrimensura.

Ávila se esfuerza en mostrar razonadamente la utilidad y necesidad de aprender ciertas disciplinas, en particular las matemáticas. Por ejemplo, todo el prólogo de la *Explicación de las Principales Reglas de la Aritmética Practica* está dedicado a la necesidad y utilidad de la aritmética. Ávila plantea varias disyuntivas: o un joven se dedica al estudio o no se dedica al estudio. Si no se dedica al estudio, o bien se queda en casa cuidando de su hacienda o bien sigue una profesión (militar, artesano, profesional liberal, etc.). En todos los casos Ávila termina indicando que el joven tendrá necesidad de conocer la aritmética y obtendrá beneficio de su conocimiento. Este beneficio de estar bien formado debería además, según Ávila, ser considerado por los padres (Ávila, 1786, prólogo): “si los padres considerasen despacio lo dicho, serían pocos los que no procurasen que sus hijos fuesen instruidos en dichas reglas”.

Su preocupación por la mejora de la enseñanza queda patente en el siguiente fragmento que leemos en el prólogo de la *Formación de potencias, y extracción de raíces* en el que Ávila reflexiona sobre los motivos por los que no se aprenden matemáticas (Ávila, s.f.b, prólogo):

> Son muy pocos los que saben la Matemática […] uno de los dos principales motivos es que […] como por una parte no rastrean a qué se dirigen las operaciones […] y por otra no encuentran complacencia en aprenderlas, lo abandonan luego.

No obstante, el propio Ávila reconoce que esta falta de motivación es evidente. Por ejemplo, en el prólogo del *Cálculo literal* leemos (Ávila, s.f.a, prólogo): "Yo he enseñado a bastantes este cálculo literal y no tengo presente que alguno me haya dicho tuviese deleite en su estudio, ni que rastrease a que se dirigen sus operaciones".

La preocupación por enseñar de manera adecuada y motivada tiene su reflejo en la búsqueda de un método sencillo de enseñanza. Para ello, se organizan los libros según diálogos numerados en los que se alternan las conversaciones entre maestro y discípulo con el enunciado de reglas y la resolución de problemas. Por ejemplo, en la introducción de la *Aplicación del álgebra a la regla de tres* se lee (Ávila, s.f.d, pp. 1-2):

> Al principio de cada uno [de los diálogos] he puesto un principio, fundamento o fórmula magistral, explicada con expresiones inteligibles a todos […] porque la experiencia me ha hecho ver que es el [método] que con más facilidad aprenden los principiantes.

El autor hace un claro énfasis en el trabajo autónomo del lector. La fórmula "instruirse por sí mismo" aparece repetida en muchas de las portadas de sus obras y en el *Cálculo literal* (Ávila, s.f.a, p. 5) se indica al discípulo que "debes leer con la pluma en la mano para ir practicando en un papel separado lo que vayas leyendo". Por otro lado, el autor es consciente de la necesidad de utilizar métodos diferentes en función de los conocimientos previos del alumno. A ese respecto, cuando se dedica a demostrar la falsedad de algunas fórmulas para calcular el área de un cuadrilátero Ávila (1774b, p. 45) afirma: "Yo he procurado hacer ver […] tanto mecánica como científicamente (que son los dos únicos medios para darlo a entender a ignorantes y a sabios) la falsedad de las dos reglas expresadas". Así, a aquellos que no poseen los conocimientos matemáticos necesarios se les puede mostrar la falsedad de una regla mediante contraejemplos concretos (que es a lo que Ávila se refiere al decir "mecánicamente").

Ávila no se limita a presentar los contenidos. Muy a menudo se dan indicaciones sobre la temporalización de los mismos. Por ejemplo, en la portada de la *Formación de potencias, y extracción de raíces* se indica que la obra está "distribuida en quince breves diálogos por cuyo medio en otros tantos días puede instruirse por sí mismo […]". En el caso de las *Reglas generales, que de la Aritmética numérica y literal* el autor va más allá y presenta en la introducción un programa completo señalando el progreso acumulado que deben hacer los alumnos desde el inicio del curso (primero de noviembre) hasta el final del mismo (último de abril). Por otro lado, en los textos dedicados a la aritmética y al álgebra cada uno de los diálogos se concluye con la indicación del maestro al discípulo de qué diálogos anteriores debe repasar antes de continuar. Por ejemplo, el diálogo número 80 (tercero de esta obra) concluye con la indicación de repasar los diálogos del 50 al 53 (que pertenecen al *Cálculo literal*) o al finalizar el diálogo número 95 se pide repasar los diálogos 1, 5, 11 y 17 (pertenecientes a la *Explicación de las Principales Reglas de la Aritmética Practica*). Este repaso es un aspecto importante del método de Ávila, tal y como explica el maestro al discípulo en el diálogo 45 del *Cálculo literal* (Ávila, s.f.a, p. 3): "te prevengo […] que repases (aunque te parezca no tener necesidad de ello) los diálogos que te prevenga; y por fin, que practiques exactamente lo que al fin de cada diálogo aviso".

Así, es necesario que el alumno siga escrupulosamente las indicaciones dadas por el autor. De lo contrario no estará siguiendo el método y no podrá considerarse discípulo suyo. Esta idea queda plasmada crudamente en las últimas líneas del prólogo del *Cálculo literal* (Ávila, s.f.a, prólogo): "si en su estudio queréis gobernaros de otra suerte, hacedme el honor de divulgar que no sois discípulos de vuestro afectuoso servidor D. Ventura de Abila".

De hecho, Ávila parecía tener una gran confianza en las bondades de sus textos docentes. Por ejemplo, en el prólogo de los *Elementos de Álgebra* Ávila declara que (Ávila, s.f.c, prólogo): "quien se encuentre impuesto en los referidos setenta y siente diálogos [los de sus obras anteriores], la comprenderá [al álgebra] con tanta facilidad y complacencia […] que se quedará admirado". Yendo un paso más allá, en el breve prólogo al lector con que se inicia la *Regla general para medir cualquier pieza de tierra*, el autor se ofrece a resolver personalmente las dudas de aquellos que, siguiendo sus cuatro lecciones en cuatro días según su método, no hayan entendido su contenido (Ávila, 1774a, p. 2):

> Te digo que si en cuatro días no has entendido perfectamente estas lecciones, habiendo observado los avisos que irás leyendo, te confieras conmigo, que desde ahora ofrezco, como lo hagas antes de dos años, explicarte (seas pobre, rico, noble o plebeyo) la dificultad que se te ocurra; y si por estar lejos no lo puedes practicar, refiéreme en una carta lo que quieras, que yo te responderé a todo.

En el *Suplemento* Ávila va aún más lejos y hace la siguiente propuesta en la parte final de la obra (Ávila, 1774b, pp. 65-67):

> Al primer individuo que me venga diciendo que […] se quiere poner la cláusula mencionada, y que él tendría gusto en que yo me presentase en la pieza y formase dicha cláusula, desde ahora empeño mi palabra en complacerle sin pretender que por este trabajo me gratifique con un vaso de agua […] si la pieza no dista más de 2 horas de Barcelona, y si no tiene más de 24 mujadas […] que a quantos se me presenten en el mes de Noviembre del corriente año de 1774, diciendo que […] quiere poner la cláusula referida y que tendrían gusto de que interviniese en ello, les doy palabra de complacerles […] explicaré a cada uno las distancias que debe medir […] y en presentándome estas noticias formaré el borrón de la cláusula correspondiente y se le entregaré al interesado sin que por ello pretenda el más pequeño regalo.

CONCLUSIONES

Ventura de Ávila, a juzgar por los contenidos de sus obras, debió poseer una formación matemática relativamente sólida para su época. No obstante, sus obras matemáticas, dedicadas principalmente a la divulgación y a la enseñanza, no presentan aportes originales desde el punto de vista conceptual.

Desde el punto de vista metodológico y didáctico, sin embargo, las obras de Ventura de Ávila presentan cierta originalidad y, en algunos casos, posiciones que podríamos considerar modernas. Así sucede, por ejemplo, con la preocupación por dotar de sentido a lo que se está haciendo en los textos de aritmética y álgebra o con la presentación de distintos tipos de argumentos en función de los conocimientos del alumno. También resultan interesantes las indicaciones respecto al autoaprendizaje, señalando qué debe repasarse y cómo al final de cada lección. A este respecto, Arenzana (1988, p. 335) lo presenta como "un antecedente remoto de la actual enseñanza programada".

Pese a esta cierta modernidad, la visión que Ávila tiene de la relación entre el discípulo y el maestro es muy similar a la que se puede detectar en autores anteriores. Para Ávila el discípulo que desee obtener provecho de sus enseñanzas debe seguir rigurosamente las indicaciones del maestro. Este mismo tipo de ideas ya aparecen en las obras de Pérez de Moya (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2017) o de Thomas Vicente Tosca (Oller-Marcén y Muñoz-Escolano, 2016).

Otro aspecto reseñable y original son los ofrecimientos del autor a resolver dudas para aquellas personas que, leyendo el libro, le manifiesten dificultades en su comprensión. En el caso de la *Regla general para medir cualquier pieza de tierra* y su *Suplemento*, el ofrecimiento del autor roza las técnicas de mercadotecnia proponiendo realizar trabajos de forma gratuita a aquellos que manifiesten querer seguir sus propuestas.

En cuanto al estilo, en los textos de Ávila, la redacción a modo de diálogo fluye de forma más natural que en otras obras de la época organizadas de forma similar; especialmente en los textos de aritmética y álgebra. Por poner un ejemplo, la *Llave aritmética y algebraica* de Poy y Comes (1790) también se organiza a modo de una sucesión de preguntas y respuestas pero de una forma mucho más artificiosa. Los textos de Ávila se aproximan mucho más a una conversación real entre un maestro y un discípulo.

Por otro lado, el estudio realizado pone de manifiesto que Ventura de Ávila ejemplifica la figura del científico ilustrado en el sentido de que con su obra busca formar a la población para que dicha formación redunde en beneficio de la sociedad (de la República, dice Ávila). La aritmética se presenta como necesaria para la formación de cualquier persona. Los conocimientos prácticos de geometría y agrimensura son útiles en tanto en cuanto su aplicación contribuye a la mejora de las labores administrativas y a la resolución de los pleitos. Además, aquellos que como el autor son expertos en una materia, tienen el deber de divulgarla para tratar de extender su conocimiento entre los demás sin esperar nada a cambio. Respecto a esto, Ávila cierra así el Suplemento (Ávila, 1774b, p. 67): “el interés no ha movido a mi espíritu para componer esta obra, en que he empleado mucho más tiempo del que se persuadirá quien sólo lo juzgue por el volumen de ella”.

Finalmente, autores como Jankvist (2009) han puesto de manifiesto los distintos modos y motivos por los que la educación matemática puede beneficiarse del conocimiento y del uso de ciertos aspectos de la historia de las matemáticas. Mosvold, Jakobson y Jankvist (2014), por ejemplo, señalan posibles implicaciones sobre la formación del profesorado en el marco del modelo MKT. Entre los aspectos que estos y otros autores señalan, se menciona el hecho de que, a través de la historia de las matemáticas, se puede enfatizar la faceta cultural y evolutiva de las matemáticas como construcción humana. Con trabajos como el que nos ocupa, centrado especialmente en la historia de la educación matemática, esta faceta cultural y, por lo tanto, cambiante de las matemáticas puede extenderse también a su enseñanza. Así, este trabajo puede resultar valioso para la formación de futuros docentes no solo por el interés del conocimiento de los recursos y estrategias didácticas utilizadas en el pasado (León-Mantero, Maz-Machado, Madrid y Jiménez-Fanjul, 2018), sino también de las motivaciones que inspiraban a los docentes o de las dificultades que éstos encontraban en su labor.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad EDU2016-78764-P. También ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (S36_17D Investigación en Educación Matemática).

Referencias

Aguilar, F. (1981). *Bibliografía de autores españoles del siglo XVIII. Tomo I*. Madrid: CSIC.

Arenzana, V. (1988). *La enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. La escuela de Matemáticas de la Real sociedad Económica Aragonesa de amigos del País* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.

Ávila, V. de (1764). *Resolución de los cuatro problemas geométricos, trisección de el ángulo, inscripción del nonágono, dos medias continuas, y duplicación de el Cubo*. Barcelona: Thomas Piferrer.

Ávila, V. de (1774a). *Regla general para medir cualquier pieza de tierra, heredad, estanque, partida, término, o corregimiento*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (1774b). *Suplemento a la regla general para medir cualquier pieza de tierra, heredad, estanque, partida, término, o corregimiento*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (1780). *Reglas generales, que de la Aritmética numérica y literal, de la formación de potencias, y extracción de raíces de cantidades numéricas, y literales, y de la Álgebra decoran en la Academia de Matemáticas establecida en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa los Alumnos de este Real Cuerpo, y principios, o proposiciones generales que se han de tener presente para aplicar la Álgebra a muchos particulares*. Zaragoza: Francisco Moreno.

Ávila, V. de (1786). *Explicación de las Principales Reglas de la Aritmética Practica, o sea de las cuentas que frecuentemente se ofrecen, distribuida en cuarenta y cuatro pequeños Diálogos, por cuyo medio en otros tantos días puede instruirse un Joven por sí mismo* [2ª edición]. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (s.f.a). *Cálculo literal, o sea explicación del sumar, restar, multiplicar y partir cantidades literales, tanto que estén en figura de enteros, como que estén en la de quebrados, distribuida en diez y ocho Diálogos*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (s.f.b). *Formación de potencias, y extracción de raíces de cantidades numéricas, y literales, distribuida en quince breves Diálogos, por cuyo medio en otros tantos días puede instruirse por sí mismo el que se halle impuesto en los setenta y dos Diálogos, que tiene dados a luz el Autor*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (s.f.c). *Elementos de Álgebra, o sea reglas generales para encontrar lo que vale la incógnita en las ecuaciones de el primero, y segundo grado, en quienes no haya termino irracional, y resolución de setenta y cuatro problemas, distribuido todo en veinte y tres Diálogos*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Ávila, V. de (s.f.d). *Aplicación del álgebra a la regla de tres simple, directa, e indirecta; a la de tres compuesta; a la de compañías sin tiempo; y con él; al interés simple; al interés compuesto; y a las aligaciones; en ocho Diálogos dividida*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada.

Barraquer y Roviralta, C. (1906). *Las casas de religiosos en Cataluña durante la primera mitad del siglo XIX*. Barcelona: Francisco J. Altés y Alabart.

Burgueño, J. (2009). Els Geòmetres del Cadastre de Catalunya (1720-1815). *Cuadernos de Geografía*, *86*, 261-288.

Faus, A. (1995). El ejercicio profesional de la agrimensura en la España del siglo XVIII: titulación académica y formación teórica de los peritos agrimensores. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, *18*(35), 425-440.

Forniés, J. F. (1978). *La Real Sociedad Económica de Amigos del País en el período de la Ilustración (1776-1808): Sus relaciones con el artesanado y la industria*. Madrid: Confederación Española de Cajas de Ahorros.

Garma, S. (1980). Los Matemáticos Españoles y la Historia de las Matemáticas del siglo XVII al siglo XIX. En S. Garma (Coord.), *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias* (pp. 59-72). Madrid: SEHCYT.

Genette, G. (1997). *Paratexts: thresholds of interpretation*. Cambridge: Cambridge University Press.

González Astudillo, M. T., y Sánchez Sierra, I. M. (2015). Enseñanza de la Geometría analítica en España en el Siglo XIX. *Revista de História da Educação Matemática*, *1*(1), 165-188.

Hormigón, M (1980). La Escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica aragonesa de amigos del País. En S. Garma (Coord.), *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias* (pp. 127-142). Madrid: SEHCYT.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Lafuente, A., y Valverde, N. (2003). *Los mundos de la ciencia en la ilustración española*. Madrid: fundación española para la ciencia y la tecnología.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y Madrid, M. J. (2017). Fenomenología en los tratados españoles de agrimensura del siglo XVIII. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 541). Zaragoza: SEIEM.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M. J. y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar. *Unión*, *52*, 34-45.

Llopis, J. y Carrasco, M. V. (1983). *Ilustración y educación en la España del siglo XVIII*. Valencia: Escuela universitaria de Formación de Profesorado de E.G.B.

López Ruíz, A. y Aranda Muñoz, E. (1948). *D. Diego Clemencín (1765-1834). Ensayo bio-bibliográfico*. Murcia: Suc. de Nogués.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Maz, A. y Rico, L. (2004). Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767). En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 249-258). La Coruña: Universidad da Coruña.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 49-76.

McCulloch, G. (2004). *Documentary research in education, history, and the social sciences*. New York: Routledge/Falmer.

Mestre, A. y Pérez García, P. (2004). La cultura en el siglo XVIII español. En *La cultura española en la Edad Moderna* (pp. 387-540). Madrid: Istmo.

Mosvold, R., Jakobsen, A. y Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may proft from the study of history of mathematics. *Science y Educations*, *23*, 47-60.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2017). *Análisis de los Prólogos de los Textos Matemáticos del Bachiller Juan Pérez de Moya*. Comunicación presentada en el IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática. Murcia, 14-17 de noviembre de 2017.

Navarro Loidi, J. (2013). La Incorporación del Cálculo Diferencial e Integral al Colegio de Artillería de Segovia. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, *36*, 333-358.

Oller-Marcén, A. M. y Muñoz-Escolano, J. M. (2016). *Concepciones sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje en el Compendio Mathematico de Thomas Vicente Tosca*. Comunicación presentada en el International Congress 300 Anniversary Gottfried Wilhalm Leibniz (Leipzig, 1646 - Hannover, 1716). Barcelona, 21-22 de enero de 2016.

Poy y Comes, M. (1790). *Llave aritmetica y algebrayca*. Barcelona: Francisco Surià y Burgada

Prior, L. (2016). Using documents in social research. En D. Silverman (Ed.), *Qualitative research*. Londres: SAGE.

Rodríguez Marín, F. (1908). *Del oído a la pluma. Narraciones anecdóticas*. Madrid: Biblioteca Patria.

Ruiz-Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía*, *134*, 449-475.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Cambridge: Polity Press.

REPRESENTACIONES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS: UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES DE PRIMARIA DE LATINOAMÉRICA

Representations of the geometric objects: an experience with Latin America primary school teachers

Ortiz, A.[a] y Sandoval, I.[a]

[a]Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

El razonamiento espacial se usa en la vida escolar, laboral y cotidiana. Diferentes estudios señalan su complejidad dado que involucra interacciones entre acciones y competencias para comprender y transformar objetos y relaciones espaciales. En este reporte presentamos resultados de una experiencia con 17 profesores latinoamericanos de primaria, quienes participaron en dos sesiones de un taller. El análisis se basa en las producciones (individuales y grupales) tanto orales como escritas de dos actividades, centrando la atención en tres aspectos: i) uso del lenguaje; ii) interpretación de representaciones, y iii) utilización del sistema de referencia. Los resultados con este grupo de profesores muestran cómo mover, sentir e interpretar son acciones necesarias para la realización de tareas descriptivas que posibiliten la re-construcción de representaciones bi y tridimensionales de un mismo cuerpo.

Palabras clave: *razonamiento espacial, profesores de primaria, representaciones 2D y 3D.*

Abstract

Spatial reasoning is used in different scenarios of daily living. Several studies have demonstrated that the spatial reasoning complexity is based on the interaction between the actions and competences used on the objects' transformations and spatial relationships. This report shows the results about a spatial reasoning experiment. A total of 17 Latin American primary school teachers participate in two sections of a workshop, which were design to analyze the oral and writing productions based on individuals and groups. The experiment was focused on three main ideas: (I) use of language, (II) interpretation of representations, and (III) reference frame. The results with this group of teachers show how "move, feel and interpret", are necessary actions for the accomplishment of descriptive tasks that make possible the reconstruction of bi and three-dimensional representations of the same object.

Keywords: *spatial reasoning, primary teachers, 2D and 3D representations*.

INTRODUCCIÓN

Conocer, explorar y moverse en el espacio donde se vive es una necesidad de los seres humanos. Comprender los aspectos espaciales de la realidad y matematizarlos es una tarea que se aprende en la escuela. En la actualidad, investigaciones sobre razonamiento espacial han mostrado que esta habilidad no solo es importante como herramienta para evaluar la inteligencia de una persona, sino que se usa en la vida laboral, cotidiana y académica. Más aún, se ha encontrado que aquellos estudiantes de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés), requieren de este tipo de razonamiento. Otros estudios señalan que estas habilidades también son requeridas en otras carreras universitarias como, por ejemplo, arquitectura, artes, diseño gráfico, geología, química, y en otras especialidades técnicas como para taxistas, reporteros, chef, entre

Ortiz, A. y Sandoval, I. (2018). Representaciones de cuerpos geométricos: Una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 427-436). Gijón: SEIEM.

otras (Davis y el SRSG, 2015, p. 56). Sin embargo, en las actividades escolares el énfasis está puesto más en el uso que en su desarrollo.

Hoffer (1981 citado en Dindyal, 2015) menciona que el desarrollo de razonamiento espacial potencia habilidades visuales (de reconocimiento, observación de las propiedades, mapas de interpretación, proyección de imagen), aptitudes verbales (correcta terminología y la comunicación precisa en la descripción de los conceptos espaciales y las relaciones), habilidades comunicativas (que se comunican a través del dibujo, la habilidad para representar formas geométricas en 2D y 3D, para hacer gráficos de escala, figuras isométricas croquis), habilidades lógicas (clasificación, reconocimiento de las propiedades esenciales como criterios, patrones más exigentes, formular y comprobar hipótesis, hacer inferencias, utilizando ejemplos de lo contrario) y todo ello en su conjunto, tiene incidencia en aplicaciones de la vida real. Por su parte, Samara y Clements (2009, p. 161), refieren que el pensamiento espacial incluye dos competencias a desarrollar. Por un lado, la orientación espacial que involucra la localización espacial y navegación intuitiva, los modelos y mapas, y las coordenadas y estructuración espacial. Y por otro, la visualización espacial e imaginación, que implica el uso de transformaciones, orientación y movimiento, relaciones parte-todo, y clasificación y lenguaje.

Hay diferentes aproximaciones y términos vinculados con el razonamiento espacial como *relación* espacial (Sinclair, et al., 2016), *visualización* espacial (Gutiérrez, 1991; Arıcı, y Aslan-Tutak, 2015), *habilidad* espacial (Mulligan, 2015; Pittalis, y Christou, 2010), *pensamiento* geométrico en tres dimensiones (Pittalis y Christou, 2010), *competencia* espacial (Vázquez y Noriega, 2010), *conocimiento* espacial (Soury-Lavergne, y Maschietto, 2015), visualización y *razonamiento* espacial (Fernández, 2013) y *geometría* espacial (Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres, 1992). La intención aquí no es únicamente señalar esta diversidad sino más bien la complejidad de acciones involucradas y sus interacciones al desarrollar tareas que involucran el razonamiento espacial. Acciones como imaginar objetos estáticos o dinámicos y actuar sobre/con ellos (rotación mental, ampliar/reducir, cambiar de dimensión, sistema de referencia, entre otros).

Ahora bien, respecto a las dificultades reportadas destacan aquellas donde se requiere coordinar representaciones, construcciones y transformaciones de objetos bi y tri-dimensionales (Pittalis y Christou, 2010; Gonzato, Godino y Contreras, 2012; Arıcı y Aslan-Tutak, 2015; Bruce y Hawes, 2015; y Moss, Hawes, Naqvi y Caswell, 2015) así como la visualización de objetos desde diferentes perspectivas (Mulligan, 2015; Sinclair et al, 2016). Por ejemplo, interpretar representaciones 2D y 3D de un objeto 3D no es una acción inmediata (Duval, 1998), se requiere generar experiencias suficientes al estudiante en el trabajo con representaciones planas y establecer diferencias y relaciones entre estas dimensiones. La mayoría de los estudios han sido realizados con estudiantes y pocos con profesores (formación inicial o en servicio). Los estudios con profesores, como el realizado por Otumfuor (2013), da evidencias de la relación entre uso del razonamiento espacial, desplegado en estrategias como gestos, y el uso de diferentes representaciones, para la instrucción matemática. Como este autor lo señala, tanto los conocimientos matemáticos del profesor como el movimiento de su cuerpo influyen en el desarrollo del razonamiento espacial de sus estudiantes.

Fernández (2013) enfatiza, resultado de su detallada investigación documental sobre este tema, que debido a la poca atención desde el currículo y a la falta de entrenamiento para usar representaciones visuales, la visualización espacial está en detrimento. Sin embargo, esta autora encontró que se le reconoce a la visualización "como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración" y más aún, para el uso de tecnologías digitales como "entornos de aprendizaje y/o herramientas". Entonces es necesario, como lo menciona Fernández (2013), de "acciones formativas centradas en el desarrollo de habilidades y procesos visuales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría" (p. 36). Para lograrlo es central el trabajo con profesores, desde su formación y en programas de desarrollo profesional. Sin embargo, son pocos los estudios con profesores, lo que muestra una necesidad de más investigaciones sobre las acciones realizadas por ellos cuando resuelven tareas que implican razonamiento espacial. En esta línea va nuestra investigación. En particular, reconocer cómo desarrollar habilidades de razonamiento espacial y qué acciones dan cuenta de este desarrollo. En esta comunicación se describen acciones propias del razonamiento espacial usadas por profesores de primaria en situaciones problemáticas y su relación con conocimientos matemáticos especializados.

PERSPECTIVA TEÓRICA

De una representación lineal del razonamiento espacial a una como sistema

El razonamiento espacial se considera como un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel mental) y transformar (a nivel físico) el espacio donde vive o desarrolla una tarea (Davis y el SRSG 2015). La perspectiva de sistema permite representar interacciones, movimiento y yuxtaposición entre acciones, elementos y competencias emergentes (Figura 1). En el diagrama se identifican tres subsistemas: exterior, intermedio e interior.

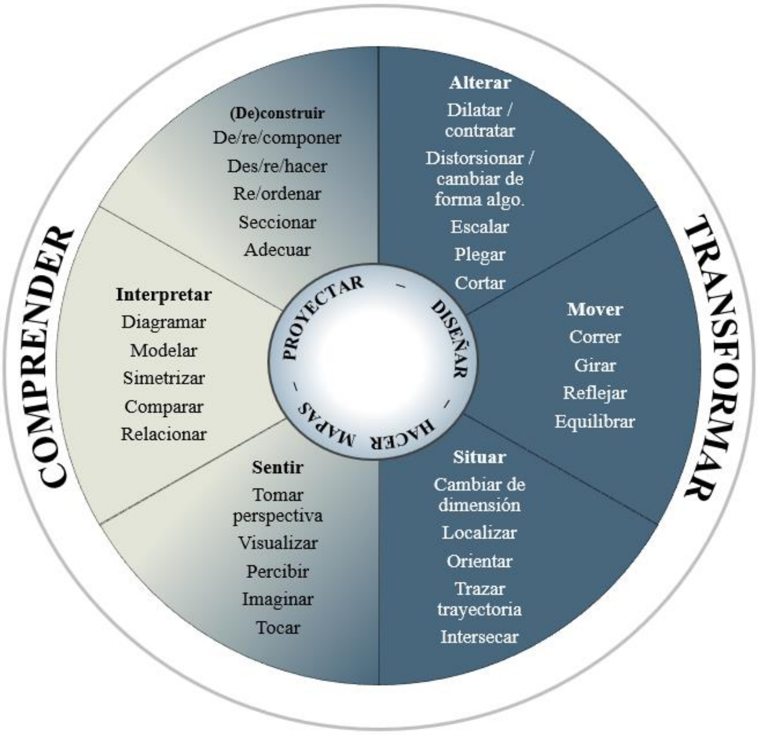


Figura 1. Representación del razonamiento espacial como sistema. Fuente: Davis y el SRSG, 2015, p. 141)

En el exterior considera los elementos de comprensión (cognitivo) y transformación (físico). En el intermedio se encuentran seis elementos, sentir, interpretar, (de) construir, alterar (modificar), mover y situar, (los cuales se describirán más adelante), y grupos de acciones que se definen de acuerdo con el elemento al cual pertenecen. Este subsistema tiene dos secciones, una con un tono de gris oscuro que determina los elementos que dan cuenta de transformaciones, y la otra con un tono de gris claro que determina los elementos que hacen parte de comprensiones. En el subsistema interior se encuentran tres competencias emergentes, proyección, diseño, elaboración de mapas. Estas competencias no son estáticas, pues están en movimiento circular continuo lo que significa que pueden estar en correspondencia con cualquier grupo de elementos del subsistema intermedio.

La lista de acciones que caracterizan al razonamiento espacial no es exhaustiva, sin embargo, son nuestro punto de partida y un referente en la construcción de actividades y su análisis. Pretendemos dar evidencias de cómo diferentes estrategias para reconocer, representar y detonar acciones de razonamiento espacial pueden producirse cuando hay un diseño cuidadoso de las actividades.

Actividades donde la imaginación, la transformación y el movimiento son centrales para el trabajo con representaciones bi y tridimensionales.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Para comprender las acciones en términos de los conocimientos de los profesores, partimos del modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014). Este modelo se refiere al conocimiento específico (en su conjunto) del profesor de matemáticas el cual se compone de dos dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El primer dominio está compuesto de tres subdominios: conocimiento de los temas, de la estructura de la matemática y de la práctica matemática. El segundo, el Conocimiento Didáctico del Contenido, está compuesto por conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, de las características del aprendizaje de las matemáticas y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En este caso, nos centraremos en el conocimiento de los temas, es decir, describir qué conoce el profesor sobre el razonamiento espacial al momento de realizar tareas que lo involucran, los fenómenos que reconoce importantes y le dan sentido a su enseñanza en la escuela y las aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. En particular, las representaciones de objetos bi y tri-dimensionales.

METODOLOGÍA

Se adoptó una metodología cualitativa de estudio de caso interpretativo (Creswell, 2003) dado que la atención está en lo realizado por los participantes a través de sus propias reflexiones sobre las acciones realizadas. Los episodios seleccionados ejemplifican el potencial analítico de la propuesta de Davis y el SRSG (2015) para movilizar subsistemas del razonamiento espacial. Aquí se presenta el trabajo realizado por 3 de los 17 maestros de primaria, cada uno proveniente de un país latinoamericano diferente. Ellos participaron en un taller (otoño 2016) de dos sesiones, con una duración total de 6 horas. Los resultados forman parte de una investigación más amplia.

El taller se diseñó para que los profesores, a partir de su experiencia y del desarrollo de las actividades propuestas, reflexionaran sobre la complejidad de las representaciones de objetos geométricos bi y tridimensionales. Además, reflexionar sobre el papel del razonamiento espacial en la enseñanza de las matemáticas. Este taller “Imaginación, transformación y movimiento: Implicaciones en y fuera de la escuela” formó parte del programa de desarrollo profesional denominado “Escuelas México” y fue financiado por la Secretaría de Educación Pública (SEP), la Agencia Mexicana de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AMEXIC) y la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI). Los participantes tenían amplia experiencia como docentes en primaria. Ocho de ellos impartían todas las asignaturas (matemáticas, sociales, español, biología, arte) del grado escolar en un grado particular y los demás impartían una sola asignatura (inglés, tecnología, agricultura, español, arte y geografía) en uno o más grados. Basados en sus propias experiencias, reconocieron la importancia de adquirir y desarrollar el razonamiento espacial tanto en su formación, como en sus estudiantes, pues argumentaron que al desarrollarlo hay un mejor entendimiento no solo en las distintas áreas del conocimiento, sino también en el lenguaje necesario para lograr una comunicación que moviliza ideas, objetos y/o sujetos. Las dos investigadoras encargadas de dirigir el taller observaron las acciones de los profesores al realizar las tareas asignadas sin intervenir en su desarrollo, únicamente orientaron la discusión por medio de preguntas o para comprender una estrategia de solución propuesta.

Los resultados presentados en el siguiente apartado provienen de la revisión de video grabaciones y de los registros escritos (individuales y grupales) obtenidos en el taller. Al momento de hacer el análisis se generaron las siguientes categorías:

- *Interpretación de las representaciones*: son las acciones realizadas por un sujeto para de-construir y re-construir la representación de un objeto (2D, 3D). En este proceso se puede hacer uso de acciones vinculadas con movimiento e interpretación (Figura 1).
- *Uso del lenguaje* (verbal oral, gestual y escrito): Son los términos (expresiones lingüísticas) con los significados/sentidos propios de la cultura de cada sujeto a fin de comunicar lo observado e interpretado respecto a las relaciones espaciales entre los objetos bajo estudio.
- *Sistema de referencia*: son las acciones que le permiten al sujeto analizar el espacio donde se encuentra y reconocer las convenciones que como observador tiene del objeto de análisis. Por ejemplo, situarse dónde está o dónde no está el objeto de interés, a fin de construir y estructurar una posición/ubicación para establecer relación entre lo que le rodea, ubicación entre objetos, etc. Las acciones más movilizadas son las de situar y sentir (Figura 1).

Descripción de las sesiones

En cada sesión los profesores desarrollaron las actividades y al finalizar se concluyó con una reflexión sobre: (i) las dificultades enfrentadas en el desarrollo de cada actividad y (ii) las habilidades requeridas para su desarrollo, señalando aspectos que, desde lo planteado por la investigación en Educación Matemática, permiten reflexionar sobre la complejidad y los procesos cognitivos implicados en su implementación.

En la primera sesión las actividades involucraban réplica de figuras bi y tridimensionales en la que uno de los profesores realizaba la construcción a partir de la descripción dada por su compañero. Después, en colectivo, reescribían las instrucciones para replicar correctamente la construcción. En la Figura 2, se presentan las actividades desarrolladas.

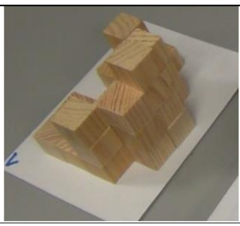
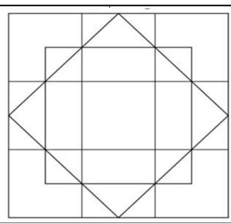
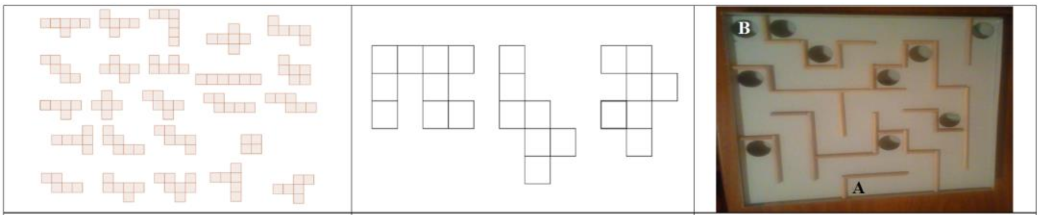
	
a. A partir del objeto formado por piezas que recibe uno de los participantes, su compañero **sin ver** deberá replicarlo, siguiendo las indicaciones dadas.	**b.** A partir del dibujo que recibe uno de los participantes, su compañero **sin ver** deberá replicarlo en una hoja en blanco, siguiendo las indicaciones dadas por su compañero.

Figura 2. Ejemplo de actividades primera sesión

En la segunda sesión las actividades involucraban cambios de representaciones de 2D a 3D, seguir indicaciones para salir de un laberinto y diseñar una actividad para sus estudiantes. En la Figura 3, se ilustran ejemplos de las actividades propuestas.

Como actividad de cierre del taller se solicitó a los participantes el diseño de una actividad que, desde el punto de vista de ellos, potenciara habilidades de razonamiento espacial en sus estudiantes. Para el diseño se pidió mencionar las herramientas tecnológicas que utilizarían, el objetivo a lograr en los alumnos, los conceptos, disciplinas que involucra y sugerencias a un profesor que quisiera implementarla.



a.	b.	c.
a. Analizar los 24 desarrollos planos y seleccionar todos los que permiten formar un cubo.	**b.** Construir cada desarrollo plano con 13 cubos.	**c.** Manipular el laberinto con los ojos vendados mientras uno de sus compañeros da indicaciones para llegar desde un punto A hasta un punto B determinados.

Figura 3. Actividades segunda sesión

DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Al analizar las dos sesiones del taller se identificaron tres aspectos movilizados y que dan cuenta de la complejidad del razonamiento espacial: uso del lenguaje, interpretación de representaciones y utilización del sistema de referencia. Estos aspectos dan cuenta de los conocimientos de los profesores de primaria, en este caso, en el uso e interpretación de representaciones 2D y 3D de objetos geométricos en contextos de comunicación. Estos conocimientos del tema son los que permiten al profesor decidir los atributos relevantes, irrelevantes, correctos o incorrectos de los objetos geométricos usados en las situaciones problemáticas propuestas. A continuación, presentamos a manera de ejemplo, una breve descripción de algunos momentos del taller en los que se identifican estos tres aspectos.

Episodio 1. Replicar un objeto tridimensional a partir de instrucciones orales

El primer episodio que ejemplificaremos es el resultado que obtienen los profesores identificados como P1 y P2 en la primera actividad (Figura 2.a). Al finalizar la actividad, las investigadores I1 e I2 les piden comparar la figura dada y la construcción obtenida. La profesora P2 quien realizó la construcción notó que en las acciones que involucraban de-construir, su compañero, el profesor P1, cuando le dio las indicaciones no logró poner en interacción acciones del elemento movimiento (en particular, girar) y el elemento sentir (específicamente, asumir perspectiva). Veamos en el siguiente fragmento de esta interacción:

I1: ya pueden comparar […] comparen [P1, el profesor que dio las instrucciones a P2, coloca la representación como se muestra en la Figura 4.a]

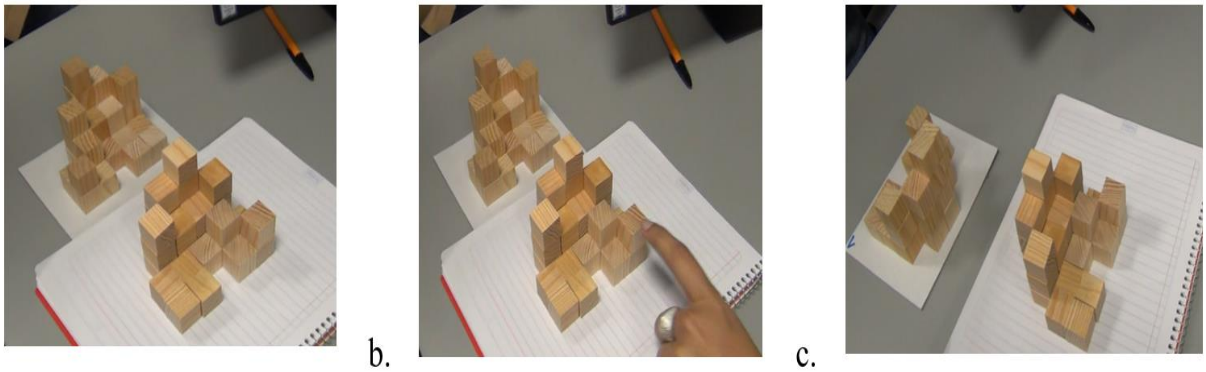
P2: Éste fue el que fallé [P2 observa las dos figuras y señala un cubo como se muestra en la Figura 4.b]

I2: ¿Qué fue lo que pasó ahí?

P2: Que él lo estaba viendo así [P2 rota la figura dada como se muestra en la Figura 4.c] […] y yo lo estaba viendo al contrario […] es como el negativo.

(Fragmento 1, Episodio de P2 y P1)

Inicialmente, P2 interpreta que la construcción no quedó igual a la dada porque uno de los cubos estaba mal ubicado. Después, a partir de la interacción entre acciones vinculadas con los elementos interpretación (a través de comparación de los dos modelos, el dado y el obtenido), sentir (acciones como visualizar e imaginar), y movimiento (en particular giros), nota que no es sólo un cubo, sino que todos los cubos parecen estar en posiciones contrarias, es decir, los cubos que ella ubicaba a su derecha eran los que estaban a la derecha de P1. Por su parte, P2 expresa que hizo falta tener un mismo *sistema de referencia* a la hora de establecer la comunicación entre ellos para dar las instrucciones efectivas para la construcción. Por lo tanto, el objeto construido no cumplía con ser una réplica de la dada. Esto muestra una dificultad similar a la reportada por Mulligan (2015) con estudiantes cuando visualizan un objeto. La interpretación de P1 hacia la representación estuvo mediada por un sistema de referencia sin considerar al otro sujeto y su posición frente al objeto a construir (en este caso P2).



a. b. c.

Figura 4. Comparación entre el objeto dado y el construido

En este episodio se evidencia como los profesores ponen en juego acciones de la Figura 1 a fin de comprender y transformar sus relaciones espaciales con un objeto dado. Las acciones muestran carencias en los conocimientos de los profesores vinculados con la interpretación y establecimiento de relaciones espaciales de objetos tridimensionales a través del lenguaje (uso de terminología geométrica correcta), aspectos que influyeron en las dificultades para realizar la tarea, conocimientos necesarios tanto para quien da las instrucciones como para quien las recibe.

Episodio 2. Cambiando de dimensión 2D a 3D

En este segundo episodio se relata la conversación sostenida entre investigadora I1 y la profesora P3 quien desarrolló la actividad. El trabajo realizado por P3 consistió en analizar 24 desarrollos planos y seleccionar todos aquellos que permitieran formar un cubo (Figura 3.a). Un primer criterio usado por P3 fue elegir aquellos desarrollos con seis cuadrados. El siguiente fragmento muestra otros criterios considerados por P3 en su selección:

P3: Me encanta ver la simetría

I1: A ver […]

P3: Entonces a través de la simetría es que yo puedo sobreponer esta parte de aquí con esta [señala uno de los desarrollos planos]

I1: ¿Cuál es la simetría?

P3: Aquí está, por ejemplo, si busco la simetría entre esta figura [señala el desarrollo plano que se ve en figura 6.a], se me sobrepone, está esta y está esta, pero al usar la imaginación al traer esto para acá, automáticamente ya estaría el cubo [luego de señalar la figura, mueve sus dedos indicando un encajamiento de las partes que considera simétricas, como se muestra en la Figura 5]

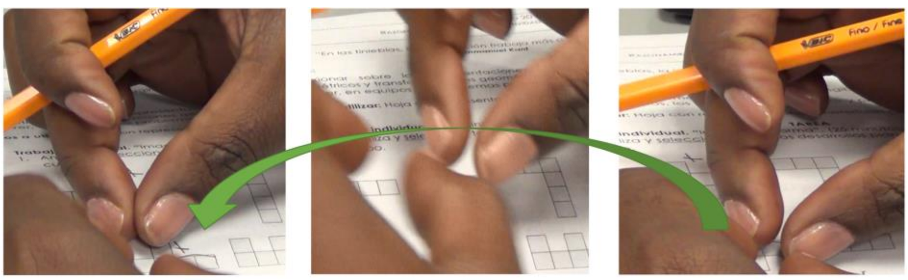


Figura 5. Movimiento de P3 con los dedos. (El movimiento de los dedos debe ser leído de derecha a izquierda)

I1: ¿Y así lo hiciste con todos?

P3: No todos

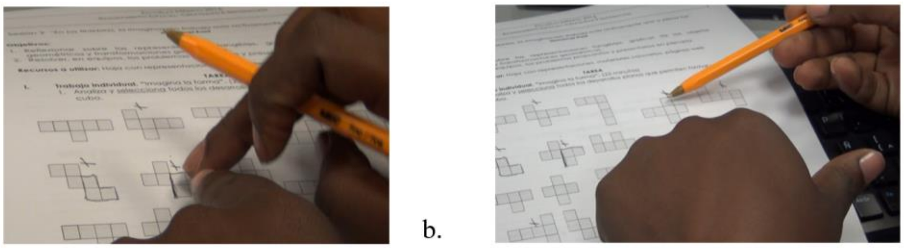
I1: ¿Por qué?

P3: Habría otras que no, no llevaban esta misma forma, porque tenía que ir utilizando otra forma de visualizarlas. Porque por ejemplo esta [señala otro desarrollo plano como se muestra en la Figura 6]

I1: Si […]

P3: Fue a través de cómo ir […] como formando la cajita aquí, entonces como que al imaginar esta, wow, tengo cara acá, tengo este lado, pero aún me falta la base y como tengo la base de arriba con esta.

(Fragmento 2, Episodio de P3)



a. b.

Figura 6. Simetría y transformaciones espaciales como criterios de selección

En este segundo episodio se muestra como P3 interpreta los desarrollos planos (representación en 2D) que posiblemente pueden formar un cubo (3D). El primer criterio implica conocer la cantidad de caras de un cubo, exactamente 6 (cambio de dimensión 3D a 2D). Los siguientes dos criterios reflejan acciones de comprensión propias del sentir (visualizar, imaginar), interpretar (establecer relaciones) y situar (cambiar de dimensión 2D a 3D). Simultáneamente P3 realiza procesos de transformación como situar (cambiar de dimensión) y alterar (cambiar de forma). El primer desarrollo que interpreta lo asocia con simetría, el segundo lo forma imaginando la construcción de una caja y, en ambos desarrollos usa sus dedos para moldear los cubos que se forman con las representaciones bidimensionales dadas. En estas acciones se evidencia, lo que para Samara y Clements (2009, p. 161), es parte de la competencia de visualización espacial e imaginación, esto es el uso de transformaciones, orientación y movimiento, relaciones parte-todo, y clasificación y lenguaje. Como ya se mostró, los conocimientos movilizados por la profesora al momento de realizar la tarea involucran comprensión de representaciones y su análisis tanto en el plano como en el espacio, puntualmente, los gestos con las manos cobran importancia al momento de explicar su razonamiento. Cuando el profesor identifica en estos movimientos una manera de comunicar relaciones espaciales entre objetos, resulta un aprendizaje importante también para la instrucción, pues se reconoce que los gestos (lenguaje corporal) se convierten en una herramienta para evidenciar significados construidos (Otumfuor, 2013).

REFLEXIONES FINALES

En los episodios anteriores se evidencia la necesidad de habilidades propias del razonamiento espacial, pues los maestros debían interpretar cuales de las figuras en 2D (desarrollos planos) formaban un objeto en 3D (cubo) y establecer un sistema de referencia eficiente para que a partir de instrucciones se lograra la construcción de objetos 3D. Los maestros enfrentados a estas actividades combinaron acciones cognitivas y de movimiento y transformación con los materiales concretos, es decir, se requería interpretar la actividad para realizar construcciones o movimientos corporales que derivaran en una solución exitosa. Transversal a estas acciones, se moviliza el lenguaje (no sólo lingüístico sino también corporal). En la primera actividad, P1 necesitaba usar un lenguaje lo suficientemente claro para que P2 replicara la construcción. Este lenguaje requirió de convenciones espaciales y geométricas que evidenciaron las relaciones entre los objetos descritos. En la segunda actividad la profesora P3, al expresar/comunicar la forma como interpretó los desarrollos planos de un cubo, reflejó un conocimiento tanto de lenguaje geométrico (simetría) como corporal (usa los dedos para ejemplificar un cambio de representación de 2D a 3D).

Sin embargo, en ambos casos y a lo largo del taller se evidenció poco uso de un lenguaje espacial al trabajar con objetos bi y tri-dimensionales. Por ejemplo, cuando P2 reconoce la ausencia de un mismo sistema de referencia (acordado previamente) para realizar una réplica de la construcción dada, lo comunicó diciendo “es como el negativo”, terminología inadecuada para referirse a las acciones propias de esta actividad geométrica, aunque esta expresión puede ser válida para actividades donde se invierte el sentido al realizar un movimiento isométrico (isometría directa/opuesta). Esta carencia de vocabulario espacial se identificó a lo largo del taller, por ejemplo, términos que para algunos significaban “líneas” para otros eran “segmentos”, hablaban de “vértices” cuando querían referirse únicamente a “puntos”, se referían a “cuadros grandes y pequeños” para “cuadrados inscritos en otro cuadrado”, mencionaban “lados” para referirse a las caras de un cubo. Estos aspectos dan cuenta de la necesidad de discutir y reflexionar sobre las relaciones y diferencias entre terminologías y convenciones usadas al interior de una misma figura plana, entre figuras planas y entre figuras planas y cuerpos geométricos. Al dar indicaciones de movimiento o construcción utilizaron términos de proximidad como “muévelo un poquito, colócalo ahí arribita, ponlo cerca a…”. No obstante, estas expresiones son significativas para quien lo comunica, se notó dificultades en la interpretación por parte de quien recibía el mensaje, es decir, quien debía construir o manipular algún objeto.

Estudios como el realizado por Arıcı y Aslan-Tutak (2015) muestran cómo el lenguaje (en términos de instrucciones) a veces es poco comprendido por los estudiantes y esto impide la realización de actividades como las relacionadas con origami, pues en estas es necesario el reconocimiento de convenciones (símbolos que indican dobleces básicos en instrucciones de armado) y terminología geométrica (base cuadrada, puntos medios, entre otros). En nuestro estudio, esta situación se evidenció en los procesos comunicativos para hacer las réplicas de figuras y cuerpos geométricos. Al finalizar cada sesión del taller, los profesores participantes en sus reflexiones reconocieron la importancia de tener un lenguaje común y convenciones geométricas de manera que les permitiera lograr una comunicación efectiva en tareas como construir, interpretar, situar, mover, sentir y/o alterar algún objeto. El papel del profesor de primaria no sólo es tomar conciencia de las implicaciones del razonamiento espacial en tareas de enseñanza, sino en cómo construir tareas para posibilitar desarrollarlo en sus estudiantes. Para ello es necesario contar con conocimientos matemáticos especializados, como por ejemplo, conocimientos del tema a enseñar. Este tipo de conocimiento le permite al profesor interpretar y coordinar representaciones, en este caso bi y tridimensionales de objetos geométricos, establecer relaciones espaciales y usarlas en contextos de comunicación. El conocimiento matemático no es suficiente para lograr una instrucción efectiva, se requiere además de conocimientos relacionados con su didáctica. Cabe señalar que el trabajo con objetos bi y tridimensionales son abordados desde los primeros grados escolares.

En esta investigación el desafío ha estado tanto en el diseño de actividades para promover el desarrollo del razonamiento espacial como para valorar su efectividad al momento de su implementación. En el proceso de análisis de las producciones de los profesores nos enfrentamos a dos retos principales. Por un lado, identificar las acciones que dan cuenta de interacciones entre los diferentes subsistemas señalados en la Figura 1. Y por otro, interpretar cómo emergen estas acciones en el proceso de comunicación de los sujetos, pues hay acciones con los objetos físicos, a través de gestos y de movimientos del cuerpo de quienes se comunican (Figura 5 y 6, el caso de la profesora P3), aspectos que también informan sobre el razonamiento espacial (Otumfour, 2013). Por tanto, es necesario continuar con investigaciones cuyo objetivo sea construir secuencias didácticas encausadas en desarrollar habilidades de razonamiento espacial en salones de clase, en diferentes niveles educativos y en programas de formación de profesores.

Referencias

Arıcı, S. y Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13(1)*, 179-200.

Bruce, C. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, *47*(3), 331-343.

Creswell, J. (2003). *Research Design qualitative, quantitative and mixed methods approaches.* Segunda edición. Nebraska, Estados Unidos: Sage publications.

Davis, B. y el SRSG. (2015). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations.* New York, NY: Routledge.

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM*, *47*(3), 519-529.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st centu*ry (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Gonzato, M., Godino, J., Contreras, A. y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la geometría de sólidos en la EGB. *Memoria de proyecto de investigación no publicada. Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo", Valencia, España*.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, España* (pp. 44-59).

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S. y Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM*, *47*(3), 377-390.

Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM*, *47*(3), 511-517.

Otumfuor, B. (2013). *The impact of teacher spatial ability on geometry instruction* (Tesis doctoral). University of Georgia.

Pittalis, M. y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191-212.

Sarama, J. y Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Sinclair, N., Bussi, M., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Soury-Lavergne, S. y Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, *47*(3), 435-449.

Vázquez, S. y Noriega, M. (2010). La competencia espacial: Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación matemática*, *22*(2), 65-91.

COMPARACIONES ENTRE ARGUMENTOS FORMALES E INFORMALES

Comparisons between formal and informal arguments

Ortiz-May, D.[a]

[a]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

El propósito del estudio llevado a cabo es explorar los focos de atención y obstáculos cognitivos que subyacen en el proceso de decidir si una prueba formal está basada en un argumento informal (juicio FBI, por su abreviatura en inglés). Examinar lo que los estudiantes toman en cuenta al hacer este tipo de juicios permite obtener información acerca de la manera en la que interpretan la formalización matemática. En general, se observó que quienes hacen juicios FBI exitosos ponen de manifiesto concepciones más robustas acerca de los aspectos involucrados en la prueba y que las brechas estructurales parecen influir en la transición de argumentos informales a formales. Para ello, se emplea el modelo de focos de atención, la noción de brecha estructural y de brecha de contenido propuestos por Zazkis y Villanueva (2016) para explicar las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al efectuar juicios FBI.

Palabras clave: *prueba, argumentos informales y formales, brecha estructural, brecha de contenido, focos de atención.*

Abstract

The aim of this study is to explore the attention foci and cognitive obstacles that underlie in the process of deciding whether a Formal proof is Based on an Informal argument (FBI judgement). Examining what students consider when making these types of judgments, it is possible to gain some insights about the way in which they construe mathematical formalization. Overall, it was observed that those who make successful FBI judgements show more robust conceptions about the aspects involved in mathematical proof and how conceptual breaches seem to influence the transition from informal to formal arguments. To this effect, Zazkis and Villanueva's (2016) model of attention foci and the notions of structural and concept distances is used to explain difficulties students face when making FBI judgments.

Keywords*: proof, informal and formal arguments, structural distance, content distance, attention foci.*

INTRODUCCIÓN

El tratamiento formal de los contenidos matemáticos en los cursos de nivel superior implica una transición abrupta, la cual representa una fuente de dificultades para una gran cantidad de estudiantes. Ibañez y Ortega (2003) destacan que incluso el proceso de distinguir una prueba formal de una conjetura informal requiere que los alumnos cuenten con esquemas de prueba adecuados; sin embargo, el estudio de las pruebas en bachillerato (alumnos de entre 15 y 18 años) no suele ser lo suficientemente amplio para favorecer la construcción de dichos esquemas.

En la actualidad, existe un consenso general sobre la problemática acerca de la lectura y construcción de pruebas en matemáticas, pues es preocupante la cantidad de estudiantes de cursos superiores de matemáticas que perciben la prueba como una secuencia de pasos deductivos que van desde "A" hasta "B", con la impresión predominante de que la lógica por sí misma dirige la dirección de la prueba de manera automática (Mamona-Downs yDowns, 2016).

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.

Entre las propuestas derivadas de la investigación en educación matemática orientadas a la problemática general sobre la construcción de pruebas matemáticas, se destaca la generación de razonamientos informales o de heurísticas como antesala de la constitución de una prueba formal (Raman, 2003; Mariotti, 2001). Sin embargo, Zazkis, Weber y Mejía-Ramos (2016) exploraron el empleo de argumentos informales como base para la elaboración de pruebas formales y determinaron que dicha estrategia no garantiza el éxito de los estudiantes en las tareas demostrativas. En respuesta a lo anterior, Zazkis y Villanueva (2016) plantean la necesidad de tomar como objeto de estudio la atención de los estudiantes cuando consideran argumentos informales como base del acto de formalización y como producto de su indagación se obtuvo un modelo acerca de los diferentes focos de atención de los estudiantes al hacer juicios acerca de si una prueba formal está basada en argumentos informales (juicios FBI –abreviación en inglés de Formal proof Based on an Informal argument–). En el estudio descrito en este informe, se empleará dicho modelo como una herramienta para estudiar el éxito o fracaso de los estudiantes al hacer juicios FBI con el fin de generar hipótesis para indagaciones futuras acerca de su desempeño en tareas de formalización de argumentos. Por lo tanto, las preguntas específicas de investigación son las siguientes:

- ¿Cuál es el papel que juegan los focos de atención de los estudiantes que inician cursos de matemáticas superiores al analizar argumentos informales como base de una prueba formal?
- ¿Cuáles son las posibles dificultades de los estudiantes que interfieren en el análisis de argumentos informales como base para una prueba formal?

REFERENTES TEÓRICOS

La argumentación puede mirarse como un proceso de producción discursivo lógicamente conectado, en el cual se forman razonamientos, se hacen inducciones y se extraen conclusiones (Goizueta y Planas, 2012), se concibe como un quehacer mental amplio que no está necesariamente limitado a las matemáticas. Por otra parte, la prueba matemática es una estructura formal cuya validez puede evaluarse determinando si obedece a un conjunto de convenciones matemáticas y reglas lógicas bien definidas (Weber, 2008). En dicha definición se emplea la palabra "formal" en la caracterización de la prueba.

De esta manera, puede definirse una prueba como un argumento construido dentro de un sistema simbólico-verbal bien definido, mientras que un argumento informal no está necesariamente construido dentro de dicho sistema, sin embargo, ambos tipos de razonamiento tienen la finalidad de establecer un resultado. La prueba matemática es entonces un modo de razonamiento sintáctico, pues posee una estructura deductiva verbal y simbólica mientras que los argumentos informales son razonamientos semánticos ya que no son necesariamente deductivos (Weber y Alock, 2009); éstos últimos consisten en diagramas, dibujos, expresiones coloquiales, gráficas, tablas, y cosas por el estilo. De esta manera, la formalización se define como el proceso de transformar un razonamiento semántico en un razonamiento sintáctico (un argumento informal en una prueba).

Puesto que se estudiarán juicios acerca de si una prueba está basada en un argumento informal, es necesario destacar que se considera que una prueba está basada en un argumento informal cuando existe un *mapeo* entre ambas cadenas de inferencias que tiene dos propiedades:

- El significado de las inferencias se conserva, tanto como sea posible, por las reglas del sistema verbal-simbólico dentro del que se concibe el argumento sintáctico
- El mapeo preserva la estructura lógica. Dos inferencias (o cadenas de inferencias) correspondientes aparecen en el mismo orden, tanto en el argumento informal, como en la prueba formal.

Focos de atención y distancias de argumentación

En esta sección se describen dos elementos teóricos principales planteados en la indagación de Zazkis y Villanueva (2016), los cuales están directamente orientados a la forma de responder a la segunda pregunta de investigación propuesta en este estudio. El primero consiste en un modelo sobre los focos de atención de los estudiantes al hacer tareas de comparación entre argumentos informales y pruebas propiamente formales. Este modelo está formado por cuatro focos de atención diferentes:

- Foco estructural: Se refiere al orden y conexiones entre las inferencias de los razonamientos. Un foco exclusivamente estructural de atención pasa por alto los detalles específicos de los contenidos involucrados.
- Foco de contenido: Es decir, identificar los conceptos e ideas matemáticas que se presentan en dos pruebas distintas. Se caracteriza por ignorar los aspectos globales de la prueba.
- Foco metodológico: Consiste en aquellos modos de demostración empleados en las pruebas; por ejemplo, por contradicción, deducción, reducción al absurdo, inducción, u otros.
- Foco holístico: Motivaciones de las pruebas, vías de resolución principales, características globales de las mismas.

Pedemonte (2007) expone el concepto de *unidad cognitiva,* que se refiere a la continuidad entre la generación de una conjetura y la construcción de la prueba correspondiente. Puesto que este trabajo versa sobre juicios entre pruebas preestablecidas y no generadas por el mismo estudiante, el concepto de unidad cognitiva no es aplicable; sin embargo, la falta de continuidad puede explicarse a través de la idea de distancia entre un argumento y una prueba, que es el segundo elemento teórico de la indagación de Zazkis y Villanueva (2016) que se considera en este estudio.

Ahora bien, el concepto de distancia entre argumento y prueba se observa a través de dos elementos:

- La brecha estructural es la diferencia entre el orden de las inferencias/afirmaciones correspondientes. Si el arreglo de las producciones informales y formales difiere sustancialmente al grado de que no es posible encontrar una correspondencia entre ellas, entonces se dice que la brecha estructural no puede ser cubierta; y
- La brecha de contenido da cuenta de las diferencias entre la manera en la que las ideas son representadas en la prueba y en los argumentos informales. Si un estudiante es incapaz de notar las conexiones entre ambas producciones, se dice que la brecha de contenido no ha sido cubierta.

METODOLOGÍA

Puesto que se desean observar focos de atención de los estudiantes al hacer juicios FBI, se proponen tareas en las cuales ellos deban comparar pruebas con razonamientos informales. Estas tareas están situadas en el nivel más básico de la prueba matemática pues consisten en la comparación de pruebas construidas por el investigador.

En el proceso de validación de pruebas intervienen procesos cognitivos complejos como la construcción de diagramas o textos alternativos, además de sistemas de creencias de los estudiantes con respecto a los recursos conceptuales empleados en las pruebas (Selden y Selden, 2003; Weber, 2008). Por lo tanto, se comunicó a los estudiantes que las pruebas eran correctas y no necesitaban ser validadas, con el fin de asegurar que los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes para la realización de las tareas estuvieran ligados directamente a sus concepciones de la prueba matemática y a los focos de atención puestos en las características de éstas.

Participantes y procedimiento

El estudio fue conducido en una universidad pública de la Ciudad de México. Los participantes fueron 17 alumnos de un curso de Cálculo Diferencial en el primer año de universidad; todos de carreras afines a matemáticas con un rango de edad de 18 a 21 años. Las tareas propuestas por Zazkis y Villanueva (2016) se adaptaron con el fin de poder ser aplicadas por medio de un cuestionario de papel y lápiz (ver sección Materiales). Los estudiantes contaron con un tiempo máximo de 2 horas para resolver las tareas de manera escrita.

En cada una de las cuatro tareas proporcionadas, se incluyó una terna de argumentos orientados a probar un resultado: un argumento informal y dos pruebas. El objetivo de las tareas fue el de comparar cada prueba con el argumento informal con la finalidad de formular un juicio FBI. En cada tarea, solo una de las pruebas es la formalización del argumento informal. Como abreviación, cuando se hable de dicha prueba se referirá como el argumento formalizado, mientras que la otra prueba será referida como el distractor.

Puesto que la aplicación del instrumento de recolección de datos es un cuestionario de lápiz y papel y no una entrevista estructurada, no fue posible asegurar la significancia de las respuestas de todos los participantes en tiempo real. Debido a ello, 7 de las producciones de los estudiantes no aportaron información relevante por diversas razones: respondieron únicamente con “sí” o “no”, indicaron que no comprendían el tema o bien, malinterpretaron el sentido de las tareas. Por lo tanto, dichas respuestas fueron descartadas.

MATERIALES

En esta sección se incluyen tres de las cuatro tareas empleadas en el estudio. El principal motivo por el que se ha omitido la Tarea 4 en este documento es debido a las limitaciones de espacio. Por ello, se han seleccionado las producciones de estudiantes que proporcionan material suficiente para ejemplificar el análisis de resultados que contribuye a responder las preguntas de investigación, todas ellas correspondientes a las primeras tres tareas. Ahora bien, en cada tarea se identificó al argumento informal con la letra I, y con las letras F y G cada prueba formal; adicionalmente, se agregó un subíndice correspondiente al número de la tarea. En la Figura 1 se muestran las cuatro preguntas específicas para la Tarea 1, estos cuestionamientos se formularon en el resto de las tareas con la única variación del subíndice.

Indicaciones específicas:

1. ¿Dirías que la prueba F_1 se construyó a partir de I_1?
2. ¿Qué conexiones o diferencias entre la prueba y el argumento consideras significativas para concluir lo anterior?
3. ¿Dirías que la prueba G_1 se construyó a partir de I_1?
4. ¿Qué conexiones o diferencias entre la prueba y el argumento consideras significativas para concluir lo anterior?

Figura 13. Preguntas planteadas al final de la Tarea 1

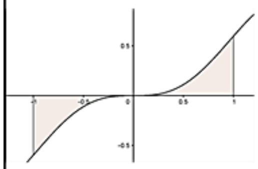
Un juicio FBI es correcto cuando, para alguna tarea dada, se indica que el argumento formalizado sí está basado en el argumento informal, o bien, que la prueba distractora no está basada en el argumento informal. Por ejemplo, para la Tarea 1 (Figura 2) un juicio FBI correcto consiste en identificar que la prueba G_1 sí está basada en el argumento informal, sin embargo, existe la posibilidad de que esté sustentado pobremente o bien, puede no estar sustentado en lo absoluto. Para ello, se delimitaron criterios mínimos para cada tarea de lo que un estudiante debería destacar en sus justificaciones para afirmar que una prueba está construida a partir de un argumento informal. En este sentido, el juicio FBI de un alumno es *satisfactorio* si además de ser correcto, sus comparaciones satisfacen los criterios mínimos. Por otro lado, si el juicio FBI es correcto, pero no cumple con los criterios mínimos, será considerado *insuficiente*.

En la Tarea 1, la prueba F_1 no está basada en el argumento informal. La identificación de la prueba distractora es un proceso de negación, por lo que basta con destacar alguna de las discrepancias señaladas en la Figura 2 para que el juicio FBI sea considerado como satisfactorio.

TAREA 1

Probar que $\int_{-a}^{a} \sin^3 x\, dx = 0$

Argumento I_1



$(I_1 - 1)$ $\sin^3 x$ es una función impar y el intervalo es simétrico.

$(I_1 - 2)$ Eso significa que toda el área *ganada* de un lado se *perderá* en el otro lado.

$(I_1 - 3)$ Por lo tanto, la integral evaluada en ese intervalo es cero.

Prueba F_1

$(F_1 - 1)$ $$\int_{-a}^{a} \sin^3(x) = \int_{-a}^{a} \sin(x)\sin^2(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \sin(x)\ (1 - \cos^2(x))dx$$

$$= \int_{-a}^{a} (\sin x - \sin x \cos^2 x)dx$$

$(F_1 - 2)$ $$= \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_{-a}^{a}$$

$(F_1 - 3)$ $$= \cos a - \frac{1}{3}\cos^3 a - \cos(-a) + \frac{1}{3}\cos^3(-a)$$

$$= [\cos a - \cos(-a)] + [\frac{1}{3}\cos^3 a - \frac{1}{3}\cos^3(-a)]$$

$(F_1 - 4)$ $$= 0 + 0 = 0$$

Prueba G_1

$(G_1 - 1)$ $$\sin(u) = -\sin(-u)$$ $$\sin^3(u) = -\sin^3(-u)$$

$(G_1 - 2)$ Sea $-u = x$, entonces $-du = dx$

$(G_1 - 3)$ $$\int_{-a}^{a} \sin^3(x) = \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-a}^{0} \sin^3(x)\,dx$$

$(G_1 - 4)$ $$= \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-(-a)}^{-0} \sin^3(-u)\,(-du) \quad \text{(Sustituyendo } u\text{)}$$

$$= \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{-(-a)}^{-0} -\sin^3(-u)\,(du)$$

$$= \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{a}^{0} -\sin^3(-u)\,du$$

$(G_1 - 5)$ $$= \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx + \int_{a}^{0} \sin^3 u\,du \quad \text{(ya que } \sin^3(u) = -\sin^3(-u))$$

$(G_1 - 6)$ $$= \int_{0}^{a} \sin^3(x)\,dx - \int_{0}^{a} \sin^3 u\,du \quad \text{(Volteando la integral)}$$

$$= 0$$

Discrepancias de la prueba distractora:

- No se emplea la idea de función impar
- No se emplea la idea de "ganancia" de un lado y "pérdida" del otro

Criterios mínimos (prueba formalizada):

- La prueba se basa en la noción de función impar
- Todo lo que se gana de un lado se pierde en el otro.

TAREA 2

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, entonces es único

Argumento I_2

$(I_2 - 1)$ Si el límite no fuera único, podríamos decir que existen dos, sean L_1, L_2

$(I_2 - 2)$ Podemos *controlar* el tamaño ε del vecindario alrededor de cada uno.

$(I_2 - 3)$ Si se selecciona un vecindario suficientemente pequeño, estos no se sobrepondrán.

$(I_2 - 4)$ Entonces cuando lleguemos suficientemente lejos en la secuencia, estaremos en ambos vecindarios

$(I_2 - 5)$ Ya que no podemos estar en dos lugares al mismo tiempo, se llega a una contradicción

Prueba F_2

$(F_2 - 1)$ Por contradicción, se asume que la secuencia $\{a_n\}$ no tiene un único límite.

$(F_2 - 2)$ Entonces, existe L_1 y L_2 tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, y $L_1 > L_2$.

$(F_2 - 3)$ Sea $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Por definición, existe una N tal que si $n > N$ entonces:

$$|L_1 - a_n| < \varepsilon \qquad |L_2 - a_n| < \varepsilon$$

$(F_2 - 4)$ $$|a_n - L_1| < \varepsilon \ \Rightarrow\ -\varepsilon < a_n - L_1 \ \Rightarrow\ a_n > L_1 - \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

$$|a_n - L_2| < \varepsilon \ \Rightarrow\ a_n - L_2 < \varepsilon \ \Rightarrow\ a_n < L_2 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

$(F_2 - 5)$ Pero para $n > N$ se tiene que $a_n > \frac{L_1 + L_2}{2}$ y que $a_n < \frac{L_1 + L_2}{2}$, lo cual es imposible.

Prueba G_2

$(G_2 - 1)$ Por contradicción, se asume que la secuencia $\{a_n\}$ no tiene un único límite.

$(G_2 - 2)$ Entonces, existe L_1 y L_2 tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$, y $L_1 \neq L_2$.

$(G_2 - 3)$ Por definición, para cada $\varepsilon > 0$, existe una N tal que si $n > N$ entonces:

$$|L_1 - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |L_2 - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(G_2 - 4)$ Considérese $n > N$.

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$$

$(G_2 - 5)$ $$\leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \text{ por a la desigualdad del triángulo}$$

$$= |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n|$$

$(G_2 - 6)$ $$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(G_2 - 7)$ Entonces $|L_1 - L_2| < \varepsilon$. Ya que ε puede hacerse tan pequeña como se desee, $L_1 = L_2$, contradiciendo la suposición inicial.

Criterios mínimos (prueba formalizada):

- Suposición de dos límites
- Control del tamaño de la vecindad
- Contradicción de "dos lugares al mismo tiempo"

Discrepancias de la prueba distractora:

- No se presenta la idea de superposición
- La contradicción es diferente

Figura 14. Tarea 1 y Tarea 2, con sus respectivos criterios mínimos

En síntesis, para identificar satisfactoriamente la prueba distractora, basta con notar una de las discrepancias señaladas en las Figura 2 y Figura 3, sobre las Tareas 1, 2 y 3. Sin embargo, para identificar satisfactoriamente la formalización del argumento informal, deben satisfacerse todos los criterios mínimos.

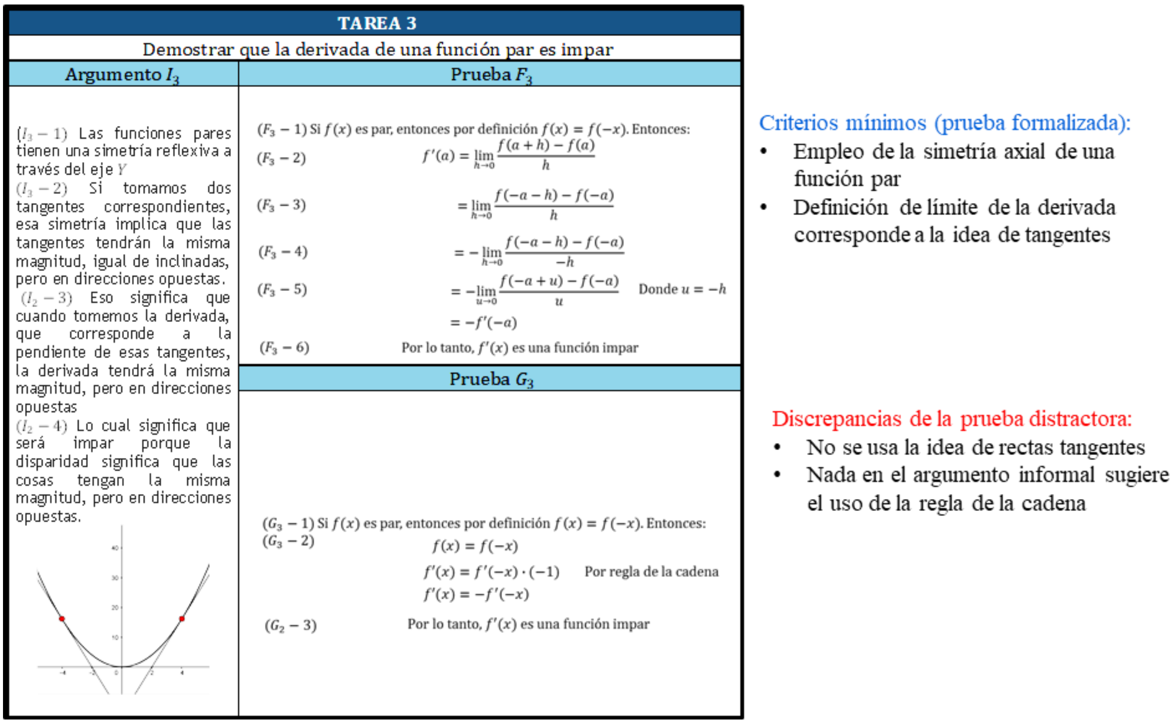


Figura 15. La Tarea 3, y sus criterios mínimos

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La Tabla 1 contiene un resumen del desempeño general de los participantes en las tareas del estudio. La primera fila muestra el número de estudiantes que fue capaz de identificar la prueba formalizada del argumento informal. En la segunda fila, se encuentra el número de alumnos señalaron correctamente que la prueba distractora no estaba basada en el argumento informal. Finalmente, la tercera fila contiene el número de estudiantes que identificaron tanto la prueba distractora, como la prueba formalizada.

Tabla 1. Número de juicios FBI satisfactorios, de acuerdo con los criterios mínimos

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Identificó la prueba formalizada	4/10	2/10	2/10	3/10
Identificó la prueba distractora	7/10	5/10	4/10	3/10
Identificó ambas	3/10	2/10	2/10	2/10

Por otra parte, es importante mencionar que los juicios son incorrectos si se caracteriza a la prueba distractora como basada en el argumento informal o bien, si se señala a la formalización del argumento como una prueba que no está basada en dicho argumento.

El papel de los focos de atención

Un ejemplo de juicio FBI correcto es el del estudiante E5 en la Tarea 2 (Figura 4). Al igual que la mayoría de los estudiantes en esta tarea, ella identifica que ambas pruebas proceden por contradicción de modo que considera un foco de atención metodológico. Ella también toma en cuenta los aspectos de contenido de la prueba al señalar que el argumento “estar en dos lugares al mismo tiempo” se traduce como el hecho de que la misma épsilon acota la sucesión de dos formas diferentes.

Finalmente, el foco estructural empleado por esta estudiante se pone de manifiesto cuando describe la manera en que están ligadas las conexiones (describe la prueba como una secuencia de pasos usando conectores como luego-después-finalmente). La estudiante es capaz de hacer una inspección completa de las pruebas a partir de emplear diversos focos de atención, lo que funciona como una herramienta que le permite obtener un resultado satisfactorio.

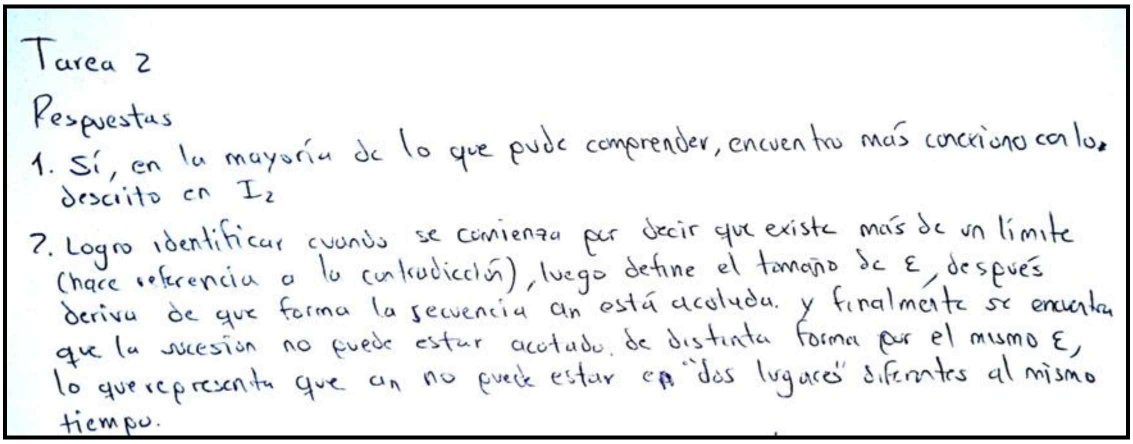

Tarea 2
Respuestas
1. Sí, en la mayoría de lo que pude comprender, encuentro más concriono con lo descrito en I_2
2. Logro identificar cuando se comienza por decir que existe más de un límite (hace referencia a lo contradicción), luego define el tamaño de ε, después deriva de que forma la secuencia a_n está acotada. y finalmente se encuentra que la sucesión no puede estar acotado, de distinta forma por el mismo ε, lo que representa que a_n no puede estar en "dos lugares" diferentes al mismo tiempo.

Figura 16. Respuesta de la estudiante E5 a la Tarea 2

Por otro lado, poner un foco de atención por encima del resto constituye un obstáculo considerable para hacer un juicio FBI correcto. Por ejemplo, el estudiante E3 señala equívocamente que la prueba distractora está basada en el argumento informal en la Tarea 2 solamente considerando que ambos proceden por contradicción (Figura 5), de modo que pasa por alto la manera en la que las inferencias se interconectan para llegar al resultado y tampoco toma en cuenta las diferencias entre las ideas generales de las pruebas.

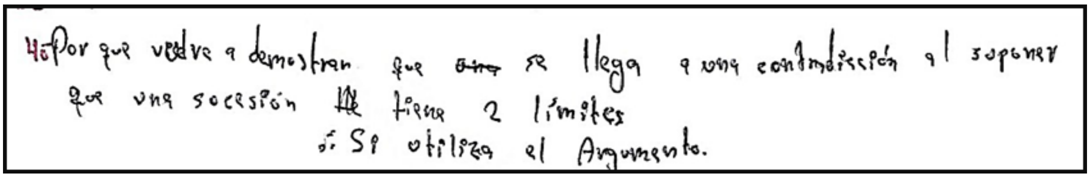

4. Por que vuelve a demostrar que ~~otra~~ se llega a una contradicción al suponer que una sucesión ~~tie~~ tiene 2 límites
∴ Si utiliza el Argumento.

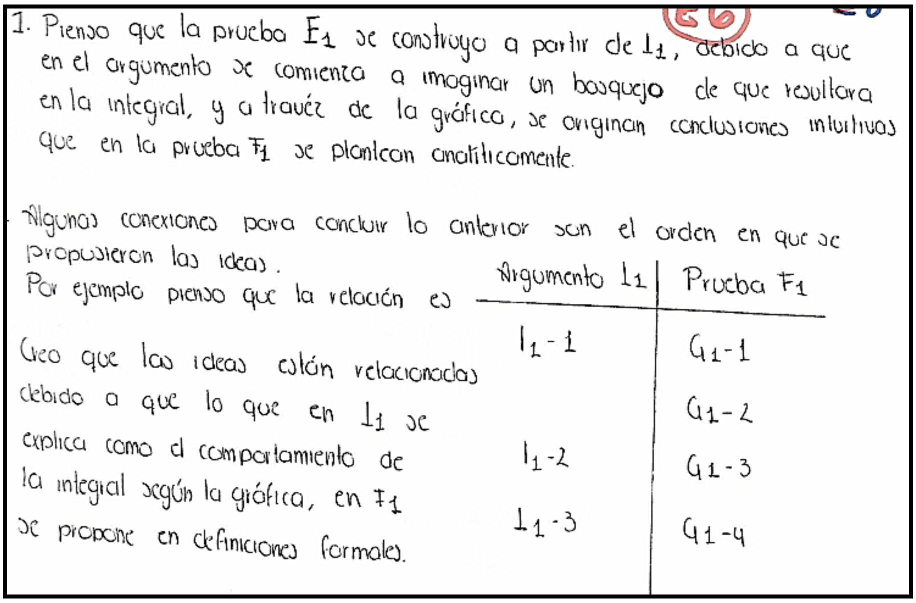
Figura 17. Respuesta del estudiante E3 a la Tarea 2

Además de considerar los contenidos matemáticos involucrados, los estudiantes que hicieron juicios FBI correctos tienden a mirar la manera en la que éstos son empleados para constituir una prueba. Este modo de proceder indica que estos estudiantes pueden concebir la prueba matemática como un objeto que posee subelementos y conexiones entre ellas, y no únicamente como un proceso. En contraparte, los juicios FBI insuficientes o incorrectos están construidos a partir de observaciones limitadas por la predominancia de un foco de atención sobre el resto. Esto sugiere que los estudiantes que los hicieron no consiguen conceptualizar la prueba matemática en su totalidad, puesto que se detienen en aspectos muy puntuales de la misma sin prestar atención al resto de las conexiones que se presentan.

El papel de las brechas conceptuales

En el caso de estudiantes que inician cursos de matemáticas superiores, los focos de atención al comparar razonamientos formales e informales no son los únicos aspectos que determinan el éxito o fracaso de juicios FBI correctos.

La idea anterior se ilustra a través de la producción de la estudiante E6 con respecto a la Tarea 1, quién hace un juicio FBI incorrecto al concluir que la prueba distractora sí se construyó a partir del argumento informal (Figura 6). Ella nota que la prueba y el argumento informal se basan en la misma idea global sobre la forma de la función en un intervalo simétrico, lo que describe como el "bosquejo" de la prueba (foco holístico). En su producción, es muy clara la comparación que hace de las inferencias que considera correspondientes entre los dos argumentos (foco estructural) y lo hace interpretando los contenidos empleados, por ejemplo, cuando traduce los procesos de evaluación de la integral como la pérdida y ganancia de áreas (foco de contenido).


E6

1. Pienso que la prueba F_1 se construyo a partir de I_1, debido a que en el argumento se comienza a imaginar un bosquejo de que resultara en la integral, y a travéz de la gráfica, se originan conclusiones intuitivas que en la prueba F_1 se plantean analíticamente.

Algunas conexiones para concluir lo anterior son el orden en que se propusieron las ideas.
Por ejemplo pienso que la relación es

Argumento I_1	Prueba F_1
I_1-1	G_1-1
	G_1-2
I_1-2	G_1-3
I_1-3	G_1-4

Creo que las ideas están relacionadas debido a que lo que en I_1 se explica como el comportamiento de la integral según la gráfica, en F_1 se propone en definiciones formales.

Figura 18. Respuesta de la estudiante E6 a la Tarea 1

A pesar de que la respuesta de la estudiante E6 se caracteriza por ser multifocal, sigue siendo un juicio FBI incorrecto. Esto ocurre porque sus comparaciones estructurales a través de los contenidos involucrados tienen errores. Es decir, la brecha de contenido entre el argumento informal y su formalización no ha podido ser cubierta: la estudiante E6 no puede encontrar la "traducción" adecuada del proceso de ganancia y pérdida de áreas simétricas en un sistema verbal-simbólico formal.

En ningún momento la estudiante E6 nota que la "separación algebraica" en la prueba distractora no puede vincularse con ningún paso del argumento informal. Esto la orilla a pasar por alto los aspectos de contenido de la prueba y poner un énfasis mayor en el foco estructural, pues sabe que el vínculo entre el inicio y el final de la demostración se lleva a cabo mediante la idea de integrales, sin embargo, ignora las características puntuales de ese razonamiento.

Otros ejemplos claros sobre los obstáculos que representan las brechas estructurales y de contenido al realizar juicios FBI correctos se ponen de manifiesto en las producciones de los estudiantes E7 y E3 en la Tarea 3. La justificación del estudiante E7 (Figura 7) para señalar que F_3 no está basada en I_3 muestra una brecha de contenido que no ha podido ser superada, pues él no es capaz de coordinar el concepto de derivada como límite y su representación gráfica como la pendiente de una recta tangente.

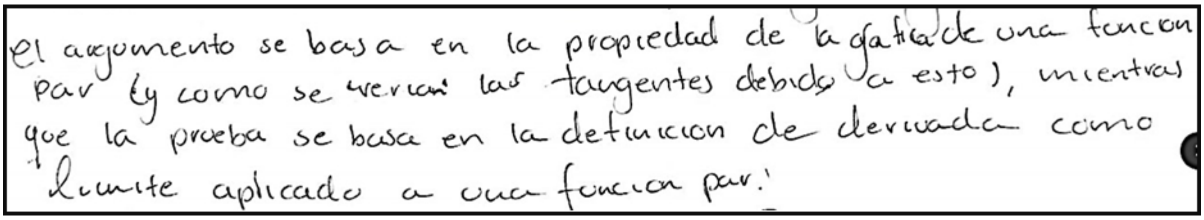

el argumento se basa en la propiedad de la gráfica de una funcion par (y como se verían las tangentes debido a esto), mientras que la prueba se basa en la definicion de derivada como limite aplicado a una funcion par.

Figura 19. Respuesta del estudiante E7 a la Tarea 3

De manera similar, el estudiante E3 (Figura 8) también falla en reconocer a la formalización del argumento informal en la Tarea 3 al señalar que el razonamiento informal "trata un caso particular".

Esto representa una brecha estructural en el sentido de Pedemonte (2007), pues es incapaz de identificar que el razonamiento informal usa un caso particular para mostrar una propiedad estructural independiente del mismo. Es decir, si bien el argumento informal usa una función específica para ilustrar su argumento, lo hace con el fin de mostrar la motivación general que construye la prueba formal.

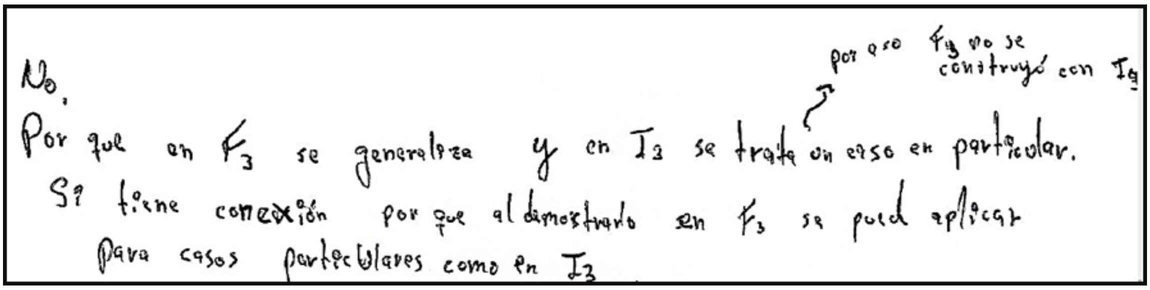


Figura 20. Respuesta del estudiante E3 a la Tarea 3

La incapacidad de detectar los elementos estructurales de un argumento informal podría constituir un obstáculo cuando los individuos construyan sus propias pruebas, pues interfiere con el uso de estrategias intuitivas consideradas vitales para dicha acción. Por otro lado, las brechas de contenido en el mapeo de razonamientos preconstruidos son una señal de alarma sobre la comprensión conceptual de los alumnos sobre ciertos contenidos y su posible imposibilidad para emplearlos.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio sobre el desempeño de los estudiantes en tareas de comparación de razonamientos formales e informales muestran que los estudiantes novicios en cursos de matemáticas superiores se enfocan con mayor frecuencia en aspectos superficiales de los argumentos, atendiendo menos a la lógica estructural, resultado que Inglis y Alock (2003) declara en su estudio.

Los juicios FBI exitosos suelen estar sustentados en una comparación articulada de los aspectos que abarca la prueba, mientras que los insuficientes y los incorrectos muestran la imposición de un tipo de foco de atención por encima de los otros, así como la presencia de brechas de contenido o estructurales que no han podido ser cubiertas.

Cabe destacar que los estudiantes tienden a sobre-simplificar los argumentos, es decir, reducirlos a una única sentencia y emplearla como la representación global de la prueba; dicha estrategia podría considerarse como un recurso fallido, pues los estudiantes frecuentemente la utilizan como sustitución de un análisis completo en las tareas de comparación lo cual conlleva a un planteamiento equívoco.

De esta manera, el desempeño de los estudiantes en tareas de comparación de argumentos formales e informales puede emplearse para identificar posibles dificultades cognitivas relacionadas con la formalización. Este tipo de tareas ofrecen una guía para generar estrategias de instrucción sumamente específicas, enfocadas en el desarrollo de nociones de la prueba en matemáticas y en la generación de estrategias intuitivas para la lectura y validación de argumentos.

Más investigación relacionada con la formalización de pruebas es necesaria. Por ejemplo, podrían plantearse las siguientes preguntas con el fin de establecer un punto de partida para la extensión de esta indagación: ¿De qué manera intervienen los focos de atención de los estudiantes en aspectos de la prueba para la construcción de pruebas basadas en argumentos informales?, y ¿existe una relación entre el desempeño de los estudiantes en actividades de comparación de pruebas y en actividades de construcción de pruebas a partir de argumentos informales?

Agradecimientos

El estudio del cual este documento es un informe se hizo con el apoyo de una beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México para realizar estudios de postgrado, con número CVU de asignación 863106. Adicionalmente, se reconoce la participación de la Dra. Olimpia Figueras para la estructuración de este comunicado.

Referencias

Ibañez, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 49-63.

Goizueta, M. y Planas, N. (2012). Análisis de interpretaciones escritas del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 295-302. Jaén: SEIEM.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2016). Mathematical structure, proof and definition in advanced mathematical thinking. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 546-553). New York: Routledge.

Mariotti, M. A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 25-53.

Inglis, M. y Alcock, L. (2003). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Selden, J. y Selden, A. (2003). Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Reasearch in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431-459.

Weber, K. y Alcock, L. J. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York: Routledge.

Zazkis, D. y Villanueva, M. (2016). Student conceptions of what it means to base a proof on an informal argument. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(3), 318-337.

Zazkis, D., Weber, K. y Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics, 93*(2), 155-173.

AUTOESTIMA Y MOTIVACIÓN HACIA LAS MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Self-esteem and motivation towards mathematics: An exploratory study with primary and secondary school students

Perdomo-Díaz, J.[a]

[a]Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se presenta un estudio exploratorio sobre la visión que tienen de sí mismos un grupo de estudiantes, en relación con su habilidad y éxito en Matemáticas, su actitud, disfrute y motivación hacia la disciplina. Los datos provienen de las respuestas de 166 estudiantes de distintos niveles educativos (4º, 6º, 8º, 10º y 11º) a diez ítems sobre la autoestima y la motivación personal hacia las Matemáticas. Se realiza un análisis descriptivo de las respuestas, seguido de un análisis de las diferencias entre los cursos, usando la prueba de Kruskal Wallis. Los resultados muestran que aproximadamente la mitad de los participantes tienen una visión positiva de sí mismos como estudiantes de Matemáticas y que los estudiantes de 4º son los más positivos en términos de su actitud, sentimientos, deseos y creencias sobre su habilidad y éxito en Matemáticas, con diferencias significativas con los estudiantes de 8º, 10º y 11º en la mayoría de los ítems.

Palabras clave: *matemáticas, autoestima, motivación, visión de las Matemáticas, creencias.*

Abstract

In this paper, we present an exploratory study of students' view of themselves in relation with their ability and success in mathematics and their attitude, enjoyment, and motivation toward mathematics. The data we use come from responses of 166 4th, 6th, 8th, 10th, and 11th graders from the same school to ten items about students' academic self-esteem and personal motivation toward mathematics from the national measurement system of learning achievements (SIMCE). We present a descriptive analysis of the students' responses followed by an analysis of differences between grades using Kruskal Wallis test. Results show that approximately half of the students have a positive view of themselves as learners of mathematics and that 4th grade students have the most positive attitude, feelings, desires and belief about their ability and success in mathematics with significant differences with 8th, 10th and 11th grade students in most of the items.

Keywords: *mathematics, self-esteem, motivation, view of mathematics, beliefs.*

INTRODUCCIÓN

Durante mucho tiempo se subestimó todo lo relativo al dominio afectivo y su papel en la Educación Matemática. En la actualidad la situación ha mejorado mucho, hasta el punto de que los avances en la investigación en este ámbito están impregnando los sistemas educativos. Esto se ve reflejado en algunas decisiones de políticas públicas, con la definición de elementos de calidad de la educación que van más allá del desempeño académico de los estudiantes. Por ejemplo, programas internacionales como PISA y TIMSS incluyen cuestionarios sobre actitudes, creencias o la motivación de los estudiantes. La investigación ha contribuido a este cambio, mostrando la importancia de las emociones, actitudes, creencias o motivaciones en el proceso de aprendizaje (Goméz-Chacón, 2016; Hannula, 2012; McLeod, 1992), así como algunas relaciones entre las

Perdomo-Díaz, J. (2018). Autoestima y motivación hacia las matemáticas: Un estudio exploratorio con estudiantes de educación primaria y secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 447-456). Gijón: SEIEM.

características afectivas de los alumnos y su rendimiento académico (Holm, Hannula y Björn, 2017; Ramirez, 2005).

El dominio afectivo se considera como un conjunto multifacético que incluye emociones, actitudes, creencias, motivaciones y valores (De Bellis y Goldin, 2006; Hannula, 2012; McLeod, 1992). Estos subdominios son a su vez entidades complejas, formadas por una serie de elementos entretejidos. Así, las creencias en relación con la Matemática se pueden ver como un sistema con tres componentes: la disciplina, el yo y el contexto (Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2002); mientras que la actitud hacia la Matemática es considerada por algunos autores como una medida de la autoconfianza, la utilidad percibida y el disfrute de las Matemáticas (Kiwanuka et al., 2017). Las relaciones existentes entre las distintas componentes del dominio afectivo también es un tema que está siendo ampliamente estudiado en la actualidad. Se han propuesto varios modelos. Por ejemplo, Gamboa Araya y Moreira-Mora (2016) estudian un modelo estructural, con cinco componentes para el constructo de creencias y tres para el constructo de actitudes hacia la matemática. Sin embargo, los propios autores señalan que “el modelo propuesto es uno de los posibles y pueden existir otros que presenten un mejor ajuste o expliquen otras relaciones no consideradas.” (p. 41).

Esta complejidad del dominio afectivo ha contribuido al desarrollo de una extensa literatura, con una amplia diversidad de enfoques y metodologías. Algunos estudios analizan la influencia de factores como el género, la edad, los logros académicos o el tipo de escuela en la actitud de los estudiantes frente a la Matemática o en cómo se ven a sí mismos en relación con la disciplina (Bofah y Hannula, 2016; Charles, Harr, Cech y Hendley, 2014; Mata, Monteiro y Peixoto, 2012). Otras investigaciones estudian alguno de los elementos del dominio afectivo, en trabajos centrados en los estudiantes de un grado académico específico de un país concreto (Ramírez, 2005), o comparando diferentes grados académicos del mismo país (Hannula y Laakso, 2011; Kislenko, 2009; Mata et al., 2012), o con estudiantes de diferentes países (Lee, 2009; Tuohilampi et al., 2015).

A pesar de la cantidad y calidad de los resultados en este dominio de investigación, los investigadores coinciden en que se necesita más conocimiento, en particular por la fuerte dependencia cultural de los afectos (Charles et al., 2014; Tuohilampi et al., 2015). Lee (2009), por ejemplo, muestra la estabilidad de constructos como el autoconcepto, la autoeficacia y la ansiedad Matemática en estudiantes de 15 años de 41 diferentes países que participaron en PISA 2003, encontrando que los factores afectivos eran estables tanto entre los países como dentro de cada país. Sin embargo, Tuohilampi et al. (2015) cuestionan el universalismo de la estructura del afecto relacionado con las Matemáticas, a partir de los resultados que obtuvieron en una investigación con estudiantes finlandeses y chilenos de 9 años. En este estudio sobre la autoconfianza, la autovaloración, la dificultad de las Matemáticas, el disfrute de las Matemáticas y el esfuerzo, los dos países mostraron diferentes estructuras y diferentes conexiones entre las estructuras.

Según Hannula y Laakso (2011), la diferencia entre los resultados obtenidos con estudiantes de 15 años y aquellos con 9 años podría explicarse debido a que la estructura afectiva puede ser diferente en los distintos niveles educativos, con mayor coherencia para los niveles superiores.

En lo que de momento sí parece haber coincidencia es en que los estudiantes de diferentes países muestran diferentes perfiles afectivos. En el estudio de Lee (2009), Estados Unidos y Alemania mostraron puntajes altos tanto en autoconcepto matemático como en autoeficacia, mientras que Japón y Corea obtuvieron los puntajes más bajos. Los países de Asia y América del Sur mostraron una gran ansiedad matemática, mientras que los países de Europa occidental mostraron el nivel más bajo de esta escala. Por otra parte, Tuohilampi, Laine, Hannula y Varas (2016) encontraron que los estudiantes finlandeses tenían más afectos positivos hacia las Matemáticas a nivel individual que los alumnos chilenos, mientras que los estudiantes chilenos mostraban una visión más positiva a nivel interindividual que los finlandeses.

Las investigaciones con foco en el estudio del dominio afectivo en los distintos niveles educativos muestran una amplia variedad de resultados. Por ejemplo, Kiwanuka et al. (2017) muestran que el disfrute y la confianza de los estudiantes frente a las Matemáticas disminuyen a lo largo de un año académico. Esto llevaría a pensar que los estudiantes irían tomando una visión de sí mismos frente a las Matemáticas cada vez más negativa, a medida que avanzan en el sistema educativo. Sin embargo, existen estudios que muestran otras situaciones. Por ejemplo, Kislenko (2009), en una investigación con estudiantes estonios de 7º, 9º y 11º, descubrió que los alumnos de 7º eran los más negativos hacia las Matemáticas; Charles et al. (2014) señalaron que los alumnos de 8º disfrutaban más las Matemáticas que estudiantes más jóvenes y Kiwanuka et al. (2017) obtuvieron que los estudiantes más viejos de 7º mostraron más confianza en sí mismos que los más jóvenes.

Estos resultados reflejan la necesidad de ampliar la investigación en este ámbito, a fin de generar más información que permita comprender mejor el fenómeno.

En este artículo se presenta un estudio exploratorio sobre la autoestima y la motivación hacia las Matemáticas en estudiantes chilenos, considerando de manera particular la visión que tienen los estudiantes sobre sí mismos, como aprendices de Matemáticas, en términos de su actitud, sentimientos y percepción sobre su propia habilidad y éxito en la materia. La investigación se realiza con 166 estudiantes de diferentes niveles educativos (4º, 6º, 8º, 10º y 11º) en un mismo colegio. El objetivo es analizar cómo se ven estos estudiantes a sí mismos en términos de las dimensiones afectivas señaladas y examinar si existen diferencias entre los niveles educativos. Esto se realiza mediante un análisis de frecuencias de respuestas de los estudiantes a un cuestionario y un test no paramétrico.

Un antecedente directo de esta investigación es el trabajo de Ramírez (2005), quién obtuvo que a la mayoría de los estudiantes chilenos de 8º le gustan las Matemáticas, la disfrutan y piensan que les va bien y alrededor de la mitad consideran que las Matemáticas son bastante fáciles. Sin embargo, también alrededor de la mitad de los estudiantes piensan que se necesita un talento y una suerte innata para tener éxito en Matemáticas y no tienen ninguno de ellos.

MARCO CONCEPTUAL

Visión personal de las Matemáticas

Como mencionamos anteriormente, el dominio afectivo en la educación matemática se ha caracterizado de diferentes maneras que aceptan reconocer las emociones, la actitud, las creencias y las motivaciones como elementos entrelazados (Hannula, 2012; McLeod, 1992). La naturaleza fuertemente interconectada de los afectos lleva a veces a la ambigüedad en el uso de los conceptos. Por ejemplo, McLeod (1992) usa el término actitud para referirse a "respuestas afectivas que involucran sentimientos positivos o negativos de intensidad moderada y estabilidad razonable" (p. 581), mientras que otros autores definen la actitud hacia las Matemáticas como una combinación de emociones, creencias y comportamientos en relación con el sujeto (Hart, 1989, citado por Kiwanuka et al., 2017, p. 2).

Uno de los temas de interés en el dominio afectivo ha sido la visión personal de los individuos hacia las Matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Esta expresión a veces se ha utilizado como sinónimo de creencias, coincidiendo con las palabras de Schoenfeld: "los sistemas de creencias son la visión Matemática de un mundo" (citado por Roesken, Hannula y Pehkonen, 2011, página 497). Para otros investigadores, incluye el autoconcepto, la autoconfianza, la autopercepción de los alumnos y los profesores, sus creencias sobre el tema, sus motivaciones o sentimientos hacia la disciplina, entre otros. Esta perspectiva apunta a una visión más global de los afectos de los individuos, a través de la conjunción de sus emociones, motivaciones y creencias (Roesken, Hannula y Pehkonen, 2011).

Esta investigación considera la visión de los estudiantes sobre las Matemáticas en el sentido de Roesken y sus colegas, lo que proporciona una mirada más holística de la relación entre el alumno y la disciplina. Agregamos la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas a este conjunto de creencias, emociones y motivaciones, lo que nos da un componente conductual.

Visión de los estudiantes sobre sí mismos en relación con las Matemáticas

Como creencias, la visión personal de las Matemáticas es un sistema en el que se pueden distinguir tres focos principales: el objeto (las Matemáticas), el contexto y el yo (Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2002).

Roesken et al. (2011), en una investigación con estudiantes de Secundaria, identificaron siete dimensiones que componen la visión de los estudiantes de sí mismos como aprendices de Matemáticas: sus motivaciones hacia las Matemáticas, sus sentimientos mientras estudian la materia, sus creencias sobre las Matemáticas como disciplina, su autopercepción sobre su eficacia como aprendices, su contexto académico y su apoyo familiar. Los autores denominaron a estas dimensiones: habilidad, esfuerzo, calidad docente, estímulo familiar, disfrute de las Matemáticas, dificultad de las Matemáticas y éxito.

Las siete dimensiones forman un sistema donde la habilidad, el éxito y la dificultad de las Matemáticas se encuentran en el núcleo (Figura 1), con una fuerte correlación positiva entre la habilidad y el éxito y una fuerte correlación negativa entre la dificultad de las Matemáticas y las otras dos componentes. El siguiente factor con mayor correlación con este núcleo fue el disfrute de las Matemáticas, seguido del esfuerzo y la calidad del docente. El estímulo familiar fue el factor con la menor correlación con los otros factores, y ni siquiera se correlacionó con la dificultad de las Matemáticas, cuya correlación con los otros factores fueron todas negativas.

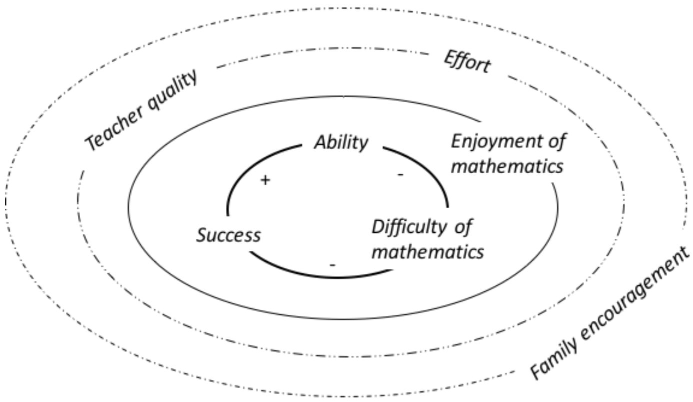


Figura 1. Sistema utilizado por Roesken et al. (2011)

El instrumento de recogida de datos de esta investigación consiste en un conjunto de ítems sobre la autoestima y la motivación de los estudiantes, extraídos de un cuestionario elaborado por el Sistema Nacional de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) de Chile. Se eligió este instrumento por estar validado a nivel nacional. Usaremos las siete dimensiones del marco de Roesken y sus colegas para clasificar esos ítems e interpretar los resultados del análisis en términos de la visión que los participantes tienen de sí mismos como aprendices de Matemática.

METODOLOGÍA

Participantes

Los datos utilizados en este estudio se obtuvieron de un colegio particular subvencionado de Santiago de Chile, en el que se imparten todos los niveles educativos desde kínder hasta el nivel 12, con un solo grupo por cada nivel educativo. Se recogieron datos de 166 estudiantes de los niveles 4, 6, 8, 10 y 11 (Tabla 1).

Tabla 1. Número de estudiantes de cada nivel educativo que respondieron al cuestionario

Nivel educativo	4.º	6.º	8.º	10.º	11.º
Nº de estudiantes	36	33	32	34	31

La elección de estos estudiantes obedece al hecho de que esta investigación es parte de un proyecto entre cuyos objetivos está analizar los cambios relacionados con el dominio afectivo que se producen en los estudiantes, en dos cursos consecutivos (Perdomo-Díaz, 2017). La limitación de recursos hizo que tuviéramos que seleccionar solo la mitad de los cursos que se impartían en el colegio; se eligieron los cursos que figuran en la Tabla 1 con el fin de recoger datos de los mismos estudiantes en dos cursos consecutivos. En cualquier caso, el objetivo de esta comunicación se centra en el análisis correspondiente a un solo curso, no a dos cursos consecutivos.

Instrumento

El SIMCE es un sistema construido en coherencia con las pruebas PISA y TIMSS que, además del rendimiento académico de los estudiantes, considera otros aspectos relacionados con el aprendizaje (MINEDUC, 2014). Evalúa a los estudiantes en diferentes materias (Matemáticas, Ciencias, Lenguaje, entre otros). En Matemáticas, se realiza una prueba de conocimiento matemático a todos los estudiantes en los niveles educativos 4, 6, 8 y 10, y se pide a esos mismos estudiantes, a sus padres, sus profesores y los directores de sus escuelas que respondan a un conjunto de cuestionarios. El cuestionario de los estudiantes evalúa 4 indicadores de calidad educativa, uno de los cuales lo denominan *Autoestima académica y motivación.*

El cuestionario que evalúa este indicador incluye una pregunta directamente relacionada con las Matemáticas: "*Pensando ahora en cómo te va en Matemática, ¿qué tan de acuerdo o en desacuerdo estás con cada una de las siguientes afirmaciones?*". Se incluyen 10 afirmaciones (Tabla 2). Los estudiantes indican su nivel de acuerdo con la declaración de cada ítem en una escala Likert de cuatro puntos con las siguientes opciones: muy de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y totalmente en desacuerdo (MINEDUC, 2014).

El estudio que se presenta en este documento se realiza a partir de las respuestas de los participantes a esta pregunta del cuestionario, que hemos denominado SQ-M. Con el fin de realizar el análisis de los datos y la interpretación de los resultados, clasificamos los ítems de la pregunta SQ-M según las dimensiones de la visión de los estudiantes de sí mismos como aprendices de Matemáticas identificadas por Roesken et al. (2011) (Tabla 2).

Tabla 2. Clasificación de los ítems de la pregunta SQ-M según el marco

Dimensión	Ítems del cuestionario
Actitud	*I4: Cuando me va mal en Matemática me doy por vencido rápidamente.* (R)
Motivación	*I2: Me gustaría tener más clases de Matemática en el colegio.*
Emociones	*I7: Me entretiene estudiar Matemática.*
Habilidad y éxito	*I1: En general me va bien en Matemática.* *I3: Matemática me cuesta más que al resto de mis compañeros.*(R) *I5: Aprendo Matemática con facilidad y rapidez.* *I6: Me cuesta aprender Matemática y creo que siempre será difícil para mí.* (R) *I8: Me saco buenas notas en Matemática sin necesidad de estudiar.* *I9: Las clases de Matemática son fáciles y con poco esfuerzo me va bien.* *I10: Si estudio me va bien en Matemática.*

La mayoría de los ítems están relacionados con las creencias de los estudiantes sobre sí mismos, en particular con la percepción de los estudiantes sobre su capacidad y éxito en base a sus experiencias como aprendices de Matemáticas (I1, I3, I5, I6, I8, I9 e I10). Un ítem se refiere a los sentimientos de los estudiantes hacia las Matemáticas (I7) y otro se refiere a los deseos de los estudiantes en relación con las Matemáticas (I2). El ítem I4 se refiere a cómo los estudiantes actúan en una situación específica que, aunque no concuerda con ninguna de las dimensiones del marco de Roesken et al. (2011), está relacionada con la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas en su dimensión conativa (Hart, 1989, citado en Kiwanuka et al., 2017).

Proceso de análisis de datos

Aunque el estudio SIMCE considera los diez ítems del cuestionario SQ-M como una escala única, en esta investigación se considera cada ítem como una variable, con el fin de explorar con un poco más de detalle, la visión que los participantes tienen de sí mismos como aprendices de Matemáticas y sus relaciones con el nivel académico que están cursando.

Usando SPSS, se realiza un análisis de frecuencia de respuestas para cada ítem que proporciona una imagen general de la visión de los participantes de sí mismos como estudiantes de Matemáticas en términos de elementos SQ-M. Para analizar las diferencias entre los grados académicos se utilizó la prueba no paramétrica de Kruskal Wallis, ya que no se cumplieron los supuestos de normalidad y homogeneidad de la varianza.

RESULTADOS

Visión de los estudiantes sobre su relación con las Matemáticas según los ítems de SQ-M

En términos de los ítems SQ-M, en esta investigación se considera que los estudiantes con una visión positiva de sí mismos son aquellos que están en desacuerdo o muy en desacuerdo con I3, I4 e I6, y están de acuerdo o muy de acuerdo con el resto de los ítems. La Tabla 3 muestra, para cada ítem, el porcentaje de estudiantes que elige cada opción en la escala Likert. La suma de los porcentajes en algunas columnas es inferior a 100 por la existencia de algunos ítems sin responder.

El análisis de frecuencia de las respuestas muestra que todos los ítems, excepto I8, tienen más del 45% de las respuestas relacionadas con una visión positiva de los estudiantes de sí mismos como aprendices de Matemáticas. Casi el 60% de los estudiantes considera que le va bien en Matemáticas (I1), un 54.8% indica que aprenden Matemáticas fácil y rápidamente (I5); el 63.2% está en desacuerdo o muy en desacuerdo con que esta materia sea más difícil para ellos que para sus compañeros (I3) y casi el 70% está en desacuerdo o muy en desacuerdo con que les cueste aprender matemáticas y que siempre será así.

Por otra parte, más de la mitad de los participantes está en desacuerdo o muy en desacuerdo con los ítems I8 e I9, que apuntan a que las Matemáticas les suponen poco esfuerzo (61.4% y 54.8%, respectivamente). Sin embargo, más del 80% de los estudiantes indica que si estudian, les irá bien en Matemáticas (I10).

Tabla 3. Porcentajes de cada respuesta en cada ítem

	Actitud	Motivación	Emoción	Habilidad y éxito						
	I4	I2	I7	I1	I3	I5	I6	I8	I9	I10
Muy de acuerdo	9.6%	14.5%	17.5%	20.5 %	10.2%	19.9%	14.5%	13.9%	16.9%	51.2%
De acuerdo	16.9%	36.1%	30.7%	38%	26.5%	34.9%	15.7%	24.7%	28.3%	33.1%
En desacuerdo	35.5%	25.3%	27.7%	28.9%	34.9%	27.1%	39.8%	35.5%	35.5%	10.8%
Muy en desacuerdo	37.3%	22.9%	22.3%	12.7%	28.3%	17.5%	30.1%	25.9%	19.3%	4.8%

Relacionado con la actitud, casi tres cuartas partes de los estudiantes tienen una disposición positiva hacia las dificultades (I4) y en términos de motivación y sentimientos, alrededor de la mitad de los estudiantes indica que estudiar Matemáticas es divertido para ellos (I7) y les gustaría tener más Matemáticas en la escuela (I2).

Diferencias entre niveles educativos

La prueba de Kruskal Wallis, tomando el curso como variable de agrupación (Tabla 4), no permite afirmar que existan diferencias significativas entre los niveles educativos en el grado de acuerdo en tres de las afirmaciones: *En general me va bien en Matemáticas* (I1), *Me cuesta aprender Matemática y creo que siempre será difícil para mí* (I6), y *Me saco buenas notas en Matemática sin necesidad de estudiar* (I8) ya que p>.05. Sí existen diferencias significativas entre las respuestas de los estudiantes de distintos cursos en los otros siete ítems: I2, I3, I4, I5, I7, I9 e I10 (p <.05).

Tabla 4. Resultados del test de Kruskal Wallis aplicado a cada ítem

	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
$\chi 2(4)$	8.928	12.188	15.777	15.945	11.266	4.053	21.632	8.951	12.541	16.71
p	.063	.016	.003	.003	.24	.399	0	.062	.014	.002

El análisis post-hoc revela que todas las diferencias significativas se dan entre los estudiantes de 4º y los estudiantes de 8º, 10º y 11º. La Tabla 5 resume la información sobre los ítems y los pares de cursos donde se detectaron diferencias significativas. Por ejemplo, existen diferencias significativas entre las respuestas de los estudiantes de 4º y 8º en los ítems I2, I7, I3 e I10.

Tabla 5. Significancia ajustada por ítem y pares de niveles educativos (p<.05)

	Cursos	4° - 8°	4° - 10°	4° - 11°
	Item			
Motivation	I2	.033		
Attitude	I4		.002	.034
Feelings	I7	.001	.002	.025
Ability and success	I3	.017		.004
	I5		.028	
	I9		.02	
	I10	.003	.041	.043

Para profundizar en estos resultados, representamos gráficamente el promedio de las respuestas de los estudiantes de cada nivel académico para cada uno de los ítems. Se presentan dos gráficos, uno con los ítems relativos a motivación, actitud y sentimientos (I2, I4 e I7), y el otro con los ítems sobre la percepción de los alumnos sobre su propia habilidad y el éxito en el aprendizaje de las Matemáticas (I3, I5, I9 e I10) (Figura 2). Para realizar estos gráficos, las respuestas de I3 e I4 se recodificaron de tal manera que promedios más altos se relacionan con una respuesta más positiva de los estudiantes sobre su autopercepción como aprendices de Matemáticas.

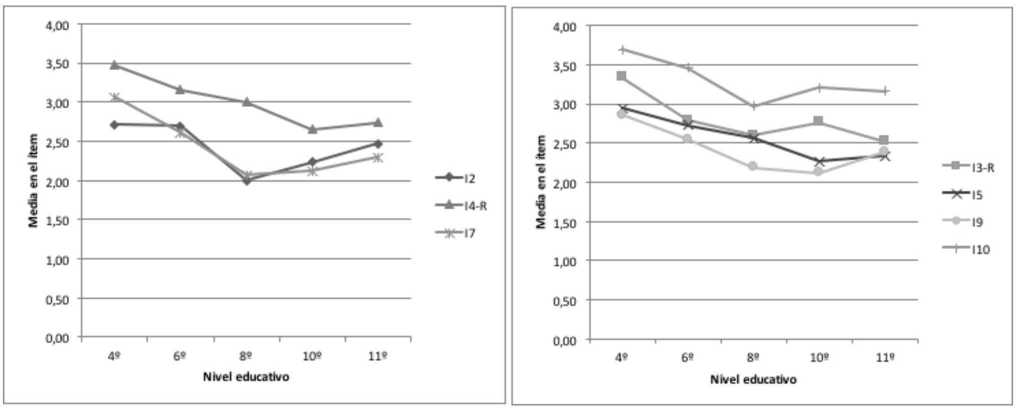


Figura 2. Promedio en los ítems de SQ-M en los que hay diferencias significativas entre niveles educativos

La Figura 2 muestra que los estudiantes de 4º y 6º son los que tienen una visión más positiva de sí mismos como estudiantes de Matemáticas, aunque las diferencias entre los estudiantes de 6º y el resto no son estadísticamente significativas.

Los estudiantes de 8º son los que están menos motivados y disfrutan menos con las Matemáticas (I2, I7). La motivación aumenta en los cursos superiores, y las diferencias dejan de ser significativas entre 4º y los cursos más altos (10º y 11º), lo que no ocurre con el disfrute, donde se mantienen diferencias significativas de 4º con 8º, 10º y 11º (Tabla 5).

Los estudiantes de los cursos más altos (10º y 11º) tienen una actitud menos positiva frente a las dificultades en Matemáticas (I4), con diferencias significativas con los estudiantes de 4º. Además, tienen los niveles más bajos de percepción sobre su capacidad para aprender Matemáticas (I5 e I9). Finalmente, hay dos ítems en los que los estudiantes de 8º y 10º son puntos de inflexión (I3 e I10), lo que refleja una mejora en la visión de los estudiantes de su éxito en Matemáticas en 10º, que vuelve a disminuir en 11º.

DISCUSIÓN FINAL

Este estudio exploratorio respalda los resultados de investigaciones anteriores sobre la autopercepción de los estudiantes como estudiantes de Matemáticas tanto en Chile como en otros países. El análisis muestra un porcentaje amplio de respuestas de los estudiantes que apuntan hacia una visión positiva de sí mismos como aprendices de Matemáticas. Por ejemplo, el 80% de los estudiantes indicaron que si estudian, les va bien en la disciplina. El análisis de frecuencia también revela que alrededor de la mitad de los participantes disfrutan las Matemáticas y les gustaría tener más Matemáticas en la escuela, tres cuartos tienen una disposición positiva hacia las dificultades para trabajar en tareas Matemáticas y entre un 60% y un 70% consideran que lo están haciendo bien, aprenden fácil y rápidamente y no tienen problemas para aprender Matemáticas. Estos resultados son consistentes con otros resultados de investigación, por ejemplo, con el estudio TIMSS realizado con estudiantes de 8º (Kifer, 2002, citado en Ramírez, 2005), complementado por la investigación de Ramírez enfocada en estudiantes chilenos de este nivel académico (Ramírez, 2005). También se ha detectado una opinión positiva de sí mismos entre los estudiantes de Finlandia de grado 11 (Roesken et al., 2011) y entre los estudiantes chilenos y finlandeses de 3º (Tuohilampi et al., 2016). A pesar de estos resultados positivistas, entre el 55% y el 60% de los participantes de esta investigación declararon que tenían que esforzarse para tener éxito en Matemáticas, algo que también fue señalado por los estudiantes de 11º grado de la investigación de Roesken et al. (2011).

El análisis también reveló que los estudiantes más jóvenes, de 4º y 6º, presentan una visión más positiva de sí mismos como estudiantes de Matemáticas que el resto de los participantes. Este fenómeno también ha sido observado por Mata et al., (2012) con estudiantes portugueses de 5º y 12º. Estos autores encontraron que el ciclo de estudio tuvo un efecto significativo en la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas, que fue menos positiva para los niveles avanzados. En nuestro caso, las diferencias significativas relacionadas con la actitud hacia las Matemáticas aparecieron solo entre los estudiantes de 4º en comparación con los estudiantes de 10º y 11º.

Sin embargo, la situación no es tan clara entre los estudiantes mayores. En nuestro estudio, la media en los 10 ítems no disminuye con el nivel académico. Para los ítems motivacionales y emocionales, los estudiantes de 8º fueron menos positivos que el resto. En el caso de los ítems relativos a la visión de los estudiantes sobre su éxito como aprendices de Matemáticas (I5 e I9), los menos positivos fueron los de 10º, igual que en el caso del ítem relacionado con la actitud hacia las Matemáticas (I4). Finalmente, para aquellos ítems más relacionados con la visión de los estudiantes sobre su habilidad para aprender Matemáticas, el promedio en el ítem aumenta de 8º a 10º y disminuye de 10º a 11º. Esta diversidad podría explicarse por una posible estructura diferente del afecto relacionado con las Matemáticas para cada grado, como sucedió en la investigación de Hannula y Laakso (2011) con los estudiantes finlandeses 4º y 8º. Otra posible razón podría ser que el disfrute y la autoconfianza varían según las áreas temáticas de las Matemáticas (Kloosterman, 2002). En este sentido, los estudiantes que participaron en la investigación de Kislenko (2009) comentaron lo siguiente:

"Las Matemáticas pueden ser aburridas pero también extremadamente emocionantes. Depende completamente del tema. ... En Matemáticas, algunos temas son fáciles y otros difíciles, del mismo modo, algunas partes son interesantes y algunas partes aburridas". (Kislenko, 2009, p.156).

Esta reflexión tiene relación directa con lo que señala Gómez-Chacón (2016) sobre la necesidad de estudiar el dominio afectivo de un individuo, no solo a partir de sus respuestas a un cuestionario sobre qué piensa acerca de algo, sino teniendo en cuenta también en qué circunstancias la persona ha sido expuesta a ese algo.

El número de participantes en nuestra investigación no nos permite inferir conclusiones generales, pero el hecho de que todos los estudiantes provengan de la misma escuela proporciona una imagen de esta escuela que podría ser útil como referencia para otros establecimientos académicos. Además, acabamos de recopilar los mismos datos de la misma población en un nivel académico superior. El siguiente objetivo será comparar los resultados presentados en este capítulo con los obtenidos con los nuevos datos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por Conicyt, proyecto Fondecyt 3140597, y el Plan Nacional del Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto EDU2017-84276-R. La autora además agradece a Valentina Giaconi sus comentarios y sugerencias a una versión preliminar de este trabajo.

Referencias

Bofah, E. A. y Hannula, M. S. (2016). Students' views on mathematics in single-sex and coed classrooms in Ghana. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(2), 229-250.

Charles, M., Harr, B., Cech, E. y Hendley, A. (2014). Who likes math where? Gender differences in eighth-graders' attitudes around the world. *International Studies in Sociology of Education, 24*(1), 85-112. doi: 10.1080/09620214.2014.895140

De Bellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Matematics, 63*, 131-147.

Gamboa Araya, R. y Moreira-Mora, T. E. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 27-51.

Gómez-Chacón, I. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Málaga: SEIEM.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161.

Hannula, M. S. y Laakso, J. (2011). The structure of mathematics related beliefs, attitudes and motivation among Finnish grade 4 and grade 8 students. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Ankara, Turkey: PME.

Holm, M. E., Hannula, M. S. y Björn, P. M. (2017). Mathematics-related emotions among Finish adolescents across different performance levels. *Educational Psychology, 37*(2), 205-218.

Kislenko, K. (2009). 'Mathematics is a bit difficult but you need it a lot': Estonian pupils' beliefs about mathematics. En J. Maaß, y W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results* (pp. 143-163). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kiwanuka, H. N., Van Damme, J., Van Den Noortgate, W., Anumendem, D. N., Vanlaar, G., Reynolds, C. y Namusisi, S. (2017). How do students and classroom characteristics affect attitude toward mathematics? A multivariate multilevel analysis. *School Effectiveness and School Improvement, 28*(1), 1-21. doi: 10.1080/09243453.2016.1201123

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G, Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* 247-269. Kluwer Academic Publishers: Netherlands

Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and Individual Differences*, *19*, 355-365.

Mata, M. L., Monteiro, V. y Peixoto, F. (2012). Attitudes towards mathematics: Effects of individual, motivational, and social support factors. *Child Development Research.* doi*: 10.1155/2012/876028.*

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, (Vol. 23, pp. 575-596). New York, EEUU: MacMillan Publishing Company.

Ministerio de Educación de Chile. (2014). *Otros indicadores de calidad educativa. Fundamentos*. Recuperado de http://sustentabilidad.umce.cl/wp-content/uploads/2016/08/Indicadores-de-calidad_OBT-1.pdf

Op't Eynde, P., de Corte, E. y Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 193-20.

Perdomo-Díaz, J. (2017). *Las emociones que experimentan los estudiantes al realizar tareas Matemáticas: geometría desde kinder hasta 4º medio.* [Informe]. Informes Finales (6980). Recuperado de http://repositorio.conicyt.cl/handle/10533/205430

Ramirez, M. J. (2005). Attitudes toward mathematics and academic performance among Chilean 8th graders. *Estudios Pedagógicos*, *31*, 97-112.

Roesken, B., Hannula, M. S. y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 497-506.

Tuohilampi, L., Hannula, M. S., Varas, L., Giaconi, V., Laine, A., Näveri, L. y Saló i Nevado L. (2015). Challenging western approach to cultural comparisons: young pupils' affective structures regarding mathematics in Finland and in Chile. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1625-1648. doi: 10.1007/ s10763-014-9562-9

Tuohilampi, L., Laine, A., Hannula, M. S. y Varas, L. (2016). A comparative study of Finland and Chile: the culture-dependent significance of the individual and interindividual levels of the mathematics-related affect. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14,* 1093-1111. doi: 10.1007/S10763-015-9639-0

GENERALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN UNA ESTUDIANTE DE CUARTO DE PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO DESDE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL

Generalisation and inductive reasoning by a fourth grader. A case study from the functional thinking approach

Pinto, E.[a] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo abordamos la generalización como parte del proceso de razonamiento inductivo en estudiantes de Educación Primaria. A través de un estudio de caso, describimos cómo una estudiante de cuarto (9 años) sigue los pasos de un modelo de razonamiento inductivo, al trabajar con un problema de generalización que involucra una función lineal. Mediante una entrevista clínica semiestructurada, recogimos evidencias que muestran que la estudiante generalizó la relación entre variables siguiendo, en un orden propio, cuatro de los siete pasos del modelo. Algunos de estos pasos se presentaron de manera simultánea. La estudiante organizó los primeros casos particulares dados, estableciendo una conjetura con base en ellos. Luego, al aumentar el tamaño de los casos particulares, ella modificó sus conjeturas las que luego validó con nuevos casos particulares. Finalmente generalizó.

Palabras clave: *generalización, pensamiento funcional, razonamiento inductivo.*

Abstract

In this paper, we address generalisation as part of the inductive reasoning process with students in elementary grades. Through a case study, we describe how a fourth-grader (9 years old) follows the stages of an inductive reasoning model, working with a generalisation problem that involves a linear function. Through a semi-structured clinical interview, we collected evidence showing that the student generalised the relationship between variables following four of the seven steps, in a particular way. Some stages were presented simultaneously. The student organised the first particular cases given, establishing a conjecture based on them. When increasing the particular cases, the student validated her conjectures with new particular instances. She finally generalised.

Keywords: *generalisation, functional thinking, inductive reasoning.*

INTRODUCCIÓN

La noción de generalización tiene diferentes acepciones, dependiendo de la perspectiva teórica en que nos ubiquemos. Aún así, existe un acuerdo en asumir que la generalización es un elemento central de la actividad matemática en general; y del pensamiento algebraico, en particular (e.g., Kaput, 2008) porque permite la generación de conocimiento matemático (Pólya, 1945). Situados en el contexto del pensamiento algebraico, el número de investigaciones que tratan la generalización en estudiantes de Educación Primaria ha crecido en las últimas décadas, poniendo el énfasis en que generalizar entrega la oportunidad de dar sentido a los cálculos que realizan y apartar la información irrelevante, lo que permitirá establecer conexiones entre las relaciones y estructuras matemáticas identificadas (Stephens, Blanton, Knuth, Isler y Murphy-Gardiner, 2015). Desde el pensamiento funcional, un tipo de pensamiento algebraico que tiene a la función como el contenido matemático esencial (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011), interesa la generalización como

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 457-466). Gijón: SEIEM.

proceso y como producto. En este sentido, nuestro interés de investigación sigue ambos focos: cómo los estudiantes razonan hasta llegar a la generalización (proceso) y cómo expresan dicha generalización (producto). Nos centramos en la generalización de estudiantes de cursos intermedios de primaria al trabajar con tareas que involucran funciones pues este tipo de trabajo se reconoce como una necesidad a profundizar (Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017).

El razonamiento inductivo es uno de los procesos que lleva a la generalización y su importancia radica en que, por una parte, favorece la construcción de conocimiento científico mediante la observación de casos particulares y, por otra, permite la verificación de una conjetura mediante el trabajo con casos particulares (Pólya, 1945). Existen escasas investigaciones que tratan este tipo de razonamiento en cursos de primaria y algunas investigaciones han estado centradas en: (a) Educación Infantil (e.g., Majón, 2016), (b) en los primeros o últimos cursos de primaria (e.g., Lampert, 1990), o (c) al describir el trabajo de los estudiantes de todos los cursos de primaria (e.g., Ortiz, 1998).

Por tanto, el objetivo general de investigación es describir el proceso de generalización de un estudiante de cuarto de primaria, al trabajar con un problema que involucra una función lineal, mediante un modelo de razonamiento inductivo.

GENERALIZACIÓN

Algunos autores señalan que la generalización se ha abordado en Educación Primaria como: (a) el desarrollo de una regla que sirve como una declaración sobre relaciones y propiedades, (b) la extensión o ampliación de rangos de razonamiento más allá de los casos considerados, y (c) la identificación de aspectos comunes entre los casos (Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017). Asumir la generalización como proceso (generalising) supone referirse a cualquiera de los tres elementos anteriores, mientras que la generalización como producto (generalisation) se refiere al resultado de los tres elementos descritos.

Desde el enfoque funcional del pensamiento algebraico, la generalización incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresando dichas relaciones mediante diferentes representaciones (verbal, simbólica, tabular, gráfica, por ejemplo), así como razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). Investigaciones previas (e.g., Pinto y Cañadas, 2017) muestran que estudiantes de tercero y quinto de primaria expresaron la generalización de relaciones entre variables al trabajar con el problema de las baldosas (Figura 1).

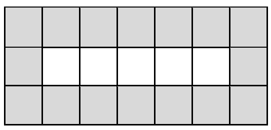


Figura 1. Imagen del problema de las baldosas (p. 410)

Los estudiantes, respondiendo a diferentes preguntas que buscan determinar la cantidad de baldosas grises dado el número de baldosas blancas, establecieron relaciones generales como: “el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6” o “fórmula = (X x 2) + 6 = 16; X = número de baldosas blancas”. Ambas respuestas, expresadas mediante diferentes representaciones, aluden a la relación general. Interesa, por tanto, profundizar en cómo los estudiantes de estos cursos llegan a establecer este tipo de relaciones.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

En el contexto de la Educación Matemática, el razonamiento inductivo involucra el trabajo con casos particulares y la generalización a partir de ellos, mediante la búsqueda de patrones basados en los casos presentados, la formulación de conjeturas a partir del patrón y la comprobación de dicho patrón (Pólya, 1945). Cañadas y Castro (2007) describen el razonamiento inductivo mostrado por estudiantes de Educación Secundaria en problemas de generalización a través de un modelo constituido por siete pasos y diseñado *ad hoc*. En la Figura 2 presentamos una síntesis de dicho modelo.

1. Trabajo con casos particulares. Comienza la experimentación con los casos particulares involucrados en el problema.
2. Organización de casos particulares. Los casos particulares son organizados de alguna manera, empleando diferentes estrategias para facilitar el trabajo con los casos involucrados.
3. Búsqueda y predicción de patrones. Los casos particulares son observados (que pueden o no estar organizados) y, a partir de dicha observación, se establece el siguiente caso.
4. Formulación de conjeturas. Una conjetura es "una afirmación basada en hechos empíricos, que no ha sido validada" (p. 69). En esta etapa, la formulación de conjeturas está basada en casos particulares que aún no han sido comprobados.
5. Validación de conjeturas. La validación de conjeturas se realiza con nuevos casos específicos (diferentes a los del paso previo), pero no para el general.
6. Generalización. Una vez validada la conjetura, esta satisface a todos los casos (incluyendo al caso general).
7. Demostración. Corresponde a la presencia de razones que explican la conjetura, con el objetivo de persuadir a otra persona que la generalización ha quedado validada (podría ser una prueba formal).

Figura 2. Modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007)

En relación con el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), las autoras destacan que: (a) no todos los pasos tienen la misma importancia y la generalización es uno de los pasos clave en el proceso, (b) no se tienen que dar todos los pasos para lograr la generalización, y (c) los pasos no se tienen que dar en el orden descrito para llegar a la generalización. Diversas investigaciones han utilizado este modelo para: (a) describir el razonamiento inductivo de estudiantes de Educación Infantil (e.g., Majón, 2016), (b) diseñar cuestionarios que indagan en el proceso de generalización de estudiantes los primeros cursos de Educación Primaria (e.g., Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, aceptado) y (c) describir y caracterizar el razonamiento inductivo de maestros de primaria en formación (Barrera, Castro y Cañadas, 2009). En Educación Infantil, por ejemplo, Majón (2016) describe y caracteriza el razonamiento inductivo de 12 estudiantes de 5 y 6 años al resolver un problema de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. Los principales resultados muestran que los estudiantes evidenciaron tres pasos del modelo, incluyendo un estudiante que generalizó la relación funcional involucrada en el problema.

MÉTODO

La investigación que presentamos es cualitativa y exploratoria. Específicamente, presentamos un estudio de caso de una estudiante de cuarto de primaria (9 años), mediante la realización de una entrevista clínica semiestructurada (Ginsburg, 1997).

Contexto de la investigación

Durante el curso 2014-2015 trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de tercero de un colegio español, con los que exploramos diferentes aspectos del pensamiento funcional, en el contexto de un experimento de enseñanza. En la Tabla 1 presentamos un resumen de las tareas trabajadas con los estudiantes en cada una de las sesiones.

Tabla 1. Sesiones previas

Sesión	Enunciado del problema	Función involucrada
1	María y Raúl son dos hermanos que viven en la Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	f(x)=x+5
2 y 3	Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.	f(x)=3x
4	Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño.	f(x)=2x+6

Sujeto de investigación

Después de analizar las respuestas de los estudiantes a las diferentes tareas, encontramos que estos expresaron relaciones de correspondencia y covariación en algunas tareas, así como la generalización de algunas de estas relaciones. Por ejemplo, en el trabajo de la cuarta sesión, tres estudiantes generalizan la relación funcional de correspondencia, mediante diferentes representaciones (Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016). A partir de dicho análisis, organizamos a los 24 estudiantes en tres grupos según su rendimiento (alto-medio-bajo), con base en sus avances en la identificación de patrones y en la generalización. Para profundizar en el trabajo y razonamiento de los estudiantes, entrevistamos a ocho estudiantes un curso después. Estos estudiantes fueron seleccionados por la tutora de la clase, de entre los tres grupos que le proporcionamos y teniendo en cuenta que tuvieran buena disposición a colaborar.

En este trabajo nos centramos en una de estas ocho estudiantes entrevistadas: Susana[1] (9 años). La estudiante tiene un desempeño académico similar al promedio de sus compañeros y durante las sesiones del experimento de enseñanza generalizó la relación entre variable en una de las tareas propuestas (problema de las edades de María y Raúl). Escogimos a esta estudiante pues generaliza la relación entre variable presentada en la tarea que presentamos a continuación.

Entrevista e instrumento de recogida de datos

Implementamos entrevistas clínicas semiestructuradas pues permiten obtener información más específica y las preguntas se van acomodando a las respuestas de los estudiantes (Ginsburg, 1997). En la Figura 3 presentamos el problema planteado a Susana.

> Elsa quiere llevar a todos los amigos que tiene en el mundo a Arendelle para que estén con ella cuando sea nombrada reina. Para eso ha decidido conducir un tren que salga desde Granada y que pare en todos los pueblos en los que Elsa tiene amigos. El tren es conducido por Elsa. En cada pueblo que para el tren, ella recoge a 3 amigos.

Figura 3. Problema del tren

Este problema involucra la función $f(x)=3x+1$. Una vez presentado el problema, planteamos preguntas que seguían el modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007), con el propósito de indagar sobre los mismos. Estas preguntas involucran:

- casos particulares (e.g., la tercera parada está en Málaga, ¿cuántos pasajeros irán en el tren al salir de la estación de Málaga?),
- la relación general (Elsa ha parado en un pueblo y no recuerda qué número de parada es la de ese pueblo, pero al llegar a la estación, ve en qué número de parada está. ¿Cómo puedes saber cuántas personas hay en el tren?”), y

- el uso de la letra (e.g., "Elige una letra para representar el número de pueblos en los que Elsa tiene amigos ¿Por qué eliges esa letra? ¿Qué valores puede tener esa letra? ¿Cuántos amigos van en el tren?).

Durante la entrevista, la estudiante disponía de un papel y lápiz que podía emplear libremente. La entrevista fue grabada mediante videocámara. Por tanto, nuestras fuentes de información son: (a) vídeo de la entrevista, (b) transcripción de la entrevista y (c) producción escrita de la estudiante.

Categorías y análisis de datos

Con base en el objetivo de investigación, diseñamos un sistema de categorías que parte de los siete pasos del modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007). El tercer paso de este modelo de razonamiento está centrado en la idea de patrón. Desde el marco del pensamiento funcional, nos parece relevante modificar la idea de patrón (la que está más asociada a la recurrencia que al establecimiento de una relación funcional) por la noción de estructura, entendida como la composición de un conjunto de elementos numéricos (expresados mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y las propiedades de dichas operaciones (Pinto y Cañadas, 2017). De esta forma, nos parece más coherente, bajo nuestra perspectiva de trabajo, hablar de "identificación de estructuras" en el tercer paso.

Emplearemos la variable tiempo de desarrollo de la entrevista para describir el proceso que sigue Susana. Para realizar esta descripción, empleamos un gráfico que recoge los pasos del modelo, marcando regiones rectangulares que representan el tiempo de la entrevista que la estudiante ha estado en cada paso. Así mismo, indicamos el momento en que se realizó cada tipo de pregunta (caso particular, caso general o uso de letra).

RESULTADOS

De manera general, la entrevista tuvo una duración de 12 minutos. En la Figura 4 presentamos los tiempos que siguió Susana en cada uno de los pasos del razonamiento inductivo.

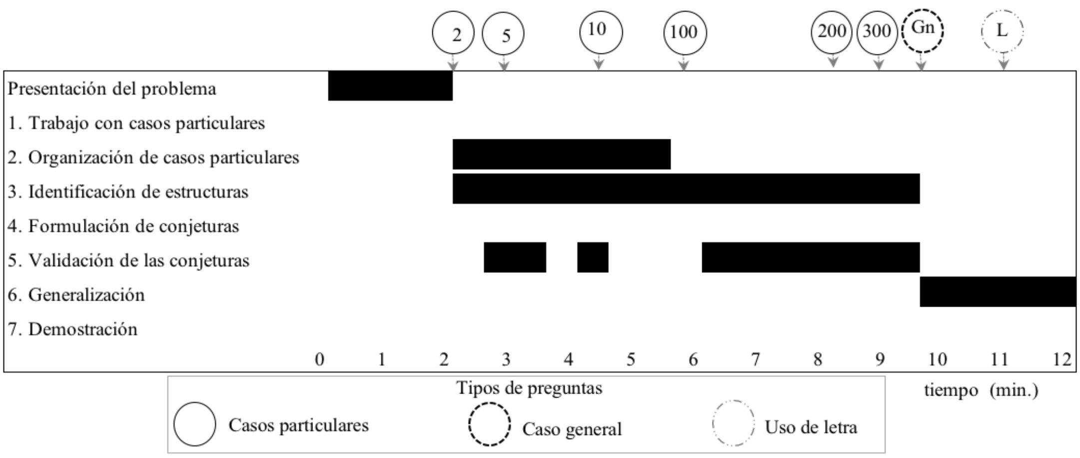


Figura 4. Proceso de generalización de Susana

En la Figura 4 se observa que, tras la introducción del problema (2 minutos), Susana estuvo más de tres minutos organizando casos particulares y más de siete minutos identificando estructuras. Por otra parte, la validación de sus conjeturas se observa en diferentes partes de la entrevista (no marcamos el paso "formulación de conjeturas" pues consideramos que para validar conjeturas el estudiante ya las formuló, por lo que no es necesario incorporar información extra). En los últimos dos minutos de entrevista, la estudiante generalizó y no llegó a la demostración. A continuación, presentamos algunos extractos que ayudan a clarificar cada paso del modelo que sigue la estudiante, lo que permitirá describir el proceso que sigue Susana al generalizar, añadiendo algunos fragmentos de la transcripción de la entrevista y de sus respuestas escritas.

Organización de casos particulares

Una vez introducido el problema, la entrevistadora (E) realizó preguntas que involucraron diferentes casos particulares (2, 5 y 10). Susana (S) debía responder cuántas personas iban en el tren tras la parada indicada. En el siguiente extracto presentamos las respuestas de la estudiante al primer caso particular.

25. E: La primera parada es en Armilla y ahí se suben tres pasajeros. La siguiente parada la va a hacer en Albolote.

26. S: Y se suben otros tres [pasajeros].

27. E: Eso. Cuando salga de Albolote, ¿cuántas personas irán en el tren?

28. S: Siete, contando con Elsa.

En este extracto se observa que la estudiante ha respondido correctamente a la pregunta (línea 8) pero no tenemos evidencias de si establece la relación entre variables pues solo responde a la pregunta. En este extracto, la estudiante tardó menos de un minuto en responder. Luego, se presentaron dos nuevos casos particulares: 5 y 10, con los cuales Susana tardó aproximadamente tres minutos en organizarlos. De manera espontánea, la estudiante representó estos nuevos casos particulares (5 y 10), así como otros previos a los números preguntados, tal como se observa en la Figura 5.

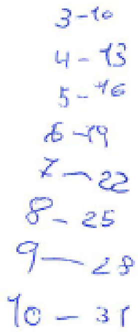


Figura 5. Organización de casos particulares de Susana

Susana organizó los casos particulares en dos columnas. En la columna de la izquierda, ubicó el número de paradas y en la columna derecha el número de personas en el tren, separando ambas cantidades por un guión (–). Al explicar su procedimiento, la estudiante señaló que "siempre va sumando tres". La estudiante evidenció recurrencia en el cálculo de los casos particulares, al determinar la cantidad de pasajeros en una determinada parada.

Identificación de estructuras

Tras la organización de casos particulares mostrada anteriormente, las siguientes preguntas involucraron casos particulares mayores que 100. En el siguiente extracto presentamos la discusión entre la entrevistadora y la alumna al preguntarle por la cantidad de personas en 100 paradas.

31. E: Y ahora imagínate que siguen pasando paradas (…) y llegamos a la parada 100.

32. S: ¡Uy!

33. E: ¿Cómo lo calcularías? [pasajeros que van en el tren]

34. S: Pues no pondría todo esto [indicó los datos organizados de la Figura 5].

35. E: Porque estaríamos aquí la mañana o el día, ¿verdad?

36. S: Sí. Haría 4 por 100 (…). Sí, 4 por 100.

37. E: ¿Por qué?

38. S: Porque en la parada 2 hay 7 personas. Pero en la parada anterior había 4 personas [refiriéndose a la cantidad de pasajeros en la parada 1] (…) entonces, lo multiplico por 100 y me da 400.
39. E: Pero, te voy a preguntar una cosa: ¿aquí también te sirve multiplicar por cuatro? [indicando al caso particular relativo a 10 paradas].
40. S: (…) Me he equivocado. Es por tres.
41. E: ¿Por qué por tres?
42. S: Porque son 3 personas las que se suben.
43. E: Vale. (…) y cuándo llevas 100 paradas, ¿cuántas personas van?
44. S: 300.
45. E: ¿Y ahí van todas las personas? ¿o te falta alguien?
46. S: ¡Elsa! 301 personas [agrega uno a la cantidad final].

En el extracto anterior, la estudiante identificó tres estructuras diferentes: (a) multiplicar por 4 (línea 36), (b) multiplicar por 3 (línea 40) y (c) multiplicar por 3 y sumarle uno 1 (línea 46). En la Figura 6 presentamos la expresión escrita de Susana al determinar la cantidad de personas que van en el tren después de 100 paradas.

Figura 6. Evidencia de la estructura “multiplicar por tres y sumar 1”

En esta respuesta se observa que, después de escribir 3x100=300, Susana incluye el valor constante de la función, resultando 301. De esta forma, la estructura “multiplicar por 3 y sumarle 1” es adecuada al problema. Esta misma estructura, que involucra a las dos variables, la empleó para los casos particulares 200 y 300, así como también para el caso general, tal como describimos en las siguientes secciones (ver líneas 49-54).

Validación de conjeturas

La validación de conjeturas aparece, transversalmente, en el trabajo con diferentes casos particulares. Tres veces la estudiante validó su conjetura: (a) con el caso particular 5 (en un minuto), (b) con el caso particular 10 (menos de un minuto) y (c) con los casos particulares 100, 200 y 300 (casi cuatro minutos). En el extracto anterior, por ejemplo, Susana identificó tres estructuras diferentes. Con las dos estructuras primeras, Susana comprobó con otro caso particular que no eran válidas y modificó su respuesta (líneas 40 y 46). En la validación de la última estructura, multiplicar por tres y sumarle uno (línea 46), se generó el siguiente diálogo.

49. E: (…) ¿Y si son 200 paradas?
50. S: Pues sería lo mismo. Tres por 200, que sería como si fuera un dos [refiriéndose al 200]. Sería seis (…) sería igual a 601 personas (…) [la estudiante escribe la expresión de la Figura 7].

Figura 7. Validación de la conjetura de Susana

51. E: ¿Y si fueran 300 paradas? (…)
52. S: mmmm. ¡901! (…)
53. E: Lo has hecho súper rápido esta vez. ¿Cómo lo has hecho?

54. S: Pues, ya, como tenía esto [refiriéndose a la respuesta anterior]. He pensado tres por tres son nueve, le pongo dos ceros más uno: 901. [La estudiante escribe "300–901"].

En este extracto, Susana validó su conjetura con los casos particulares 200 y 300. En la Figura 7 es posible identificar que Susana expresó numéricamente cómo determinar la cantidad de personas que va en el tren, dadas 200 paradas. Inicialmente registró 600 y después escribió el 1 para formar 601 (línea 50). Por otra parte, en la línea 54 la estudiante solo registró los valores de las variables "300–901".

Generalización

Susana, tras validar su conjetura "multiplicar por tres y sumar uno" con los casos particulares 2, 5, 10, 100, 200 y 300 expresó la regla para el caso general. A continuación, presentamos un extracto.

58. E: Entonces, ¿lo haces todo el rato igual? [refiriéndose a cómo llegó a las respuestas de los casos previos]

59. S: Sí.

60. E: Entonces, para cualquier número de paradas, ¿cómo lo vas a hacer?

61. S: (…) multiplicando ese número por tres más uno.

De manera verbal, la estudiante expresó la regla que relaciona las variables (número de paradas y cantidad de personas) del problema (línea 61). En el siguiente fragmento se observa la introducción de otras posibles representaciones de la generalización.

62. E: (…) Si Z es cualquier número de paradas. ¿Cómo podrías explicar tú, en general, cómo calcular el número de personas?

63. S: Pues multiplicaría ese 3 por este *Z* y le sumaría siempre 1.

64. E: Vale. ¿Y sabrías escribir eso que me acabas de decir?

65. S: Creo que sí [la estudiante escribe las expresiones de la Figura 8].

a.  b. 

Figura 8. Respuestas de Susana usando letras y números

La Figura 8a fue la primera representación que usó la estudiante. En esta expresión, Susana empleó la letra que mencionó la entrevistadora (*Z*) y el número 1. Al pedirle que explique su respuesta, ella señala: "no sé, es que no sé qué es *Z*". A continuación, la entrevistadora le pregunta por otra forma de expresar su idea usando la letra *Z*, por lo que la estudiante escribe lo que aparece en la Figura 8b, y dice "tres mil trescientos treinta y uno", sin entregar detalles sobre la forma de expresar dicha relación.

Finalmente, la entrevistadora preguntó a Susana por la validez de la expresión simbólico-algebraica "*Z* x 3 + 1". En el siguiente extracto presentamos la discusión que se generó entre ambas.

79. E: ¿Te parece que eso puede estar bien? [refiriéndose a la expresión *Z* x 3 + 1].

80. S: Sí (…) Pero tendría que saber qué número es este [refiriéndose a *Z*].

81. E: Claro. Y ya cuando sepamos qué número es ese, ya sabemos el número total.

82. S: Sí.

En este extracto, la estudiante acepta la expresión dada (línea 80) pero tiene la necesidad de otorgar un valor numérico concreto a *Z*. A continuación, Susana espontáneamente coloca el signo igual (=) y encierra la letra Z en un cuadrado con un signo de interrogación, como mostramos en la Figura 9.

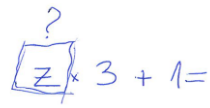


Figura 9. Representación del caso general con simbolismo algebraico

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos una adaptación del modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) para describir el proceso de razonamiento inductivo en general y de la generalización en particular, que sigue una estudiante de cuarto de primaria, al resolver un problema que involucra una función lineal. La adaptación del tercer paso del modelo original (búsqueda y predicción de patrones) a la “identificación de estructuras” nos ha permitido resaltar el rol que tiene la relación entre las variables del problema (número de parada y número de pasajeros). Por otra parte, y tal y como destacan las autoras del modelo, Susana siguió cuatro pasos del citado modelo, en un orden diferente al propuesto. Antecedentes muestran que estudiantes de Educación Infantil mostraron evidencias de tres pasos del modelo de razonamiento: identificación de patrones, validación de conjeturas y generalización (Majón, 2016), a diferencia de los cuatro pasos evidenciados por Susana: la organización de los casos particulares es el elemento que aparece en esta estudiante y que se diferencia con los resultados en contextos de Educación Infantil.

El análisis del tiempo que la estudiante pasa trabajando en cada uno de los pasos del modelo de razonamiento inductivo, así como la organización de la información en el esquema presentado, contribuyen a los trabajos previos de forma novedosa. En particular, incluir el tiempo como un elemento descriptivo nos ha permitido resaltar que hay pasos que se presentaron de manera transversal y simultánea durante la entrevista (organización de casos particulares, identificación de estructuras y validación de conjeturas), logrando identificar en qué momento de la entrevista esto se produjo, así como con el tipo de pregunta que esta situación ocurrió.

Asumir la generalización como un proceso y como un producto nos permite comprender cómo los estudiantes generalizan. Particularmente, logramos describir cómo Susana, de manera natural, organizó los primeros casos particulares, estableciendo una regla recursiva. A medida que fue validando sus conjeturas con otros casos particulares, la estudiante las modificó, quedándose con que “multiplicar por tres y sumar uno” satisface su respuesta a diferentes casos particulares. Susana empleó la estructura incluso al trabajar con una letra: *Z Z Z* 1 (tres veces la letra y luego pone el uno para incluir a Elsa). La estudiante está siendo consistente con la estructura identificada. Posteriormente, Susana aceptó el uso de la letra como una expresión, pero enfatizó que necesitaba conocer su valor, por lo que le otorga un significado de incógnita (Molina, Ambrose y del Río, 2018), escribiendo los signos “?” e “=” (Figura 9).

Susana generalizó la relación entre variables de manera verbal (multiplicando ese número por tres más uno), aunque en los pasos previos del modelo de razonamiento empleó diferentes representaciones (tabular, verbal, simbólico-numérico, simbólico-algebraico). Por otra parte, durante la entrevista, la estudiante fue validando y justificando sus conjeturas, lo que permite resaltar lo que señalan algunos autores: la relación entre la generalización y la justificación es esencial en el aprendizaje matemático (e.g., Strachota, 2015). Las dos ideas anteriores, sobre representaciones y justificación, apuntan a una línea abierta de investigación interesante en la descripción del trabajo de los estudiantes. Somos conscientes de las limitaciones que tiene un estudio de caso, dado lo reducido de la muestra. Destacamos que esto nos ha permitido profundizar en el razonamiento de esta estudiante y abre posibles líneas de trabajo para una muestra mayor.

Notas

[1]Empleamos nombres ficticios para proteger la identidad de los estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; el primer autor es becario de una beca de doctorado otorgada por el Gobierno de Chile a través de CONICYT, folio 72160307-2015.

Referencias

Barrera, V. J., Castro, E. y Cañadas, M. C. (septiembre, 2009). *Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación*. Trabajo presentado en el grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del XIII congreso de la SEIEM. Santander, España: SEIEM.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Majón, M. (2016). *Generalización y razonamiento inductivo de alumnos de Educación Infantil en tareas de patrones numéricos* (Trabajo de Fin de Master). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Ambrose, R. y del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-years-old. The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 261-280). Nueva York, NY: Springer.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (aceptado). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias.*

Ortiz, A. (1998). Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en Educación Primaria. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Eds.), *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 33-55). Pamplona, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press.

Stephens, A., Blanton, M. L., Knuth, E., Isler, I. y Murphy-Gardiner, A. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA: NCTM.

Strachota, S. (2015). Conceptualizing generalization. *IMVI Open Mathematical Education Notes*, 6, 41-55.

ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN POR UN ESTUDIANTE CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

Errors in the resolution of division problems by a student with autism spectrum disorder

Polo-Blanco, I.[a], Bruno, A.[b], y González-López, M. J.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna

Resumen

Se presenta un estudio de caso de un estudiante con Trastorno del Espectro Autista en torno al aprendizaje inicial de la división a través de una instrucción apoyada en la resolución de problemas de división por reparto. Se han considerado problemas en dos formatos, con material concreto y con representación gráfica, con los que el estudiante ha ido desarrollando los primeros significados informales del concepto de división por reparto. El estudiante ha mostrado dificultades diferentes a lo largo del proceso de instrucción según el formato de los problemas. Se analizan y categorizan los errores que ha manifestado asociados a los significados de esta operación (partición, equidad y representatividad) y la manera en que los ha ido superando con la ayuda de instrucción en estrategias de reparto.

Palabras clave: *división, reparto, errores, Trastorno del Espectro Autista*.

Abstract

A case study of a student with Autism Spectrum Disorder is presented that addresses the initial learning of division through problems of partitive division. These problems have been introduced in two formats: with material and graphic representation, by means of which the student has developed the first informal meanings of the concept of partitive division. The student has shown different difficulties throughout the instructional process depending on the format of the problems. The errors that he has displayed associated with the meanings of this operation (partition, equity and representativeness) are analyzed and categorized, as well as the way in which they have been overcome with the help of instruction on sharing strategies.

Keywords: *division, sharing, errors, Autism Spectrum Disorder*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha crecido el interés en estudiar el rendimiento académico de estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA), muchos de los cuales siguen un programa educativo regular, integrados en centros ordinarios, con o sin orientación adicional (Whitby y Mancil, 2009). A pesar de ello, los estudiantes con TEA son poco propensos a continuar sus estudios más allá de la secundaria (Gelbar, Shefcyk, y Reichow, 2015) debido a dificultades en su aprendizaje.

Entre las materias escolares, las matemáticas son uno de los grandes obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes con TEA y, a menudo, muestran habilidades de cálculo y de resolución de problemas por debajo de la media (Wei, Yu, Shattuck, McCracken, y Blackorby, 2013). Algunos de los rasgos característicos del autismo pueden estar relacionados con estas dificultades. En este sentido, los déficits en funciones ejecutivas (planificar, organizar, atención, controlar impulsos, etc.) pueden dificultar la puesta en marcha de las acciones necesarias para resolver los problemas (Hart y

Polo-Blanco, I., Bruno, A. y González-López, M. J. (2018). Errores en la resolución de problemas de división por un estudiante con Trastorno del Espectro Autista. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 467-476). Gijón: SEIEM.

Cleary, 2015). También, muchos niños con TEA presentan dificultades en la comprensión del significado de las palabras en general, y del vocabulario matemático, en particular (Bae, Chiang y Hickson, 2015; Frith y Snowling, 1983) y esto les afecta en el éxito en problemas de enunciado verbal (Whitby y Mancil 2009). En general, se ha puesto de manifiesto la necesidad de profundizar en la comprensión que los estudiantes con TEA desarrollan sobre diferentes conceptos matemáticos, para posteriormente proporcionar pautas de aprendizaje adaptadas a sus necesidades. La mayoría de los trabajos sobre la resolución de problemas en alumnado TEA se han centrado en la suma y la resta (Cihak y Foust, 2008; Rockwell, Griffin, y Jones, 2011) y son menos los dedicados a la multiplicación y división (Levingston, Neef, y Cihon, 2009). El trabajo que se plantea forma parte de una investigación más amplia que quiere contribuir al conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes con TEA en el aprendizaje de la división a través de problemas aritméticos verbales.

MARCO TEÓRICO

Las primeras fases de la enseñanza de las operaciones suelen apoyarse en la resolución de problemas aritméticos verbales, que son enunciados contextualizados que el estudiante debe resolver mediante una operación (Puig y Cerdán, 1988). El mismo proceso se sigue con alumnado con discapacidad. En el caso concreto del alumnado con TEA, las investigaciones sugieren que es necesario enseñar a los estudiantes habilidades metacognitivas que le ayuden en el proceso de resolución de los problemas (leer, comprender, visualizar, dar una hipótesis, estimar, calcular y comprobar) (Whitby, 2012). Otros autores proponen seguir estrategias basadas en el uso de diagramas esquemáticos o ayudas visuales para enseñarles a discriminar entre distintos tipos de problemas y entender el enunciado (Rockwell, y otros, 2011).

Los problemas que se resuelven mediante una multiplicación o una división se han clasificado en problemas de: (1) isomorfismo de medidas (2) comparación y (3) combinación (Vergnaud, 1988). En los problemas de isomorfismo de medidas aparecen tres cantidades en el enunciado, que de manera metafórica podemos expresar como: número de recipientes, número de objetos por recipiente y número total de objetos. Cuando la incógnita del problema es el número de objetos que tiene cada recipiente, el problema se resuelve mediante una división por reparto, por ejemplo, el problema “Juan puso 40 libros en su habitación. Si en la habitación de Juan hay 5 estantes, ¿cuántos libros puso en cada estante?”.

En este trabajo nos centraremos en problemas de división por reparto, y en concreto, en los aspectos semánticos asociados. Esto implica observar el significado de ciertas palabras o expresiones que tienen una influencia decisiva en las acciones necesarias para su resolución. Dichas acciones pueden ser cotidianas para los estudiantes, pero durante la resolución de los problemas han de ser manejadas con un significado matemático muy concreto.
Así, en los enunciados de los problemas típicos de *división por reparto* aparecen verbos asociados a la idea de reparto (por ejemplo, repartir, distribuir, asignar, etc.), frecuentemente acompañados de adjetivos que especifican las características del significado matemático de esta división (por ejemplo, mismo, igual, cada, cada uno).

Según (Correa, Nunes, y Bryant, 1998), el significado de la *división por reparto* incluye las ideas de:

- *partición* de una cantidad en partes (el total se separa en partes disjuntas)
- *equidad* (todas las partes de la partición son iguales)
- *representatividad* de cada parte (una cualquiera es representante de los demás).

Para resolver con éxito un problema de *división por reparto,* y usando de nuevo la analogía con objetos y recipientes, los estudiantes: (1) han de separar la cantidad total de objetos (dividendo) en recipientes (divisor), sin que sobre ni falte ningún objeto; (2) de forma equitativa; (3) e interpretando que cada recipiente es representante de los demás, siendo la cantidad de objetos de dicho recipiente (cociente) la solución a la pregunta planteada en el problema.

Diversos estudios realizados con estudiantes de desarrollo típico sostienen que la acción de reparto que surge de manera natural en estos problemas está en el origen la comprensión de la división como operación (Bryant, 1997; Correa et al., 1998). Se conoce poco sobre la manera en que las personas con TEA afrontan el aprendizaje de la división. Excepción es el trabajo de Levingston et al. (2009) en el que se evalúa un método de enseñanza de problemas de multiplicación y división en dos sujetos, uno de ellos con TEA. Sin embargo, en dicho trabajo no se distingue ni profundiza en el sentido que dan los estudiantes a estos problemas según su estructura de *reparto* o *agrupamiento*, lo que da muestra de la necesidad de profundizar con estudios sobre esta operación.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

El trabajo que se presenta forma parte de un estudio más amplio sobre el aprendizaje inicial de la división de un estudiante con TEA en el que se analizan las estrategias que sigue, las representaciones que utiliza y las dificultades asociadas a los aspectos semánticos antes descritos, durante un proceso de instrucción. En los apartados sucesivos nos centramos en las dificultades, manifestadas en forma de errores que mostró el estudiante al seguir sus primeras estrategias informales. Los objetivos que se plantean en el trabajo que se presenta son:

1. Analizar los tipos de errores que surgen asociados a las nociones de *partición*, *equidad* y *representatividad*.
2. Evaluar la evolución de los errores durante un proceso de instrucción en el que se han utilizado problemas de enunciado verbal, con y sin materiales concretos.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Se ha seguido una metodología de un estudio de caso descriptivo, realizada con un estudiante que presenta TEA, de 11 años y 8 meses de edad en el comienzo del estudio. El estudiante es un varón diagnosticado a la edad de 6 años con TEA por un neuropediatra. En ese momento, según the Battelle Developmental Inventory Screening Test (BDIST) presentaba una edad de 5 años en aspectos cognitivos y de 4 años en aspectos comunicativos. En la actualidad sigue mostrando importantes alteraciones del lenguaje y dificultades en la relación social, principalmente con sus iguales. Presenta un repertorio amplio de conductas estereotipadas y muestra tendencia a conductas repetitivas y obsesión por ciertos temas. Está escolarizado en un centro de educación especial. Presenta un lenguaje funcional con un nivel de comprensión elevado, tanto oral como escrito, y con un amplio vocabulario. Se comunica por medio de frases cortas gramaticalmente correctas. Su capacidad lectora es equiparable a un nivel de tercero de Primaria (8-9 años), lo que le permite leer y entender los enunciados de los problemas, aunque presenta dificultades de comprensión de determinadas palabras.

El estudiante recibe clases ordinarias de las diferentes materias escolares con adaptaciones y, además, apoyo escolar fuera del aula. Los contenidos numéricos que había trabajado antes de la experimentación eran: sumar y restar (no tiene memorizados los hechos numéricos), resolución de problemas de suma y resta (utilizando dibujos y utilizando el formato de los algoritmos tradicionales por columnas); problemas de multiplicación (utilizando dibujos con obtención de los resultados de las multiplicaciones con sumas reiteradas, o con un recuento de objetos sobre los dibujos realizados). También resolvía problemas de *división por agrupamiento* (a través de dibujos). Sin embargo, no era capaz de llegar a una respuesta en los problemas de *división por reparto.* Esta situación nos llevó a centrar la investigación en este último tipo de problemas.

Instrucción

La instrucción se realizó en las clases de apoyo escolar, durante una sesión de trabajo semanal, habitualmente de una hora de duración. Al estudiante se le plantearon entre 2 y 5 problemas en cada sesión, en función del grado de la receptividad y concentración que mostrase en la sesión. Durante tres meses, en 15 sesiones de trabajo se realizaron un total de 50 problemas.

Diferentes investigaciones realizadas con estudiantes con TEA han mostrado los beneficios del uso de materiales manipulativos y visuales para el aprendizaje de las operaciones aritméticas (Cihak y Foust, 2008; Rockwell, et al., 2011). Por otra parte, la utilización de lenguajes aumentativos, como pictogramas, beneficia y facilita la comunicación con las personas con este trastorno (Mirenda, 2003). Esto nos llevó a elaborar un material concreto que al mismo tiempo toma el aspecto de un pictograma, que denominamos “Pictomaterial”. Este material consiste en una cartulina en la que aparecen dibujadas unas casillas rectangulares vacías y unas fichas que deben ser repartidas en dichas casillas; además, aparecen dibujadas unas flechas que representan la acción de repartir (Figura 1). Mediante este material se aporta una ayuda visual y manipulativa para que el estudiante pueda asociar la acción de reparto con la representación de colocar las fichas en las casillas.

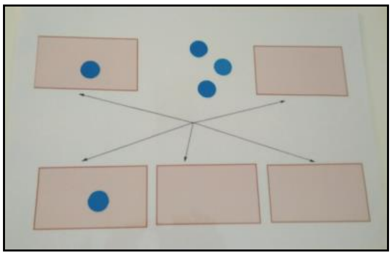


Figura 1. Pictomaterial para la división 5:5

Se diseñaron distintas cartulinas, variando el número de casillas dibujadas, en función del divisor. En los problemas en los que se aportó este material, se proporcionó al estudiante la cartulina correspondiente al divisor del problema y tantas fichas como indicaba el dividendo.

En la instrucción para la enseñanza de la división a través de problemas de *división por reparto* se le plantearon al estudiante problemas mediante un texto escrito y en dos formatos:

1. Con *material concreto* al que alude el enunciado (piruletas y bolsas…) o el pictomaterial.
2. Con *representación del divisor* a través de un dibujo al que aludía el enunciado (Figura 2). Posteriormente, se le daba el texto del problema y se le indicaba a él mismo que realizase el dibujo del divisor.

Tenemos 12 piruletas y las queremos repartir en 3 bolsas. ¿Cuántas piruletas metemos en cada bolsa?

Metemos _______ piruletas en cada bolsa.

Figura 2. Enunciado de un problema con dibujo de representación del divisor

Cada problema se proporcionaba escrito en un folio que contenía el enunciado del problema y una casilla donde el estudiante escribía el resultado final, de modo que nos permitía observar si llegaba a interpretar que el número obtenido era la solución del problema. En la Tabla 1 se muestra la tipología y secuencia de los problemas distribuidos en las 15 sesiones. Se distingue si eran con formato de *materiales concretos* (C) (24 problemas), o *con representación del divisor* (R) (26 problemas).

En el inicio de la instrucción, se explicó y trabajó con el estudiante el método de resolución de los problemas, focalizando la acción de reparto por medio del pictomaterial, el cual fue aceptado de modo natural por el alumno. Posteriormente, el material concreto y el pictomaterial se fueron intercalando con la intención de que el pictograma permitiese al estudiante asociar la idea de reparto con un esquema visual. De esta forma, comenzó a relacionar esta acción con el significado de la palabra "repartir". En las sesiones sucesivas, la tutora siempre dejaba al estudiante resolver por sí mismo cada problema con el fin de observar sus propias estrategias, sin intervenir en ellas. Cuando encontraba dificultades que no podía resolver por sí mismo, la tutora le ofrecía alguna ayuda, bien sugiriéndole el uso de material, bien haciéndole observar que la solución obtenida no era correcta.

Tabla 1. Número y tipos de problemas por sesiones

	Sesiones														
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
Formato															
C	2	3	3	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	1	1
R	-	-	-	1	2	1	2	2	3	3	3	2	2	3	2

Nota. C = Con materiales. R = Con representación del divisor.

Recogida de datos y categorización de las respuestas

La recogida de datos se realizó durante las sesiones descritas. Se recopilaron las respuestas a los problemas que el estudiante realizó por escrito y se grabaron todas las sesiones en video. En algunos problemas, el estudiante hizo varios intentos de resolución y se recogió la información de cada uno de los intentos. Los errores se analizaron situándolos en las siguientes categorías, que se ejemplifican con la división 6:3=2.

1. Errores relacionados con el significado de *partición*: Error 1.1. No separar el total en partes. Se reitera la cantidad total de objetos en cada uno de los recipientes (Figura 3, izquierda); Error 1.2. Repartir más objetos que el total. Se hace un reparto equitativo, pero se coloca en las cajas más objetos de los debidos, en este error puede darse el caso, en ocasiones, de que el alumno utiliza el cociente como divisor (Figura 3, centro); Error 1.3. Repartir menos objetos que el total. Se hace un reparto equitativo sin agotar el total de objetos de que dispone (Figura 3, derecha).

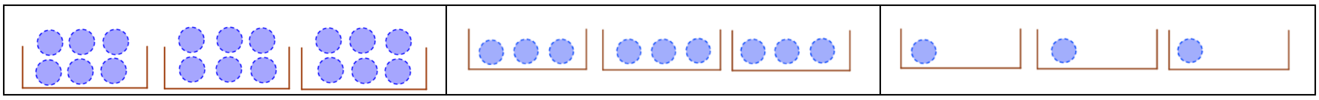


Figura 3. Errores relacionados con el significado de partición: error 1.1. (izquierda), error 1.2. (centro) y error 1.3. (derecha)

2. Errores relacionados con el significado de la *equidad:* Error 2.1. No realizar un reparto equitativo. Se distribuye la cantidad total entre los recipientes de que se dispone, pero los grupos formados no son idénticos (Figura 4).

Figura 4. Error 2.1 relacionado con el significado de la equidad

3. Errores relacionados con el significado de la *representatividad*: Error 3.1: Dejar grupos vacíos. Se hace una partición equitativa del conjunto de objetos dado, pero se ignora uno o varios de los recipientes (Figura 5, izquierda); Error 3.2: Responder la cantidad inicial tras resolución correcta. Se hace una partición equitativa correcta del conjunto de objetos dado,

pero la respuesta final al problema es la cantidad de objetos inicial. Por ejemplo, responde que “hay que poner 6 fichas en cada recipiente” (Figura 5, centro); Error 3.3: Responder el número de grupos tras resolución correcta. Se hace una partición equitativa correcta del conjunto de objetos dado, pero la respuesta final al problema es la cantidad de recipientes. Por ejemplo, responde que “hay que poner 3 fichas en cada recipiente” (Figura 5, derecha).

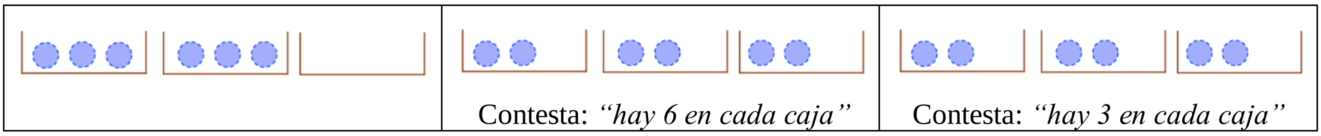


Figura 5: Errores relacionados con el significado de la representatividad: error 3.1. (izquierda), error 3.2. (centro) y error 3.3. (derecha)

RESULTADOS

Se recoge en la Tabla 2 la frecuencia de los distintos errores que mostró el estudiante en algún momento del proceso de resolución de los problemas, asociados a cada uno de los significados (*partición, equidad, representatividad*).

Tabla 2. Frecuencia de errores identificados según las categorías

Errores	Descripción	Significado de	Frecuencia
Error 1.1	No separar el total en partes	*Partición*	5
Error 1.2	Repartir más objetos que el total	*Partición*	3
Error 1.3	Repartir menos objetos que el total	*Partición*	1
Error 2.1	No realizar un reparto equitativo	*Equidad*	4
Error 3.1	Dejar grupos vacíos	*Representatividad*	7
Error 3.2	Responder la cantidad inicial tras resolución correcta	*Representatividad*	5
Error 3.3	Responder el número de grupos tras resolución correcta.	*Representatividad*	1

A continuación, se ejemplifican los errores anteriores con repuestas del estudiante en algunos de los problemas, tanto los planteados con materiales como sin materiales.

Error 1.1: No separar el total en partes

Este error se caracteriza porque el estudiante no separa la cantidad inicial, sino que la repite en cada uno de los grupos a repartir. Está directamente vinculado a la estrategia multiplicativa y se observó exclusivamente en problemas sin material. Sin embargo, en la manifestación de este error se aprecia que prevalece que los grupos sean *equitativos* (significado de mismo) y que no quede ninguno vacío (significado de cada). Un ejemplo se muestra en la Figura 6.

Error 1.2. Repartir más objetos que el total

Este error tiene lugar cuando la cantidad repartida es superior al total (dividendo). En esta ocasión, el sujeto separa el total en partes, pero comienza poniendo una cantidad mayor que el cociente en los vasos (4 objetos en lugar de 3) y, al ver que queda un vaso vacío, dibuja más objetos (Figura 7). Como se observa, el número de objetos que coloca en cada vaso coincide con el divisor. Como en el caso anterior, solamente se ha manifestado en problemas escritos sin material, pues en problemas con material se le proporcionaba la cantidad a repartir exacta.

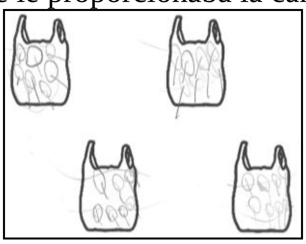


Figura 6. Error 1.1. No separar el total en parte División 8:4s

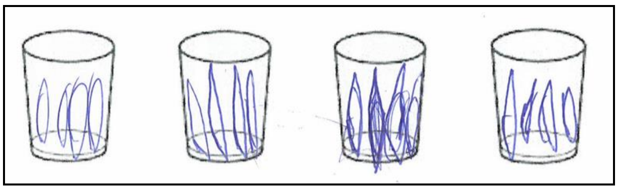


Figura 7. Error 1.2. Distribuir más objetos que el total. División 12:4

Error 1.3. Repartir menos objetos que el total

Este error tiene lugar cuando la cantidad repartida es menor a la total. Ha tenido lugar cuando durante la resolución el reparto se detiene antes de terminar de repartir todos los objetos. Es el caso del ejemplo de la Figura 8, al repartir 18 fichas en 6 cajas con pictomaterial, el estudiante realiza un reparto de dos en dos y se detiene después de repartir 12 fichas, y dio por finalizada la resolución.

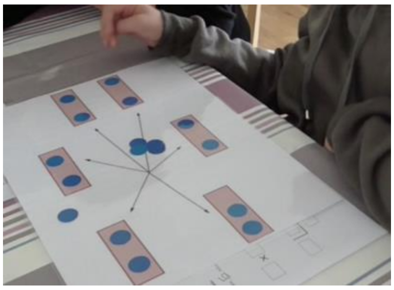


Figura 8: Error 1.3 en la resolución del problema de división 18:6

Error 2.1. No realizar un reparto equitativo

Este error, relacionado con el significado de mismo (*equidad*), se puso de manifiesto solamente en los problemas escritos sin material. En el ejemplo de la Figura 9 el estudiante reparte 15 de forma no equitativa en 5 recipientes.

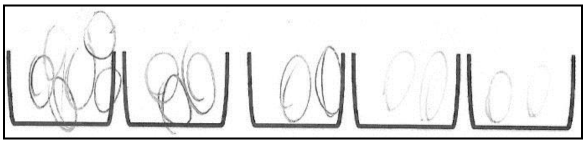


Figura 9: Error 2.1 en la resolución del problema de división 15:5

Error 3.1. Dejar grupos vacíos

Este error está relacionado con el significado de la palabra *cada*. Se manifestó cuando, en situaciones de reparto, quedaban recipientes sin ningún objeto. Este error apareció tanto en contexto con material como sin material (Figura 10).

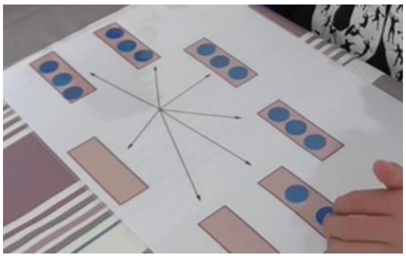


Figura10. Error 3.1 en la resolución del problema de división 14:7

También los errores 3.2 y 3.3 están vinculados a dificultades con el significado de la palabra *cada*.

Error 3.2. Responder la cantidad inicial tras resolución correcta

Este error se caracteriza porque el sujeto, al finalizar la resolución mediante una estrategia exitosa, responde la cantidad total (dividendo), en lugar de responder con el cociente. Se ha manifestado en contextos con material y sin material.

Error 3.3. Responder el número de grupos tras resolución correcta

Este error tiene lugar cuando el sujeto, al finalizar la resolución exitosa, responde el número de grupos (divisor), en lugar del cociente. Solamente se ha observado en la resolución de problemas con material.

En la Tabla 3 se expone cuándo aparecieron los distintos errores durante el proceso de instrucción. Se ha señalado el número de veces que ha aparecido un determinado error indicando, además, si el problema planteado era *con material* o *con representación* gráfica. Así, 1C indica que cometió un error en un problema con material concreto o 3R indica que cometió tres errores en problemas de enunciado con representación gráfica.

Tabla 3. Frecuencia y tipo de errores en cada sesión según formato de los problemas

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	Total
Error 1.1				1R		1R	1R	2R								5
Error 1.2									1R	1R			1R			3
Error 1.3				1C												1
Error 2.1											2R		2R			4
Error 3.1	1C		1C						3R	1R	1R					7
Error 3.2	1C		1C	1C	1C					1R						5
Error 3.3		1C														1

Nota. C = Con materiales. R = Con representación del divisor.

En las tres primeras sesiones de la secuencia se plantearon problemas con material (Tabla 1) y todos los errores están asociados a ignorar la *representatividad* de uno cualquiera de los recipientes como solución al problema. Estos errores pueden deberse a la comprensión del significado de la palabra "cada" (errores 3.1, 3.2 y 3.3). En estos casos, se trabajó en el proceso de instrucción la idea de que "cada" uno de los recipientes era representativo, haciendo hincapié en que "todos" debían de tener objetos y que el número de objetos era la respuesta al problema.

A partir de la sesión 4 se intercalaban problemas con y sin material. Desde la sesión S5 desaparecen los errores en los problemas con materiales, los cuales termina resolviendo con éxito, usando estrategias de reparto uno a uno, y aparecen dificultades en los problemas con representación.

En las sesiones S4 a S8, se repitió el error 1.1 (no separar el dividendo en partes y repetir esa cantidad en cada uno de los grupos). Esto no había surgido en los problemas con materiales porque se le aportaba la cantidad exacta de objetos del dividendo. Sin embargo, en los problemas sin material el estudiante podía dibujar tantos objetos como desease. Interpretamos que prevalece su aprendizaje de la multiplicación y la forma en que abordaba estos problemas con sumas reiteradas.

Entre las sesiones S9 y S13, se le refuerza la idea de repartir la cantidad total, indicándole que dibuje previamente el dividendo y lo reparta en grupos, uniendo con flechas en los recipientes. Esto hace desaparecer el error 1.1, pero surgen dificultades asociadas a la *partición*, como repartir más objetos que el total (error 1.2), no realizar un reparto *equitativo* (error 2.1) o de *representatividad*, dejar recipientes vacíos (error 3.1). Estos errores fueron corrigiéndose fomentado que siguiera una estrategia de reparto uno a uno de los objetos, lo que le permitía seguir un reparto sistemático. Este modo de proceder fue asumido por el estudiante y en las dos últimas sesiones de la instrucción le llevó siempre al éxito.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han mostrado las dificultades que muestra un estudiante con TEA en el inicio del aprendizaje de la división, cuando aún no conoce el algoritmo de la operación y utiliza estrategias informales de resolución de problemas.

Algunos rasgos de las personas con TEA, como sus dificultades de comunicación verbal, hacen complejo obtener información sobre la manera en que se desarrolla su aprendizaje. El proceso de desarrollar su instrucción con una recogida de la información y un análisis de la misma se ha mostrado fundamental debido a los rasgos cognitivos del estudiante. Seguir de cerca su proceso de resolución, observando su comportamiento, sus movimientos y sus gestos, así como analizar los registros escritos y dibujos se ha convertido en una fuente rica de información que nos ha permitido analizar los errores que mostraba y adaptar la instrucción, aportándole estrategias que le llevaran a éxito.

El estudiante no había mostrado dificultades previas especiales en el uso cotidiano de las palabras que aparecen en los enunciados de los problemas de *división por reparto* (repartir, distribuir, asignar, mismo, igual, cada, cada uno,…). Sin embargo, se ha constatado que en situaciones matemáticas no realizaba una interpretación correcta del enunciado, especialmente cuando no contaba con material para representar los objetos indicados en el problema. El estudiante mostró errores asociados a los tres significados de la operación (*partición*, *equidad* y *representatividad*) que fueron cambiando a lo largo de la instrucción hasta desaparecer en el momento en que se finalizó. Observamos que los errores han estado vinculados a los tipos de representaciones que el estudiante ha utilizado. Esta característica también ha sido observada por investigadores que han analizado las estrategias multiplicativas en estudiantes de desarrollo típico (por ejemplo, Ivars y Fernández, 2015).

El pictomaterial resultó una adaptación útil, y el hecho de plantearle problemas con y sin materiales sirvió para evaluar errores diferentes. Los problemas con materiales le llevaron a más errores iniciales relacionados principalmente con la *representatividad* de los recipientes, mientras que los errores de *partición* surgieron en contexto sin material debido a que podía dibujar tantos objetos como quisiera y distribuirlos en grupos. Fue mejorando a raíz de sugerirle la estrategia de reparto uno a uno.

Si bien algunos autores han propuesto modelos de enseñanza de resolución de problemas aditivos para estudiantes con necesidades educativas especiales, prácticamente no hay trabajos que profundicen en la enseñanza de la estructura multiplicativa (Ramos, Castro y Castro-Rodríguez, 2016). Es nuestro propósito seguir profundizando en las ideas planteadas en este trabajo para determinar qué tipo de enunciados e instrucción pueden ayudar a los estudiantes con TEA a desarrollar los significados matemáticos asociados a los problemas de división-por reparto, así como seguir analizando la comprensión de los enunciados que les permitan alcanzar una resolución exitosa con estrategias formales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado bajo la financiación del Proyecto de Investigación “Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores”, Financiado por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (EDU2017-84276-R).

Referencias

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson L. (2015). Mathematical Word Problem Solving Ability of Children with Autism Spectrum Disorder and their Typically Developing Peers. *J Autism Dev Disord*, *45*, 2200-2208.

Cihak, D. F. y Foust, J. L. (2008). Comparing number lines and touch points to teach addition facts to students with autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *23*, 131-137.

Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children’s understanding of division: the relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, *90*, 321-329.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Frith, U. y Snowling, M. (1983). Reading for meaning and reading for sound in autistic and dyslexic children. *British Journal of Developmental Psychology, 1*, 329-342.

Gelbar, N. W. Shefcyk, Q. y Reichow, B. (2015). A comprehensive survey of current and former college students with autism spectrum disorders. *The Yale Journal of Biology and Medicine, 88* (1), 45-68.

Hart, J. E. y Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, *50*(2), 172-185.

Ivars Santacreu, P. y Fernández-Verdú, C. (2015). Evolución de los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.): *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 327-334). Alicante: SEIEM.

Levingston H. B., Neef, N. A. y Cihon, T. M. (2009). The effects of teaching precurrent behaviours on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of Applied Behaviour Analysis*, *42*, 361-367.

Mirenda, P. (2003). Toward Functional Augmentative and Alternative Communication for Students with Autism: Manual Signs, Graphic Symbols, and Voice Output Communication Aids. *Language, Speech, and Hearing Services in Schools*, *34*, 203-216.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Ramos, L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 173-192.

Rockwell, S. B., Griffin, C. C. y Jones, H. A. (2011). Schema-Based Strategy Instruction in Mathematics and the Word Problem-Solving Performance of a Student with Autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *26*, 87-95.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston: NCTM.

Wei, X., Yu, J. W., Shattuck, P., McCracken, M. y Blackorby, J. 2013. Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) participation among college students with an autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *43*, 1539-1546.

Whitby, P. J. S. y Mancil, G. R. (2009). Academic achievement profiles of children with high functioning autism and Asperger syndrome: A review of the literature. *Education and Training in Developmental Disabilities*, *44*, 551-560.

Xin, Y. P. y Jitendra, A. K. (1999). The effects of instruction in solving mathematical word problems for students with learning problems: A meta-analysis. *The Journal of Special Education*, *32*, 40-78.

PERFIL EMOCIONAL DE UNA DOCENTE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Emotional profile of a female teacher in the mathematics class

Ramos Silverio, J.[a] y García-González, M. S.[a]

[a]Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación que tuvo como objetivo identificar el perfil emocional de Karla, una docente de matemáticas de nivel pre universitario. Los resultados del perfil emocional tienen implicaciones para la práctica de Karla, pues gracias a éste, pudimos identificar que las emociones que experimenta en la clase de matemáticas la predisponen a tomar decisiones sobre sus clases de matemáticas.

Palabras clave: *perfil emocional, matemáticas, profesor de matemáticas.*

Abstract

We report the results of an investigation that aimed to identify the emotional profile of Karla, a female pre-university math teacher. The results of the emotional profile have implications for Karla's practice, because thanks to it, we were able to identify that the emotions she experiences in the math class predispose her to make decisions about her math classes.

Keywords: *emotional profile, mathematics, mathematics teacher.*

ANTECEDENTES

Las emociones del profesorado de matemáticas

El creciente interés por el estudio de las emociones del profesor encuentra su importancia en la naturaleza emocional de los contextos educativos que desde hace algunos años ha sido resaltada (Schutz y Pekrun, 2007). Además de que su estudio puede permitir la prevención de consecuencias infortunadas para el profesor, por ejemplo, los casos de estrés, desmotivación y el síndrome de Burnout que cuando se presentan en grados intensos pueden conducir al abandono de la profesión docente (Schutz y Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017).

Desde la Educación Matemática, la investigación sobre emociones de profesores se ha centrado en profesores en servicio y en formación, de niveles básico. Algunos de los resultados de estas indagaciones apuntan a que las emociones tienen una alta influencia en el significado que los docentes se forman respecto a la enseñanza de las matemáticas, así como en los métodos de enseñanza implementados (Di Martino y Sabena, 2011; Bekdemir, 2010). También se ha reportado que algunos profesores padecen emociones negativas, como el estrés, la congoja, o la ansiedad matemática, por no dominar los contenidos del currículum de matemáticas, afectando sobremanera su labor docente (Bekdemir, 2010).

En el contexto mexicano, la investigación de Autor (2016) explora las emociones de profesores de matemáticas de nivel preuniversitario. Entre sus resultados se señala que las emociones que experimenta el profesor se desencadenan en función de tres metas: 1) ‘que los estudiantes aprendan’, 2) ‘que los estudiantes se interesen en la clase’ y 3) ‘que los estudiantes participen en la clase’. Si estas metas se cumplen, las emociones que experimentan los docentes son positivas, en caso contrario, si las metas no son alcanzadas, los docentes experimentan emociones negativas. La

Ramos-Silverio, J. y García-González, M. S. (2018). Perfil emocional de una docente en clase de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 477-484). Gijón: SEIEM.

Tabla 1, muestra los 14 tipos de emociones encontradas por estos autores y las situaciones desencadenantes.

Tabla 1. Emociones de profesores mexicanos (Autor, 2016)

Emociones	Situaciones desencadenantes
Quejoso por	Percepción de que los estudiantes no aprenden Poco interés de los estudiantes
Feliz por	Percepción de que los estudiantes aprenden
Resentido por	Los estudiantes no aprenden
	Deserción escolar por falta de recursos
	Reprobación
Reproche	El estudiante culpa al profesor por no aprender
Congoja	El estudiante no se esfuerza por aprender
Júbilo	El estudiante disfruta la clase
Agrado	Uso de recursos novedosos en la clase Tecnología, dinámicas nuevas
Ira	Falta de interés de los estudiantes por aprender en la clase
Orgullo	Contribuir a la formación de los estudiantes
	Reconocimiento a su labor docente por parte de otros
Gratitud	Los alumnos se ayudan entre ellos
Decepción	Los estudiantes no aprende al mismo ritmo
Remordimiento	El mismo maestro no entiende lo que va a enseñar
Gratificación	Los alumnos están interesados por aprender
Autoreproche	Los estudiantes entienden la explicación de la clase pero no son capaces de hacer la tarea por no entenderla

La revisión de antecedentes nos ha permitido identificar desde la Educación Matemática, que las investigaciones realizadas hasta el momento solamente evidencian las emociones que experimenta el profesorado de matemáticas, pero poco se ha hecho sobre la regulación de ellas en favor de la mejora de la práctica docente (Hannula, Liljedahl, Kaasila, y Rösken, 2007). De acuerdo con Hodgen y Askew (2007) el proceso de llegar a ser un buen maestro de matemáticas puede ser un proceso difícil y en ocasiones doloroso emocionalmente, por ello sugieren implementar estrategias para aliviar o superar las emociones negativas del docente de matemáticas.

Por nuestra parte, pretendemos atender el llamado de Hodgen y Askew (2007) mediante el diseño de estrategias para regular las emociones negativas de profesores de matemáticas, para ello se hace necesario primero identificar casos de profesores cuyas emociones negativas tengan una alta influencia en su práctica docente, una vez identificados los casos seguiría el diseño e implementación de estrategias para lograr la regulación emocional. La presente investigación persigue la primera de estas actividades, esto es, identificar las emociones negativas y su impacto en la práctica docente. La pregunta de investigación planteada fue ¿qué emociones negativas manifiesta el profesor de matemáticas y qué influencia tienen en su práctica docente?, y para responderla nos valemos de un estudio de caso.

MARCO CONCEPTUAL

El perfil emocional

Basados en Davidson y Begley (2012), definimos el perfil emocional del profesor de matemáticas como la información sobre las emociones que experimenta durante la clase, con la intención de comprender su comportamiento y su toma de decisiones. Particularmente nos centraremos en las emociones negativas, por ser las de interés para el estudio.

En estos estudios concebimos las emociones desde la postura de las teorías de la valoración, que proponen que las personas experimentamos emociones de acuerdo con nuestras evaluaciones de la situación específica que desencadena la emoción. Particularmente nos ceñimos a la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (llamada teoría OCC, Ortony, Clore y Collins, 1996), por dos razones; la primera de ellas es que algunas investigaciones precedentes en Educación Matemática (García-González-Martínez-Sierra 2016, Di Martino, Coppola, Mollo, Pacelli, y Sabena, 2013 y DiMartino y Zan, 2011) han mostrado su potencial para conocer las emociones de estudiantes y profesores de matemáticas, así como para identificar las emociones que las desencadenan. La segunda de las razones es que esta teoría nos indica el tipo de datos a recolectar y una tipología de emociones para analizarlos.

La teoría OCC usa como evidencia de las emociones al lenguaje, siendo este un método para acceder al conocimiento de las emociones de quien las experimenta e ignora por completo la evidencia conductual y fisiológica. Aunque se tiene en cuenta la evidencia lingüística, el análisis de las emociones no es acerca de las palabras que se refieren a emociones, sino de las situaciones que las desencadenan. Este hecho obedece a que en el lenguaje cotidiano existen varias palabras que pueden ser usadas para referirse a diferentes aspectos del mismo tipo de emoción. Por ejemplo, la palabra congoja hace referencia a un miedo moderado mientras que la palabra pánico da evidencia de un nivel intenso de miedo, pero en definitiva las dos se refieren al mismo tipo de emoción, el miedo.

Con base en las consideraciones anteriores, desde la OCC las emociones se definen como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony, Clore y Collins, 1996, p. 33). De esta manera entendemos las emociones como las reacciones de valencia ante situaciones generadas en el aula de matemáticas. Ejemplo de ellas son la satisfacción o el miedo, entre otras. Esta teoría presenta una tipología de 22 emociones, que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipología de emociones desde la OCC (Ortony, et al., 996)

Clase	Grupo	Tipos (*ejemplo de nombre*)
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*)
		Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*)
		Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*)
		Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)
	Basadas en previsiones	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*)
		Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*)
		Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*)
		Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*)
		Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*)
		Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (*temores confirmados*)
	Bienestar	Contento por un acontecimiento deseable (*júbilo*)
		Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*)

Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*) Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*autoreproche*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*)
Reacciones ante los objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	Bienestar/Atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*gratitud*) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*ira*) Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*complacencia*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (*remordimiento*)

METODOLOGÍA

Contexto y participante

Para desarrollar la investigación nos valemos de un estudio de caso (Stake, 1995), la razón obedece a nuestro interés por el carácter representativo del caso concreto, y no su generalización. Se trata de Karla (seudónimo que le hemos asignado), una profesora de matemáticas de 30 años de edad, cuya formación es la licenciatura en matemáticas y computación. Se ha desempeñado como docente en el nivel pre-universitario durante 4 años.

La elección de Karla como informante se basó en que el primer autor de este escrito la conoció en el marco de un programa de Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Al iniciar su relación como compañeros, se percató que, en ocasiones, en su discurso manifestaba incomodidad al hablar de las clases de matemáticas en su escuela. Al detectar esta situación, se le comunicaron las pretensiones de la investigación, ella decidió participar además de estar de acuerdo en que la información que brindara iba a ser difundida con fines de investigativos.

Recolección de datos

Como herramienta de recolección de datos utilizamos la entrevista, el protocolo de preguntas (Tabla 3) realizadas se retomó de la investigación de Autor (2016), en dónde quedó evidenciado que estas preguntas verdaderamente permiten conocer las emociones de los docentes de matemáticas, así como las situaciones que las desencadenan, pues su formulación está basada en la teoría OCC.

Tabla 3. Preguntas de la entrevista Autor (2016)

Protocolo de entrevistas
1. ¿Qué emociones o sentimientos experimentas en la clase de matemáticas?
2. ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que has tenido como docente de matemáticas?
3. ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que has tenido como docente de matemáticas?
4. ¿En qué circunstancias y situaciones haz experimentado felicidad o alegría como docente de matemáticas?
5. ¿En qué circunstancias o situaciones has experimentada tristeza o pesar como docente de matemáticas?

El primer autor de este escrito realizó la entrevista a Karla, la entrevista fue videograbada y se transcribió completamente para su posterior análisis.

Análisis de datos

Para identificar las emociones de Karla y las situaciones que las desencadenaron, se procedió a identificar en su discurso las definiciones de los tipos de emociones señaladas por la OCC (Tabla 2). Una vez identificadas, procedimos a identificar la influencia que ellas tenían para su práctica docente. De esta manera identificamos 3 tipos de emociones negativas, la congoja, el reproche y el auto-reproche, y 2 positivas, el júbilo y el orgullo. Enseguida las ejemplificadas con extractos de la entrevista, resaltamos en cursivas las palabras emocionales y en negritas las situaciones desencadenantes.

Júbilo

Esta emoción se define como: "contento por un acontecimiento deseable". En el caso de Karla, estar frente a grupo, y enseñar son acontecimientos deseables que cuando los realiza desencadenan en ella sentirse contenta.

> Karla: Me siento *feliz* al **poder compartir los conocimientos** que tengo con los alumnos, por qué sé que se llevan algo de mí, me siento *bien*, me siento *satisfecha*.

> Karla: Me *gusta* mucho **estar frente a grupo**, me *gusta* mucho **enseñar lo que sé**, compartirlo, me siento *feliz, satisfecha* al hacerlo.

Orgullo

Esta emoción se encuentra relacionada con la relación ante los agentes, los agentes se refieren a personas, que se vuelven desencadenantes de las emociones que podemos experimentar. El orgullo, es una emoción particularmente desencadenada por nuestras propias acciones, y se define como "aprobación plausible de uno mismo". Karla encuentra plausible el hecho de que pueda ayudar a los estudiantes a resolver sus dudas dentro o fuera del salón de clases, ella se considera un ejemplo para los estudiantes cuando lo hace, de ahí que esta acción la haga sentirse orgullosa.

> Karla: También *es bonito* como docente ver que tus alumnos se te acercan para preguntarte dentro y fuera del salón de clases, **cuando se acercan para que los saques de una duda de tu materia o de otra materia**, para ellos eres un ejemplo, alguien en quien confían para llegar a ese grado de acercarse y preguntarte de alguna materia que no entienden, eso para mí es *agradable*.

Autoreproche

Esta emoción se encuentra relacionada con la presencia de agentes, y se define como "desaprobación de una acción censurable de uno mismo". Karla se considera responsable de que sus estudiantes no entiendan lo que les explica, se asume culpable de la situación y se siente triste por ello.

> Karla: Me siento *triste* cuando veo que **no le entienden a lo que explico durante la clase**, siento un poquito de *culpabilidad* hacia a mí. **Por mi culpa no entienden**, por no entender bien el tema, no lo explico bien y eso me hace sentir *triste*.

Reproche

El reproche se define como "desaprobación de una acción censurable de otro". Karla experimenta reproche por los alumnos que no prestan atención en clase, desaprueba su comportamiento y les recrimina que no les interese que ella está esforzándose por explicarles.

> Karla: **Cuando veo que en la clase no ponen interés**, no ponen atención, me siento *molesta*, me da *coraje*, porque yo estoy explicando, estoy dando lo mejor que puedo y a ellos no les importa, tampoco les importan sus compañeros que están poniendo atención. Es una distracción para

los que ponen atención y para mi estar tratando de meterlos, de incluirlos en la clase, en verdad es molesto.

Congoja

Esta emoción se define como "descontento por acontecimiento indeseado".

Karla: **Al momento de evaluar** me siento un poquito *triste* porque **muchos de los estudiantes no reúnen la cantidad de puntos aprobatorios**, me siento triste porque no me gustaría estar en su lugar, no me gustaría mandarlos a extra [examen], y es que como alumnos se *siente feo* saber que estás en la cuerda floja, saber que vas a reprobar… y eso es lo que me gustaría evitar, para que no se vayan a un examen extraordinario.

Karla: **Cuando los estudiantes no me entienden**, siento *impotencia*, incapacidad, **impotencia por no saber qué hacer**, qué aplicar, alguna estrategia quizá para que ellos puedan comprender lo que yo les estoy explicando y se las haga un poquito más fácil la clase.

RESULTADOS

En la Figura 1, se muestra el perfil emocional de Karla de manera esquemática.

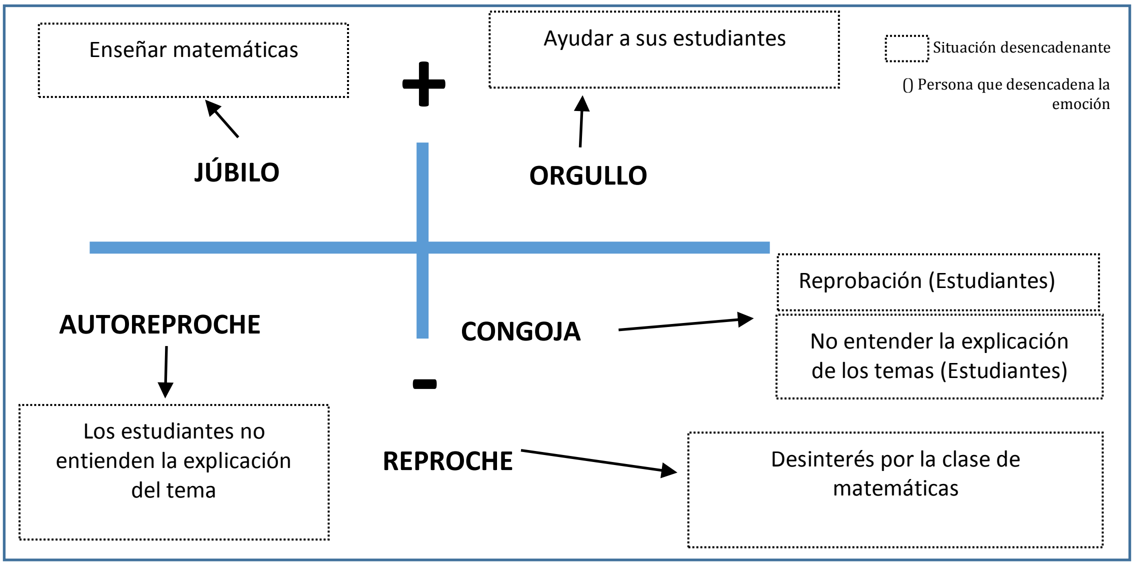


Figura 1. Perfil emocional de Karla

En la figura anterior, se muestran las emociones experimentadas por Karla durante la enseñanza de las matemáticas, además de las situaciones y personas que las desencadenan. Como puede observarse, Karla es la principal responsable de las emociones positivas que experimenta, pues enseñar y ayudar a aclarar dudas a sus estudiantes son actividades placenteras para ella. Respecto a sus emociones negativas, además de ella, los estudiantes también son agentes que propician este tipo de emociones. Cuando los estudiantes no entienden la explicación de un tema ella se siente responsable y experimenta el autoreproche, además de sentirse acongojada por no ser capaz de lograr que sus alumnos entiendan. Sin embargo, cuando son los alumnos quienes muestran desinterés por la clase, Karla ve a sus estudiantes como los principales responsables y experimenta reproche hacia ellos.

Respecto a la influencia de las emociones negativas en su práctica docente, de la entrevista identificamos que cuando Karla experimenta congoja y autoreproche porque sus estudiantes no entienden los temas, no se siente con ánimos de darles clase al otro día. En ocasiones hace realidad este deseo, y busca algún pretexto para no impartirles clase; por ejemplo, se reporta enferma, aunque no lo esté, o da el consentimiento para que ese grupo realice una actividad extraescolar en el horario a su cargo. Cuando no logra justificar su ausencia en la escuela, toma la decisión de entrar

15 o hasta 20 minutos después de la hora en que inicia su clase, con el fin de pasar el menor tiempo posible con su grupo, además de que tampoco tiene motivación para preparar su clase.

CONCLUSIONES

En ocasiones, llegar a ser un buen profesor de matemáticas puede ser un proceso difícil y doloroso emocionalmente, por ello investigadores como Hodgen y Askew (2007) sugieren implementar estrategias para regular las emociones negativas del docente de matemáticas, sin embargo, desde la Educación Matemática son pocas las investigaciones realizadas hasta el momento que atiendan este llamado. La literatura señala que el primer paso para regular las emociones es conocerse emocionalmente, de acuerdo con Gaxiola (2005) los resultados de conocerse emocionalmente facilitan la toma de decisiones para actuar, permiten detectar el camino correcto que se desea seguir; y nos prepara para comprender lo que les pasa a otros. La investigación presentada en este escrito pretendió este primer paso a la regulación emocional, mediante un estudio de caso elaboramos el perfil emocional de Karla, una docente de matemáticas de nivel pre-universitario.

El perfil emocional que hemos elaborado de Karla, nos acerca a su conocimiento emocional (Autor, 2017), y nos ha servido para entender la manera en que sus emociones negativas afectan su práctica docente. Como resultados encontramos que cuando los estudiantes de Karla no entienden los temas que explica en clase, ella se culpabiliza de la situación, experimentando el auto reproche, además de acongojarse por no ser capaz de que ellos entiendan los temas, ante esta última situación Karla siente deseos de no volver a estar con ellos en las siguiente clase, en ocasiones hace realidad este deseo evadiendo su encuentro con el grupo, para Karla la evasión es una estrategia momentánea para no sentirse nuevamente agobiada. Consideramos que evadir momentáneamente al grupo no es la mejor estrategia para que Karla se sienta mejor, por ello como prospectiva de investigación pretendemos realizar con Karla un acompañamiento cuyo objetivo es lograr la regulación de sus emociones negativas.

Referencias

Anttila, H., K. Pyhältö, T. Soini, y P. Pietarinen. 2016. “How Does It Feel to Become a Teacher? Emotions in Teacher Education.” *Social Psychology of Education*, *19*(3), 451-473.

Autor. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics clases. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234-250. doi: 10.1080/14794802.2014.895676

Autor. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

Autor. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH* 8 (2017-2018), 133-148.

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers’ mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328. doi: 10.1007/s10649-010-9260-7

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers’ affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*(3-4), 101-118.

Davidson, J. y Begley, S. (2012). *El perfil emocional de tu cerebro*. Madrid: Ed. Destino.

Di Martino, P. y Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers’ emotions: shadows from the past to the future. En K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI*, Tallinn University, 89-105.

Gaxiola, P. (2005). *La inteligencia emocional en el aula*. Segunda edición. Aula nueva. México: SM.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R. y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. P. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153-156). Seoul, Korea.

Hodgen, J. y Askew, M. (2007). Emotion, identity and teacher learning: becoming a primary mathematics teacher. *Oxford Review of Education*, *33*(4), 469-487. doi: 10.1080/03054980701451090

Ortony, A., Clore, G. L. y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Rodríguez, J., Guevara, A. y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *7*(14), 45-67.

Schutz, P. y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz y M. Zembylas (Eds.), A*dvances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

Schutz, P. y Pekrun, R. (2007). *Emotion in education*. Boston, MA: 1100 Academic Press.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, California, Estados Unidos: Sage.

EMERGENCIA DE ALGUNOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS DURANTE LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ESPACIAL

Emergency of some geometric knowledge during the solution of a spatial problem

Rojas, C.[a] y Sierra, T.[a]

[a]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este estudio se presentan los primeros resultados de una investigación empírica en la que se ha implementado un dispositivo didáctico, para someter a prueba la hipótesis sobre la emergencia de algunos conocimientos geométricos en la búsqueda de solución de un tipo de problema espacial. El problema espacial abordado ha consistido en el análisis, diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro. El análisis de algunos de los diálogos que se presentaron en la resolución de una de las tareas que formaron parte de dicho problema, ha permitido, además de evidenciar de manera explícita la emergencia de algunos conocimientos geométricos, identificar algunas dificultades en la elaboración de las técnicas que se usaron para llevar a cabo dichas tareas.

Palabras clave: *problemas espaciales, conocimientos geométricos, recorrido de estudio e investigación.*

Abstract

In this study we present the first results of an empirical research in which didactic device has been implemented, in order to test the hypothesis about the emergency of some geometric knowledge in the search of a solution of a spatial problem type. The addressed spatial problem has consisted in the analysis, design and construction of a container with one liter of capacity. The analysis of some of the dialogues that were presented in the resolution of one of the tasks that were part of this problem, has allowed us, in addition to explicitly evidence the emergence of some geometric knowledge, identify some difficulties in the development of techniques that were used to carry out those tasks.

Keywords: *spatial problems, geometric knowledge, study and research course.*

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En estudios previos (Gascón, 2003, 2004), a partir del análisis de las limitaciones que impone la estructura curricular a la acción educativa del profesor, se ha planteado una discusión teórica que establece una relación de causalidad entre las restricciones que impone dicha estructura –determinada a su vez por ciertas esferas de la sociedad– y el encierro temático al que se enfrenta el profesor en su labor. Dicho encierro, hace referencia a la nula injerencia que tiene el profesor sobre la organización del currículo, pues se ha convertido en un *administrador* de los temas que allí se plantean para ser enseñados. Esta situación contribuye a que se produzca una pérdida de la *razón de ser* de algunos de los saberes que se abordan en la escuela, entre ellos, el de algunos de los conocimientos geométricos enseñados la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Recientemente, en una de las investigaciones que se vienen desarrollando en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), también se ha encontrado que en el ámbito de la enseñanza de la geometría en la ESO, no están presentes las cuestiones a las que responde o debería responder

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

dicho saber escolar. La necesidad de atender esta problemática, surgió tras analizar el currículo de matemáticas y algunos de los libros de texto de la ESO (Rojas y Sierra, 2017). En dicho análisis, se encontró –entre otros– que los tipos de tareas propuestos en los libros de texto se justifican con las técnicas diseñadas para tal fin, y viceversa. Esto tiene relación, por una parte, con el carácter justificativo circular que se produce entre el tipo de tareas y la técnica propuesta para resolverlas y, por otra parte, con el aislamiento escolar de las técnicas.

En dicha investigación, se ha encontrado que una vía para recuperar alguna de las razones de ser de la geometría elemental puede surgir de la identificación, planteamiento y resolución de algunos problemas espaciales (Rojas y Sierra, 2018). Problemas para los cuales no se preestablecen técnicas que remitan ni a una única vía de solución, ni a un único conocimiento geométrico. Por tanto, en el proceso de búsqueda de posibles soluciones, pueden emerger diferentes técnicas igualmente útiles, que involucran varios de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO. De ahí que, la presencia de estos saberes pueda aparecer de manera justificada e interconectada, consolidando o generando los conocimientos geométricos.

Con base en lo anteriormente expuesto, hemos decidido hacer frente al problema de investigación que explicitamos así:

Actualmente, en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes, se proponen una serie de saberes geométricos a enseñar, sin que aparezcan las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.

En correspondencia con este problema, hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas (OMD) en torno a la geometría elemental de la ESO pueden plantearse de modo que los alumnos puedan encontrar en ellas una posible razón de ser de dichos conocimientos?

Cuando hacemos alusión a los saberes, nos estamos refiriendo a un tipo de conocimiento que ha sido construido, validado e institucionalizado, en diferentes momentos de la historia humana. Es el tipo de saber al que Chevallard (1997) se refiere como, saber sabio. Varios de estos saberes, llamados *saberes a enseñar*, son los que aparecen propuestos en el currículo escolar. Dichos saberes para llegar a ser enseñados por el profesor y aprendidos por los alumnos deben ser transformados, es decir, deben ser reconstruidos para ser enseñados y aprendidos en la institución escolar. Es justamente en dicha reconstrucción de los saberes, donde aparecen los fenómenos de transposición didáctica. Uno de ellos es el fenómeno de la *pérdida de la razón de ser* de la geometría elemental presente en el currículo de la ESO, que pretendemos estudiar en esta investigación.

La atención a dicho fenómeno nos ha conducido a la necesidad de elaborar e implementar un recorrido de estudio e investigación (REI), que trata sobre el *diseño, análisis, y construcción de un envase*. Es justamente a partir de los resultados de la implementación de este dispositivo didáctico (i.e., el REI) con estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria en Getafe (España) que presentamos y discutimos la emergencia de algunos conocimientos geométricos, así como las limitaciones observadas durante su uso. En este trabajo solo presentaremos el análisis de una de las fases de la construcción de un envase con forma de tetraedro regular y, más concretamente, solo nos centraremos en el análisis de la génesis y desarrollo de las técnicas matemáticas utilizadas para trazar un triángulo equilátero.

Antes de continuar, presentaremos las características generales de varias nociones que intervienen en esta investigación, y que son determinantes para su discusión.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se sustenta en dos grandes fuentes documentales. La primera, ofrecida por la TAD, sobre el modelo de organización matemática a estudiar, y el de organización didáctica para estudiarla. La segunda, sobre los diferentes estudios que han abordado y mostrado la interrelación existente entre problemas espaciales y conocimientos geométricos.

Sobre la teoría antropológica de lo didáctico

Dentro de la TAD, el conocimiento matemático es concebido en estructuras cuya unidad mínima es la organización o praxeología matemática (OM). Estas estructuras se componen de:

> *[…] tipos de tareas, T*; *técnicas*, τ; *tecnologías*, θ; y *teorías*, Θ. […] Las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o "saber-hacer" formado por los tipos de tareas y las técnicas [T/τ] y por un bloque teórico o "saber" formado por el discurso tecnológico-teórico [θ/Θ] que describe, explica y justifica la práctica. (Bosch et al., 2004, p. 7)

Esta forma de organización del conocimiento matemático, indica que para realizar un tipo de tareas T, es necesario emplear una técnica τ, que permita llevarla a cabo. A su vez, "cada técnica solo permite realizar un pequeño subconjunto de tareas T de la cual es relativa y fracasa en la realización de las tareas restantes de ese tipo" (Fonseca, Pereira, y Casas, 2011, p. 101). Por ejemplo, calcular en un triángulo rectángulo ABC la medida de: (a) cualquiera de sus lados, (b) la altura respecto de la hipotenusa, (c) cualquiera de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa, o de (d) cualquiera de sus ángulos agudos, podrían ser consideradas – respectivamente – como tareas t_1, t_2, t_3, y t_4, que forman parte de un tipo de tareas geométricas T habitual en la escuela secundaria, consistente en determinar y construir un triángulo rectángulo.

Si revisamos las técnicas, que suelen apoyar la realización de t_1, t_2, t_3, y t_4, veremos como una sola técnica, no es suficiente para resolver todas ellas. De hecho, basándonos en la observación de la manera en que está concebido T en la escuela, podríamos decir que existe una única técnica τ_n, para dar respuesta a cada tarea t_n. Así, por ejemplo, las relaciones expresadas mediante: (a) el teorema de Pitágoras, (b) el teorema de la altura, (c) el teorema del cateto, y (d) las razones trigonométricas, aparecen como elementos que permiten elaborar las técnicas τ_1, τ_2, τ_3, y τ_4, preestablecidas para resolver cada tarea. Incluso, en ocasiones es necesario emplear más de una técnica para realizar una tarea.

El problema radica en que, en la escuela secundaria, "el estudio de las organizaciones matemáticas se centra en el bloque práctico-técnico, [por lo que] la incidencia del bloque tecnológico-teórico sobre la actividad matemática que se realiza es muy escasa" (Fonseca et al., 2011, p. 102). Esto significa que no suele presentarse un discurso razonado que describa, explique y justifique la técnica en cada caso.

Sobre los recorridos de estudio e investigación

Dentro de la TAD, la actividad matemática es concebida como una actividad eminentemente de modelización (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011), cuyo propósito es comprender y dar respuesta a cuestiones suficientemente ricas que no pueden responderse de modo inmediato. Por tanto, desde este punto de vista las matemáticas no son concebidas como un fin en sí mismo, sino como una herramienta que permite dar respuesta a cuestiones problemáticas. Así, hacer matemáticas implica modelizar diferentes fenómenos con niveles de complejidad muy variados, para los cuales se ponen en juego un amplio conjunto de conocimientos. Así, "un modelo ideal de proceso de estudio que propone la TAD para el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización es el recorrido de estudio e investigación (REI)" (Rodríquez-Quintana, Hidalgo-Herrero, y Sierra, 2017, p. 422).

Los REI se caracterizan principalmente, porque parten de una *cuestión generatriz* abierta y rica de la que se derivan varias cuestiones, llamadas *cuestiones cruciales* porque ayudan a dar respuesta a la cuestión generatriz del proceso de estudio, donde el conjunto de saberes involucrados en la búsqueda de soluciones no está dado de antemano (*Ibidem*).

La implementación de un REI comporta ciertas restricciones que han sido documentadas previamente (Rodríquez-Quintana, 2005), las cuales tienen que ver con las dinámicas propias de la institución en la que se pretenda implementar, por ejemplo en la escuela secundaria. Restricciones como las que impone la estructura del currículo, que se traducen en: limitados espacios de tiempo para estudiar y profundizar en un problema, la lógica habitual de la enseñanza donde los problemas van acompañados de respuestas preestablecidas, etc. Por tanto, para poder implementar un REI en la escuela, es necesario o hacer un cambio en las dinámicas habituales de enseñanza o buscar espacios extracurriculares.

Sobre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos

En los estudios que parten de la tesis de René Berthelot y Marie-Hélène Salin (Berthelot y Salin, 1992, 2000, Bloch y Salin, 2004, 2005), y otros en donde previamente se ha preguntado por la enseñanza de la geometría (Brousseau, 2000; Gálvez, 1985), ha quedado establecido que existe una importante interrelación entre problemas espaciales y conocimientos geométricos. Este hecho, pone de manifiesto que la manera en que se aborde un problema espacial, puede conducir a que sea necesario acudir a ciertos conocimientos geométricos durante el proceso de búsqueda de su solución.

Hemos acogido en nuestra investigación la definición de problema espacial presentada por Salin (2004), debido al amplio espectro de situaciones que abarca, y por tanto, a la potencial riqueza de conocimientos que podrían incluir estas situaciones durante su abordaje. Según esta autora, los problemas espaciales se caracterizan a nivel general porque “su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones […] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido” (p. 39).

Marie-Hélène Salin advierte sobre la problemática presente en la enseñanza de la geometría, que apunta hacia el hecho de que los problemas geométricos se encuentran “alejados del espacio físico y sus objetos, […] [enfocándose en] un espacio conceptualizado, el de las «figuras-dibujos» trazadas por este individuo [el estudiante], que no hace más que representarlo” (*Ibidem*, p. 40). Esta situación, implica que en la solución de los problemas espaciales primen las soluciones prácticas e inmediatas, alejadas de la conceptualización geométrica; y que, para los problemas geométricos, primen las que refieren a objetos geométricos, más alejados de aplicaciones prácticas que trasciendan la geometría escolar.

La propuesta para superar la brecha entre la geometría y sus aplicaciones prácticas, consiste en abordar los problemas espaciales de manera que se busque superar las soluciones inmediatas poco eficaces, construyendo un modelo que responda al cuestionamiento central que subyace a dicha problemática. Para la elaboración de ese modelo han de surgir los conocimientos geométricos que nos permitirán dar una solución más eficaz a dichos problemas espaciales. Esto es lo que varios autores han denominado *modelización espacio-geométrica* (Berthelot y Salin, 2000; Bloch y Salin, 2004; Salin, 2004, 2005).

En coherencia con la problemática expuesta y el marco teórico en el que nos basamos, hemos elaborado las hipótesis siguientes que queremos someter a prueba:

1. *Los problemas espaciales en Secundaria pueden constituirse como una posible razón de ser de la geometría elemental, es decir, entendiéndola como una actividad de modelización espacio-geométrica.*
2. *En la resolución de problemas espaciales en Secundaria los conocimientos que aparecen están más ligados a una problemática práctica, y habitualmente está ausente la consideración de una problemática de modelización que debería ser la que permite resolver dichos problemas de un modo más adecuado.*
3. *En la resolución de problemas espaciales los estudiantes de Secundaria tienden a emplear técnicas ya enseñadas anteriormente y renuncian a modificarlas, a articularlas y, en definitiva, a construir técnicas nuevas.*

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta el problema al que decidimos atender en esta investigación, las restricciones que impone el currículo escolar al momento de implementar un REI, y la coyuntura que supone la transición del cuarto al quinto año en la Educación Secundaria en España; decidimos hacer una convocatoria abierta a estudiantes de 4º de la ESO y de 1º de bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de Getafe, para formar un grupo de estudio al que llamamos *semillero matemático*, que funcionaría una vez a la semana durante 90 minutos, en horario extraescolar. Catorce estudiantes acudieron tras la convocatoria, 10 de 4º de ESO y 4 de 1º de bachillerato.

Para someter a prueba la hipótesis, diseñamos un REI en torno al análisis, diseño y construcción de un envase. En dicho REI se han planteado cuestiones en torno a tres tipos de tareas para que sean abordadas en grupos de entre 3 y 4 estudiantes. En el primer tipo, se instó a los estudiantes a realizar un primer análisis de la forma, dimensiones y capacidad, de algunos de los recipientes que actualmente se usan comercialmente para envasar leche, zumo, vino y caldo de pollo. En el segundo, se les solicita que diseñen y construyan un envase en cartulina con capacidad de un litro. Y en el tercero, se les invita a que determinen de manera argumentada, cuál debería ser la forma y las dimensiones del mejor envase, de modo que este tenga una capacidad deseada. Por ahora se han llevado a cabo las dos primeras tareas del REI.

La estructura de trabajo que se sigue en el semillero comporta regularmente tres fases: presentación de la tarea por parte del profesor, trabajo grupal, y puesta en común. Las dos últimas fases están a cargo de los estudiantes y el profesor coordina para que ambas fases se lleven a cabo adecuadamente. El profesor, que a la vez es el investigador, pasa por cada grupo preguntando por las ideas, decisiones, procedimientos, etc., que han emergido durante el abordaje de la tarea. Al final, en el momento de la puesta en común, el profesor interviene planteando preguntas con el objetivo de intentar desvelar la mayor cantidad de elementos que pudieron aparecer durante la búsqueda de respuestas. Dado que los alumnos necesitaron más de una sesión para encontrar respuestas a cada tarea, al inicio de la siguiente se ha hecho un recuerdo del trabajo realizado.

Los datos que se han tomado en la investigación, durante el desarrollo del semillero, provienen de la información registrada: (a) de manera audiovisual, (b) en el diario de campo del investigador, y (c) en el cuaderno de los estudiantes donde describen los procedimientos llevados a cabo.

ALGUNOS RESULTADOS PARCIALES

Ahora analizaremos el desarrollo de las técnicas empleadas para trazar un triángulo equilátero, obteniendo algunos resultados que confirman parcialmente alguna de las hipótesis planteadas.

Durante el desarrollo del REI, cuando los alumnos intentaron dar una respuesta a la cuestión que hace referencia al segundo tipo de tareas, se presentó un momento del estudio que puso de relieve, además de la emergencia de algunos de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo de la ESO, la relación entre la limitación de las técnicas empleadas y la manera en que estas suelen presentarse en los manuales de enseñanza de la geometría. Para ilustrar esta situación, presentamos la trascripción de parte del diálogo que tuvo lugar entre tres estudiantes y el profesor.

Descripción de la situación

En la tercera sesión del semillero se propuso a los estudiantes la cuestión relativa al segundo tipo de tareas, que enunciamos así:

Q_2: ¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro?

Durante el estudio de Q_2, los tres integrantes del Grupo 2 optaron por diseñar un recipiente de forma tetraédrica. Por tanto, convinieron en que, para trazar el desarrollo de dicho tetraedro sobre la cartulina, necesitarían primero trazar un triángulo equilátero. En el siguiente diálogo designamos por Ei al estudiante i y por P al profesor.

E1: ¡Profe! Tenemos un pequeño problema.

P: ¿Sí?

E1: El compás solo se alarga veinte centímetros [haciendo referencia a la distancia de punta a punta], y nos faltan cuatro [sonriendo]

E2: nos falta cuatro, cero con cuatro.

P: […] ¿Por qué necesitan el compás?

E1: para hacer un triángulo […]

E2: para trazar el punto donde se van a unir ambos lados que salen […] de la base del triángulo.

Para la realización del tipo de tareas T_2: “Diseñar un recipiente con forma de tetraedro”, emergió un subtipo de tareas T_{21}, que consistía en trazar un triángulo equilátero sabiendo la cantidad de longitud de uno de sus lados. Ahora bien, para llevar a cabo la tarea concreta del tipo T_{21}, los estudiantes pretendían aplicar la técnica τ_{211}, consistente en, una vez trazado uno de los lados con una regla, trazar dos arcos que se interceptasen, para así ubicar el tercer vértice del triángulo en el punto de corte de ambos arcos. Dichos arcos se deben trazar conservando la misma amplitud del compás mientras se hace centro en cada uno de los extremos del lado del triángulo que tenemos.

Ante la dificultad presentada, los estudiantes pensaron en utilizar el cable de los auriculares de un teléfono móvil. Pero todos estuvieron de acuerdo en que el trazado de los arcos con el cable de los auriculares podría conducir a imprecisiones, y entonces el profesor preguntó si había otra manera de trazar el triángulo.

P: Si conociéramos este ángulo, y conociéramos este ángulo [señalando los ángulos contiguos al lado trazado del triángulo equilátero], podríamos conocer este ángulo [señalando el tercer ángulo]

E2: Mediante una razón trigonométrica…

E1: ¡No!, […] No se puede [enfatizando con el movimiento de la cabeza]. Las razones trigonométricas son para tangente, seno, coseno […]

P: Sí […], pero… ¿Para qué sirven?

E1: Cuando tienes […] la arista, pero tienes que tener un ángulo de noventa grados… y eso, ¡no! [Indicando que, en esta configuración, no era así]

E2: Claro.

Como E1 propuso que para el uso de las razones trigonométricas era necesario tener un ángulo de noventa grados, entonces, el profesor sugirió a los estudiantes que consideraran la altura del triángulo equilátero con respecto al lado que tenían trazado.

E1: […] La altura sería de veinte coma cuatro, y la arista debe ser más [refiriéndose a uno de los lados del triángulo equilátero, que ahora funge como hipotenusa]

P: ¿[…] Veinte coma cuatro?

E1: Sí. Y pues, podrías hallar la arista, y así hallar el ángulo.

E2: ¿En un ángulo… en un triángulo equilátero también…? [Haciendo referencia al uso de las razones trigonométricas]

P: ¿De dónde obtuviste ese veinte coma cuatro? [El estudiante estaba asumiendo que la medida de la altura del triángulo equilátero era igual a la del lado]

E2: Creo… no sé.

E1: Porque… como… ¡ah, no!

E2: ¡No, no, no! Ese no tiene nada que ver.

E2: ¡Pero lo podemos averiguar!

P: Pero, ¿qué ángulo debería ser este […]? [Señalando uno de los ángulos determinados por la altura del triángulo equilátero, sobre el lado trazado]

E1: Rec… noventa.

De este modo, emergió la técnica τ_{212}, que podríamos llamar trigonométrica, que relaciona los lados del triángulo rectángulo con sus ángulos internos. Esto, porque la altura del triángulo equilátero determina dos triángulos rectángulos, posibilitando así el empleo de las razones trigonométricas. Cabe anotar que los estudiantes asumieron que dicha altura del triángulo equilátero bisecaba el lado sobre el que incidía. Sin embargo, cuando el profesor centró su atención en uno de los triángulos rectángulos determinados por la altura del triángulo equilátero, emergió una nueva técnica.

P: […] Si conocemos esta altura de este triángulo [refiriéndose al triángulo equilátero] o este cateto [refiriéndose a la misma altura, pero vista como el cateto del triángulo rectángulo], conoceríamos seguramente este punto [refiriéndose al tercer vértice del triángulo equilátero]

E2: Claro…

P: Y, ¿Cómo calculamos esto [altura o cateto]?

E2: Yo creo que Pitágoras.

La respuesta de E2 presentó una nueva técnica τ_{213}, basada en el teorema de Pitágoras, aun cuando la intención del profesor al preguntar por la altura del triángulo equilátero, que es a la vez cateto del triángulo rectángulo, era que los estudiantes pusieran en juego la técnica trigonométrica que habían mencionado hacía unos instantes. Sin embargo, como uno de los principios de trabajo en el semillero es instar a los estudiantes a que exploren y validen diferentes estrategias de solución, entonces el profesor animó a los estudiantes para que implementasen la técnica que involucraba el uso del teorema de Pitágoras. Luego, se dirigió al Grupo 1, porque le llamaron para formularle algunas preguntas.

Cuando el profesor regresó al Grupo 2, vio que los estudiantes estaban intentando trazar los arcos que inicialmente pretendieron (τ_{211}), empleando para ello un cordel que habían tomado de uno de los zapatos. Entonces, les preguntó si habían empleado el teorema de Pitágoras, como lo habían planteado minutos antes, para calcular la medida del cateto del triángulo rectángulo.

E1: Hemos hecho el teorema de Pitágoras y nos da diecisiete coma sesenta y seis, seis, seis…

P: Entonces […] ¿Por qué no trazaron esta perpendicular [señalando la recta que contiene al cateto mayor del triángulo rectángulo, que a su vez es la atura del triángulo equilátero] con esa longitud? […]

E2: Pues porque como no tenemos, […] no tenemos forma […] lo podemos hacer así o así… [Haciendo un gesto con sus manos mientras sujetaba la escuadra, para indicar que la recta podría no ser perpendicular] Y… como lo hagamos un poco más…

P: Ya comprendo […] el problema es trazar la perpendicular.

E2: Exacto.

P: ¿Qué herramientas de las que tenemos aquí sobre la mesa nos permitirían…?

E2: La escuadra […]

Finalmente, en la puesta en común durante la cuarta sesión del semillero, se pudo constatar que los estudiantes optaron por la aplicación del teorema de Pitágoras (τ_{213}) para localizar el tercer vértice, que les permitió trazar el triángulo equilátero (T_{21}), y así poder dar cuenta del diseño y construcción de un envase en cartulina, con capacidad para un litro (T_2), con forma de tetraedro.

Consideramos importante mencionar que, en el desarrollo de T_2, los estudiantes emplearon una guía que usan habitualmente en las clases regladas de geometría, que presenta un esquema con diferentes sólidos junto a las fórmulas que sirven para calcular su volumen y su área. Así, en el caso del tetraedro, el volumen y el área vienen expresados en función de su arista, del siguiente modo: $V = [(l^3\sqrt{2})/12]$ y $A = [l^2\sqrt{3}]$). Por tanto, cuando el profesor preguntó a los estudiantes por la manera en que habían calculado la medida del lado del triángulo equilátero, de modo que la capacidad del tetraedro fuese de un litro, la respuesta fue:

E1: […] primero probamos con diez, con veinte […] y después pusimos veinte coma cinco y se pasó. Daba cien coma… o sea, […] mil cuatro coma... Y dijimos, pues vamos haciendo veinte coma uno, veinte coma dos, veinte coma tres, veinte coma cuatro… [risas]

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Como hemos visto, durante el desarrollo de T_2, apareció la necesidad de realizar una tarea del tipo (T_{21}) y surgieron tres técnicas (τ_{211}, τ_{212}, τ_{213}), que podríamos asociar con algunos de los saberes que actualmente se proponen en el currículo de la ESO (MECD, 2014). Tales saberes aparecen como un listado de temas segregados. De este modo; τ_{211}, se correspondería con el apartado de *construcciones geométricas sencillas*, propuesto para 1º y 2º de ESO; τ_{212}, con el de *razones trigonométricas*, propuesto para 4º en la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas; y τ_{213}, con el de los *teoremas de Tales y de Pitágoras*, propuesto para 4º en la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Adicionalmente, podríamos mencionar una segunda tarea del tipo T_{22}, a la que se enfrentaron los estudiantes tras definir la forma que iba a tener su envase, esta es, calcular la medida del lado del triángulo equilátero o arista del tetraedro. Para llevar a cabo dicha tarea, los estudiantes emplearon la técnica τ_{221}, consistente en probar una serie de valores de manera que el volumen se aproximara lo más posible a 1000 cm^3.

Aunque la alusión a algunos de los saberes propuestos en el currículo de la ESO, se hizo presente durante el abordaje de T_2, ello no implica que dichos saberes hayan pasado a formar parte funcional de los conocimientos de los estudiantes. De una parte, porque tales conocimientos no aparecieron de manera interrelacionada; y de otra, porque no fueron del todo eficaces para llevar a cabo esta tarea. Sin embargo, la situación que condujo a los estudiantes a construir diferentes técnicas en cuya aplicación encontraban cada vez nuevas limitaciones – debido a no poder usar el compás –, constituye un fenómeno rico que podría permitirles darse cuenta que en la solución de un problema intervienen diversos conocimientos y técnicas que se interrelacionan.

Ahora bien, la falta de interrelación entre las diferentes técnicas que emergieron durante el abordaje de T_2, pone de manifiesto el impacto que tiene la estructura del currículo en el aprendizaje de las matemáticas, en términos de que ha habituado a los estudiantes a abordar problemas para los cuales existen ya previamente conocimientos y técnicas preestablecidos. Un ejemplo de ello lo encontramos cuando ante la emergencia de la técnica τ_{212}, E2 preguntó si también era posible el uso de las razones trigonométricas en un triángulo equilátero. Esto ratifica el hecho de que en la escuela secundaria:

> No se cuestiona hasta qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan dichas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada (Fonseca et al., 2011, p. 102).

Ello advierte sobre la imperiosa necesidad de reorganizar el currículo, ya que tal como se presentan los saberes en los textos escolares no aparece el carácter funcional que tienen o deberían tener.

Además, hemos observado que estudiantes motivados por resolver un determinado tipo de tareas, ante la necesidad de tener que construir una técnica nueva que les permita resolver una tarea, fracasan o desconfían de que dicha técnica elaborada pueda ser válida. Creemos que este hecho es debido a que en los textos escolares utilizados por nuestros alumnos siempre que se propone un tipo de tareas a resolver, previamente se ha explicado la técnica que tienen que utilizar para resolver esas tareas. Así, en el proceso de estudio implementado, los alumnos han insistido mucho en utilizar la técnica τ_{211}, porque era la técnica explicada en sus clases regladas para la construcción de un triángulo equilátero. Sin embargo, en el momento que dicha técnica no se ha podido poner en práctica, los alumnos se han visto en la necesidad de tener que elaborar una técnica nueva. De hecho, han intentado construir dos técnicas nuevas (i.e., τ_{212} y τ_{213}), pero siempre han mostrado reticencias a usarlas porque pensaban que no podían funcionar bien.

El carácter justificativo circular que hemos mencionado entre tareas y técnicas, implica a su vez, en términos de la TAD, que apenas existe un discurso tecnológico razonado que describa, justifique y explique las técnicas usadas y que las interrelacione. Indicios fuertes de ello, es que la conexión clara entre las diferentes técnicas emergidas durante la realización de tareas del tipo T_2, no emergió en ningún momento. Así las tareas propuestas en los textos escolares siempre pueden resolverse mediante las técnicas explicadas previamente. Este hecho induce a pensar a los alumnos que las técnicas enseñadas nunca fracasan. En nuestro caso, los alumnos se han visto sorprendidos porque la técnica enseñada en clase no funcionaba y se han visto obligados a tener que elaborar una técnica nueva, actividad para la que la enseñanza recibida no les ha preparado.

CONCLUSIONES

A la luz de los primeros resultados obtenidos durante la implementación del REI, y de la discusión sobre los mismos, concluimos que:

- En la resolución de un problema espacial, efectivamente emergen varios de los conocimientos geométricos que aparecen en el currículo escolar; no obstante, las limitaciones que impone la forma en que este mismo currículo estructura los conocimientos, generan una visión segregada de sus aplicaciones.
- Se deben proponer procesos de estudio donde prime la necesidad de que los alumnos tengan que elaborar las técnicas que permitan resolver las tareas propuestas.
- Consideramos importante que en dichos procesos de estudio los alumnos necesiten describir, explicar y justificar las técnicas empleadas para solucionar los problemas propuestos. Además, dichos problemas deben permitir encontrar la conexión entre las distintas técnicas.
- Es necesario impulsar, en la actividad matemática realizada, el hecho de que las técnicas utilizadas siempre tienen un dominio de validez. Para ello, se deben plantear tareas donde dichas técnicas fracasen y los alumnos sientan la necesidad de construir técnicas nuevas que permitan su resolución.
- Las dinámicas de estudio que se crean durante la implementación de un REI, generan condiciones propicias para que todos los estudiantes se impliquen en la búsqueda de respuestas a las cuestiones planteadas, responsabilizándose de construir las técnicas necesarias para resolver las tareas que han surgido de dichas cuestiones. Así, podemos afirmar que dicho dispositivo didáctico favorece un *aprendizaje funcional*, donde los conocimientos matemáticos surgen siempre como respuesta a cuestiones que deben estudiar los alumnos. De modo que algunas de dichas cuestiones se van a convertir en algunas de las razones de ser de dichos conocimientos matemáticos.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339-352.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral. Université de Bordeaux I. Bordeaux. Francia.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x, 56*, 5-34.

Bloch, I. y Salin, M. H. (2004). Espace et géométrie: géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. En *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2000* (pp. 293-306).

Bloch, I. y Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. En M. H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des Mathématiques, Vol. 24*/2.3, 205-250).

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. En *Actes du 2e seminaire de didactique des mathématiques* (pp. 67-83). Université de Crète, Département des Sciences de l'Education, Rethymon.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. (Traducción de Claudia Gilman). Buenos Aires: Editorial Aique. (Edición original en francés: 1985)

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis doctoral). Centro de Investigaciones del IPN.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA, 44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA, 45*, 41-52.

MECD. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. España: Boletín Oficial de Estado.

Rodríquez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidaad Complutense. Madrid.

Rodríquez-Quintana, E., Hidalgo-Herrero, M. y Sierra, T. Á. (2017). La modelización a través de los recorridos de investigación: el caso de la comparación de tarifas de telefonía móvil. En G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J. P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage y T. Sierra (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 421-452). Recuperado de https://citad4.sciencesconf.org

Rojas, C. y Sierra, T. (2017). *Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria*. Comunicación presentada al XXI Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática. Zaragoza, España.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. En *VI congrès international de la TAD*. Autrans, Francia.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

DESARROLLO DE UNA MIRADA PROFESIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN UN SISTEMA DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Development of professional noticing of mathematics-teaching situations in an online context

Rojas, Y.[a], Fernández, C.[a] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

En este estudio analizamos a través del marco analítico de las MOST (Oportunidades Pedagógicas Matemáticamente Significativas para Construir sobre el Pensamiento del Estudiante) el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas durante las prácticas de enseñanza de un programa de formación a distancia. En este programa, los estudiantes para profesor de matemáticas tenían que escribir narrativas de su propia práctica y recibían feedback del tutor y de sus compañeros a través de foros virtuales. Los resultados muestran una evolución hacia una descripción más estructurada de las situaciones de enseñanza y aprendizaje en sus narrativas que le permitió identificar MOST y aprovecharlas para la propuesta de futuras acciones y cambios en la práctica. Se muestran estos cambios a través de las narrativas de un estudiante para profesor (JB).

Palabras clave: *mirada profesional, narrativas, estudiantes para profesor de matemáticas, MOST.*

Abstract

In this study, we analyze through the analytical framework of MOSTs (Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Students Thinking) the development of the professional noticing of mathematics teaching-learning situations skill during the teaching practices of an online program. In this program, prospective mathematics teachers had to write narratives of their own practice and received feedback from the tutor and their classmates through virtual forums. The results show an evolution towards a more structured description of the teaching and learning situations in their narratives that allowed them to identify MOSTs and took advantage of them for the proposal of future actions and changes in practice. These changes are showed through the written narratives of a prospective teacher (JB).

Keywords: *professional noticing, narratives, prospective mathematics teachers, MOST.*

INTRODUCCIÓN

Un profesor de matemáticas debe de ser capaz de entender y analizar cómo sus alumnos resuelven los problemas matemáticos con el fin de adaptar la enseñanza a las necesidades de estos ya que una de las tareas principales del profesor de matemáticas es reconocer y responder de forma adecuada al pensamiento matemático de los estudiantes (NCTM, 2000). En este sentido, la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje permite a los profesores estar en mejores condiciones de identificar oportunidades relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes y usarlas para apoyar dicho aprendizaje (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002).

Rojas, Y., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). Desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de la matemática en un sistema de educación a distancia. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 495-504). Gijón: SEIEM.

van Es y Sherin (2002) caracterizan esta competencia docente como el ser capaz de identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza y usar el conocimiento sobre el contexto para interpretarlos realizando conexiones con principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por su parte, Jacobs et al. (2010) particularizan esta competencia a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y la conceptualizan considerando tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes identificando detalles matemáticos importantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

En las últimas décadas la caracterización y análisis del desarrollo de esta competencia docente ha generado una línea de investigación, identificando herramientas y contextos que pueden apoyar su desarrollo. Por ejemplo, se ha mostrado cómo los debates virtuales pueden ser un instrumento apropiado para promover el desarrollo de esta competencia en formación inicial de profesores (Chiey y Herbst, 2016; Fernández, Llinares y Valls, 2012), así como los espacios de reflexión sobre la propia práctica en los que se compartía y discutía lo que estaban haciendo en clase (Coles, Fernández y Brown, 2013).

Además, también se ha investigado sobre el papel de escribir narrativas de situaciones de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, escribir es entendido como una poderosa herramienta para la construcción de conocimiento cuya primera función es mediar entre el recuerdo y la reflexión (Wells, 1999). Las narrativas son historias en las que el autor relata, de manera secuencial, una serie de acontecimientos que cobran sentido para él, a través de una lógica interna (Chapman, 2008). El hecho que los maestros sean narradores de sus propias historias en el contexto de los programas de formación de maestros durante las prácticas les ayuda a mirar de manera cada vez más estructurada las situaciones de enseñanza dando sentido a su experiencia durante su período de prácticas (Ivars, Fernández y Llinares, 2016). De esta manera, Ivars et al. (2016) pidieron a estudiantes para maestro, durante el período de prácticas en los centros, que escribieran una narrativa describiendo sucesos de aula que consideraran potencialmente relevantes para explicar el aprendizaje matemático que estaban observando. Para articular la redacción de la narrativa les proporcionaron preguntas basadas en las tres destrezas que conceptualizan la competencia. Los resultados de este estudio muestran que las narrativas les permitieron centrar su atención en el pensamiento matemático del alumno y tomar decisiones teniendo en cuenta el progreso conceptual de los estudiantes.

Estos estudios muestran que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, es una competencia cuyo desarrollo es posible durante la formación inicial, y señalan la necesidad de analizar otros contextos para su desarrollo cómo la interacción de los estudiantes para profesor en debates virtuales con sus compañeros compartiendo narrativas y el papel del *feedback* del tutor a las narrativas escritas (Ivars y Fernández, 2018). El objetivo de este estudio es examinar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en un contexto de formación a distancia donde los futuros profesores de matemáticas tenían que escribir narrativas de su propia práctica. Estas narrativas recibían un *feedback* del tutor y eran compartidas y discutidas en debates virtuales con el resto de los compañeros del programa de formación.

MARCO TEÓRICO

Las Oportunidades Pedagógicas Matemáticamente Significativas para Construir sobre el Pensamiento del Estudiante (MOST por sus siglas en inglés) es un marco analítico diseñado para ayudar a los profesores a reconocer momentos durante las clases que pueden ser productivos para promover la comprensión de los estudiantes de conceptos matemáticos importantes (Leatham, Peterson, Stokero y Van Zoest, 2015; Van Zoest et al., 2017). Estudios previos han mostrado que el uso de este marco analítico en intervenciones con profesores durante el visionado de vídeos de clase ha sido favorable para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Stockero, 2014; Stockero, Rupnow y Pascoe, 2015).

Las MOST tienen lugar en la intersección de tres características críticas: el pensamiento matemático de los estudiantes, las matemáticas significativas y las oportunidades pedagógicas (Leatham et al., 2015). Para cada característica, se deben cumplir dos criterios que permiten determinar si un momento determinado en el aula (intervención/respuesta de un estudiante) puede ser considerada una MOST. Para el pensamiento matemático de los estudiantes los criterios son: (i) si se puede observar en la intervención del estudiante evidencias que permitan hacer inferencias razonables sobre la comprensión matemática del estudiante y (ii) si se puede inferir la idea matemática que está relacionada con la intervención del estudiante. Los criterios para la característica de las matemáticas significativas son: (i) si la idea matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes y (ii) si la idea matemática es central para los objetivos matemáticos propuestos para su aprendizaje. Finalmente, un momento cumple la característica de oportunidad pedagógica si: (i) el pensamiento del estudiante crea la necesidad de seguir construyendo hacia la comprensión de las matemáticas que están implicadas y (ii) si es el momento adecuado durante la lección.

Las MOST, así definidas, pueden ser una herramienta de análisis para examinar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en los estudiantes para profesor de matemáticas cuando escriben narrativas de su propia práctica. Las MOST proporcionan un contexto que permiten examinar si los futuros profesores son capaces de (i) identificar momentos de las situaciones de enseñanza-aprendizaje que pueden considerarse "matemáticamente importantes" para el aprendizaje de los estudiantes (matemáticas significativas), (ii) interpretar el momento seleccionado en relación con el pensamiento matemático de los estudiantes infiriendo la idea matemática y la comprensión de los estudiantes en relación a esa idea (pensamiento de los estudiantes) y (iii) decidir cómo continuar teniendo en cuenta el pensamiento de los estudiantes para que sigan progresando en su comprensión de las matemáticas implicadas (aprovechar la oportunidad identificada) (Leatham et al., 2015).

En este estudio analizamos, a través del marco analítico de las MOST, el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas durante las prácticas de enseñanza de un programa de formación a distancia donde los estudiantes para profesor escribían narrativas de su propia práctica y recibían feedback del tutor y de sus compañeros a través de foros virtuales.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron cinco estudiantes para profesor de matemáticas del Grado de Enseñanza de las Matemáticas de una universidad de sistema de educación a distancia de Costa Rica. Los datos para esta investigación se recogieron durante el periodo de práctica en los centros, que consiste en 16 semanas divididas en ocho momentos de dos semanas, de los cuales tres momentos corresponden a la observación de clase y diseño de una unidad didáctica, y cinco momentos a su implementación.

Instrumento

En los tres primeros momentos (observación de clase), los futuros profesores tenían que analizar narrativas que describían situaciones hipotéticas de aula elegidas por los investigadores. Para el análisis disponían de documentos teóricos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (procedentes de investigaciones previas en didáctica de la matemática). Además, tenían que participar en un foro de discusión, compartiendo y discutiendo sus análisis.

Durante los cinco momentos de implementación en el aula (10 semanas), se pidió a los estudiantes para profesor que escribieran narrativas donde describieran situaciones de aula durante sus lecciones que podían ser consideradas relevantes para el aprendizaje matemático de los estudiantes, y en las que se pudiera reconocer características de su pensamiento matemático. Para escribir las narrativas de las situaciones de aula identificadas, no se proporcionó a los estudiantes para profesor ninguna información sobre los criterios para caracterizar una MOST pero se les facilitó una consigna (preguntas guía), considerando las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones relativas a la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010):

- *Describa el contexto: ¿Cuántos estudiantes hay en el aula? ¿Están trabajando en grupos, de forma individual o se está discutiendo en gran grupo? ¿cuál es el tema o contenido que se está trabando? ¿Cuál es el objetivo que busca lograr en la situación? ¿Cuál es la actividad/problema/ejercicio que se está resolviendo? ¿Por qué cree que la situación identificada es importante para el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes?*
- *Describa su actuación cómo profesor ¿Qué hace y por qué actuó de esa forma? ¿Cuáles son las respuestas (verbales o gestuales) del alumnado ante su actuación en este periodo de la lección? ¿Cómo ha tratado en el aula las respuestas dadas por los estudiantes?*
- *Interpreta la situación: ¿Qué actuaciones de los estudiantes le hacen pensar que han alcanzado (o no) las habilidades específicas de aprendizaje propuestas en la situación? ¿Qué dificultades parece que ha tenido el alumnado? ¿A qué pueden ser debidas esas dificultades? ¿Por qué ha gestionado las respuestas de los alumnos de la manera en la que lo ha hecho? ¿Cómo ha tenido en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes? ¿Debió tomar alguna decisión que cambió su planificación ante la actitud o preguntas de los estudiantes? ¿Por qué ha mantenido o modificado la forma en que desarrollaba los conceptos?*
- *Completa la situación: Modifique la actividad inicial propuesta (o plantee una secuencia de actividades diferente) para que los estudiantes avancen en su comprensión de la habilidad específica que se trabaja en la situación narrada. Justifique su elección o modificación de la actividad. Indique cómo esta apoya el aprendizaje del estudiante ¿Cómo guiaría la discusión de la resolución de la tarea elegida?*

Una vez que el estudiante había escrito su narrativa, la compartía con el resto de sus compañeros y el tutor del entorno virtual a través del foro de discusión. El tutor y los compañeros debían generar respuestas y comentarios. Las respuestas del tutor (feedback) tenían en cuenta elementos que debían focalizar la atención del estudiante para profesor, como colocar evidencias de las estrategias de los alumnos, vincular las inferencias sobre su comprensión a dichas evidencias e intentar que las decisiones sobre nuevas propuestas de actividades estuvieran basadas en el pensamiento matemático de los estudiantes. El estudiante para profesor debía tomar en cuenta el feedback ofrecido por el tutor y los comentarios de sus compañeros del foro de discusión para la escritura de la narrativa del momento siguiente. Este proceso se encuentra representado en la Figura 1.

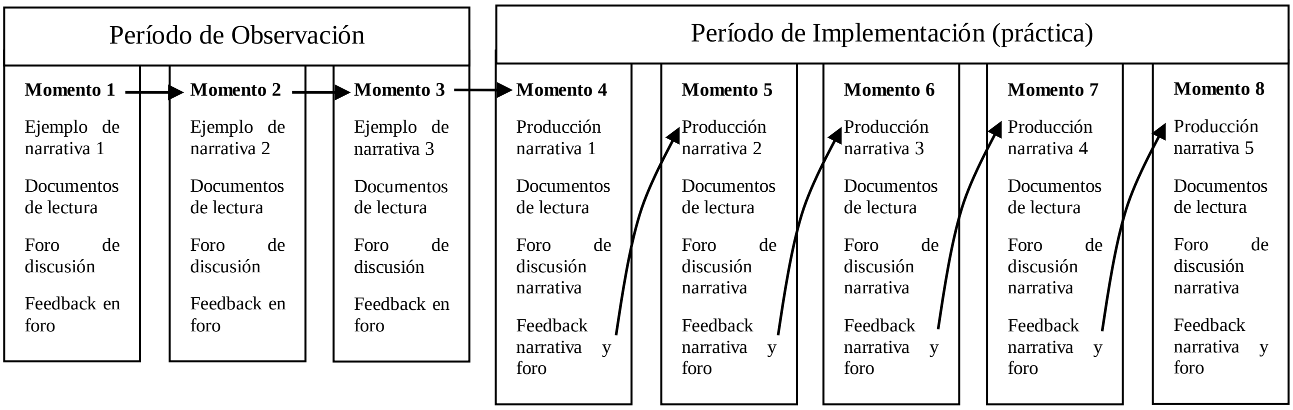


Figura 21. Proceso de recolección datos

Análisis

Las narrativas escritas por los cinco estudiantes para profesor en cada uno de los momentos (25 narrativas en total) fueron analizadas por tres investigadores, teniendo en cuenta:

- Si la descripción de la situación de enseñanza-aprendizaje escrita por el estudiante para profesor podía ser considerada, desde la perspectiva del investigador, una MOST. Para ello se tuvo en cuenta si los estudiantes para profesor centraban su narrativa en (criterios):
  - Describir respuestas de los estudiantes que permiten identificar ideas matemáticas significativas en su pensamiento.
  - Inferir la comprensión de los estudiantes de las ideas matemáticas significativas.
  - Identificar la situación como una oportunidad para seguir construyendo en la comprensión de los estudiantes.
- Si los estudiantes para profesor aprovechaban la situación de enseñanza y aprendizaje identificada (MOST para el investigador) en el contexto de aula o en la propuesta de actividades futuras.

A continuación, se identificaron cambios entre las cinco narrativas que muestran la evolución hacia una descripción más estructurada de las situaciones (entendiendo más estructuradas como la capacidad de centrar su narrativa en los tres criterios anteriores). Esta evolución en la manera de escribir las narrativas puede ser entendida como evidencia del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. En este estudio, se ha elegido el caso de un estudiante para profesor (JB) para ejemplificar los cambios que se están identificando.

RESULTADOS

Apoyándonos en el análisis de las narrativas de JB realizadas en los momentos 4 y 5 mostramos dos resultados: (i) la evolución hacia una descripción más estructurada de las situaciones de enseñanza y aprendizaje que le permitió interpretar con más detalle la comprensión de los estudiantes (y de este modo identificar MOST y aprovecharlas para la propuesta de futuras acciones), (ii) cambios en la práctica de JB manifestados a través de las narrativas escritas (aprovechamiento de las MOST identificadas en el aula).

Primera narrativa durante las prácticas de enseñanza (momento 4)

JB describe la situación del aula (26 alumnos de tercer curso de secundaria), en la que los alumnos están trabajando una lista de ejercicios en los que deben factorizar utilizando los métodos vistos en clases anteriores. JB eligió para describir su narrativa un diálogo con algunos de sus alumnos que están intentando factorizar individualmente la expresión $9a^2$-$4b^2$-4b-1. La reconstrucción del diálogo que tuvo con uno de sus alumnos es:

JB: Dime por qué pensaste que agruparlo así (-$4b^2$-4b-1) +$9a^2$ es la mejor opción.

Estudiante: Porque se agrupa un trinomio cuadrado perfecto el cual se busca porque tiene la misma letra, una al cuadrado y la otra no, y también al otro lado se agrupa ese monomio porque tiene una letra diferente o sea la que tenga la letra diferente es la que se aparta.

JB: Eso que dijiste está bien. Pero ¿se le puede aplicar diferencia de cuadrados?

Estudiante: No, porque no hay un signo de resta en medio de las dos expresiones.

JB: Muy bien, entonces qué se hace en ese caso.

Estudiante: Se multiplica por -1, o se le cambia de signo que es lo mismo.

JB se va a atender dudas en otro grupo de estudiantes, y como nota que la mayoría tenían una duda en la misma pregunta decide hacer la aclaración general en la pizarra.

JB interpreta este dialogo indicando en su narrativa que:

> Las dificultades que han tenido los estudiantes se deben a una mala posición de agrupación, es decir escriben primero el trinomio y después el monomio en todos los casos para obtener una diferencia de cuadrados dejando de lado que si “el trinomio tiene extremos negativos ya no sería un trinomio cuadrado perfecto”.

JB identifica el procedimiento con el que los estudiantes tienen dificultades: agrupar inadecuadamente y no tener claro cómo factorizar un -1 para generar un trinomio cuadrado perfecto y luego una diferencia con las expresiones restantes (por tanto, infiere las ideas matemáticas del pensamiento matemático e identifica las dificultades en relación con su comprensión). Además, JB identifica que comprender los criterios por los que se agrupan monomios, así como en qué momento se debe factorizar un -1 de una expresión para aplicar otros métodos de factorización son ideas esenciales para el logro de los objetivos de aprendizaje de la clase. Por otra parte, JB se da cuenta de la necesidad de seguir construyendo en esta idea matemática y de que es el momento oportuno para ello al comentar “que hace una aclaración general en la pizarra” al ver que otros estudiantes también tienen la misma dificultad. Teniendo en cuenta estas características, podemos considerar que JB ha identificado una MOST. Sin embargo, no aprovecha completamente la oportunidad identificada en la clase para seguir “construyendo en la progresión conceptual de los estudiantes” ya que JB únicamente hace un comentario “de cómo se debería resolver correctamente el ejercicio.”

Sin embargo, en la última parte de la narrativa donde JB debía de completar/modificar la actividad para ayudar a los estudiantes a seguir progresando en su aprendizaje, JB aprovecha la MOST identificada ya que tiene en cuenta las dificultades identificadas en los alumnos y las ideas matemáticas implicadas para proponer una actividad. Para ello, plantea dos ejemplos para realizar factorizaciones como los discutidos previamente, pero considera el uso de preguntas como apoyo a la reflexión de los alumnos, pretendiendo que establezcan criterios del uso de un determinado método de factorización. Estas preguntas crean conexiones pasando de lo procedimental a lo conceptual.

> Se plantean los dos ejemplos siguientes:
>
> $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$ y $z^2 + 12xy - 9y^2 - 4x^2$
>
> a) Para el primer ejemplo se podría preguntar: ¿Qué pasa si pongo primero y^2 y después el x^2? ¿Qué pasa si en el trinomio meto a^2 y saco a x^2 o y^2?
>
> b) Para el segundo ejemplo ¿Qué pasa si le cambio de signo al monomio en vez del trinomio? ¿se puede factorizar ese trinomio con los extremos negativos? Supongamos que hubiese estado todo positivo ¿a quién se le cambia de signo para poder aplicar el método de diferencia de cuadrados?

De esta manera, después de identificar una situación potencialmente relevante para sus alumnos (MOST) pero que durante la clase no había aprovechado completamente, la reconstrucción de la situación en la narrativa y la necesidad de indicar qué debería hacer a continuación le hacen considerar la hipótesis sobre la comprensión de los estudiantes (en este caso lo que da pie a la dificultad de los estudiantes) y aprovecharla.

La narrativa de JB, fue discutida en el foro virtual en el que los demás estudiantes para profesor ofrecieron feedback sobre la forma de describir la situación, indicando la importancia de distinguir con qué alumnos se interactúa, sobre la actividad elegida y su abordaje, realizando sugerencias como:

> En muchas ocasiones los estudiantes resuelven los ejercicios de forma mecánica: como si todas las operaciones se resuelven de la misma manera, es ahí donde el docente debe promover a través de ejercicios el razonamiento, para resolver los ejercicios de diferentes maneras analizando las propuestas. (Estudiante para profesor 2)

El tutor proporcionó además feedback dirigido a enfocar la atención de JB en la comprensión que los alumnos muestran mediante su pensamiento matemático, sugiriéndole tomar acciones concretas en el aula acorde a lo identificado:

> además de buscar que los alumnos expresen su pensamiento matemático al interactuar con ellos, debes comprender este y usarlo para ayudar al alumno, tomando decisiones de acción concretas al respecto que ayuden a su progreso en el aprendizaje (feedback del tutor)

Segunda narrativa durante las prácticas de enseñanza

Después de compartir su narrativa en el foro de discusión, leer las narrativas de sus compañeros y recibir feedback del tutor, en su segunda narrativa JB realizó una descripción más estructurada que le permitió interpretar con más detalle la comprensión de los estudiantes. Luego se apoyó en las inferencias realizadas sobre la comprensión de los estudiantes para tomar decisiones de enseñanza. En este caso, no solo aprovechó la oportunidad identificada en la propuesta de acciones futuras solicitada en la narrativa, sino durante la misma situación de aula.

En la segunda narrativa sobre su propia práctica, JB describe su interacción con dos alumnos, quienes están resolviendo ejercicios en los que deben identificar el método de factorización adecuado y factorizar las expresiones. Ángela intenta factorizar la expresión 5x(3x-2)-3x+2 y Pablo intenta factorizar la expresión w^2-z^2+4+4w-1-2z. JB reconstruye el diálogo con ellos en su narrativa:

Ángela: En los ejercicios de la práctica no se especifican por qué método resolverse.

JB: Usted lo ha dicho, la idea es que puedan identificar el tipo de método de factorización.

Ángela: Para 5x (3x-2)-3x+2 se debe resolver primero la multiplicación de monomios y después agrupar la expresión.

JB: Dime porque pensaste que resolverlo así es la mejor opción.

Ángela: Porque siempre que tenga un monomio delante de un paréntesis se multiplica, de esta forma se obtiene $15x^2$-10x-3x+2, es decir, $15x^2$-13x+2.

JB: Es correcto, pero una vez hecho eso ¿cómo resolverías $15x^2$-13x+2?

Ángela: Se puede identificar a simple vista que es un trinomio, por lo que se emplea el método de factorización del trinomio cuadrado perfecto (fórmula notable).

JB: Voy a ir donde Pablo y mientras intenta resolver por ese método y ahora regreso para ver cómo le fue.

JB va a contestar las dudas de Pablo.

Pablo: Tengo una duda, con este ejercicio w^2-z^2+4+4w-1-2z, se agrupa en dos trinomios, pero no sé a cuál ponerle la constante correcta.

JB: Analicemos por un instante, qué pasa si utilizamos el -1 como el termino c de w^2+4w, es decir w^2+4w-1.

Pablo: A la hora de la factorización por trinomio cuadrado perfecto no se va a poder ya que la raíz cuadrada de -1 no es un número real.

JB: Es correcto, ahora si fuera a w^2+4w+4 ¿qué pasa?

Pablo: Ese sí se puede factorizar sin ningún problema.

Pablo: Si ax^2 viene negativo se agrupa con la constante negativa para así luego poder sacar un –1 a factor común, y si viene positivo se agrupa con la constante positiva.

JB termina con Pablo y regresa con Ángela.

Ángela: No pude resolverla por el método de fórmula notable porque 2 y 15 no tienen raíz exacta.

JB: De qué otra forma puedes resolver esa expresión algebraica.

Ángela: Viéndolo bien 5x (3x-2)-3x+2 el 3x-2 se puede sacar a factor común si se le aplica un cambio de signo al -3x+2; ya después queda fácil, ¡ya entendí!".

En este fragmento JB se da cuenta que Ángela tiene dificultades con la identificación de los métodos de factorización a utilizar diciendo *"cuando ven un método por separado y luego hacen una práctica sobre ese método pues resulta sencillo; cuando se mezclan todas las diferentes factorizaciones se les complica al no decir por qué método deben de resolver el ejercicio"*. En ese caso, JB infiere las ideas matemáticas del pensamiento matemático de Ángela e identifica las dificultades en relación con su comprensión. Además, JB identifica que comprender cuándo se pueden utilizar los métodos de factorización es una idea esencial para el logro de los objetivos de aprendizaje de la clase. Por otra parte, JB se da cuenta de la necesidad de que Ángela siga construyendo en esta idea matemática y de que es el momento oportuno. Para ello le hace reflexionar a través de preguntas y le invita a que indague en un método elegido que no es el apropiado. Teniendo en cuenta estas características, podemos considerar que JB ha identificado una MOST, aprovechándola en el momento que ha surgido en el aula.

Por otra parte, JB se da cuenta que Pablo tiene dificultades a la hora de agrupar correctamente para generar fórmulas notables infiriendo, por tanto, las ideas matemáticas del pensamiento matemático de Pablo e identificando las dificultades en relación con su comprensión. Además, JB identifica que comprender cómo agrupar para generar una fórmula notable es una idea esencial para el logro de los objetivos de aprendizaje de la clase. Por otra parte, JB se da cuenta de la necesidad de que Pablo siga construyendo en esta idea matemática y de que es el momento oportuno. Para ello le hace reflexionar a través de preguntas. Teniendo en cuenta estas características, podemos considerar que JB ha identificado otra MOST, aprovechándola en el momento que ha surgido en el aula.

La descripción de su interacción con los alumnos muestra una aproximación más centrada en el pensamiento matemático de los estudiantes, identificando elementos matemáticos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje que le permiten interpretar con más detalle la comprensión de los dos estudiantes. Esto viene evidenciado por el hecho de que en el diálogo presentado es capaz de darse cuenta de dos MOST y aprovecharlas.

Además, en la última parte de la narrativa donde tiene que modificar la actividad para ayudar a los estudiantes a que avancen su comprensión, vincula la interpretación identificada de la comprensión de sus estudiantes a las decisiones que toma, aprovechando así la MOST identificada en la propuesta de decisiones futuras.

Por ejemplo y^4-y^3-y^2+y y $3(x\text{-}y)^2\text{-}2(x^2\text{-}y^2)$

a) Para el primer ejemplo preguntaría cómo se debe agrupar y por qué antes de resolverlo por cualquier método de factorización.

b) Para el segundo ejemplo tras resolverlo preguntaría si se puede llegar a la misma respuesta utilizando algún otro método diferente de factorización.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los primeros resultados muestran que los estudiantes para profesor de matemáticas van evolucionando hacia una descripción más estructurada de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de su propia práctica, lo que les permite interpretar con más detalle la comprensión de los estudiantes y de este modo identificar MOST y aprovecharlas para proponer decisiones futuras.

Por lo que la escritura de narrativas de su propia práctica parece ser un contexto favorable para el desarrollo de la competencia. Este resultado está en línea del obtenido por Ivars et al. (2016) en el que también obtuvieron resultados favorables en una investigación con estudiantes para maestro de educación primaria al escribir narrativas de situaciones de enseñanza-aprendizaje observadas durante el período de prácticas en los centros.

Por otro lado, y aunque somos conscientes que se necesitaría un análisis global de todos los momentos en los que los profesores escribían narrativas, parece que los foros virtuales en los que los estudiantes para profesor comparten y discuten sus narrativas puede ser un contexto favorable también para el desarrollo, así como el feedback proporcionado por el tutor (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Ivars y Fernández, 2018).

Además, los resultados también muestran cambios en la práctica de los estudiantes para profesor de matemáticas manifestados a través de las narrativas escritas por ellos. Estos cambios en la práctica se observan cuando aprovechan las MOSTs identificadas para apoyar a los estudiantes a que continúen progresando en su aprendizaje en el aula.

El uso del marco analítico de las MOST (Leathan et al., 2015; Van Zoest et al., 2017) como lente para analizar las narrativas de los estudiantes nos está permitiendo examinar si los estudiantes para profesor de matemáticas habían identificado momentos de enseñanza-aprendizaje que podrían considerarse "matemáticamente importantes" en una lección para el aprendizaje del alumno (identificar las ideas matemáticas importantes del pensamiento de los estudiantes e inferir características de su comprensión) y si los han aprovechado en el contexto del aula o en la propuesta de futuras acciones como profesores. Este marco nos está permitiendo dar cuenta de cómo van adquiriendo la competencia mirar profesionalmente en el contexto de sus prácticas en un programa de formación.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2017-87411-R del Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España).

Referencias

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, (vol. *2*, pp.15-38). Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.

Chiey, V. y Herbst, P. (2016). A study of the quality of interaction among participants in online animation-based conversations about mathematics teaching. *Teaching and Teacher Education*, *57*, 139-149.

Coles, A., Fernández, C. y Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teachers development. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, (vol. 2, pp. 209-216). Kiel, Germany: PME.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Descriptores del desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas en estudiantes para maestro. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 305-314). Málaga: SEIEM.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service primary teachers noticing. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.*), Research advances in the mathematical education of pre-service Elementary teachers*, (pp. 245-260). ICME-13 Monographs. Springer.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Leatham, K. R., Peterson, B. E., Stockero, S. L. y Van Zoest, L. R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*, 88-124.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stockero, S. L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J. J. Lo, K. R. Leatham, y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 239-259). Switzerland: Springer International.

Stockero, S. L., Rupnow, R. L. y Pascoe, A. E. (2015). Noticing student mathematical thinking in the complexity of classroom instruction. En T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradford y H. Dominguez (Eds.), *Proceeding of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 820-827). East Lansing, MI: Michigan State University.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-596.

Van Zoest, L., Stockero, S., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. y Ochieng, M. (2017). Attributes of instances of student mathematical thinking that are worth building on in whole class discussion. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(1), 33-54.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a socio-cultural practice and theory of education*. Cambridge University Press.

EL MUESTREO EN EL CURRÍCULO ESCOLAR CHILENO

Sampling in the Chilean school curriculum

Ruiz-Reyes, K.[a], Ruz, F.[a], Contreras, J. M.[a] y Molina-Portillo, E.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se analizan los objetos estadísticos y la configuración epistémica del concepto muestreo en el currículo escolar chileno. Destacamos la importancia de este concepto en la enseñanza de la estadística y como parte de las directrices curriculares vigentes. Por tanto, bajo una perspectiva cualitativa y por medio de la técnica de análisis de contenido, se emplean las herramientas de análisis que aporta el enfoque ontosemiótico para identificar y ejemplificar las configuraciones epistémicas relacionadas con el muestreo. Además, describimos las actividades presentes en los textos escolares, principal recurso de apoyo en el aula, de una de las configuraciones propuestas. Por último, concluimos con la detección algunos conflictos semióticos potenciales, que surgen por disparidades entre lo que plantea el currículo y lo que presentan los libros de texto.

Palabras clave: *muestreo, configuración epistémica, currículo escolar, libros de texto.*

Abstract

In this paper, we analyze the statistical objects and the epistemic configuration of the concept of sampling in the Chilean school curriculum. We emphasize the importance of this concept in the teaching of statistics and as part of current curricular guidelines. Therefore, from a qualitative perspective and through the technique of content analysis, we used the analysis tools provided by the onto-semiotic approach to identify and exemplify epistemic configurations related to sampling. In addition, we described the activities present in school textbooks, the main support resource in the classroom, of one of the proposed configurations. Finally, we concluded with the detection of some potential semiotic conflicts, which arise from disparities between what the curriculum proposes and what the textbooks present.

Keywords: *sampling, epistemic configuration, scholar curriculum, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es un área del conocimiento que nos ofrece una serie de herramientas para afrontar la tarea de tomar de decisiones en diversos ámbitos de la sociedad. Esta situación conlleva a que actualmente su enseñanza transite desde el currículo escolar hasta la educación superior, con el propósito de formar a los futuros profesionales (Batanero, 2013). No obstante, la comprensión acerca de esta materia es generalmente defectuosa, debido a que la aplicación e interpretación de los procedimientos estándar de inferencia es a menudo incorrecta (Harradine, Batanero y Rossman, 2011).

Heitele (1975), establece el muestreo como uno de los conceptos clave en la lista de ideas estocásticas fundamentales, considerándolo como un nexo entre estadística y probabilidad. Además, plantea que los procedimientos asociados al muestreo forman parte de la vida cotidiana, puesto que nuestro conocimiento se cimienta mediante la observación de fragmentos de la realidad, que en ocasiones puede ser muy compleja de observar totalmente. En este sentido, Burrill y Biehler (2011) destacan el muestreo como un conocimiento basal para el aprendizaje de la inferencia estadística. Entre otras cosas, los autores declaran como primordial que los alumnos alcancen su comprensión

Ruiz-Reyes, K., Ruz, F., Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2018). El muestreo en el currículo escolar chileno. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 505-514). Gijón: SEIEM.

antes de progresar en el trabajo con otros tópicos, para así no proyectar los errores relativos al muestreo en los conceptos sucesivos, tales como el contraste de hipótesis o intervalos de confianza. En este sentido, como sugiere Watson (2004), los estudiantes son susceptibles a la heurística de la representatividad; es decir, que tienen dificultades con la idea de la variabilidad en las poblaciones, tienen demasiada confianza en muestras pequeñas, y no aprecian la importancia del tamaño de la muestra en muestras aleatorias, lo que puede generar conflictos al momento de seguir profundizando en los conceptos de estadística inferencial.

Por otro lado, de acuerdo a los lineamientos del Marco Curricular Chileno (MINEDUC, 2009; 2012; 2015), el concepto de muestra se desarrolla formalmente en el séptimo año de enseñanza primaria (12-13 años). En los cursos inferiores, esta noción sólo se utiliza para denominar el conjunto de datos a analizar en el contexto del análisis exploratorio. Posteriormente, en los últimos niveles de enseñanza secundaria (16-18 años) se retoma este concepto en el marco de las distribuciones muestrales al proponer el trabajo con distintas técnicas de inferencia estadística.

A pesar de la importancia del concepto de muestreo en el aprendizaje de la disciplina, existe escasa investigación de este tema en el campo de didáctica de la estadística, en la que encontramos principalmente estudios sobre la comprensión de este tópico por los alumnos, como en los niveles jerárquicos de Watson (1997; 2004) y el análisis de las concepciones de los estudiantes al manipular el muestreo por medio de simulaciones de Saldanha y Thompson (2002). En el campo de la formación de profesores, destacamos la revisión de Harradine, Batanero y Rossman (2011). Por tanto, con la intención de complementar dichos avances, este trabajo tiene por objetivo identificar las distintas configuraciones epistémicas acerca del muestreo en el currículo escolar chileno, por medio de las herramientas que son parte del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) y ejemplificar dichas configuraciones con diferentes situaciones problemas presentes en los textos escolares chilenos. Finalmente, concluimos con la identificación de algunos *conflictos semióticos* potenciales de tipo epistémico entre lo que plantea el currículo y lo que proponen los principales recursos didácticos de distribución masiva en los establecimientos educacionales chilenos, los libros de texto.

MARCO TEÓRICO

Los aspectos teóricos en los que se enmarca esta investigación se basan en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS: Godino, Batanero y Font, 2007). En el EOS, la actividad matemática o estadística tiene como finalidad la resolución de problemas y es entendida como un *sistema de prácticas* (personales e institucionales) de las que surgen diversos *objetos matemáticos/estadísticos* y partir de las cuales es posible interpretar el *significado* del muestreo. No obstante, al describir la actividad matemática podemos referimos a diversos objetos, por lo que Godino (2002) introduce una tipología primaria para ellos según su naturaleza:

1. *Situaciones-Problemas*, entendidas como aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, que representan las tareas que inducen la actividad matemática.
2. *Lenguaje o elementos lingüísticos*, referidos a los términos, expresiones, notaciones o gráficos.
3. *Acciones o procedimientos* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo).
4. *Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones.
5. *Proposiciones* de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o propiedades.

6. *Argumentos*, enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, o bien la solución de los problemas.

Por tanto, a través de la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS) de Godino y Batanero (2008), buscamos identificar los distintos significados curriculares sobre el muestreo. La interacción de dichos objetos forma configuraciones que pueden ser de tipo epistémico (si son propias de una institución) y cognitivas (si son específicas del estudiante). En este caso, identificamos las diversas configuraciones epistémicas relacionadas con este objeto, presentes en los programas de estudio para los niveles de escolaridad donde se desarrolle esta noción (MINEDUC, 2009; 2012; 2015).

Otro componente del EOS que es de particular utilidad en esta investigación es la noción de *función semiótica*, entendida como una correspondencia entre un antecedente (expresión, significador) y un consecuente (contenido, significado) establecido por un sujeto (persona o institución), según un criterio o regla de correspondencia. Cualquier disparidad de interpretación en el significado que dos sujetos asignan a una misma expresión, introduce la noción de *conflicto semiótico* (Godino et al., 2007). Por tanto, proyectamos los resultados de este estudio en identificación de conflictos potenciales entre los significados institucionales pretendidos sobre el muestreo, presentes en el currículo y los libros de texto chilenos.

METODOLOGÍA

En este estudio, seguimos una metodología cualitativa de tipo descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), ya que se busca especificar las distintas configuraciones epistémicas acerca del muestreo en el currículo escolar chileno y utilizamos la técnica de análisis de contenido (López-Noguero, 2002) para extraer información de los documentos curriculares analizados. Siguiendo la GROS propuesta por Godino y Batanero (2008), comenzamos analizando exhaustivamente las directrices vigentes que regulan la educación primaria y secundaria en Chile (MINEDUC, 2009; 2012; 2015), identificando las diferentes configuraciones epistémicas asociadas a los objetos estadísticos vinculados con el muestreo. Además, describimos los objetos estadísticos asociados a cada configuración según los niveles educativos que la comprendan y ejemplificamos una de dichas configuraciones, por medio de la identificación de los objetos primarios que la caracterizan, en una colección de libros de textos. La muestra considerada, corresponde a cuatro documentos, que se detallan en el Anexo, cuya distribución es impulsada por el Ministerio de Educación chileno de manera gratuita a los establecimientos públicos y particulares subvencionados, que según el último informe emitido sobre el año 2016, cubren un 94,2% de la matrícula total (Centro de Estudios MINEDUC, 2017, p. 15).

RESULTADOS

En esta sección, presentamos una descripción de las configuraciones epistémicas sobre el muestreo en el currículo escolar chileno, clasificando estos resultados en tres componentes, en las que se destacan los objetivos de aprendizaje propuestos para los diferentes niveles educativos y cómo estos se relacionan a los conceptos asociados al muestreo.

Configuraciones epistémicas sobre el muestreo en el currículo escolar

La noción de muestreo es introducida formalmente en el Marco Curricular Chileno (MINEDUC, 2009) desde séptimo año (12-13 años) de educación básica. No obstante, se presenta indirectamente en en el contexto del análisis exploratorio de datos, evolucionando progresivamente hasta el último nivel de escolaridad, en el ámbito de la inferencia estadística. Por tanto, en lo que sigue, identificamos las distintas configuraciones epistémicas sobre el muestreo según el tópico dentro del cual se considere.

Una primera configuración, es la que denominamos *el muestreo en el análisis exploratorio de datos*, que comienza a desarrollarse desde el primer (6-7 años) hasta el sexto (11-12 años) nivel de educación básica, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 5. Objetivos de aprendizaje curriculares asociados al muestreo en el análisis exploratorio de datos

Curso	Objetivos de Aprendizaje (OA)
Primero Básico (6-7 años)	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.
Segundo Básico (7-8 años)	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.
Tercero Básico (8-9 años)	Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra.
Cuarto Básico (9-10 años)	Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.
Quinto Básico (10-11 años)	Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias.
Sexto Básico (11-12 años)	Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas.

En este caso, destacamos que el trabajo con el muestreo no es explícito, sino que se propone trabajar con conjuntos de datos obtenidos a partir de la aplicación de encuestas, sin cuestionar su representatividad respecto a la población de interés. Lo anterior se puede justificar en el hecho de que la estadística a desarrollar en estos niveles es de tipo descriptiva, por lo que las conclusiones extraídas de los datos no pretenden generalizarse, sino que simplemente caracterizar su comportamiento.

La segunda configuración es denominada *la muestra como objeto estadístico*, que se presenta en el séptimo nivel de educación básica (12-13 años) y el segundo nivel de educación media (15-16 años), como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 6. Objetivos de aprendizaje curriculares asociados a la muestra como objeto estadístico

Curso	Objetivos de Aprendizaje (OA)
Séptimo Básico (12 – 13 años)	Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo. Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo.
Segundo Medio (15 – 16 años)	Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

En el primero de estos niveles se formaliza la noción de muestra como un subconjunto de la población, junto a otras ideas básicas como población, variable estadística y dato. Además, se discute acerca de la aleatoriedad de la muestra y se comienza a reflexionar intuitivamente sobre su representatividad y la posibilidad de estimar resultados a partir de ella. Por otro lado, en el segundo nivel se trabaja la noción de tamaño muestral y combinan distintas técnicas de conteo (permutaciones y combinatorias) en el sorteo al azar, con o sin reposición.

Por último, una tercera configuración es *el muestreo en la inferencia estadística* que es parte del cuarto nivel de educación media (17-18 años), como se detalla en la Tabla 3.

Tabla 7. Objetivos de aprendizaje curriculares asociados al muestreo en la inferencia estadística

Curso	Objetivos de Aprendizaje (OA) / Contenido Mínimo Obligatorio (CMO)
Cuarto Medio (17 – 18 años)	Comprender que la distribución de medias muestrales de muestras aleatorias de igual tamaño extraídas de una población tiende a una distribución normal a medida que el tamaño de las muestras aumenta (OA). Realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos donde se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población, mediante el uso de herramientas tecnológicas (CMO). Análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra (CMO).

En este curso se promueve la realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales, con lo que si introduce la noción de distribución muestral por medio de herramientas tecnológicas. Además, se incluye el uso de criterios acerca de la representatividad de la muestra en el análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de estudios estadísticos o simulaciones.

Por tanto, a modo de síntesis, podemos notar cómo la noción de muestreo es tratada en diferentes niveles, determinando cada una de las configuraciones detectadas que, de no encontrarse enlazadas entre sí, podría dificultar un aprendizaje idóneo del contenido por parte de los estudiantes.

Objetos estadísticos ligados a cada configuración

A continuación, caracterizamos los objetos estadísticos primarios que componen cada una de las configuraciones epistémicas descritas en el apartado anterior (Tabla 4). Además, complementamos esta descripción ejemplificando una de dichas configuraciones, por medio de la selección de una serie de actividades propuestas en textos escolares de los niveles respectivos, clasificadas según el tipo de objeto primario que corresponda.

Tabla 8. Objetos estadísticos asociados a cada configuración

	Configuración 1	Configuración 2	Configuración 3
Situaciones-Problema	Aplicación de encuestas para recolectar datos sobre intereses de los estudiantes.	Situaciones que involucran inferir información sobre la composición de una población.	Relacionadas a problemas reales que involucran estimar la media de una población.
Lenguajes	Tabular, gráfico y pictórico, que permitan representar datos obtenidos tras aplicar encuestas.	Representación de conjuntos. Gráficos y tablas que permitan registrar resultados de encuestas.	Tablas de probabilidad y gráficos de distribuciones teóricas.
Procedimientos	Recolectar y registrar datos.	Estimar, contar, inferir, comparar y conjeturar.	Conjeturar acerca de la distribución muestral de las medias y verificar por medio de simulaciones.
Conceptos	Subconjunto	Población, muestra, variable estadística, dato, muestreo aleatorio.	Parámetro, estimador, distribución muestral.
Proposiciones	Aproximación intuitiva a la variabilidad muestral.	Tipos de muestra (aleatoria y no aleatoria). Aproximación intuitiva a la noción de	Criterios de representatividad de la muestra. Error de estimación.

		representatividad muestral.	Variabilidad muestral.
Argumentos	Describir muestras y explicar resultados	Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.	Evaluar críticamente conclusiones sobre la población a partir de muestras.

Por tanto, tras ubicar y describir curricularmente los objetos estadísticos asociados a cada configuración, en lo que sigue ejemplificamos dichos objetos respecto al *muestreo en el análisis exploratorio de datos* en libros de texto chilenos según los niveles educativos correspondientes. Los libros de texto son uno de los principales recursos didácticos utilizados para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar (Vásquez y Alsina, 2015; Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero, 2015). En este sentido, buscamos contribuir en la organización de procesos de enseñanza que consideren esta variedad de significados, de manera que los estudiantes logren un aprendizaje idóneo del contenido.

El *lenguaje*, considera los diversos términos, expresiones y notaciones utilizadas para representar el concepto estadístico considerado, en nuestro caso el muestreo. En la Figura 1, se presenta un ejemplo del libro de tercero básico (8-9 años) donde bajo la instrucción de aplicar una encuesta a 10 compañeros, los estudiantes deben enfrentarse a la tarea de seleccionar una muestra y representarla en un registro tabular. De esta forma, si bien no se hace mención directa a noción de muestra, esta actividad la considera y promueve su representación en una tabla de conteo.

2. Crea una encuesta con tres preguntas que puedas aplicar a 10 de tus compañeras y compañeros. Realízala y representa los resultados en una tabla de conteo en tu cuaderno.

Figura 1. Ejemplo del lenguaje utilizado en tercero básico. Fuente: [L2], p. 229

Las *Situaciones-Problemas*, corresponden a las tareas que induzcan alguna actividad estadística, en este caso, respecto al muestreo. Por tanto, en la Figura 2 se expone un ejemplo de situación problema en cuarto básico (9-10 años), donde los alumnos deben elegir una temática que les interese y construir una encuesta acera del tema. Posteriormente, se solicita la aplicación de dicho instrumento, enfrentando a los estudiantes a la tarea de seleccionar a 10 compañeros, sin necesidad (en este nivel) de mencionar que esa colección seleccionada representa una muestra del total de estudiantes del curso.

4 **Historia, Geografía y Ciencias Sociales.** Junto con un compañero o una compañera seleccionen una de las temáticas y realicen las actividades.

Derechos y deberes de los niños y niñas | Participación en la directiva del curso

a. Construyan una encuesta acerca del tema. Para esto, planteen un objetivo.
b. Apliquen la encuesta a 10 compañeros o compañeras y registren los datos.
c. ¿Te pareció interesante trabajar esta temática?, ¿por qué?

Figura 2. Ejemplo del tipo de Situaciones-problemas propuestas en cuarto básico. Fuente: [L3], p. 309

Los *Procedimientos*, se refieren a acciones, operaciones y técnicas utilizadas por los estudiantes frente a tareas estadísticas, en relación al muestreo. En la Figura 3, se ejemplifica un procedimiento propuesto en el libro de primero básico (6-7 años) donde por medio de la instrucción de preguntar a 10 compañeros, los estudiantes deben aplicar el procedimiento de recolectar datos acerca de la tenencia de mascotas en el hogar. Además, tras recoger los resultados, se promueve la acción de ordenarlos y representarlos en sus cuadernos.

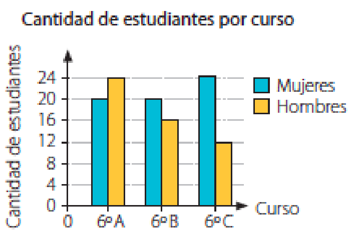
4 En parejas pregunten a 10 de sus compañeros si tienen mascota en su casa. Ordenen la información en una tabla de conteo, regístrenla en sus cuadernos.

Figura 3. Ejemplo del tipo de procedimiento propuesto en primero básico. Fuente: [L1], p. 173

Los *Conceptos*, corresponden a las definiciones o descripciones acerca del contenido estadístico en cuestión, a saber, el muestreo. Como hemos mencionado anteriormente, en esta primera configuración el concepto de muestreo no se propone de manera explícita, sino que se trabaja con él indistintamente en el contexto de la estadística descriptiva. No obstante, reconociendo la evolución progresiva de los contenidos a lo largo de la trayectoria escolar, destacamos en los ejemplos presentados en las Figuras 1, 2 y 3, una primera cercanía al concepto de muestreo en la elección de una parte o subconjunto de sujetos que pertenecen a un grupo más grande.

Las *Proposiciones*, se refieren a enunciados o propiedades acerca de alguna característica valiosa del contenido considerado. De esta forma, en la Figura 4 se muestra una actividad propuesta en el libro de sexto básico (11-12 años) donde si bien no se alude explícitamente a una propiedad del muestreo, sus preguntas permiten que los estudiantes se puedan aproximar intuitivamente a la propiedad de variabilidad muestral. Esta situación se puede apreciar en las últimas dos preguntas de la Figura 4, donde los estudiantes comienzan a analizar la información respecto a los tres cursos por separado, de 44, 36 y 36 sujetos cada uno y luego juntos, 116 sujetos, apreciado la variabilidad en sus respuestas producto de considerar muestras de distinto tamaño en cada caso.

En el gráfico se muestra la cantidad de estudiantes, entre hombres y mujeres, que conforman los sextos básicos de un colegio.



- ¿Qué variables representan el eje horizontal y el vertical del gráfico?
- ¿En qué curso la diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres es mayor?
- Entre los tres cursos, ¿hay más hombres o mujeres?

Figura 4. Ejemplo del tipo de propiedad propuesta en sexto básico. Fuente: [L4], p. 235

Los *Argumentos*, son enunciados utilizados para explicar procedimientos o soluciones a problemas relacionados con el muestreo. En la Figura 5, se presenta una actividad propuesta en el libro de cuarto básico (9-10 años) donde en el marco de la construcción y aplicación de una encuesta, se pide a los estudiantes que argumenten acerca del uso de un estilo de trabajo ordenado en la recolección de la información. Por tanto, se promueve que los estudiantes sean capaces de justificar el procedimiento utilizado para extraer datos acerca de la asignatura favorita de los alumnos.

2 Construye una encuesta para saber cuál es la asignatura favorita de los estudiantes de 4.° básico en tu colegio. A partir de esto, realiza lo pedido.

a. Formula una pregunta abierta y otra cerrada.

b. Aplica la encuesta y luego comunica los resultados a tu profesor o profesora.

c. ¿Crees que tener un **estilo de trabajo ordenado** ayuda en la recolección de la información?, ¿por qué?

Figura 5. Ejemplo del tipo de argumentos propuestos en cuarto básico. Fuente: [L3], p. 309

En consecuencia, una vez analizados los ejemplos de cada una de las configuraciones, podemos ver o no la coherencia con los objetivos de aprendizaje planteados en las bases curriculares con respecto a los elementos relacionados al muestreo. Seguidamente, exponemos algunas conclusiones finales, como también, comentamos los potenciales conflictos semióticos.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo, hemos identificamos las distintas configuraciones epistémicas acerca del muestreo en el currículo escolar chileno, por medio de las herramientas que son parte del Enfoque Onto-Semiótico. Además, ejemplificamos la presencia de los elementos estadísticos que conforman la configuración *el muestreo en el análisis exploratorio de datos* en una colección de libros de texto, según los niveles educativos correspondientes.

Tras el análisis realizado, pudimos identificar ciertos conflictos semióticos (Godino et al., 2007), potenciales entre los significados institucionales pretendidos sobre el muestreo, presentes en el currículo y los libros de texto chilenos. Al respecto, en cuanto a la configuración detallada en la sección anterior, detectamos conflictos de tipo epistémico en los textos de quinto y sexto básico, donde se introduce el término *muestra aleatoria* para presentar colecciones de datos, pero no se agrega comentario respecto a su significado, lo que hace descontextualizado su uso. De esta forma, motivamos la identificación anticipada de este tipo de conflictos, ya que los libros de texto representan un recurso preponderante a la hora de organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Vásquez y Alsina, 2015).

Además, a partir de trabajo de Ruiz-Reyes, Begué, Batanero y Contreras (2017), podemos comparar la presentación del muestreo en los lineamientos curriculares chilenos con las directrices españolas (MECD, 2014), los estándares americanos (NCTM, 2000; CCSSI, 2010) y las recomendaciones del proyecto GAISE (Franklin, Kader, Newborn, Moreno, Peck, Perry, Scheaffer, 2007). De esta forma, es posible identificar otros conflictos semióticos, pero ahora respecto a las directrices chilenas en sí mismas, donde no se contemplan conceptos fundamentales asociados a esta noción como sesgo y variabilidad muestral, mientras que en los demás casos si se contempla. Por tanto, destacamos estas diferencias para una mejor planificación del diseño curricular futuro de esta temática.

Finalmente, proyectamos este trabajo con un insumo útil para profesores de matemática, quienes en el marco del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), deben mostrar *competencia de análisis ontosemiótico*, es decir, ser capaces de identificar los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas implicadas en la solución de tareas instruccionales. De esta forma, en cuanto al muestreo en la escuela, esperamos que estos resultados sean un aporte para comprender la progresión de los aprendizajes de este tópico durante el recorrido escolar y los procesos estadísticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados pretendidos acerca del muestreo.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del Proyecto FCT-16-10974 (FECyT-MINECO), el Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y las Becas CONICYT Chile (PFCHA 72160521 y 72170025).

Referencias

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(8), 277-291.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Netherlands: Springer Netherlands.

CCSSI. (2010). *Common Core State Standars for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers*.

Centro de Estudios MINEDUC. (2017). *Estadísticas de la educación 2016*. Santiago, Chile. División de Planificación y Presupuesto.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) Report: a pre-k–12 curriculum framework. Alexandria: American Statistical Association.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la *reflexión guiada* sobre la práctica. Versión ampliada de la *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt, Chile.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school-mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 235- 246). New York: Springer.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics 6*, 187-205.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.

López-Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, *4*, 167-180.

MECD. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Enseñanza Básica y Media*. Santiago, Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares: Matemática, Educación Básica*. Santiago, Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares: Matemática, Educación Media*. Santiago, Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Autor.

Ruiz-Reyes, K., Begué, N., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2017). Un estudio comparado de los contenidos de muestreo en la Educación Secundaria Obligatoria en Chile. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(3), 67-83.

Saldanha. L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 257-270.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *19*(2), 441-462.

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical literacy using the media. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press and the International Statistical Institute.

Watson, J. (2004). Developing reasonig about samples. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 277–294). Dordrechy: Kluwer.

Anexo: libros de texto analizados

[L1] Cortés, C. (2018). *Matemática 1° Básico*. *Texto del Estudiante*. Santiago de Chile: Cal y Canto.

[L2] Urra, A., Córdova, C. y Quezada, C. (2017). *Matemática 3° Básico*. *Texto del Estudiante*. Santiago de Chile: Santillana.

[L3] Rodríguez, R., García, D., Romante, P. y Verdejo, A. (2018). *Matemática 4° Básico*. *Texto del Estudiante*. Santiago de Chile: SM.

[L4] Maldonado, L. y Castro, C. (2016). *Matemática 6° Básico*. *Texto del Estudiante*. Santiago de Chile: Santillana.

IDONEIDAD EPISTÉMICA DE PROGRAMAS FORMATIVOS SOBRE DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA

Epistemic suitability of training programs on statistical education

Ruz, F.[a], Contreras, J. M.[a], Molina-Portillo, E.[a] y Godino, J. D.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio acerca de la evaluación de programas formativos sobre didáctica de la estadística, para profesores de matemática. Siguiendo una metodología cualitativa y mediante un análisis de contenido, se identificó la presencia o ausencia del sistema de indicadores que conforman la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística (GVID-IDE), en cuatro programas chilenos de asignaturas de esta índole. Los resultados se organizan en el marco de la Teoría de Idoneidad Didáctica, de manera que dentro de la faceta epistémica, para las categorías reportadas (contenido estadístico y cognitivo), se sugieran puntos de mejora en los documentos analizados. Se concluye la factibilidad de implementar la GVID-IDE y se proyecta como un instrumento útil para quienes tengan la tarea de diseñar o evaluar este tipo de planes formativos.

Palabras clave: *formación de profesores, idoneidad epistémica, programas formativos, didáctica de la estadística.*

Abstract

In this work we present part of the results of a study about the evaluation of training programs on statistics education, for mathematics teachers. Following a qualitative methodology and through a content analysis, the presence or absence of the system of indicators that are part of the "Assessment Guide of Didactic Suitability of Educational Statistics Instruction processes" (AGDS-ESI) was identified in four Chilean training programs of this nature. The results are organized within the framework of the Didactic Suitability Theory, so that within the epistemic facet, for the categories reported (statistical and cognitive content), points of improvement in the analysed documents are suggested. We conclude the feasibility of implementing the AGDS-ESI, which is projected as a useful tool for those who have the task of designing or evaluating this type of training programs.

Keywords: *teachers' education, epistemic suitability, training programs, didactics of statistics.*

INTRODUCCIÓN

A partir de la última década del siglo XX, un creciente número de países se ha sumado a la corriente reformista en torno a la enseñanza de la estadística en la escuela, impulsada por diversos agentes educativos y políticos como un conocimiento útil y necesario para que todo ciudadano pueda desempeñarse de forma eficaz en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016; Ben-Zvi y Makar, 2016; ONU, 2015). Ejemplos de esta situación pueden ser España (MECD, 2014; 2015), Chile (MINEDUC, 2009; 2012; 2015) y Estados Unidos (NCTM, 2000; GAISE, 2005) donde se promueve su enseñanza dentro del currículo de matemática desde los primeros cursos de primaria con nociones básicas de la disciplina hasta terminar la trayectoria escolar con elementos de inferencia estadística. De esta forma, el lugar de la estadística y probabilidad se ha consolidado curricularmente y con él, se ha establecido un campo de investigación en educación estadística, como se resume en la revisión de Shaughnessy (2007).

Ruz, F., Contreras, J. M., Molina-Portillo, E. y Godino, J. D. (2018). Idoneidad epistémica de programas formativos sobre didáctica de la estadística. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 515-524). Gijón: SEIEM.

No obstante, al momento de implementar estas nuevas orientaciones existe una considerable variabilidad en la forma en que los docentes interpretan los materiales del currículo, algunos lo realizan fielmente a partir de las intenciones de los autores, pero otros no lo hacen (Tarr, Reys, Reys, Chávez, Shih y Osterlind, 2008; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013). Sumado a esto, Batanero, Burrill y Reading (2011) concluyen que muchos profesores se consideran mal preparados para enseñar estadística y afrontar las responsabilidades que este proceso supone. En consecuencia, reconocemos que el éxito de las nuevas directrices depende en gran medida de la formación de quienes tienen la tarea de su implementación, ya que los profesores son la fuerza impulsora de la reforma en educación estadística (Ben-Zvi y Makar, 2016).

Por tanto, asociamos la problemática descrita anteriormente a posibles deficiencias en la formación de profesores y la abordamos por medio de la elaboración de un instrumento que permita valorar, a través de las facetas y componentes de la Teoría de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013), procesos de formación programados y/o implementados sobre didáctica de la estadística. En consecuencia, en este reporte comunicamos los resultados de su implementación en cuatro programas de estudio provenientes de distintas universidades chilenas que forman profesores de matemática. De esta forma, comprobamos la factibilidad de aplicar el sistema de indicadores que conforman este instrumento y proyectamos su uso para identificar el grado de idoneidad didáctica de procesos de instrucción programados o implementados en didáctica de la estadística.

A continuación, se describe el marco teórico utilizado, resaltando la noción de idoneidad didáctica junto a sus facetas y componentes. Posteriormente, se detalla la metodología empleada en el proceso de implementación, el instrumento utilizado y la muestra de programas analizados. Luego, damos paso a la sección de resultados, que debido a la extensión máxima permitida de este escrito será acotada únicamente al análisis parcial de la faceta epistémica, identificando principalmente posibles puntos de mejora en los documentos analizados. Finalmente, se concluye con algunas reflexiones finales y proyecciones de la investigación. De esta forma, esperamos que este trabajo sea un insumo valioso tanto para formadores de profesores como para quienes tengan la labor de diseñar o evaluar planes formativos.

MARCO TEÓRICO

Los fundamentos en que se basa esta investigación se enmarcan en el sistema teórico denominado Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS: Godino, Batanero y Font, 2007). Dentro de la colección de herramientas que ofrece actualmente el EOS, para afrontar la problemática de evaluar programas formativos sobre didáctica de la estadística, recogemos de él las facetas y componentes que conforman la Teoría de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013). La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Un proceso de instrucción logrará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular de forma coherente y sistémica, los seis criterios parciales de idoneidad siguientes (Godino, 2013), referidos a cada una de las seis facetas o dimensiones implicadas en los procesos de instrucción matemática:

- *Idoneidad epistémica:* Referida al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos o implementados respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: Grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- *Idoneidad afectiva*: Representa el grado de implicación (interés, motivación, etc.) de los estudiantes con el proceso de estudio, que puede verse influenciado tanto por factores institucionales como personales.
- *Idoneidad interaccional*: Refleja el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas, que son parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, identifican y resuelven conflictos semióticos potenciales.
- *Idoneidad mediacional*: Expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Idoneidad ecológica*: Representa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo institucional y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Un profesor de matemática que tiene la tarea de enseñar estadística, necesita una serie de conocimientos como que se detalla en Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011), donde se utilizan las diferentes facetas de la idoneidad didáctica para describir y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística como categorías primarias de conocimientos del profesor. De esta forma, la noción de idoneidad didáctica y sus criterios proveen una guía para diseñar, implementar y evaluar procesos de instrucción para futuros profesores, como se desarrolla en Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) para el caso de didáctica de la matemática.

Por tanto, para evaluar procesos de instrucción, programados o implementados, sobre la formación de profesores es necesario distinguir dos focos de análisis a partir de las seis facetas descritas anteriormente. El primero, que se organiza dentro de la faceta epistémica, considera los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática que intervienen en la labor profesional del profesor en formación, respecto a sus estudiantes. Dentro de esta faceta, Godino et al. (2013) proponen un desglose que permite articular los aspectos epistémicos en seis contenidos didáctico-matemáticos: disciplinares, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos. Por otro lado, el segundo foco de análisis abarca las cinco facetas restantes, que involucran al formador con sus estudiantes, respecto al aprendizaje (faceta cognitiva), intereses y motivaciones (faceta afectiva), modos de interacción (faceta interaccional), uso de recursos (faceta mediacional) y conexiones intra e interdisciplinares (faceta ecológica) en el proceso formativo.

Finalmente, si bien el modelo utilizado se refiere específicamente a la formación de profesores en didáctica de la matemática, valoramos principalmente la amplia mirada con la que plantea analizar este proceso. Además, dado que el EOS se proyecta como un sistema teórico inclusivo, abierto y dinámico (Godino, 2012), es posible ajustarlo para su aplicación al caso de la formación en didáctica de la estadística.

METODOLOGÍA

Esta investigación se aborda por medio de un enfoque cualitativo con un alcance descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), cuya técnica utilizada para extraer información es el análisis de contenido (Andréu, 2011). De esta forma, se identifica la presencia o ausencia de cada uno de los indicadores que conforman la "Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística" (GVID-IDE: Ruz, Contreras y Molina-Portillo, en evaluación) en cuatro programas de formación chilenos, sobre didáctica de la estadística. Por tanto, en lo que sigue caracterizamos la muestra y el instrumento considerado, ejemplificando el proceso de implementación de la GVID-IDE en los programas analizados, de manera que los resultados sean más comprensibles por el lector.

La muestra

En Chile, la formación de profesores de matemática es regulada por el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) dependiente del Ministerio de Educación (MINEDUC). Esta institución, entrega autonomía a las entidades formadoras para establecer dentro de sus *mallas curriculares* (diagrama que muestra la secuencia de asignaturas contenidas en el plan de estudios) la diversidad de aspectos disciplinares, pedagógicos y didácticos que promuevan el perfil profesional que persigan. De esta forma, para cada una de las 30 universidades que actualmente ofrecen el grado de profesor de matemática en sí mismo o en conjunto a algún área afín, es posible proyectar la amplia gama de posibilidades que entrega el país para formar estos profesionales.

No obstante, a pesar de la diversidad de perfiles, este proceso formativo comparte en común entre las distintas universidades que la formación matemática o estadística se aborda en unas asignaturas y la formación didáctica en otras, denominadas *didáctica o enseñanza* de algún área en cuestión. Sobre esta base, tras investigar la totalidad de mallas curriculares vigentes para el curso 2018, se identificó que sólo en diez de ellas se planifica una asignatura sobre la enseñanza o didáctica de la estadística (u otro nombre equivalente en contenido). Por tanto, para la población “programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística en Chile”, se selecciona una muestra probabilística de cuatro documentos, por medio de un muestreo estratificado respetando la distribución geográfica del país, con una significación del 5% y una precisión de 0,16 (Cochran, 1972). La muestra analizada, se detalla en la Tabla 1.

Tabla 9. Programas de estudio analizados

Programa	Nombre de la asignatura	Zona geográfica
P1	“Didáctica de la Estadística y Probabilidades”	Norte
P2	“Didáctica de la Estadística”	Centro
P3	“Didáctica de la Estadística”	Centro
P4	“Matemáticas en la Enseñanza Media III”	Sur

El instrumento: GVID-IDE

Motivados por el hecho de que tanto las facetas y componentes de idoneidad didáctica no son observables directamente, en Ruz et al (en evaluación) fueron inferidas a partir de normas contenidas en documentos de consenso internacional que orientan la formación estadística de profesores (SET: Franklin et al., 2015) y específicos para la realidad chilena (MINEDUC y CPEIP, 2012), por medio de la técnica de análisis de contenido. Posteriormente, el instrumento resultante fue sometido a juicio de expertos y a confrontación con la literatura especializada en esta materia, culminando en la obtención de una GVID-IDE con un total de 90 indicadores distribuidos en cada una de las facetas de idoneidad didáctica. Por tanto, debido a que el número de indicadores que conforman cada faceta es distinto entre sí, cuantificamos de manera relativa al porcentaje de indicadores logrados por cada programa, para así elaborar una medida de idoneidad parcial según la característica analizada.

Sin embargo, a pesar del esfuerzo por cuantificar los resultados para su difusión y posibles comparaciones con otros estudios de este carácter, mantenemos la esencia de la noción de idoneidad didáctica, cuyo aporte principal es la identificación de puntos de mejora en los programas analizados. Por tanto, dada la extensión de la GVID-IDE, para contribuir a una mejor comprensión de los resultados, en la Tabla 2 se ejemplifica el proceso de implementación del instrumento en algunos indicadores que fueron satisfechos por los cuatro programas (donde no hay sugerencias de mejora). Y dejamos para la sección siguiente la presentación de algunos indicadores deficientes por cualquiera de los documentos analizados, que complementamos sugiriendo ciertos aspectos que puedan aportar en su mejora.

Tabla 2. Ejemplos del proceso de implementación de la GVID-IDE en los programas analizados

Indicador / Contenido didáctico-estadístico	Fragmento del programa analizado
Se promueve estar familiarizados con las concepciones, dificultades y errores comunes de los alumnos al aprender estadística, probabilidades e inferencia / *Contenido Cognitivo*	"…los estudiantes (futuros profesores) conocen y reconocen los errores y dificultades más comunes de los alumnos y los considera para la conducción del aprendizaje" (P1, p. 132)
	"La propuesta y desarrollo de una situación problema ayuda al profesor a prever con anticipación los saberes y dificultades en juego…" (P2, p. 5)
	"Identifica e investiga sobre las posibles causas de fracasos en el aula, tales como los errores frecuentes de los estudiantes, los obstáculos de aprendizaje…" (P3, p. 2)
	"Conoce dificultades y errores frecuentes en el aprendizaje de la estadística … probabilidades … e inferencia estadística" (P4, p. 11)
Se promueve el uso de recursos y TIC's que potencien el desarrollo de la enseñanza de la estadística / *Contenido Mediacional*	"Utilizar diferentes recursos para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la escuela, como TICs" (P1, p. 134)
	"Apreciación de la simulación digital como herramienta para el aprendizaje de la estadística y la probabilidad" (P2, p. 3)
	"Emplear diversos recursos para preparar clases de estadística considerando sus alcances y limitaciones" (P3, p. 2)
	"… estando capacitado para conducir el aprendizaje de estas prácticas básicas de la estadística incluyendo la familiarización con TIC…" (P4, p. 10)

RESULTADOS

En esta sección, describimos una parte los resultados obtenidos tras implementar la GVID-IDE en una muestra de cuatro programas de asignatura sobre didáctica de estadística en Chile. Como mencionamos al comienzo, dada la extensión máxima permitida de este documento, presentaremos únicamente los resultados de valorar dos de los seis contenidos didáctico-estadísticos que conforman la faceta epistémica de la GVID-IDE, el contenido estadístico y el cognitivo. En este sentido, en la Tabla 3 se muestra el número y porcentaje de indicadores satisfechos por cada programa, respecto a las características consideradas. Además, en el Anexo se presenta el listado con todos los indicadores evaluados y su condición de satisfecho o no por cada programa analizado.

Tabla 3. Número (y porcentaje) de indicadores satisfechos

Programa	Contenido didáctico-estadístico	
	Contenido Estadístico (n = 23)	Contenido Cognitivo (n = 8)
P1	14 (60.9)	4 (50.0)
P2	20 (87.0)	4 (50.0)
P3	6 (26.1)	7 (87.5)
P4	11 (47.8)	5 (62.5)

Al analizar los resultados sobre el *Contenido Estadístico*, nos referimos a la manera en que el profesor debe dominar la estadística, observable por medio de la interacción de cinco objetos primarios: situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones y argumentos. Como se expone en la Tabla 3, esta categoría abarca un total de 23 indicadores, de los cuales P2 alcanza el mayor porcentaje de logro con un 87.0%, mientras que P3 satisface un 26.1%. En términos generales, esta diferencia se produce debido a que en P3 se hacen escasas referencias al contenido mismo y centran su atención a aspectos principalmente vinculados a la enseñanza y el aprendizaje. Además, para contextualizar de mejor manera estos resultados, en la Tabla 4 se presentan algunos indicadores propuestos en Ruz et al (en evaluación), que fueron insatisfechos por uno o más de los programas analizados.

Tabla 4. Ejemplos de indicadores no satisfechos sobre el contenido estadístico de la faceta epistémica

Componente	Indicador	No satisfecho en
Situaciones Problema	"Se promueve el uso de problemas históricos que originaron el cálculo de probabilidades"	P2, P3, P4
Lenguajes	"Se propone el uso de tablas de doble entrada, diagramas de árbol y otras representaciones para la enseñanza de las probabilidades"	P1, P3, P4
Reglas	"Se propone transformar las preguntas de investigación en preguntas estadísticas"	P1, P2, P3, P4
Argumentos	"Se incluye evaluar y criticar la plausibilidad de conclusiones alternativas"	P1, P3, P4
Relaciones	"Se promueve interpretar los resultados de un estudio estadístico considerando aspectos como el sesgo y el alcance de inferencias"	P3, P4

Por tanto, identificamos posibles mejoras al programa que corresponda (Tabla 4), a través de la incorporación de más aspectos sobre el contenido estadístico como promover: (1) una mayor diversidad de situaciones problema que consideren la evolución histórica epistemológica de las probabilidades; (2) el uso de representaciones tabulares y gráficas en el trabajo con probabilidades; (3) el trabajo en las primeras etapas del ciclo de investigación empírica (PPDAC: Problema, Planificación, Datos, Análisis y Conclusiones), donde se conecta el problema con la estadística; (4) el desarrollo de argumentos que permitan cuestionar críticamente los resultados obtenidos; y (5) relacionar aspectos importantes sobre la distribución de los datos, como la asimetría, para interpretar conclusiones obtenidas. En resumen, se sugiere no asumir el saber disciplinar como un conocimiento previo, ya que la formación estadística de un futuro profesor no persigue los mismos objetivos que otro profesional y una asignatura destinada a su didáctica debería ser el lugar donde explicitar esas diferencias.

Por otro lado, en cuanto al *Contenido Cognitivo*, nos referimos al conocimiento especializado del futuro profesor acerca de los conocimientos previos, las adaptaciones según las diferencias individuales y el aprendizaje de sus estudiantes. De esta forma, como se muestra en la Tabla 3, a través de ocho indicadores se sintetiza este contenido, de los cuales P3 satisface el mayor porcentaje de logro con un 87.5% y quienes satisfacen en menor cantidad son P1 y P2, ambos con un 50.0%. A diferencia de la categoría anterior, en este caso los lugares obtenidos por P1 y P3 se invierten, respaldando lo mencionado en cuanto a que en P3 se consideran más aspectos sobre el aprendizaje de los estudiantes y en P1 sobre la disciplina. Además, complementamos estos resultados con algunos ejemplos de indicadores propuestos en Ruz et al. (en evaluación) que fueron no satisfechos, presentes en la Tabla 5.

Tabla 5. Ejemplos de indicadores no satisfechos sobre el contenido cognitivo de la faceta epistémica

Componente	Indicador	No satisfecho en
Conocimientos previos	"Se promueve desarrollar no sólo el conocimiento del contenido disciplinar sino que también su progresión y conexión entre los distintos niveles escolares"	P2
Adaptaciones curriculares	"Se promueve el uso pertinente de la evaluación diferenciada"	P1, P2, P3, P4
Aprendizaje	"Se incentiva centrar el foco de atención en los estudiantes del sistema escolar, sus características y modos de aprendizaje"	P1

Los ejemplos presentados en la Tabla 5, nos permiten identificar, según corresponda, algunas sugerencias de mejora en los planes analizados. En consecuencia, se propone incorporar nuevos aspectos del contenido cognitivo, como incluir: (1) el estudio de los conocimientos previos a través de un desglose progresivo y sistemático de los contenidos escolares, que permitan conectar los distintos niveles; (2) el uso de la evaluación diferenciada como una herramienta que permite realizar adaptaciones curriculares necesarias según las diferencias individuales entre los estudiantes; (3) el análisis del aprendizaje de los estudiantes como parte de una realidad educativa específica, considerando sus características y estilos propios. En resumen, se sugiere que en una asignatura destinada a la enseñanza de la estadística, se incluya dentro de su programación el estudio de las características cognitivas de los estudiantes como un todo, que considere la evolución progresiva de los contenidos, las diferencias individuales y los modos de aprendizaje particulares.

REFLEXIONES FINALES

En esta investigación, hemos abordado la problemática de evaluar procesos formativos programados de profesores sobre didáctica de la estadística. Para ello, en este reporte describimos la base teórica que sustentó la construcción de la GVID-IDE y los resultados de implementar aquellos indicadores que sintetizan parte de los conocimientos didáctico-estadísticos que todo profesor, en ejercicio o formación, debe dominar respecto a sus estudiantes desde el punto de vista institucional. Además, valorando el aporte de la noción de idoneidad didáctica, complementamos dichos resultados con algunas sugerencias específicas que permitan incrementar el grado de logro en las categorías analizadas.

En el campo de investigación sobre didáctica de la estadística, la formación de profesores ha sido un tópico de interés creciente (Ainley y Pratt, 2018), donde se ha reportado entre otras cosas, que los futuros profesores a cargo de guiar procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística, no se sienten capaces de lograrlo con las herramientas adquiridas en su formación inicial. Esta situación no es sorpresiva, ya que la profesión docente tiene la cualidad de ser cambiante en el tiempo, lo que debe mantener a los procesos formativos en constante revisión. En consecuencia, consideramos valioso proponer nuevas herramientas que permitan evaluar la idoneidad de las acciones formativas vigentes e identificar aspectos de mejora, para lograr niveles óptimos en esta área.

Por tanto, buscamos posicionar a la GVID-IDE como un instrumento que nos permita responder a la interrogante; *¿Qué tan idóneos son actualmente los procesos de instrucción en didáctica de la estadística para futuros profesores de matemáticas?* Y proponemos que no sea resuelta únicamente para la realidad chilena, sino que pueda extenderse a otras latitudes e imbricarse con sus exigencias locales. De esta forma, proyectamos la posibilidad de que este instrumento sea un insumo valioso tanto para formadores de profesores como para quienes tengan la responsabilidad de diseñar o evaluar planes formativos para futuros docentes en el campo de educación estadística.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y FCT-16-10974 (FECyT-MINECO) y el Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ainley, J. y Pratt, D. (2018). Part III: Contemporary issues and emerging directions in research on learning and teaching statistics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*, 357-502. Switzerland: Springer.

Andréu, J. (2011). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una versión actualizada.* Recuperado de: http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam, The Netherlands. Sense Publishers.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). Challenges for Teaching Statistics in School Mathematics, and Preparing Mathematics Teachers. En. C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education*, 407-418. New York: Springer.

Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016) International Perspectives on the Teaching and Learning of Statistics. En D. Ben-Zvi y K. Makar (eds.), *The Teaching and Learning of Statistics*, 1-19, Switzerland: Springer.

Cochran, W. (1972). *Técnicas de Muestreo*. México: Continental.

Franklin, C., Bargagllotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R. y Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. Recuperado de: www.amstat.org/education/SET/SET.pdf

GAISE. (2005). Guidelines for asessment and instruction in statistics education *PreK-12*. VA: ASA. Recuperado de: http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de la matemática. *Revemat: revista electrónica de educação matemática, 8*(1), 46-74.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la Idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación desde la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. En A. Estepa, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 49-68. Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Ortiz, J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for statistical pedagogical knowledge. En. C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 271-282). New York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. 6ta edición, México. McGraw Hill Education.

MECD. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte: España.

MECD. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte: España.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares, 7º básico a 2º medio.* Ministerio de Educación: Chile.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares, Educación Básica.* Ministerio de Educación: Chile.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Enseñanza básica y media.* Ministerio de Educación: Chile.

MINEDUC y CPEIP. (2012). *Estándares Orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. Recuperado de: http://portales.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

ONU. (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. Recuperado de: http://www.un.org/ga/search/view_doc.asp?symbol=A/70/L.1yreferer=/english/yLang=S

Ruz, F., Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (en evaluación). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción en didáctica de la estadística. *Boletim de educação matemática.*

Shaughnessy, J. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester y NCTM (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publications.

Tarr, J., Reys, R., Reys, B., Chávez, Ó., Shih, J. y Osterlind, S. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 247-280.

Anexo. Listado de indicadores reportados según su condición de satisfecho en los programas analizados

	Componente: Indicador(es)	Satisfecho en:			
		P1	P2	P3	P4
Contenido Estadístico	*Situaciones-Problema*				
	Se incluyen problemas significativos del mundo real que puedan ser desarrollados por medio del proceso de resolución de problemas estadísticos (PPDAC), enfatizando en la omnipresente variabilidad.	X	X	X	
	Se promueve el uso de problemas históricos que originaron el cálculo de probabilidades.	X			
	Lenguajes				
	Se incluyen distintas representaciones para explorar, resumir y describir patrones de variabilidad en datos univariados categóricos y cuantitativos (tablas, gráficos, resúmenes numéricos).		X		X
	Se proponen diversas representaciones para describir patrones de asociación de dos variables, ya sean categóricas (tablas de doble entrada) o cuantitativas (gráfico de dispersión).		X		X
	Se propone el uso de tablas de doble entrada, diagramas de árbol y otras representaciones para la enseñanza de las probabilidades.		X		
	Se promueve el uso del lenguaje escrito u oral para comunicar resultados de forma clara y precisa con el lenguaje estadístico.	X	X	X	X
	Reglas: Definiciones, proposiciones y procedimientos				
	Se promueve el trabajo con modelos estadísticos que describan la variabilidad de los datos (datos = estructura + variabilidad).	X	X	X	
	Se propone transformar las preguntas de investigación en preguntas estadísticas (que puedan ser resueltas por medio de datos en el ciclo PPDAC).				X
	Se propone identificar y distinguir los distintos tipos de variables y datos al abordar una pregunta estadística.	X	X		
	Se incluyen los conceptos, procedimientos y propiedades fundamentales de la estadística descriptiva.	X	X		X
	Se incluyen los principales conceptos, procedimientos y propiedades de las probabilidades y las variables aleatorias.	X	X		X
	Se promueven los conceptos y procedimientos primordiales para modelar la asociación entre variables por medio del análisis de regresión.		X		
	Se promueven los principales conceptos, procedimientos, técnicas y propiedades de la inferencia estadística paramétrica.	X	X		X
	Se incluye diferenciar situaciones donde sea necesario un estudio observacional o un estudio comparativo.		X		
	Argumentos				
	Se promueve la construcción de argumentos viables, claros y precisos que comuniquen la utilidad y poder del pensamiento estadístico.	X	X	X	X
	Se incluye evaluar y criticar la plausibilidad de conclusiones alternativas.		X		
	Se promueve la distinción entre el razonamiento estadístico correcto del defectuoso.	X			

	Relaciones				
	Se promueve establecer conexiones entre el diseño del estudio y la interpretación de resultados.	X	X	X	X
	Se promueve interpretar los resultados de un estudio estadístico considerando aspectos como el sesgo y el alcance de inferencias.	X	X		
	Se promueve relacionar la distribución de los datos y su variabilidad con modelos estadísticos sesgados y no sesgados.		X		
	Se incluye conectar la simulación con procedimientos inferenciales.		X	X	X
	Se promueve valorar el contexto y la variabilidad en todo el proceso de resolución de problemas estadístico.	X	X		X
	Se promueve valorar el rol de los datos y la necesidad de producirlos considerando la variabilidad.	X	X		
Contenido Cognitivo	*Conocimientos Previos*				
	Se propone trabajar desde el razonamiento informal para introducir la comprensión de tópicos de mayor dificultad para los estudiantes		X	X	X
	Se promueve desarrollar no sólo el conocimiento del contenido disciplinar sino que también su progresión y conexión entre los distintos niveles escolares.		X	X	
	Adaptaciones curriculares según diferencias individuales				
	Se incluye identificar estilos de aprendizaje, necesidades educativas especiales y talentos específicos de los estudiantes.			X	X
	Se promueve el uso pertinente de la evaluación diferenciada.				
	Se promueve la inclusión de todos los estudiantes con sus respectivas diferencias sociales, sexuales, étnicas, de apariencia física y desarrollo académico.	X		X	
	Aprendizaje				
	Se promueve estar familiarizados con las concepciones, dificultades y errores comunes de los estudiantes al aprender estadística, probabilidad e inferencia.	X	X	X	X
	Se incentiva centrar el foco de atención en los estudiantes del sistema escolar, sus características y modos de aprendizaje.	X	X	X	X
	Se promueve el uso de estrategias de enseñanza y evaluación para promover el aprendizaje.	X		X	X

UN ACERCAMIENTO A LA METODOLOGÍA LESSON STUDY PARA LA ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

An approach to Lesson Study methodology for the teaching of the Normal distribution

Salinas Herrera J.[a], Valdez Monroy J. C.[a] y Salinas-Hernández U.[a]

[a]Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En el presente trabajo se investiga el efecto del uso de la metodología Lesson Study (LS) en profesores de matemáticas del nivel medio superior. En esta experiencia participaron seis profesores y dos grupos distintos de alumnos que cursaban la asignatura de probabilidad y estadística. Se diseñó y aplicó, en dos ciclos, una lección sobre la Distribución Normal y, posteriormente, fueron discutidos los resultados de cada ciclo. El análisis de datos se centró en el uso de los recursos. Para ello, se articula dicha metodología con la teoría de la Aproximación documental de lo didáctico (ADD), cuya perspectiva es estudiar los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente. Entre los resultados, se muestra que el aspecto colaborativo de esta metodología permitió a los profesores reflexionar y tomar conciencia sobre la manera en que suelen usar los recursos en su práctica regular, y de esta manera contribuir en la mejora de su actividad docente.

Palabras clave: e*studio de clase, recursos, distribución normal.*

Abstract

In this paper, we investigate the effect of the use of the Lesson Study methodology in high school teachers of mathematics. Six teachers and two groups of students taking the course of probability and statistics participated in this study. A lesson on Normal Distribution was designed and applied, in two cycles, and subsequently, the results of each cycles were discussed. The data analysis focused on the use of resources. For this, LS methodology is articulated with the Documentational Approach of Didactics, whose perspective is to study the resources used by the teacher in his teaching practice. Our results show that the collaborative aspect of this methodology allowed teachers to reflect and become aware of the usual way they use resources in their regular practice, as well as to improve their teaching activity.

Keywords: *lesson study, resources, normal distribution.*

INTRODUCCIÓN

Lesson study (LS) es una metodología de trabajo colaborativo para el desarrollo profesional del docente. Se originó en Japón y desde la década de los 90 se ha adoptado en todo el mundo (Hart et al., 2011). Una característica central de esta metodología es relacionar la investigación y la docencia para apoyar el desarrollo profesional de los profesores, mediante la atención de la mejoría de los aprendizajes de los estudiantes (Murata 2011). Consiste en realizar un ciclo de cuatro etapas: *Organización*, en la que se establecen metas de aprendizaje de acuerdo con las necesidades de los estudiantes y con base en el currículum; *Planeación*, donde se elabora una lección dirigida al logro de tales metas; *Implementación*, cuando un miembro del equipo pone en práctica la lección en presencia de los demás participantes, quienes observan el desarrollo de la lección y toman notas; y *Revisión*, que consiste en comentar y discutir las observaciones hechas durante la implementación.

Salinas Herrera, J., Valdez Monroy, J. C. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 525-534). Gijón: SEIEM.

Finalmente, si es necesario, el proceso se repite, pero teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo (Murata, 2011).

No obstante que, LS ha dado resultados positivos en distintos escenarios (Cheung y Wong, 2014), en otros contextos sigue siendo una metodología relativamente nueva. Por ello, el presente trabajo busca contribuir con información sobre cómo la participación de profesores en un estudio de esta naturaleza refleja su visión sobre la práctica docente. Específicamente, se explora la manera en que profesores de matemáticas desarrollan lecciones que promueven la comprensión de los estudiantes a través del enfoque de LS. Este estudio se centra en la discusión y reflexión de un grupo de profesores de matemáticas de bachillerato durante su participación en un estudio diseñado para la enseñanza de la Distribución Normal, poniendo especial énfasis en el uso de los recursos y en el efecto que –a través de su apropiación y transformación– tienen en la práctica de dos de ellos (Gueudet y Trouche, 2009).

ANTECEDENTES

Hasta el momento, no se han ubicado trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal con estudiantes de nivel medio superior. Los pocos trabajos encontrados se ubican en el nivel universitario, y en cursos introductorios de estadística (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004). Similarmente, la investigación sobre formación de profesores para enseñar probabilidad es muy escasa (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016).

En el tema de las distribuciones de probabilidad confluyen tanto conceptos de estadística como de probabilidad y son un puente hacia la inferencia estadística, en la cual la distribución normal tiene un papel central. Sin embargo, este tema conlleva una gran complejidad matemática y su comprensión necesita de conocimientos previos profundos tanto de análisis matemático como de probabilidad (Carpio, Gaita, Wilhelmi y Sáenz de Cabezón, 2009). Todo ello, genera un reto importante para su enseñanza. Además, su abordaje en el bachillerato supone conocimientos previos de probabilidad, como la comprensión de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, poder diferenciar las características de estas aproximaciones y tener la capacidad de relacionarlas (Batanero, 2005), proceso en el cual, a su vez, subyacen los conceptos de variabilidad, aleatoriedad e independencia (Sánchez y Valdez, 2017).

Las distribuciones de probabilidad muestran importantes conexiones entre la probabilidad y la estadística a través de la noción de frecuencias relativas. Por ello, el enfoque frecuencial en la enseñanza es muy útil (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Asimismo, esta aproximación tiene la ventaja de que la tecnología permite aplicar de manera muy sencilla este enfoque. Usando la simulación se puede repetir un experimento un número grande de veces y se observa la convergencia. “Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma” (Gea, Parraguez y Batanero, 2017, p. 268).

De esta breve revisión de la literatura, se puede observar que la principal dificultad de los sujetos analizados es sobre el conocimiento del contenido. No obstante, los resultados de estos trabajos prefiguran las posibles dificultades que exhiban los estudiantes de nivel bachillerato, las cuales pueden ser consideradas, o no, en la etapa de planeación de LS.

La metodología LS

A partir de su puesta en escena, a finales de los noventa (Stigler y Hiebert, 1999), en diferentes trabajos se ha estudiado el potencial de LS para el desarrollo profesional de los profesores, principalmente en los niveles básicos del área de matemáticas. Al respecto, se ha observado que participar en un estudio de este tipo propicia el desarrollo de distintas capacidades de los profesores: el conocimiento del contenido disciplinar y la didáctica asociada, la formación de comunidades de aprendizaje y el diseño de recursos para la enseñanza (Lewis, 2009). Asimismo, su aplicación genera tres visiones importantes en los profesores para el buen desarrollo de su práctica: la *visión* *del investigador*, a través de plantear hipótesis relevantes sobre el aprendizaje de los estudiantes y generar los instrumentos adecuados para comprobarlas; la *visión del diseñador de currículum*, ya que se requiere de un conocimiento profundo de los temas y cómo se relacionan con los conocimientos previos y futuros; y la *visión del estudiante*, pues es necesario anticipar las posibles fortalezas y deficiencias de los estudiantes, y prever cómo pueden ser utilizadas para el logro de los aprendizajes (Fernandez, Cannon y Chokshi, 2003).

El ciclo de LS se desarrolla de la siguiente manera:

1. Considerar las metas para el aprendizaje y desarrollo de los estudiantes.
2. Planear una lección de investigación con base en estas metas.
3. Observar la lección de investigación y recolectar datos sobre el aprendizaje de los estudiantes y su desarrollo.
4. Utilizar estos datos para reflexionar sobre la lección y sobre la instrucción más ampliamente.
5. Si se cree conveniente, revisar y volver a enseñar la lección de investigación a un nuevo grupo de estudiantes (Murata, 2011, p. 2).

MARCO TEÓRICO

Para contribuir al desarrollo de la práctica docente y tener un mayor entendimiento de la complejidad de la práctica del profesor de matemáticas decidimos articular la metodología de LS con la *Aproximación documental de lo didáctico* (ADD) (Gueudet y Trouche, 2009, 2010). Aproximación cuya perspectiva es estudiar los recursos utilizados por el profesor en su práctica docente. Esto se lleva a cabo enfocándose en el uso de los recursos y el efecto que – a través de su apropiación y transformación (trabajo documental) – tienen en la reflexión de los profesores acerca de su actividad docente. A continuación, se presentan algunos elementos de la ADD de acuerdo con los objetivos de la presente investigación.

En esta teoría se utiliza el término recurso para, por un lado, dar énfasis a la variedad de artefactos y en donde, a su vez, un artefacto (físico o psicológico) es un medio cultural y social provisto por la actividad humana (e. g. computadoras y lenguaje); producidos con propósitos específicos (e. g. resolver problemas, Gueudet y Trouche, 2009). Y, por otro lado, para ampliar la serie de elementos disponibles para el trabajo de los profesores e incluir en particular, las interacciones entre maestros –e. g., para el diseño de lecciones- y entre maestro y alumno (Gueudet, Pepin y Trouche, 2012).

De esta manera, los recursos se conciben no solamente provenientes de objetos materiales, sino de todos aquellos que intervienen en la comprensión y resolución de problemas. La interacción que lleva a cabo el profesor con los recursos materiales y no materiales, en su práctica docente, es el motor de la génesis –surgimiento o transformación de éstos en otros; llamados "documentos"-, pues permite al profesor transformar esos recursos. El trabajo documental, que lleva a cabo el profesor con los recursos, propicia el "surgimiento o transformación" de éstos en "documentos"; este proceso dialéctico y dinámico es conocido como "génesis documental" (Gueudet y Trouche, 2010).

En la génesis documental, los documentos son creados a partir de un proceso en el cual los profesores construyen esquemas de utilización de los recursos para situaciones dentro de una variedad de contextos, proceso que se ejemplifica por la ecuación: "documento = recursos + esquemas de utilización" (Gueudet y Trouche, 2009, p. 205). Los esquemas comprenden reglas particulares de acción y se estructuran a través de los *usos* y los *invariantes operatorios,* en el transcurso de la actividad. Los *usos* corresponden a la parte observable del *esquem*a, que ocurre durante la acción del profesor. Mientras que los *invariantes operatorios* corresponden a la estructura cognitiva que guía la acción del profesor. Los *invariantes operatorios* son los elementos cognitivos que determinan la activación de los esquemas (Jaime y Escudero, 2011). Así, los esquemas sólo son observables a través de las acciones que lleva a cabo el sujeto al trabajar con los recursos (Gueudet y Trouche, 2009).

MÉTODO

En el estudio participaron seis profesores de matemáticas de bachillerato, quienes tienen una formación de investigación en educación matemática; dos doctores, dos doctorandos y dos con grado de maestría. Sobre su experiencia docente, dos son titulares en la institución con una antigüedad de 41 y 42 años, respectivamente; mientras que los otros cuatro son profesores de asignatura con una antigüedad que oscila entre 1.5 y 7 años. Además, cuatro participantes impartían el curso de Estadística y Probabilidad II al momento del estudio, por lo que se consensó trabajar en esta área. Se eligió enfocar el estudio en la distribución normal debido a la importancia de este modelo para describir diversos fenómenos físicos y sociales, además de que dentro de la misma materia es clave para la transición del análisis de datos a la inferencia estadística (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004).

En el primer ciclo el grupo de alumnos participantes estuvo integrado por 20 estudiantes de bachillerato (11 mujeres y nueve hombres de entre 17 y 19 años) del sexto semestre, quienes se encontraban tomando el curso de Estadística y Probabilidad II. De esta manera, los alumnos contaban con conocimientos sobre la materia que adquirieron en un curso anterior. Alrededor de la mitad del grupo adeudaba alguna materia de matemáticas, lo que se reflejaba en dificultades tanto operativas como conceptuales. Asimismo, la mayoría reconoció haber elegido la materia de estadística y probabilidad debido a que la consideran menos complicada de aprobar que cálculo. Por lo tanto, se trata de un grupo poco participativo debido a la apatía que sentían por la materia y/o la inseguridad que tenían sobre el conocimiento con el que contaban.

En el segundo ciclo, el grupo estuvo integrado por 33 estudiantes de bachillerato (25 mujeres y ocho hombres de entre 17 y 19 años) del sexto semestre, quienes se encontraban tomando el curso de Estadística y Probabilidad II. De esta manera, contaban con conocimientos previos sobre el tema que adquirieron en un curso anterior. Sin embargo, debido a que el profesor que impartió dicho curso no era el que actualmente se encontraba a cargo, no fue posible tener una descripción más precisa sobre el conocimiento con el que contaban los estudiantes al momento de llevar a cabo el estudio. Asimismo, el grupo inició el semestre aproximadamente un mes después de la fecha estipulada en el calendario académico, debido a una situación ajena a ellos.

La recolección de datos consistió en involucrar a los profesores participantes en cada una de las etapas que conforman la metodología del EC, las cuales fueron vídeograbadas. Como parte del primer ciclo, se diseñó, implementó y revisó una lección cuyo principal recurso fue la simulación con el *software Fathom*. Durante el segundo ciclo, hubo un rediseñó de la lección teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo, así como las características del nuevo profesor que la implementaría y del nuevo grupo de alumnos a quienes estaría dirigida. El primer ciclo duró cuatro sesiones; el segundo cinco. Todas las sesiones fueron de dos horas.

ANÁLISIS DE DATOS

Previo a la primera reunión, se contactó a cada uno de los participantes para explicarles cuál era el propósito del estudio y pedirles que diseñaran una lección para la enseñanza de la distribución normal. Una vez reunidos, se discutieron tres propuestas: una cuyos principales recursos fueron el *software Fathom* (interpretación frecuencial) y una actividad sobre la aproximación normal de la binomial; otra apoyada en el *software Geogebra*, enfocada en la interpretación clásica; y una en la que se mencionó de forma general los pasos a seguir para la enseñanza del tema. Finalmente, se consensó implementar la primera propuesta, ya que estaba mejor delineada y hacía más énfasis en el aspecto conceptual, pero manteniendo siempre el vínculo con los datos.

Primer ciclo

A continuación, se describe el conjunto de recursos utilizados por el profesor en el transcurso de la lección, las regularidades que fueron observadas en sus acciones durante la etapa de implementación, y los invariantes operativos que se infieren de dichas acciones.

Recursos. El inicio de la lección se apoyó en la aproximación normal de la binomial. Se planteó por escrito la siguiente situación:

> *Actividad I*. María ha acudido a presentar un examen de ingreso a la Universidad. El examen es de opción múltiple y consta de 200 preguntas. Cada pregunta cuenta con tres opciones de respuesta, de las cuales sólo una es correcta. El mínimo de preguntas correctas para aprobar el examen, e ingresar a la Universidad, es 120. María contesta correctamente 75 preguntas y las restantes al azar debido a que no sabe la respuesta. ¿Qué probabilidad tiene María de ingresar a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Para diseñar esta tarea, el profesor consideró una experiencia previa con un estudiante expuesto a una situación similar. Una vez exploradas las posibles respuestas de los estudiantes se buscó que resolvieran la tarea mediante la simulación computacional con el *software Fathom*, el cual ya conocían. A partir de este recurso se buscó poner en juego los conceptos de curva de densidad y curva normal, se mostraron las características y las propiedades de la distribución normal (entre ellas la regla empírica), y se ilustró el proceso de estandarización. Otros recursos utilizados fueron; hojas de trabajo con problemas sobre la regla empírica y la distribución normal estándar, una presentación para mostrar aspectos relevantes de la lección, y archivos con las simulaciones que se fueron construyendo. Finalmente, se aplicó el siguiente cuestionario para evaluar si se alcanzó la meta de aprendizaje sobre la distribución normal estándar:

1. El valor estandarizado para $x = 67$, cuando $\mu = 63$ y $\sigma = 1.5$, de una población que tiene un comportamiento aproximadamente normal, es:
2. Se sabe que una persona elegida al azar requiere de 555 horas para completar un trabajo; si se conoce que estos tiempos se distribuyen normalmente con media de 500 horas y con desviación estándar de 100 horas, ¿cuál es el valor estandarizado que corresponde a este tiempo?
3. Si una variable aleatoria se distribuye normalmente con $\mu = 5.4$ y $\sigma = 1.6$, la probabilidad de que su valor se encuentre entre 3.8 y 7 es:
4. Si una variable aleatoria se distribuye normalmente con media de 16 y desviación estándar de 2, entonces la probabilidad $P(14 < x < 18)$ es aproximadamente:
5. El porcentaje de grasa de un tipo de queso es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 4.30% y desviación estándar 0.52%. Para una porción de este queso, elegida al azar, la probabilidad de que su contenido de grasa sea menor que 4.82% es:
6. La estatura de los estudiantes de una escuela se distribuye aproximadamente de manera normal con media de 1.64 m y una desviación estándar de 11 cm. Si se selecciona aleatoriamente a uno de estos estudiantes ¿cuál es la probabilidad de que su estatura sea al menos de 1.70 m?
7. Si los contenidos de grasa de las piezas de carne de una bodega siguen una distribución aproximadamente normal con media de 100 gramos y desviación estándar de 15 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza de carne elegida aleatoriamente tenga un contenido de grasa entre 70 y 112 gramos?

Usos. Durante la primera sesión, correspondiente a la implementación, se planteó por escrito la Actividad I. El objetivo fue 'generar la necesidad en los estudiantes de un recurso distinto de la distribución binomial para resolver la tarea'. Algunos estudiantes intentaron aplicar esta distribución, pero se dieron cuenta de lo poco factible que era debido al número de cálculos que involucraba. También, debido a la experiencia que tenían con el software, hubo quienes antes de considerar la distribución binomial propusieron simular la situación, ya que era lo que se solía hacer cuando en la clase se utilizaba el software.

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes, se simuló la experiencia para ‘dar una respuesta aproximada’ y ‘hacer la experiencia más vivencial’. A pesar de la familiaridad de los alumnos con el software, la mayoría aún necesitaba la guía del profesor para llevar a cabo la simulación, pero una vez hecha casi todos eran capaces de interpretarla. Posteriormente, se les propuso imaginar un escenario en el que no contaran con el software (con la finalidad de ‘mantener la necesidad de otro recurso distinto de la distribución binomial’), aunque este se siguió utilizando como un recurso para el desarrollo conceptual’ (Maxara y Biehler, 2006). Así, en la primera sesión se desarrollaron los conceptos de curva de densidad y curva normal. Durante la segunda se abordó el concepto de distribución normal; se utilizó el software para mostrar sus características y propiedades, poniendo especial énfasis en la regla empírica. Finalmente, en la tercera sesión se hizo explícito el proceso de estandarización para destacar el carácter conceptual sobre el procedimental de la distribución normal estándar. Después de cada una de las dos últimas sesiones las hojas de trabajo se emplearon para ‘fortalecer el aspecto operativo y de resolución de problemas’. Cabe señalar que hubo algunas dificultades con el manejo del software que no tuvieron consecuencias importantes en el desarrollo de la lección.

Invariantes operatorios. De las acciones del profesor que fueron observadas durante la implementación, se pueden destacar los siguientes invariantes operatorios:

- ‘Los estudiantes se involucran mejor con una situación que les es familiar, tanto vivencial como conceptualmente’;
- ‘Entienden y recuerdan mejor un concepto cuando surge como una necesidad’; ‘La simulación (el aspecto visual y dinámico del *softwar*e) facilita la comprensión de las ideas estadísticas’;
- ‘Los ejercicios fortalecen la comprensión alcanzada mediante la simulación’.

Segundo ciclo

Al finalizar el primer ciclo, se llevó a cabo una reunión para discutir de forma general lo acontecido; se destacaron los aspectos positivos de la lección, como la forma en que se utilizó el *software*, y aquellos elementos que no fueron suficientemente consolidados, como el trabajo con lápiz y papel. A partir de los resultados, se comenzó a bosquejar una nueva lección que sería implementada por una profesora en un grupo distinto de alumnos. Sobre el uso del *software Fathom*, la profesora no lo utilizó tanto como en el ciclo anterior, debido a la poca experiencia de sus alumnos en su manejo. Además, este grupo tenía deficiencias en el tema de probabilidad. Estas consideraciones se revelan en el conjunto de recursos que la profesora usa durante la lección, la forma en cómo los utiliza y la idea que tiene acerca de la enseñanza de la distribución normal. A continuación, se describen cada uno de estos elementos.

Recursos. La lección inició con una actividad extra clase que consistió en que los alumnos analizaran el video ‘Redes 125: Descifrar las probabilidades en la vida – Matemáticas’, y respondieran algunas preguntas. Una vez compartidas las respuestas durante la primera sesión, se planteó una actividad en la que, en equipos, analizaron un documento histórico sobre Galileo Galilei, en el que hace alusión a la distribución normal en el tratamiento de los errores al medir la distancia de la tierra a las estrellas; se mencionan varias características de la distribución y los alumnos tenían que elegir cuál histograma, de ocho que se proporcionaban, se ajustaba mejor con dichas características. Durante esta misma sesión, se propuso la situación del examen que fue utilizada en el primer ciclo, con la diferencia de que se agregaron las siguientes preguntas auxiliares que destacaban información importante para su solución:

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una respuesta buena?
2. ¿Cómo definirías a la variable aleatoria?
3. ¿Cuántas preguntas le faltan por contestar?
4. ¿Qué valores toma la variable aleatoria que acabas de definir?
5. ¿Cuántas respuestas, aparte de las que ya contestó, necesita contestar María para aprobar el examen?
6. ¿Crees que María ingrese a la Universidad?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que María ingrese a la Universidad? Justifica tu respuesta.

Después, dicha situación fue simulada con *Fathom*, siguiendo un procedimiento distinto al llevado a cabo en el primer ciclo. Debido a la poca experiencia de los alumnos con el software, este sólo se utilizó una vez más durante la segunda sesión para corroborar las características y propiedades de la distribución normal, y para trabajar la regla empírica. En adelante, la profesora se apoyó en actividades con lápiz y papel, y en el trabajo en equipo, valiéndose de material histórico, para introducir la noción de curva normal, y de la analogía, para hablar de la estandarización. Otros recursos utilizados fueron; hojas de trabajo con problemas sobre la regla empírica y la distribución normal estándar, y una presentación como apoyo para el desarrollo de la lección. Finalmente, se aplicó el mismo instrumento de evaluación que en el primer ciclo.

Usos. En la primera sesión se discutieron las respuestas que los alumnos dieron a las preguntas sobre el video y se propuso la actividad sobre el tratamiento que hizo Galileo de los errores en las mediciones. Con estos recursos, la intención fue 'motivar a los estudiantes sobre la importancia de la probabilidad en la vida cotidiana' y 'motivarlos a través de la historia sobre la distribución normal', respectivamente. Enseguida, se planteó por escrito la situación del examen. Al igual que en el primer ciclo, el objetivo fue 'generar la necesidad en los estudiantes de un recurso distinto de la distribución binomial para resolver la tarea'. Después se llevó a cabo la simulación de la experiencia, pero en esta ocasión la finalidad fue 'hacer palpable la importancia de la distribución normal', a través de observar su presencia en un contexto distinto al de la medición de errores.

Durante la segunda sesión, se propuso a los alumnos imaginar un escenario en el que no contaran con el software, con la intención de 'mantener la necesidad de otro recurso distinto de la distribución binomial'. Después se presentaron dos hechos históricos sobre la curva normal y, enseguida, se propuso una actividad escrita en la que aparecía esta curva. El objetivo de ambas actividades fue 'motivar la noción de curva normal e identificar sus características y propiedades'. Posteriormente, se utilizó el software para 'corroborar las propiedades identificadas' y como un 'referente para el desarrollo conceptual', pues se buscó que los alumnos dedujeran la regla empírica mediante esta herramienta. Sin embargo, debido a su poco conocimiento del funcionamiento y de la interpretación frecuencial de probabilidad, aunado a la poca experiencia de la profesora con la utilización del *software* como un recurso didáctico, este ya no fue considerado en sesiones posteriores.

Debido al resultado poco favorable del software, en la tercera sesión se utilizó un problema escrito para 'promover la compresión de los alumnos sobre la regla empírica'. Enseguida se retomó la situación del examen con el propósito de 'generar la necesidad de una herramienta más adecuada que esta regla para resolver la tarea', y como una forma de 'introducir la estandarización'. El uso de una analogía y una actividad escrita sobre la comparación de las estaturas de dos poblaciones tuvo como finalidad 'desarrollar de manera informal el concepto de distribución normal estándar'.

Después de una semana de suspensión de labores, durante la cuarta sesión, en un contexto más tradicional de enseñanza, la profesora explicó cómo calcular probabilidades mediante la distribución normal estándar con la finalidad de ‘formalizar este concepto’, y se propusieron problemas, en ésta y en la quinta sesión, para ‘fortalecer la compresión alcanzada’.

Invariantes operatorios. De las acciones de la profesora que fueron observadas durante la implementación, se pueden inferir los siguientes invariantes operatorios:

- ‘Los recursos de divulgación (videos y lecturas históricas) generan el interés de los estudiantes’; ‘El trabajo en equipo promueve su inclusión y participación’;
- ‘Los estudiantes comprenden mejor los conceptos que ellos construyen’; ‘El uso de un software puede limitar en lugar de favorecer la comprensión de los estudiantes, si no tienen experiencia en su manejo’;
- ‘Trabajar con casos particulares (sin el *software*) también promueve la comprensión de los estudiantes’;
- ‘Los ejercicios fortalecen la comprensión alcanzada’.

Reflexiones de los profesores

Después de cada una de las sesiones de implementación, se llevó a cabo una reunión entre los profesores para reflexionar sobre lo acontecido. Fueron varias las discusiones que se entablaron en torno al uso de los recursos. Durante el primer ciclo, previo a la implementación, había quienes parecían escépticos sobre utilizar el *software* como el principal recurso de la lección:

> P1: Me parece que ahí puede ser una situación que reduce la aplicabilidad de la estrategia, porque presupone [...] un profesor que va a usar el *software*, pero en general no se usa. Entonces siento que ese enfoque podría limitarnos en algún sentido.

Por otro lado, había quienes consideraban adecuado el uso de este recurso:

> P2: Esta parte [*una de las simulaciones que se propone para la lección*] es muy ilustrativa e interesante porque la distribución no estandarizada la modificas como quieres, y se ve que la estandarizada se mantiene igual.

Posterior a la implementación, tal parece que la mayoría de los profesores vieron bien la posibilidad de utilizar el *software* como principal recurso de la lección. Aunque había quienes mantenían su reserva, como la profesora encargada de llevar a cabo el segundo ciclo, debido a las características de sus estudiantes y a lo observado en la implementación:

> P3: Tal vez no utilice tanto [*el software*] como lo hizo [*el profesor encargado del primer ciclo*]. [*Los alumnos*] no saben tanto *Fathom*, y son muchos [...], si van llegando tarde, o cualquier [*problema técnico*], se pierden.

De esta manera, durante el segundo ciclo se disminuyó la utilización del s*oftware*, el cual efectivamente resultó ser una limitante para el buen desarrollo de la lección, debido a la poca experiencia de los alumnos en su uso y a su desconocimiento de la interpretación frecuencial de probabilidad, aunado a la poca experiencia de la profesora utilizándolo como un recurso para la enseñanza. No obstante, otros recursos empleados, como el material de divulgación (videos y lecturas históricas), analogías y ejemplos específicos, y la forma en cómo los utilizó la profesora, fueron bastante ilustrativos sobre cómo se puede trabajar la lección sin el *software*.

En particular, para el profesor encargado del primer ciclo, quien durante la exposición de su propuesta señaló:

> P4: No puedo imaginar cómo enseñar esto [*la distribución normal*] sin el *software*.

Posteriormente, a partir de lo observado en el segundo ciclo menciona:

P4: Me agradó mucho esa actividad [*analogía seguida de la comparación de dos poblaciones*], porque siento [...] que es muy accesible […] para que [*los alumnos*] entiendan qué es estandarizar [...] Creo que, si se inicia así, y después se tiene en cuenta el *software* [...] eso reforzaría lo que les acabas de decir.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este primer acercamiento a la metodología de LS, observar y comentar sobre la práctica que desarrollaron los profesores, desde el diseño de una lección hasta su puesta en marcha, generó un espacio propicio para aprender sobre la enseñanza y cómo puede ser mejorada. Como menciona Lewis (2009), participar en un estudio de esta naturaleza mejora el conocimiento del contenido para la enseñanza, los recursos que se generan, así como el trabajo colaborativo con otros profesores. De manera particular, en esta investigación se infiere el conocimiento de los profesores (*invariantes operatorios*) a partir de la parte observable de los esquemas (usos), dependiendo del tipo de recurso.

El conocimiento pedagógico fue el que más se hizo presente, pues fueron dos posturas de enseñanza las que se pusieron en juego: una en la que se abordó el tema de forma general, teniendo como principal recurso el *software*; y otra en la que se trató de manera particular, a partir del trabajo con lápiz y papel. En ambos escenarios, fueron diversas las reflexiones tanto favorables como desfavorables en torno a estos recursos y a la forma en cómo fueron utilizados, pero siempre dirigidas a la mejora de la lección. Las diferencias de los grupos del primero y segundo ciclo tuvieron impacto en los esquemas de enseñanza y, por consiguiente, incidieron en el trabajo documental.

En síntesis, de acuerdo con el marco teórico, los profesores se basaron en un conjunto de *recursos* para su trabajo documental, en el cual ocurrió un proceso de génesis que dio origen a un *documento* (en nuestro caso, la lección a investigar). En este proceso el profesor construyó *esquemas de utilización* a partir del conjunto de recursos del que dispuso. Dichos esquemas estuvieron constituidos por una parte observable (*usos*) y otra invisible (*invariantes operatorios*), siendo ésta última la más importante, ya que refleja las ideas que los profesores tienen sobre cómo debe ser la enseñanza.

Asimismo, experimentar ambas formas de enseñanza amplió el horizonte de los profesores, particularmente en el uso del *software*, ya que para algunos era la primera vez que presenciaban una lección con este elemento como principal recurso.

Por otro lado, es pertinente decir que hay una relación dialéctica entre los recursos y el documento que se genera, ya que este último puede jugar el papel de recurso para la generación de un nuevo documento.

Es necesario mencionar que al ser este un primer acercamiento a la metodología, hay algunos aspectos que se deben mejorar y otros que se deben evitar. Por ejemplo, generar un guion formal en el que se indique que aspectos se deben observar para saber si los objetivos de la lección son alcanzados, y tratar de no ser un distractor en el desarrollo de ésta. Si se mejoran estos, y otros, aspectos, LS se muestra claramente como una alternativa prometedora para la mejora de la actividad docente en el bachillerato.

Referencias

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2004). Students’ reasoning about the Normal distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 257-276). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. New York: Springer.

Carpio, M., Gaita, C., Wilhelmi, M. y Sáenz, A. (2009). Significados de la distribución normal en la universidad. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander.

Cai, J. y Wang, T. (2010). Conception of effective mathematic teach- ing with a cultural context: perspectives of teachers from China and the United States. *Journal of Mathematics Teacher Educa- tion, 13*, 265-287.

Cheung, W. y Wong, W. (2014). Does Lesson Study work? A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 3*(2), 137-149.

Fernandez, C., Cannon, J. y Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Gea, M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M .L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documens, travail du professeur et genèses documentaires. Ressources vives; le travail documentaire des professeurs en mathematiques, Gueudet, G., y Trouche, L. (Editores), 3, 57-74.

Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (Eds.). (2012). *From text to «lived» resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. Dordrecht : New York: Springer.

Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: learning together*. New York: Springer.

Jaime, E. y Escudero, C. (2011). El trabajo experimental como posible generador de conocimiento en enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 371-380.

Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in Lesson Study? *Educational Action Research, 17*(1), 95-110.

Maxara, C. y Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7*. Salvador de Bahía, Brasil. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7C1_MAXA.pdf.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of Lesson Study. En L. C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer.

Sánchez, E. y Valdez, J. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 127-143.

Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Nueva York: The Free Press.

EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN ACTIVIDADES DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

The probabilistic reasoning of high school students in binomial distribution activities

Sánchez, E.[a] y Carrasco, G.[b]

[a]Cinvestav, [b]Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

El presente trabajo se enfoca en el razonamiento probabilístico que estudiantes de bachillerato exhiben al responder un cuestionario/actividad que los conduce a la construcción de distribuciones binomiales simples. Se describe el desempeño general que muestran en las preguntas del cuestionario y se resaltan algunos patrones de razonamiento sobre la manera de construir árboles combinatorios y manejar la noción de variable aleatoria. Además, se da cuenta de las respuestas a las preguntas que se les formularon durante actividades de simulación. El objetivo es resaltar los principales patrones de razonamiento que se presentan en la construcción de la binomial así como la aplicación de esta para responder el problema y resolver una tarea de predicción. El estudio se llevó a cabo con 34 estudiantes de bachillerato quienes respondieron un pretest y un postest entre los cuales realizaron actividades de simulación física y de simulación con ayuda de software.

Palabras clave: *razonamiento probabilístico, distribución binomial, árbol combinatorio, variable aleatoria.*

Abstract

The present work focuses on the probabilistic reasoning that high school students exhibit when answering a questionnaire / activity that leads them to the construction of simple binomial distributions. The general performance shown in the questions of the questionnaire is described and some reasoning patterns are highlighted on how to construct combinatorial trees and to manage the notion of random variable. In addition, the responses to the questions that were asked during simulation activities are reported. The objective is to highlight the main reasoning patterns that are presented in the construction of the binomial as well as the application of this to answer the problem and solve a prediction task. The study was carried out with 34 baccalaureate students who answered a pre- and post-test between which they carried out physical simulation activities and simulations with the help of software.

Keywords: *probabilistic reasoning, binomial distributions, combinatorics tree, random variable.*

INTRODUCTION

En el concierto de la educación matemática, es bien conocido que la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad resultan ser termas problemáticas. Se ha sugerido (Shaughnessy, 1992, Jones, Langrall y Mooney, 2007) que una de las causas del fracaso en la enseñanza de estos temas se debe a la prevalencia de un enfoque centrado en la reproducción de procedimientos de cálculo en detrimento del desarrollo de la comprensión y el razonamiento. Cabe mencionar que el razonamiento en situaciones de incertidumbre tiene particularidades que lo hacen diferente al razonamiento matemático, ya de por sí arduo de llevar a cabo. En este estudio nos ha interesado poner énfasis en el razonamiento probabilístico de los estudiantes en un tema emblemático de la probabilidad, a saber, la distribución binomial.

Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 535-543). Gijón: SEIEM.

Nos preguntamos cómo razonan los estudiantes en tareas relacionadas con la construcción de distribuciones binomiales. Para avanzar en la respuesta diseñamos un cuestionario en el que conforme se van respondiendo preguntas relacionadas con dos problemas se construyen las distribuciones binomiales b(x, 3, ½) y b(x, 3, ⅓). Este cuestionario se aplica antes y después de actividades de simulación. En todo este proceso nos interesa destacar el razonamiento alrededor de las ideas de combinatoria, variable aleatoria, distribución y variabilidad que ponen en juego los estudiantes durante la realización de la tarea.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una de las nociones más importantes de la probabilidad es la distribución binomial, entre otros motivos, por la variedad de sus aplicaciones y por su relación con la distribución normal. Aunque hay una gran variedad de propuestas didácticas de situaciones y recursos para introducir esta distribución en la enseñanza media y superior, son escasos los estudios didácticos que nos informan sobre la manera en que los estudiantes construyen su conocimiento acerca de esta distribución y aprenden a razonar con ella. Una de las dificultades para llevar a cabo investigaciones sobre este tema es la complejidad que presenta, pues su construcción conceptual se basa en muchos otros conceptos de probabilidad que a su vez también son difíciles. En particular, para la comprensión de la distribución binomial son necesarios conceptos de combinatoria y de álgebra, así como la noción de probabilidad, tanto en su enfoque clásico como frecuencial, y la independencia estocástica. En este estudio, hemos llevado a cabo una investigación de diseño, pues se proponen unas actividades dirigidas a que los estudiantes construyan dos distribuciones simples y en el transcurso de su realización tomamos datos para informar sobre los razonamientos que despliegan en el proceso. Así, nos preguntamos ¿Qué patrones de razonamiento ponen en juego los estudiantes en la construcción y uso de la distribución binomial?

ANTECEDENTES

Landín (2013) sostiene que la investigación sobre distribución binomial es escasa y dispersa, pues la literatura que se refiere explícitamente al tema es poca y aborda distintos niveles escolares, además de pertenecer a diferencias marcos teóricos y metodologías. Por esta razón no se ha consolidado un núcleo de resultados sobre la binomial para el nivel bachillerato, como sucede con otros temas del contenido curricular de probabilidad (Batanero y Sánchez, 2005). Landín (2013) divide su revisión sobre distribución binomial en 3 tipos de estudios: a) propuestas de enseñanza, b) investigaciones didácticas y c) estudios sobre creencias, falsas concepciones y dificultades. Aquí mencionamos 3 trabajos del tipo del inciso b, que ilustran el comentario de Landín. Alvarado y Batanero (2007) analizan la comprensión teórica y práctica de la aproximación normal a la distribución binomial alcanzada por un grupo de estudiantes de ingeniería después de un experimento de enseñanza apoyado en tres tipos de configuraciones: manipulativa, computacional y algebraica. Observaron que los estudiantes fueron capaces de comprender la variable aleatoria binomial como la suma de variables de Bernoulli pero aún cayeron en sesgos debidos a la heurística de representatividad, aun cuando realizaron simulaciones computacionales. Abrahamson (2009) realiza un estudio de caso con tres estudiantes graduados, explorando su razonamiento frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). Desde un enfoque semiótico muestra la relación entre el uso de tres tipos de instrumentos mediadores y los razonamientos de los estudiantes en la construcción de la distribución. Bill, Watson y Gayton (2009) realizaron un estudio con 19 estudiantes de grado 10 (13-14 años) donde se examina un problema binomial con base en tres enfoques: clásico, el triángulo de Pascal y un enfoque con simulación utilizando el software Fathom. Los datos fueron colectados a través del pretest y postest aplicados bajo condiciones de examen tradicional; los ítems comunes al pretest y al postest permitieron una evaluación (con base en la taxonomía SOLO) del desarrollo de la comprensión de los conceptos alcanzados debido a las actividades con Fathom.

MÉTODO

En esta investigación participaron treinta y cuatro estudiantes del tercer grado de educación media superior (de 17 a 18 años de edad) inscritos en una modalidad de bachillerato de la Universidad Nacional (UNAM). Su antecedente de estudio en el área fue un curso semestral en el que abordaron dos grandes temas: estadística descriptiva y probabilidad. Los subtemas de probabilidad fueron espacio muestral y eventos, definiciones de probabilidad y probabilidad condicional e independencia. En el periodo en el que se realizó la investigación estaban en el segundo curso semestral de estadística y probabilidad, y habían estudiado los subtemas de variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad. De manera que, los jóvenes estaban preparados para la actividad propuesta en esta investigación.

El estudio consistió en 4 etapas. 1) Aplicación de un cuestionario/actividad (que sirvió como pretest y postest). 2) Actividades de simulación física acompañadas de preguntas para responder en hojas de trabajo. 3) Actividades de simulación en computadora usando el software Fathom, también acompañadas de preguntas. En el cuestionario/actividad (ver Appendice) se formularon dos situaciones ("Experimento aletorio 1" y "Experimento aleatorio 2") que se pueden modelar usando distribuciones binomiales b(x, 3, ½) y b(x, 3, ⅓) respectivamente. Se plantearon varias preguntas a los estudiantes que los conducían a construir la distribución binomial correspondiente para cada situación. Además, se les formuló una pregunta para ver cómo utilizaban la distribución para hacer una predicción de las frecuencias de cada valor de la variable en 1000 repeticiones del los experimentos.

En las actividades de simulación física se les pidió repetir 48 veces experimentos físicos equivalentes a las situaciones de "respuestas a un examen" planteadas en el cuestionario/actividad inicial. Tras una discusión grupal sobre posibles métodos para realizar las simulciones, se usaron monedas en la situación con p = ½ y, para la otra situación, botellas opacas (pintadas de negro) con el cuello transparente y con tres canicas en su interior (botella de Brousseau) de manera que la probabilidad de éxito fuera p = 1/3. Se formularon preguntas a los estudiantes, previas a la realización de las simulaciones, con el propósito de que identificaran similitudes entre el experimento modelado y el original ("respuestas a un examen") y de que previeran la cantidad de veces que ocurriría cada valor de la variable aleatoria en las distintas simulaciones. Después de realizarlas, se hicieron preguntas sobre los valores más frecuentes y menos frecuentes para ver si identificaban la forma de la distribución, y se les pidió recuperar la distribución de probabilidad teórica para compararla con la distribución de frecuencias relativas.

En la tercera etapa, los estudiantes fueron instruidos para llevar a cabo simulaciones con apoyo del software Fathom utilizando una aplicación elaborada por los investigadores. Por cada experimento aleatorio se realizaron dos simulaciones una de 50 repeticiones y otra de 1000; además se construyeron y analizaron gráficas de barras con los resultados obtenidos. Después de una pregunta para fijar la atención de los estudiantes en las similitudes de las dos formas de simulación (física y en computadora), en las hojas de trabajo se les pidió que registraran el número de veces que se obtuvo cada uno de los valores de la variable aleatoria tanto en la simulación de 50 repeticiones como en la 1000 y que vieran en cuál de las dos simulaciones se observaba mayor variación al aplicar la instrucción "randomize", que genera nuevas muestras aleatorias del tamaño inidicado. Finalmente, se pidió que en parejas escribieran sus observaciones.

RESULTADOS

Dividimos la exposición de los resultados en dos partes; la primera consiste en la descripción general de las respuestas a 4 preguntas de los cuestionarios (experiencia 1 y experiencia 2) correspondientes tanto a la aplicación inicial (pretest) como a su aplicación después de las actividades de las actividades de simulación (postest). La otra parte consiste en la descripción a las respuestas de los estudiantes a las preguntas formuladas durante el desarrollo de las actividades de simulación y a la pregunta 8 del cuestionario (pre- y postest).

En la Tabla 1, se resumen y organizan las frecuencias de respuestas correctas a las cuatro preguntas del cuestionario (Pre- y Postest) que se han elegido para el presente informe. Las respuestas a las preguntas 1, 3, 6 se excluyeron por diferentes razones. La pregunta 1 fue interpretada por la mayoría de estudiantes de manera diferente a la esperada por los investigadores, ellos la entendieron como "la probabilidad de responder una pregunta correcta de todo el examen" en lugar de interpretarla simplemente como la probabilidad de responder correctamente una pregunta aislada. Las respuestas a las preguntas 3 y 6 no aportan información adicional a la información dada en las preguntas 2 y 5 respectivamente. Así, la elección obedeció al hecho de que fueron las preguntas que tuvieron mayor validez en el sentido de que constatamos que los estudiantes las entendieron de la manera en que los investigadores deseaban que las entendieran y que dieran información relevante.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas correctas a 4 preguntas de los cuestionarios (ver Apéndice)

	Pregunta 2: Construyen el árbol		Pregunta 4: Describen los valores de la variable		Pregunta 5: Obtienen la distribución de probabilidades		Pregunta 7: Calculan la probabilidad de acreditar el examen	
	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓	p= ½	p= ⅓
Pretest	14	6	21	16	15	2	6	2
Postest	18	8	26	16	14	4	8	2
Total de estudiantes que respondieron a las preguntas = 34								

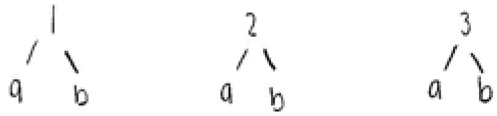
Tomando como un indicador central del desempeño de los estudiantes a la pregunta 5 (tercera columna de la Tabla 1), se nota que 44% de ellos en el pretest (15 de 34) y 41% en el postest (14 de 34), construyeron adecuadamente la distribución binomial b(x, 3, ½); mientras que para el caso de b(x, 3, ⅓) hubo una dramática caída, reduciéndose a 6% y 12% de respuestas correctas en el pretest y postest respectivamente. No todos los que llegan a construir la distribución correcta logran resolver completamente el problema del examen, pues en el experimento 1, 18% en el pretest y 23% en postest responden correctamente la pregunta 7 y en el experimento 2, sólo 6% responde correctamente tanto en el pre- como en el postest.

Conviene observar que los cambios en las frecuencias de respuestas del pretest al postest son muy leves en el experimento 1 y prácticamente nulas en el experimento 2. A partir de esto, se puede concluir que las actividades de simulación no aportan nuevos recursos al estudiante para mejorar su desempeño en la construcción del árbol o en la asignación de probabilidades teóricas, con la excepción de algunos casos aislados que mejoraron la construcción del árbol o identificaron mejor los valores de la variable, gracias a que en el postest se reflejó que se apoyaron en el uso de la notación que vieron en el proceso de simulación.

En el análisis de las respuestas nos preguntamos: ¿En qué aspectos puntuales fallaron los estudiantes que no lograron tener éxito en la construcción de la distribución? Encontramos que los fallos se distribuyeron sobre todo en dificultades relacionadas con dos ideas fundamentales: *combinatoria* y *variable aleatoria*.

El manejo de combinatoria que se requiere para resolver las tareas aquí examinadas, consiste simplemente en la construcción de un árbol combinatorio para cada distribución como apoyo para describir el espacio muestral de cada experiencia aleatoria. En el caso b(x, 3, ½) el diagrama de árbol consta de tres etapas con dos opciones cada una, y el caso b(x, 3, ⅓) está formado por tres etapas con tres opciones cada una, dos de ellas indistinguibles. En la pregunta 2 se les pidió explícitamente la elaboración de estos diagramas. En la Tabla 1 se puede notar que la construcción del árbol con dos opciones (p = ½) y tres opciones (p = ⅓) fue sólo levemente mejor en el postest que en el pretest. Sin duda, el desempeño en esta pregunta influye directamente en el desempeño de la pregunta 5 pero de ello no se concluye que quien construye correctamente el árbol proporciona automáticamente la distribución correcta. En otro sentido, saber elaborar el árbol con dos opciones no garantiza poder construir el de tres opciones, con dos de ellas indistinguibles. Es claro de la Tabla 1, que este último resulta considerablemente más difícil que el primero ya que hubo un descenso de 14 a 6 respuestas correctas en el pre- y de 18 a 8 en el postest. Atribuimos esta diferencia al aumento de la magnitud de las secuencias implicadas (8 y 27 respectivamente) y a la dificultad de manejar los casos indistinguibles. En otros trabajos se han reportado las principales dificultades de los estudiantes con la combinatoria, entre ellas algunas similares a las aquí mencionadas, por ejemplo: Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996).

Conviene destacar un patrón presente en varias de las respuestas incorrectas que dan cuenta de la ausencia de un razonamiento combinatorio. Dicho patrón consiste en organizar las dos características de la situación, a saber, el número de preguntas y la cantidad de opciones por pregunta, en un diagrama estático (con rasgos de árbol) sin secuenciar las etapas. Este esquema no les ayuda a representar un posible resultado en forma de una terna. En efecto, 11 estudiantes en la primera situación y 17 en la segunda del pretest representan la situación en un esquema como el siguiente:



En estos diagramas, los números 1, 2 y 3 representan las preguntas y las letras a y b las opciones de respuesta por pregunta. Los estudiantes que se basan en este tipo de esquemas, concluyen erróneamente que el espacio muestral tiene 6 ($= 3 \times 2$) elementos. Estos resultados vuelven a presentarse en el postest con muy leves diferencias.

El razonamiento con y acerca de la distribución binomial implica un cierto manejo del concepto de variable aleatoria. En los problemas que se propusieron se habla simplemente de la variable el “número de respuestas correctas” en un examen de opciones respondido al azar, sin introducir técnicamente el concepto de variable aleatoria. En la pregunta 4 se les pedía que describieran los valores que puede tomar la variable aleatoria. Para la experiencia 1 (p = ½) 62% en el pretest y 76% en postest respondieron correctamente, mientras que para le experiencia 2 (p= ⅓), el 47% respondió correctamente tanto en el pre- como en el postest. Esto significa que el desempeño en esta pregunta es relativamente alto comparado con el desempeño en las otras preguntas. Hubo una leve mejoría en el nivel de respuestas en la experiencia 1, del pretest al postest, mientras que no hubo ningún cambio en el caso p = ⅓. No obstante, no todos los que reconocieron los valores de la variable fueron capaces de calcular sus probabilidades aun cuando seis de ellos en el postest del experimento 1 (p = ½) construyeron bien el árbol. A varios estudiantes que describen correctamente los valores de la variable les faltó entender que cada valor de una variable aleatoria corresponde a un evento, es decir, a un subconjunto del espacio muestral, de manera que la probabilidad de un valor de la variable es la probabilidad del evento correspondiente. En términos técnicos, estos estudiantes no construyen la distribución de la variable aleatoria determinando la probabilidad de la imagen inversa de cada uno de sus valores. Varios de ellos proponen distribuciones de manera que las probabilidades dependan visiblemente de la variable, como: $\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$ en lugar de las probabilidades binomiales: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Un caso que tiene en cuenta la propiedad de que la suma de las probabilidades de todos los valores de la variable debe ser 1, propuso la distribución: $\frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$. Estos estudiantes al no asociar los valores de la variable aleatoria con los eventos correspondientes, no encuentran la forma de calcular la probabilidad de los valores de la variable sino mediante razonamiento o modelos espurios, como los indicados.

Ahora nos centraremos en las actividades de simulación, en particular, las realizadas con el software Fathom pero sin olvidar que previas a ellas se hicieron simulaciones físicas. Las actividades giraron alrededor de las mismas 2 situaciones que en el cuestionario, a saber, una correspondiente al experimento 1, modelado por la distribución b(x, 3, ½) y otra al experimento 2, modelado por la distribución b(x, 3, ⅓). En cada una de ellas se pedía a los estudiantes que realizaran acciones con el software usando un programa que simulaba resultados de ambas distribuciones y, paralelamente, respondieran 5 preguntas, a saber:

1. Equivalencia de experimentos aleatorios: ¿Consideras que este proceso (simulación con Fathom) corresponde o es semejante al que se aplicó en la simulación física para responder el examen?
2. Distribución empírica (N = 50): Después de simular 50 veces el experimento, ¿cuántos alumnos contestaron correctamente k preguntas? Con k = 0, 1, 2, 3.
3. Distribución empírica (N = 50 y N = 1000): a) Después de simular 50 veces el experimento, ¿cuál es la frecuencia relativa de cada valor de la variable? b) Después de simular 1000 veces el experimento, ¿cuál es la frecuencia relativa de cada valor de la variable?
4. Percepción de variabilidad (N = 50, N = 1000): Observa las gráficas de las distribuciones de frecuencia cuando los experimentos se repiten muchas veces y responde ¿dónde observas mayor variabilidad [cuando el número de repeticiones es N = 50 o cuando es N = 1000]?
5. ¿Qué observan en los resultados obtenidos?

La pregunta 1 se formuló con la intención de tener indicios acerca de si los estudiantes son conscientes de la equivalencia de las experiencias aleatorias física y computacional. Fueron 26 estudiantes que en el experimento 1 respondieron que las experiencias sí eran equivalentes, con argumentos diversos: azar, aleatoriedad, variación, precisión, registro y representación, pero ninguno señala las tres características que definen las experiencias equivalentes: 1) El mismo número de elementos en ambos espacios muestrales, 2) Una correspondencia entre dichos espacios y 3) igualdad de probabilidades de los elementos correspondientes. Los argumentos más comunes fueron "porque son al azar" o "porque tienen las mismas probabilidades" sin ser más precisos. En el experimento 2, los resultados no fueron muy diferentes por lo que no nos extenderemos en ello.

Con relación a las preguntas 2 y 3 casi la totalidad de los estudiantes realizó bien la tarea en ambos experimentos toda vez que el software les proporcionaba los datos y ellos se limitaban a identificar las frecuencias de los valores y a calcular las frecuencias relativas o porcentajes correspondientes. En la pregunta 4, se pedía que dijeran en qué simulación veían más variabilidad al estar viendo la representación gráfica de los resultados de simulaciones de 50 repeticiones comparados con 1000 repeticiones. Los resultados son que 23 estudiantes en el experimento 1 y 22 en el experimento 2, vieron más variabilidad en las gráficas de 50 repeticiones, mientras que 3 estudiantes en el experimento 1 y 4 en experimento 2, señalaron que vieron más variabilidad en 1000 repeticiones.

Finalmente, la pregunta 5 es muy abierta dando lugar a respuestas muy variadas. Su intención era identificar si los estudiantes observaban la aproximación de las distribuciones empíricas generadas mediante las simulaciones con la distribución teórica correspondiente; fue muy optimista pensar que los estudiantes centrarían su atención en dicho aspecto, ya que en ningún caso se mencionó la distribución teórica y sus observaciones se centraron en las respuestas a la pregunta precedente sobre variabilidad.

La pregunta 8 del cuestionario tenía por objetivo detectar si los estudiantes incorporaban a sus predicciones algún rasgo que indicara que fueron sensibles a la variabilidad que experimentaron en la simulación; esta idea ya ha sido estudiada para el caso más simple b(x, 2, ½) en Sánchez, Mercado y García (2016). Se pensaba que en el pretest las respuestas serían las frecuencias esperadas: 125, 250, 250, 125 en el primer experimento, y 297, 444, 222 y 37 en el segundo, pero que en el postest los estudiantes incorporarían algún rasgo que diera cuenta de un sentido de la variabilidad como consecuencia de las actividades de simulación; esto puede observarse en el uso de expresiones del tipo “alrededor de…”, “aproximadamente”, “cercano a …” o escribiendo cuartetas que varían algo respecto a las frecuencias esperadas. Esto no ocurrió en general; una estudiante mostró ser consciente de la variabilidad tanto en el pretest como en el postest y otro respondió en el pretest con las frecuencias esperadas pero en el postest indicó que las frecuencias de los eventos en una experiencia real deben estar alrededor de las frecuencias esperadas.

Como resultado de estas observaciones se puede decir que en el contexto de las actividades que se realizaron, los estudiantes no establecen conexiones entre las distribuciones empíricas que resultan de la simulación y las distribuciones teóricas que encontraron en su trabajo previo. De este modo la percepción y estimación de la variabilidad en situaciones de predicción, en el sentido que aquí fue considerada, parece necesitar más trabajo del que en la presente investigación se le dedicó, en particular, un diseño más promisorio.

CONCLUSION

El éxito en la construcción de las distribuciones binomiales básicas (teóricas) siguiendo el proceso guiado por las preguntas del cuestionario depende, en gran parte, de la construcción correcta del árbol y de la interpretación de la variable aleatoria como una función, es decir, una interpretación que tenga en cuenta que cada valor de la variable está asociado a un evento del espacio muestral y que la probabilidad de que la variable tome ese valor es la probabilidad del evento asociado. Por otro lado, la construcción de la distribución no asegura su aplicación correcta para responder la pregunta, pues los estudiantes tuvieron dificultades con la expresión se “acredita el examen cuando [se] responden al menos dos preguntas correctamente”, calculando sólo la probabilidad de responder 2 preguntas e ignorando la probabilidad de responder las 3 preguntas correctamente. Esto coincide con los resultados obtenidos por Bill et al. (2009) y muestra la inhabilidad para entender expresiones como “al menos” e, incluso, para aplicar la regla de la suma de probabilidades con base en el conocimiento de la distribución. En el estudio de Bill et al. (2009), sólo un estudiante de entre 19 (5%) calculó correctamente la probabilidad de pasar un examen de 5 preguntas con 2 opciones cada una, sabiendo que el examen se responde al azar y se acredita cuando se aciertan 4 o más preguntas. En nuestro estudio, los estudiantes se desempeñaron un poco mejor; esto es explicable debido a que son de mayor edad y porque la pregunta es más simple (3 preguntas en nuestro estudio contra 5 preguntas de Bill et al.). Además, las respuestas a la pregunta del experimento 2 en nuestro estudio, muestra que la situación b(x, 3, ⅓) es de una dificultad mayor.

Un primer aspecto en la comprensión de las distribuciones básicas de probabilidad como las que aquí se mencionan consiste en su construcción y uso para responder preguntas sobre la probabilidad de los eventos como los siguientes: “que la variable tome un valor x”, “que la variable tome al menos el valor x” y “que la variable tome a lo más el valor x”, para toda x entre 0 y n. Un segundo aspecto es su uso en situaciones de predicción teniendo en cuenta la variabilidad, es decir, predicciones como la expresada en la pregunta 8: *Si 1000 estudiantes respondieran al azar el examen, ¿cuántos acertarían x preguntas?,* con $0 \leq x \leq 3$. Nuestros resultados muestran que un dominio de ambos aspectos sólo ocurrió en dos casos y uno de ellos no puede explicarse por efecto de las actividades, pues mostró desde un comienzo su sentido de la variabilidad. Por lo tanto, aunque la simulación ofrece posibilidades para que se logre la integración de estos dos aspectos, la manera de hacerlo exige un diseño instruccional más elaborado del que hemos implementado en esta investigación. No obstante, los resultados que aquí presentamos en relación con las maneras de razonar de los estudiantes puede ser un insumo útil para lograr con éxito dicho diseño.

Referencias

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit cultural quantitative reasoning - The case of anticipating experimental outcomes of a quasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction 27*(3), 175-224.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 67*.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos* XXXIV, 2, 7-28.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer International Publishing.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Bill, A., Watson, J. y Gayton, P. (2009). *Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem three different ways. Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1*, 57-64.

Jones, G. A., Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2007). Research in Probability. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: NCTM y Information Age Publishing.

Landín Vargas, P. R. (2013). *Razonamiento de estudiantes de bachillerato al resolver problemas de probabilidad binomial* (Tesis doctoral no publicada). Ciudad de México: Departamento de Matemática Educativa.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39

Sánchez, E., Mercado, M. y García, J. (2016). La variabilidad en el razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 479-661). Málaga, España: SEIEM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Apendice. Cuestionario (Pretest y Postest)

Experimento aleatorio 1. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

1. ¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente una pregunta? Explica tu respuesta.

2. Describe todas las posibles formas diferentes de responder el examen (Utiliza un diagrama de árbol).
3. ¿Cuántos diferentes resultados tiene el Espacio Muestral del experimento?
4. Considera la variable X = “El número de respuestas correctas”. Describe todos los valores que puede tomar esta variable.
5. Haz lo que se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable tome el valor 0?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 1?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 2?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tome el valor 3

6. Con base en lo anterior, completa la siguiente tabla [Discutir qué tabla es más apropiada]:

Valores de X					Suma
Probabilidad					

7. Si el estudiante acredita el examen cuando responde al menos dos preguntas correctamente ¿Cuál es la probabilidad de que pase el examen?
8. Si 1000 estudiantes respondieran el examen y todos ellos respondieran al azar:

a) ¿Cuántos acertarían cero preguntas? Explica tu respuesta.

____

b) ¿Cuántos acertarían en una sola pregunta? Explica tu respuesta.

____

c) ¿Cuántos acertarían en dos preguntas? Explica tu respuesta.

____

d) ¿Cuántos acertaría en 3 preguntas? Explica tu respuesta.

____

Con las respuestas llena la siguiente tabla:

Valores de x	Frecuencias
Suma	

Experimento aleatorio 2. Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas. Cada pregunta tiene tres opciones una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Responde las siguientes preguntas: [Mismas preguntas que el Experimento Aleatorio 1].

ANÁLISIS DE LA METACOGNICIÓN EN LA INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS AL RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN AULAS DE PRIMARIA

Analysis of the metacognition in the interaction teacher-students when solving mathematical problems in Primary classrooms

Sánchez-Barbero, B.[a], Chamoso J. M.[a], Vicente, S.[a] y Rosales, J.[a]

[a]Universidad de Salamanca

Resumen

La interacción que se produce entre el maestro y sus alumnos cuando resuelven tareas matemáticas en el aula es un aspecto de interés en la Educación Matemática. Numerosas investigaciones analizan estas interacciones desde el punto de vista cognitivo, pero poco se sabe desde el punto metacognitivo. En este estudio se pretende analizar qué ocurre con la promoción de procesos metacognitivos y con el grado de participación que tienen los alumnos en los mismos, cuando maestro y alumnos resuelven de forma conjunta problemas matemáticos con diferentes niveles de complejidad cognitiva. Los resultados reflejaron que a medida que la complejidad cognitiva aumenta, existen diferencias en la promoción de los procesos metacognitivos y del grado de participación de los alumnos en ellos, aunque estas diferencias no son significativas.

Palabras clave: *interacción en el aula, procesos metacognitivos, grado de participación, resolución de problemas, dificultad cognitiva.*

Abstract

The interaction the teacher and his students when they solve mathematical tasks in the classroom is an aspect of interest in Mathematics Education. Numerous investigations analyze these interactions from the cognitive point of view, but little is known from the metacognitive point. This study aims to analyze what happens with the promotion of metacognitive processes and the level of participation that students have in them, when teachers and students solving mathematical problems with different levels of cognitive complexity. The results showed that as cognitive complexity increases, there are differences in the promotion of metacognitive processes and the level of participation of students in them, although these differences are not significant.

Keywords: *classroom interaction, metacognitive processes, level of participation, problem solving, cognitive difficulty.*

INTRODUCCIÓN

El análisis de la interacción en el aula nos muestra la realidad de la práctica educativa; de ahí la importancia de que estudios pongan su foco de investigación en el análisis de la misma (Rosales, Vicente, Chamoso, Múñez y Orrantia, 2012).

Se tiene cierto conocimiento de qué ocurre en las aulas cuando maestro y alumnos resuelven de forma conjunta problemas matemáticos con sus estudiantes en las aulas de Primaria centrándose en los procesos cognitivos que se promueven y en el grado de participación de los alumnos en los mismos (Sánchez, Ramos, Chamoso, Vicente y Rosales, 2014, 2016), pero poco se sabe sobre qué ocurre referido a los procesos metacognitivos y al grado de participación de los alumnos en ellos.

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2018). Análisis de la metacognición en la interacción profesor-alumnos al resolver problemas de matemáticas en aulas de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 544-553). Gijón: SEIEM.

Por una parte, la metacognición es importante e indispensable para un pensamiento efectivo en la resolución de problemas (Pellegrino, Chudowsky, y Glaser, 2001). Además, la resolución de problemas es una de las tareas cognitivas más importantes que deben desarrollarse en las aulas de matemáticas puesto que dotan al alumno de conocimientos, habilidades y destrezas necesarias para enfrentarse a situaciones problemáticas y reales cotidianas (Aksoy, Bayazit y Kirnap, 2015).

A continuación, se establecerá un marco teórico organizado en el tipo de tareas matemáticas que pueden realizarse en aulas de Primaria y en la interacción que se produce cuando un maestro y sus alumnos resuelven de forma conjunta atendiendo a los procesos metacognitivos y al grado de participación. Posteriormente se detallará la metodología utilizada orientada a los procesos metacognitivos y al grado de participación, se expondrán y discutirán los resultados y, finalmente, se analizarán las aportaciones que se puedan extraer del presente trabajo, así como las limitaciones, perspectivas de futuro e implicaciones educativas del mismo.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Tipos de tareas en las aulas de matemáticas en Primaria

Las tareas que se pueden desarrollar en las aulas dependen de su nivel de complejidad y, por tanto, de las oportunidades que ofrecen a la hora de potenciar la reflexión del resolvente y promover, de ese modo, el aprendizaje matemático (Elbers, 2003). Poniendo nuestro foco de atención en los problemas, podemos diferenciar entre problemas rutinarios, aquellos que se resuelven con la aplicación directa de operaciones aritméticas conocidas y rutinizadas (Aksoy et al., 2015); y problemas no rutinarios, aquellos en los que la información suministrada no es suficiente para llegar a la resolución del problema y la aplicación directa de operaciones aritmética no conduce a avanzar en dicha resolución por ello se ha de recurrir a otras herramientas como conocimientos, experiencias anteriores e incluso a la intuición y se pueden incluir discusiones sobre cuál o cuáles son las soluciones, ya que es posible la existencia de varias estrategias de resolución, así como de la carencia de solución (Jiménez, 2012). Una forma de diferenciar la complejidad cognitiva de los problemas subyace de la categorización de dominios que establece TIMSS, entendiendo estos dominios como pensamientos o destrezas cognitivas que el alumno debe tener a medida que aumenta su implicación en el conocimiento matemático (Mullins y Martin, 2016).

Metacognición durante la interacción profesor-alumnos al resolver problemas matemáticos en aulas de Primaria

Un aspecto de interés en la resolución de tareas son los procesos que se promueven en las interacciones de resolución grupal en aulas de Primaria. A través de éstas, los alumnos se posicionan y discuten de forma conjunta, generando y elaborando su propio aprendizaje (Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010).

Objeto de estudio de este trabajo es el análisis de los procesos metacognitivos que tienen lugar en las interacciones conjuntas en el aula. La idea de habilidad metacognitiva fue esbozada por Flavell en 1985 y de gran importancia para un pensamiento matemático efectivo (Garofalo y Lester, 1985; Rigo, Alfonso y Gómez, 2009), definida como el conocimiento y la capacidad de reflexión y regulación de cualquier actividad y que implica una toma de conciencia y conocimiento de la propia cognición. Dentro de los procesos metacognitivos diferenciamos entre generalización (aquella capacidad reflexiva ampliable a cualquier contexto) y regulación (aquella capacidad de planificación, supervisión y evaluación, Jacobs y Paris, 1987).

Existen diferentes factores que pueden influir en la promoción del aprendizaje como, por ejemplo, el grado de participación de los alumnos durante las interacciones entendido como el nivel de autonomía que los alumnos tienen en el aula cuando resuelven tareas (Berger, 2007). Es importante que los docentes tengan capacidad de promoción de participación de los alumnos en los intercambios comunicativos, puesto que el diálogo y la capacidad para responder preguntas de manera adecuada son un medio para enseñar y un fin de la enseñanza, por lo que cabe destacar que uno de los objetivos de la educación es que los alumnos aprendan a dialogar de manera activa en diferentes contextos, incluyendo en éstos los informales, extrapolando aquellos conocimientos adquiridos en el aula (Bakker, Smit y Wegerif, 2015). Es por esto por lo que el aprendizaje matemático requiere una implicación personal del sujeto y, si el docente promueve la participación de los alumnos, éstos serán capaces de argumentar y adquirir autonomía en la construcción de significados (Carrillo, Climent, Gorgorió, Prat y Rojas, 2008).

Algunos autores analizan la interacción en el aula cuando resuelven tareas matemáticas con sus alumnos centrándose en aspectos como el razonamiento y el grado de participación de los alumnos en dicho razonamiento (Depaepe et al., 2010; Ramos, Sánchez, Rosales, Vicente y Chamoso 2014; Rosales et al., 2012; Sánchez et al., 2014; Sánchez, Carrillo, Vicente y Juárez, 2015), pero apenas existen análisis de interacciones centradas en los procesos metacognitivos, de gran importancia en las aulas pues son procesos ampliables a otros contextos. Biryucov (2004) analizó la metacognición en la resolución de problemas de combinatoria con diferentes niveles de complejidad por 48 futuros docentes (28 de Educación Primaria y 20 de Secundaria) y obtuvo como resultados que los estudiantes con niveles altos de metacognición consiguieron resolver los problemas matemáticos de mayor complejidad. Ramos, Vicente, Rosales y Sastre, (2016) analizaron la interacción que se produjo en el aula cuando maestro y alumnos resolvieron conjuntamente dos problemas matemáticos y los resultados mostraron que los maestros estaban más preocupados en resolver el problema que en enseñar a resolver pues la presencia de aspectos regulatorios fue superior que en generalizaciones. En este trabajo se persigue dar un paso más y centrarse en el análisis de los procesos metacognitivos y en el grado de participación de los alumnos en dichos procesos cuando se resuelve de forma conjunta problemas matemáticos con diferentes niveles de complejidad cognitiva en las aulas. Como hipótesis se entiende que, a mayor complejidad de la tarea, se debe promover en el aula procesos metacognitivos en mayor medida, así como una mayor participación por parte del alumno en la construcción de éstos (Mitchell y Carbone, 2011).

OBJETIVO

El objetivo del presente trabajo es analizar si los procesos metacognitivos que se promueven en la interacción que se produce cuando maestro y alumnos resuelven de forma conjunta tareas matemáticas en el aula, así como el grado de participación en dichos procesos, depende de la complejidad cognitiva de la tarea desarrollada.

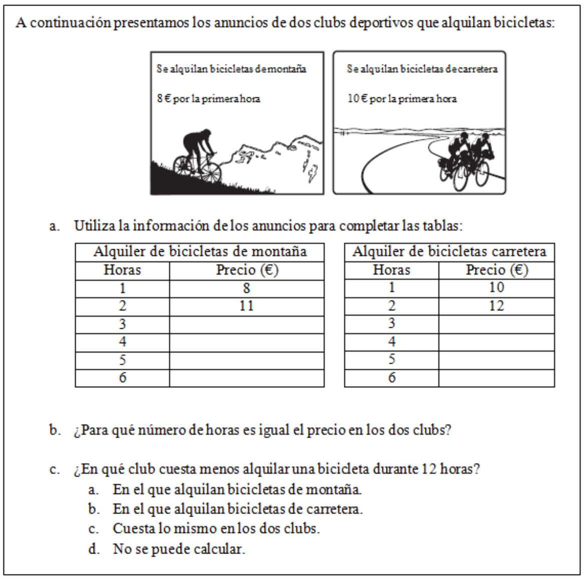
METODOLOGÍA

Participantes

Diez maestros (5 mujeres y 5 hombres) de centros escolares urbanos (6) y rurales (4) españoles de nivel socioeconómico medio, y sus estudiantes de tercer ciclo de Educación Primaria (ratio maestro-alumno, entre 1:11 y 1:25). Se seleccionaron aquellos maestros que aceptaron voluntariamente ser grabados de una muestra inicial aleatoria de 200 maestros de colegios españoles. La experiencia docente de los maestros oscilaba entre 13 y 33 años. Ningún maestro había recibido formación específica sobre resolución de problemas.

Material

Se utilizaron dos problemas: un problema rutinario (con tres apartados, cada uno de ellos orientado a un nivel progresivo de dificultad, conocimiento – referido a hechos, conceptos y procedimientos necesarios para su resolución –, aplicación – referido a la aplicación de conocimientos para su resolución –, y razonamiento – referido a la resolución de problemas o preguntas en contextos desconocidos o complejos-, apartados b, a y c, respectivamente, IEA, 2011; Figura 1) y un problema no rutinario (adaptado de Tahan, 1986; Figura 2).



A continuación presentamos los anuncios de dos clubs deportivos que alquilan bicicletas:

a. Utiliza la información de los anuncios para completar las tablas:

Alquiler de bicicletas de montaña	
Horas	Precio (€)
1	8
2	11
3	
4	
5	
6	

Alquiler de bicicletas carretera	
Horas	Precio (€)
1	10
2	12
3	
4	
5	
6	

b. ¿Para qué número de horas es igual el precio en los dos clubs?

c. ¿En qué club cuesta menos alquilar una bicicleta durante 12 horas?
   a. En el que alquilan bicicletas de montaña.
   b. En el que alquilan bicicletas de carretera.
   c. Cuesta lo mismo en los dos clubs.
   d. No se puede calcular.

Figura 1. Problema adaptado de las pruebas TIMSS del año 2007 (IEA, 2011, p. 175)

"Un día en que iba con mi padre al mercado nos encontramos a un vecino, Juan, que, al saberlo, nos pidió que le vendiéramos los 30 melones que tenía al precio de 3 melones 1 €. Después nos encontramos a una conocida, María, que, aprovechando, nos preguntó que si podíamos venderle sus 30 melones a 2 melones por 1 €.

Aceptamos en ambos casos y, ante la diferencia de precio de los melones, a mi padre se le ocurrió vender los melones por lotes de 5 melones, a 2 €. Vendimos todo y mi padre me encargó que guardase el dinero.

Ya de vuelta, mi padre me dijo que organizásemos el dinero conseguido para pagar a Juan y María. Miré el dinero que tenía y, como habíamos vendido 12 de lotes de 5 melones, comprobé que tenía 24 €. Entonces mi padre dijo que a Juan había que darle 10€ y a María 15, en total 25 €. ¿Había perdido 1 € por el camino?"

Figura 2. Problema adaptado de Tahan (1986)

Procedimiento

Los maestros fueron grabados en audio mientras resolvían los problemas conjuntamente con sus alumnos en su aula y en el horario habitual que se dedicaba a este tipo de actividades. Un observador tomó notas sobre aspectos que podían no quedar recogidos en el audio.

Análisis

Las grabaciones fueron transcritas y analizadas. Para realizar el análisis se tomó como unidad de medida el ciclo, entendido como la segmentación de las acciones desarrolladas al realizar la interacción en el desarrollo de una tarea en el aula y que suele comenzar con una pregunta, ya sea de modo explícito o implícito, y finalizar cuando la pregunta ha sido respondida o abandonada (Wells, 1999). Para ello se tuvieron en cuenta los contenidos públicos, entendidos como la información que maestro y alumnos comparten públicamente de modo que cada ciclo contiene un único contenido público (en las ocasiones en que, en un mismo ciclo, existió más de un contenido público, se consideró como contenido público el principal del que dependía el otro u otros contenidos públicos; Rosales et al., 2012; Tabla 1). Una vez delimitados los ciclos, cada uno de ellos se categorizó en dos sentidos, atendiendo a:

Los procesos promovidos (Sánchez-Barbero et al., 2017a, adaptado de Rosales et al., 2012; Tabla 1), referido a aspectos:

Tabla 1. Sistema de categorías de los procesos promovidos

Categorías		Definición	Ejemplos
PROCESOS COGNITIVOS	**Selección**	Que aparecen, explícitamente, en el enunciado del problema o surgen en el proceso de resolución, sin justificación.	P: Bueno pues ya sabemos que en esta tienda 8 euros el coger la bici y eso te da derecho ¿A cuánto tiempo? A: A una hora. P: una hora.
	Integración	Que relacionan o comparan información o datos que aparecen explícitamente en el enunciado del problema o surgen en el proceso de resolución de forma adecuada y justificada.	P: Bien; pasa muchas veces, es decir, cuando vamos por ahí, de vacaciones o… o en otros, en algunos sitios dices vamos a alquilar bicicletas, y entonces claro, lógicamente vamos donde sea más barato en función también de las necesidades. Si voy a estar una hora con la bici o dos horas, etc.

PROCESOS METACOGNITIVOS	Generalización	Del proceso de resolución más generales que los considerados en el problema	P: Claro porque es una palabra que casi no utilizamos. En Sudamérica se utiliza mucho adicional porque es suma. Cuando yo estudiaba los problemas venia todos, adición, adicional. Que es una palabra ¿Antónima o sinónima de sumar? A: Sinónima P: Ah sinónima.
	Regulación	Del proceso de resolución relacionados con acciones de planificación (organización del proceso), supervisión (valoración y observación del proceso) y evaluación (determinación del avance y progreso en la resolución, así como valoración de la realización del proceso)	P: Quiero que os situéis todos… a ver, vamos a resolver un problema. Lo vamos a resolver juntos ¿de acuerdo? eso es lo que vamos a hacer. Entonces, lo único que hay que hacer es atender y contestar cuando vaya preguntando, vamos a resolver un problema, como hacemos otras veces cuando corregimos. Quiero que os situéis ahí tenéis 3 problemas. Quiero, nos vamos a situar solamente, ahora en el problema número 3, sólo en el problema número 3, ¿de acuerdo? Y me escucháis. ¿Vale? Bien…
OTROS	Control	De mantenimiento de la atención y el orden de la clase, u organizativos, sin relación en ningún sentido con el proceso de resolución	P: Bien… A partir de ahora, por favor, atended, de acuerdo Irene? Atended, Kevin atendemos. ¿Ya? Vale.
	Lectura	De la propia lectura del problema incluyendo aclaración de vocabulario, siempre ajeno al proceso de resolución	

El grado de participación que tienen maestro y alumnos teniendo en cuenta quién inicia el ciclo (Sánchez-Barbero et al., 2017b, adaptado de Rosales et al., 2012; Tabla 2), donde la construcción de la idea principal del ciclo es asumida por:

Tabla 2. Sistema de categorías del grado de participación

	Definición	Ejemplos
GRADO BAJO	**Grado P (profesor):** El maestro de forma autónoma.	P: Bueno. Como veis, el completar el precio, el cuadro con los precios, es muy fácil. La primera hora, de uno es 8, del otro es 10 y las horas adicionales irán de 3 en 3.
	Grado Pa (profesor-alumnos): El maestro y alumno, con una mayor participación del maestro.	P: Bueno como veis hay dos anuncios, ¿no? A: Sí.
GRADO ALTO	**Grado Ap (alumnos-profesor):** El maestro y alumno, con una mayor participación del alumno.	A: Fernando, ¿también ponemos aquí los alquileres de montaña y todo? P: No, no hace falta. Con poner montaña arriba, carretera. Cada cuadro, bici de montaña, bici de carretera ya está. Y ya por poco, si quieres, alquiler, eh. Hombre, que la información se sepa cuál es, si no.
	Grado A (alumnos): El alumno de forma autónoma.	A: ¡Que no, Fernando, que da 41! P: ¡Ah, amigo! A: ¡Da 41!

Se utilizaron estadísticos Chi-cuadrado (α=.05) para comparar los resultados, tanto globalmente como para cada problema.

Medidas

Referido a los procesos metacognitivos promovidos en la resolución del problema, se comparó el porcentaje de ciclos. Referido al grado de participación en el proceso de resolución del problema, se comparó el porcentaje de ciclos de procesos metacognitivos dedicados al grado de participación (bajo y alto).

Fiabilidad

La fiabilidad del sistema de análisis se realizó con dos jueces externos que analizaron un 20% de las transcripciones (índice Kappa de Cohen varió entre 0.84 y 0.99, por lo que el acuerdo se consideró apropiado).

RESULTADO

Cuando maestros resolvían conjuntamente un problema rutinario con tres apartados y un problema no rutinario en el aula con sus estudiantes, la Tabla 3 nos muestra el porcentaje medio de ciclos de los maestros para cada uno de los problemas referido a los procesos metacognitivos y al grado de participación en dichos procesos.

Tabla 3. Porcentaje medio de ciclos dedicados por los maestros a los procesos metacognitivos para cada uno de los apartados del problema rutinario y del problema no rutinario

	PROBLEMA RUTINARIO			PROBLEMA NO RUTINARIO
	Apartado de conocimiento	Apartado de aplicación	Apartado de razonamiento	
Generalización	2.39%	1.62%	1.80%	2.52%
Regulación	18.18%	21.36%	19.64%	15.09%

Referido a los procesos metacognitivos que se promovieron, se dedicaron proporciones similares de ciclos tanto en generalización como en regulación en los tres apartados del problema rutinario pero el porcentaje de generalización aumentó en el problema no rutinario, sin diferencias significativas ([χ^2 (3, 41) = 3.195, p = .363]) y regulación ([χ^2 (3, 359) = .365, p = .947], Figura 3).

Comparando los procesos de generalización y regulación en cada uno de los problemas, con diferencias significativas en los tres apartados del problema rutinario (conocimiento [$\chi 2$ (1, 100) = 57.760, p = .000], aplicación [$\chi 2$ (1, 100) = 73.960, p = .000], razonamiento [$\chi 2$ (1, 100) = 70.560, p = .000]) y en el problema no rutinario ([$\chi 2$ (1, 100) = 51.840, p = .000)], Figura 3).

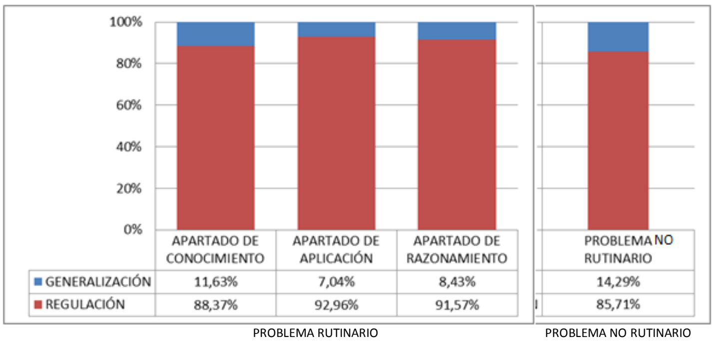


Figura 3. Porcentaje medio de ciclos dedicados por los maestros a los procesos metacognitivos para cada uno de los apartados del problema rutinario y del problema no rutinario

Referido al grado de participación, atendiendo a la generalización, la responsabilidad es absoluta del maestro (grado bajo) en los tres apartados del problema rutinario, mientras que en el problema no rutinario el grado alto de participación aumentó, con diferencias significativas ([$\chi 2$ (30, 400) = 8.525, p = .036]). Por otra parte, en el proceso de regulación, la responsabilidad es compartida tanto en el problema rutinario como en el problema no rutinario aunque es menor en éste último sin diferencias significativas ([χ2 (3, 400) = 3.158, p = .368], Figura 4).

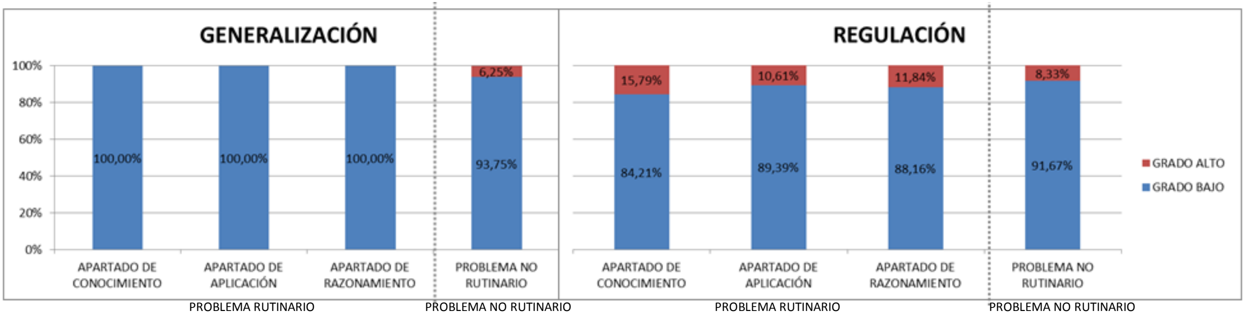


Figura 4. Porcentaje medio de ciclos dedicados por los maestros al grado de participación para cada uno de los apartados del problema rutinario y del problema no rutinario según los procesos metacognitivos

Comparando los grados de participación en cada uno de los problemas para cada uno de los procesos metacognitivos, se tiene que: en primer lugar, en el proceso de generalización, la participación del alumno fue nula, con diferencias significativas en los tres apartados del problema rutinario (conocimiento [χ2 (1, 100) = 96.040, p = .000], aplicación [χ2 (1, 100) = 96.040, p = .000] , razonamiento [χ2 (1, 100) = 96.040, p = .000]) y en el problema no rutinario ([χ2 (1, 100) = 77.440, p = .000]); en segundo lugar, en el proceso de regulación, existió una participación conjunta aunque ésta fue escasa por parte del alumno, sin diferencias significativas en los tres apartados del problema rutinario (conocimiento [χ2 (1, 100) = 46.240, p = .000], aplicación [χ2 (1, 100) = 60.840, p = .000], razonamiento [χ2 (1, 100)= 57.760, p = .000]) y en el problema no rutinario ([χ2 (1, 100)= 70.560, p = .000]). Estos resultados apoyan parcialmente nuestra hipótesis, ya que es apreciable cómo, a medida que la complejidad cognitiva de la tarea aumenta, existe un mayor porcentaje de procesos metacognitivos promovidos, así como un mayor grado de participación de los alumnos en los mismo (Figura 4).

DISCUSIÓN

Con este estudio se pretende avanzar en el conocimiento de si el tipo de tarea matemática modifica la promoción de procesos metacognitivos y el grado de participación del alumno en dichos procesos. Las hipótesis sugerían que el comportamiento tendría que verse modificado cuando la complejidad cognitiva de la tarea aumentara, promoviendo en mayor medida los procesos metacognitivos y el grado de participación de los alumnos en los mismos, resultados que se han verificado (no estadísticamente).

Respecto al proceso de generalización, este resultado puede ser debido a que la resolución de un problema lleva implícita una comprensión y, preferiblemente, una aplicación fuera del contexto del problema. En este proceso, los maestros tomaron la responsabilidad total, quizás debido a que los alumnos no están acostumbrados a realizar generalizaciones (aunque esta generalización es deseable en las aulas de matemáticas puesto que, según Mitchell y Carbone, 2011, los alumnos cuando operan a altos niveles metacognitivos profundizan en su propio aprendizaje). Respecto al proceso de regulación, los resultados señalaron que, alrededor del 90% de las interacciones de los procesos metacognitivos, fueron destinadas a regularizar la situación en el aula. Esta regulación fue realizada mayoritariamente por parte del docente quizás debido a que toda regulación es necesaria para que el desarrollo de las sesiones sea secuenciado y ordenado, independiente de la tarea que se esté realizando, algo que suelen realizar los maestros (Lepage et al., 2005). Estos resultados marcan una diferencia con los de Ramos et al. (2016), donde el foco de atención de los maestros fue resolver el problema en lugar de enseñar a aprender. Puesto que la metacognición proporciona una mayor base para el establecimiento y consecución de objetivos durante la resolución de problemas de matemáticas en las aulas (Biryukov, 2004), estos resultados ponen de manifiesto la importancia de realizar problemas cuya complejidad cognitiva sea superior, promoviendo en mayor medida procesos metacognitivos y un grado de participación de los alumnos superior en la construcción de los mismos aunque se debería realizar más investigación sobre ello.

CONCLUSIONES

En el análisis de la interacción de diez maestros cuando resuelven tareas de diferentes niveles de complejidad cognitiva con sus alumnos en el aula hubo una cierta variabilidad en el comportamiento de los maestros (debido a que, por ejemplo, eran de diferentes zonas geográficas, con variadas formaciones y con distinto número de alumnos por aula). Sin embargo, este trabajo puede avanzar en el conocimiento de cómo los procesos metacognitivos que se promueven en el aula pueden estar relacionados con esta complejidad de la tarea. Por ejemplo, referido al grado de participación de los alumnos, el grado alto de participación aumenta en la categoría de generalización en el problema no rutinario mientras que en regulación disminuye.

La enseñanza en el aula debe incluir interacciones con el objetivo de promover la metacognición y la participación de los alumnos y para aumentar el grado de transferencia de aprendizaje por parte de los estudiantes a nuevos entornos (Bransford, Ann, Brown y Rodney, 2000). Además, la regulación, que implica una planificación, supervisión y evaluación del proceso de resolución, es necesaria para que el desarrollo de la clase sea secuencial y ordenado (Lepage et al., 2005).

Como perspectivas de futuro, este estudio se podía completar con un aumento de la muestra para intentar paliar la variabilidad de los profesores; podrían incluirse cuestionarios o entrevistas que perfilaran aspectos de la interacción de los maestros o para tener en cuenta su formación, creencias o conocimientos; considerar docentes de diferentes niveles educativos resolviendo las tareas de este trabajo de forma conjunta con los estudiantes en el aula; analizar la interacción con otros tipos de tareas como problemas realistas o abiertos; o profundizar en el proceso metacognitivo de regulación considerando sus tres aspectos de planificación, supervisión y evaluación.

Como implicaciones educativas entendemos que si los procesos metacognitivos son necesarios en las aulas pues ayudan a tomar conciencia del propio aprendizaje, se podría realizar una formación del profesorado más completa en este sentido, así como utilizar tareas de mayor complejidad cognitiva en las aulas de primaria.

Agradecimientos

Los autores son miembros de la RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores (EDU-216-81994); de los proyectos de investigación (463AC01) y (PSI2015-66802-P) y del Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa (GIRME).

Referencias

Aksoy, Y., Bayazit, I. y Kirnap, S. M. (2015). Prospective Primary school teachers´ proficiencies in solving real-words problems: approaches, strategies and models. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 11*(4), 827-839.

Bakker, A., Smit, J. y Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM Mathematics Education, 47*, 1047-1065.

Berger, K. (2007). *Psicología del Desarrollo: Infancia y Adolescencia.* Madrid: Panamericana.

Biryucov, P. (2004). Metacognitive Aspects of Solving Combinatorics Problems. *International Journal for Mathematics teaching and learning, 84.*

Bransford, John D., Ann L. Brown y Rodney R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience and School.*Washington D.C.: National Academy Press. pp. 3-23.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M. y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemáticos desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias, 26(1),* 67-76.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers´ approaches towards Word problema solving: Elaborating or restricting the problema contexto. *Teaching and Teacher Education, 26,* 151-160.

Elbers, E. (2003). Classrroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiri. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 77-99.

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. En: F. E. Weinert y R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp. 21-29). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Garofalo, J. y Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16* (3), 163-176.

IEA. (2011). *TIMSS 2007. Guía del usuario para la base de datos internacional.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Jacobs, J. E. y Paris, S. G. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement and instruction. *Educational Psychologist, 22*, 255-278.

Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de problemas matemáticos: un estudio sobre las dificultades de los niños en la resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación, 24(3),* 351-362.

Lepage, P., Darling-Hammond, L. Akar, H. Gutierrez, C. Jenkins-Gunn, E. y Rosebrock, K. (2005). Classroom Management. En L. Darling-Hammond y J. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world, what teachers should learn and able to do* (pp.327-357). San Francisco: Jossey-Bass.

Mitchell, I. y Carbone, A. (2011). A typology of task characteristics and their effects on student engagement. *International Journal of Educational Research 50*, 257-270.

Mullins, I., Martin, M., Ruddock, G., O´Sullivan, C. y Preuschoff, C. (2012). *TIMSS 2011.Marcos de la Evaluación.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Pellegrino, J. W., Chudowsky, N. y Glaser, R. (2001). Knowing what students know: The science of design and educational assessment. Washington, DC: National Academies Press.

Ramos, M., Sánchez, B., Rosales, J., Vicente, S. y Chamoso, J. M. (2014). ¿Qué procesos promueve un profesor con un problema no rutinario? Actas *XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, pp. 590-593. Baeza: Thales.*

Ramos, M., Rosales, J., Vicente, S. y Sastre, S. (2016). Aspectos metacognitivos durante la resolución de problemas en aulas de primaria. Actas. *VIII Congreso Internacional de Psicología y Educación, pp. 1848-1849.* Alicante: CIPE.

Rigo Lemini, M., Alfonso Páez, D. y Gómez, B. (2009). Procesos meta-cognitivos en las clases de matemáticas de la escuela elemental. Propuesta de un marco interpretativo. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 435-444). Santander: SEIEM.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Múñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint Word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*, 1185-1195.

Sánchez, B., Carrillo, J., Vicente, S. y Juárez, J. A. (2015). Análisis de la interacción alumnos-profesor al resolver problemas no rutinarios en aulas de Primaria. *XIV Conferencia interamericana de Educación Matemática (XIV CIAEM).* Chiapas, México, 3-7 mayo 2015.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J. y Vicente, S. (2014). Autonomía en la interacción en resolución de problemas no rutinarios en aulas de Primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 603). Salamanca: SEIEM.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2016). Interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente un problema de diferentes dominios cognitivos en aulas de Primaria: procesos que se promueven. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 637). Málaga: SEIEM.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S., Rosales, J. y Gracia, L. (2015). Participación en la interacción profesor-alumnos al resolver un problema con apartados de distintos dominios cognitivos en Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 587). Alicante: SEIEM.

Sánchez-Barbero, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S., Rosales, J. y Rodríguez M. M. (2017a). Una herramienta para analizar el grado de participación en la interacción de maestro y estudiantes cuando resuelven conjuntamente tareas matemáticas. Actas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 217-221). Madrid: CIBEM

Sánchez-Barbero, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S., Rosales, J. y Rodríguez M. M. (2017b). Una herramienta para analizar los procesos que se promueven entre el profesor y los alumnos al resolver tareas matemáticas en el aula. Actas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 231-235). Madrid: CIBEM

Tahan, M. (1986) *El hombre que calculaba.* Mexico: Limusa, S.A.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: CUP.

CARACTERÍSTICAS DEL "TRUNCAMIENTO" EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EMPÍRICOS EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

"Truncation" characteristics in the empirical problems resolution in a geometrical context

Saorín, A.[a], Quesada, H.[a] y Torregrosa, G.[a]

[a]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar características del desenlace "truncamiento" del razonamiento configural durante la resolución de problemas empíricos geométricos, considerando, además, la forma en que se va construyendo la respuesta escrita que permite comunicar la solución a partir de los modos de expansión del discurso propuestos por Duval (1999). Analizamos las respuestas de 33 alumnos de 1º de bachillerato a dos problemas de tipo empírico en contexto geométrico. Los resultados nos han permitido identificar que: (1) el truncamiento se da cuando los estudiantes establecen las relaciones necesarias, en registro algebraico, que permiten resolver el problema y son conscientes de ello, desarrollando a partir de este momento un razonamiento lógico-deductivo independiente del registro geométrico, y (2) el discurso escrito (respuesta) se inicia desde un modo de acumulación para finalizarlo mediante un modo de sustitución.

Palabras clave: *razonamiento configural, problemas empíricos, geometría, registro algebraico, truncamiento.*

Abstract

The aim of this study is to identify some characteristics of the configural reasoning "truncation" outcome during the geometric empirical problems resolution, considering, in addition, the way how the written answers is being developed which allows to communicate the solution based on the discourse expansion modes proposed by Duval (1999). We have analyzed the answers given by 33 1st Bachillerato students to two empirical problems in a geometrical context. The results have allowed us to identify the following statements: (1) "truncation" occurs when students are able to establish the required relations, in an algebraical register, that allow them to solve the problem as well as they are aware of this, developing from that moment a logical-deductive reasoning completely independent from the geometrical register, and (2) the written discourse (answer) it is originated by an accumulation mode to be finished by the substitution mode.

Keywords: *configural reasoning, empirical problems, geometry, algebraical register, truncation.*

INTRODUCCIÓN

Durante la resolución de problemas geométricos de probar en los que se solicita demostrar un hecho geométrico (tesis) a partir de la información proporcionada sobre una configuración (hipótesis), los procesos de visualización desempeñan un papel relevante en la búsqueda de la solución. Duval (1998, 2016) los caracteriza mediante tres tipos de aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa. La aprehensión perceptiva la define como la identificación simple de una configuración geométrica. La aprehensión discursiva se manifiesta al asociar configuraciones o subconfiguraciones identificadas con afirmaciones/conceptos matemáticos, como teoremas, axiomas o definiciones. La aprehensión operativa se da al modificar, física o mentalmente, una configuración geométrica con el objetivo de identificar subconfiguraciones relevantes en el proceso

Saorín, A., Quesada, H. y Torregosa, G. (2018). Características del "truncamiento" en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 554-563). Gijón: SEIEM.

de demostración. Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) proponen su modelo de *razonamiento configural* al analizar la coordinación desarrollada entre las aprehensiones operativa y discursiva durante la resolución de problemas geométricos de probar. Diversas investigaciones enmarcadas bajo esta perspectiva (Prior y Torregrosa, 2013; Clemente y Llinares, 2013; Clemente y Llinares, 2014; Llinares y Clemente, 2014; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017a) nos están ayudando a identificar y comprender diferentes factores que permiten, mediante un razonamiento lógico-deductivo, concluir con éxito el proceso de resolución de problemas geométricos de probar. Sin embargo, esta tipología de problemas apenas es utilizada en los libros de texto de educación secundaria y bachillerato, ya que solemos encontrar otro tipo de problemas, que denominaremos empíricos, que presentan características diferentes a las de los problemas geométricos de probar. En el presente trabajo nos serviremos del modelo *razonamiento configural* para analizar las respuestas escritas de estudiantes al resolver problemas empíricos en contexto geométrico, con el objeto de identificar características en los razonamientos desarrollados que permiten concluirlos con éxito.

MARCO TEÓRICO

Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) al centrar su atención en la acción coordinada entre las aprehensiones operativa y discursiva durante la resolución de problemas geométricos de probar, denominaron *razonamiento configural* al razonamiento generado como resultado de dicha coordinación, pudiendo desembocar en tres situaciones o desenlaces: (1) *truncamiento*, cuando la coordinación entre aprehensiones proporciona “la idea” que conduce a solucionar el problema, es decir, permite al resolutor conocer cómo se resuelve el problema de forma deductiva; (2) *conjetura sin demostración*, si el razonamiento genera una solución al problema, pero basada en conjeturas no probadas o demostradas, como pueden ser aquellas establecidas a partir de percepciones (erróneas o no) de la configuración inicial; y (3) *bucle*, cuando se da una situación de bloqueo que impide avanzar hacia el establecimiento de una solución. Este modelo ha sido utilizado para analizar las respuestas a problemas geométricos de probar. Sin embargo, en el presente trabajo, consideraremos problemas geométricos empíricos. En estos problemas se describen hechos o situaciones particulares asociados a la vida real dentro de un contexto geométrico, a los que se asocian medidas, datos y/o variables (longitudes, ángulos, etc.) en lugar de hipótesis iniciales como sucede en los problemas de probar. Por ello, durante la resolución de problemas empíricos es habitual la aparición del registro algebraico, ya que no demandan una demostración formal, sino un resultado concreto obtenido a partir de los datos iniciales. Sin embargo, a pesar de las diferencias entre los problemas de probar y empíricos, para su resolución son necesarios conocimientos y propiedades geométricas similares. Debido a las características propias de los problemas empíricos se hace necesario incluir el registro algebraico en el modelo *razonamiento configural*, por lo que surge la necesidad de su extensión para permitirnos analizar los problemas empíricos en contexto geométrico. Torregrosa (2017) justifica la inclusión del registro algebraico en el modelo *razonamiento configural* a partir de los conceptos de conversión (cambiar una representación de registro sin cambiar el objeto representado) y tratamiento (transformaciones realizadas de una representación dentro de un mismo registro) de la teoría de los registros semióticos de Duval (1999). Este hecho nos permite considerar los datos o condiciones particulares expresadas en registro algebraico y asociadas a la configuración geométrica como afirmaciones matemáticas (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b; Torregrosa, 2017).

Por otro lado, el discurso escrito generado por los estudiantes al resolver problemas geométricos pone de relieve el razonamiento desarrollado que conduce (o no) a la solución. Duval (1999) considera la forma en que se va construyendo la respuesta escrita a un problema mediante la asociación de las afirmaciones que se establecen durante el proceso de resolución a partir de lo que denomina “*modos progresión (expansión) discursiva*”. Si el discurso escrito se construye con afirmaciones que no siguen un orden lógico y no están, necesariamente, conectadas entre sí se da el modo de *acumulación*. Este modo se observa, por ejemplo, al establecer afirmaciones matemáticas que únicamente reflejan propiedades o teoremas identificados en una configuración geométrica. En cambio, si se genera un discurso progresivo y secuencial de obtención de nueva información en el que cada afirmación matemática es consecuencia lógica de la anterior, tenemos el modo de *sustitución*. Encontramos este modo de construcción del discurso, por ejemplo, al aplicar un criterio de congruencia de triángulos a afirmaciones matemáticas establecidas previamente para obtener nueva información a partir de las mismas.

El objetivo del presente trabajo es identificar, en una primera aproximación, características del *truncamiento* del modelo *razonamiento configural* al resolver problemas empíricos en contexto geométrico, considerando la forma en que los estudiantes construyen el discurso escrito que manifiesta el razonamiento desarrollado conducente al establecimiento de una solución.

MÉTODO

Participantes y Contexto

En el presente trabajo participaron 33 alumnos de 1º de bachillerato, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Dichos alumnos no habían recibido formación relacionada con el proceso de demostración matemática en geometría, aunque sí con el proceso de resolución de problemas de tipo empírico debido a que es la tipología de problemas predominante en esta etapa educativa.

Instrumento

Los estudiantes participantes resolvieron dos problemas empíricos (Figura 1) seleccionados teniendo en cuenta que los estudiantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para resolverlos. En ambos problemas se presentaban unas condiciones iniciales en forma de datos numéricos asociadas a una configuración geométrica. Para su resolución los estudiantes debían poner en juego aprehensiones operativas y discursivas que desencadenasen un razonamiento que les permitiese establecer un discurso escrito conducente a la solución.

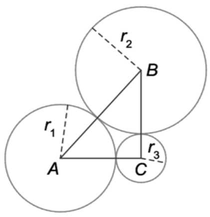
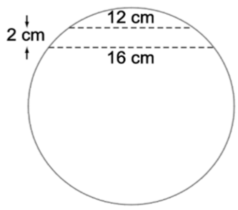
Problema 1 (P1)	**Problema 2 (P2)**
Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos. Calcula los radios de las tres circunferencias.	Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.
	

Figura 1. Problemas empíricos utilizados en el estudio

Análisis

Las respuestas escritas (discursos escritos) de los estudiantes al resolver los problemas fueron analizadas en tres fases. En primer lugar, se transcribieron y segmentaron las diferentes partes del discurso escrito en unidades de análisis que permitiesen detectar los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas puestos de manifiesto durante la resolución del problema, para posteriormente durante la segunda fase identificar los desenlaces del *razonamiento configural*. Consideramos unidad de análisis cada parte del discurso escrito en que se manifiesta la identificación o utilización de definiciones, axiomas, propiedades, etc., por parte de los estudiantes. En la tercera fase se procedió a diferenciar los diferentes *modos de expansión* del discurso escrito generado.

RESULTADOS

Los truncamientos del razonamiento configural detectados han supuesto el 22,72% de la totalidad de los problemas analizados. Observamos que se da el truncamiento en la resolución de los problemas analizados una vez cesan los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas que conducen al establecimiento de las relaciones que permiten a los estudiantes resolverlos. Por tanto, es en este punto donde finaliza el razonamiento configural desarrollado para dar paso a un tratamiento de las relaciones establecidas, en registro algebraico, que permite dar una solución a los problemas planteados.

A continuación, mostraremos el resultado del análisis a la respuesta del alumno 26 (en adelante AL26) al problema 1 (en adelante P1) presentada en la Figura 2 cuyo razonamiento configural desemboca en truncamiento y que ilustra lo comentado anteriormente. En la Figura 3 mostramos las unidades de análisis consideradas junto con las subconfiguraciones relevantes identificadas durante la resolución del problema. En la Figura 4 describimos los ciclos de aprehensiones operativas (AO_i) y discursivas (AD_i) del razonamiento configural desarrollados y los procesos de conversión entre registros y tratamientos realizados. En la misma figura las dobles flechas representan coordinaciones entre las diferentes aprehensiones.

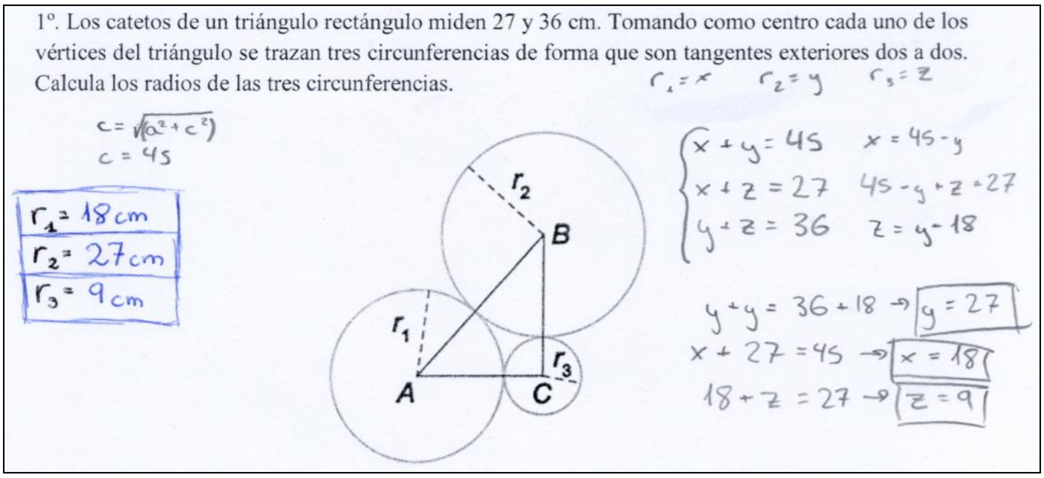


Figura 2. Respuesta de AL26 a P1

El estudiante inicia el razonamiento configural considerando la subconfiguración formada por el ΔABC, subconfiguración (a) mostrada en la Figura 3, realizando una aprehensión operativa (en adelante AO), a la que asocia el teorema de Pitágoras (aprehensión discursiva, en adelante AD) en registro algebraico, como se muestra en (1) (Figura 3). Este hecho le permite relacionar las longitudes de los catetos facilitadas por el enunciado con el lado desconocido (hipotenusa) del triángulo identificado para realizar un tratamiento y obtener el valor de su longitud (45cm) mostrado en (2) (Figura 3). Realizan, por tanto, un primer ciclo coordinado de aprehensión operativa/discursiva mostrado en la Figura 4 ($AO_0 \leftrightarrow AD_0$).

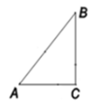
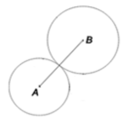
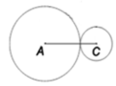
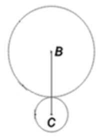
Unidades de análisis	Subconfiguraciones identificadas
(1) $c = \sqrt{(a^2 + c^2)}$ (2) $c = 45$ (3) $r_1 = x$ $r_2 = y$ $r_3 = z$	(a) 
(4) $x + y = 45$ (5) $x + z = 27$ (6) $y + z = 36$	(b) 
(7) $x = 45 - y$ (8) $45 - y + z = 27$ (9) $z = y - 18$ (10) $y + y = 36 + 18 \rightarrow y = 27$ (11) $x + 27 = 45 \rightarrow x = 18$ (12) $18 + z = 27 \rightarrow z = 9$	(c) 
(2) $r_1 = x$ $r_2 = y$ $r_3 = z$ (13) $r_1 = 18$ cm $r_2 = 27$ cm $r_3 = 9$ cm	(d) 

Figura 3. Unidades de análisis y subconfiguraciones identificadas

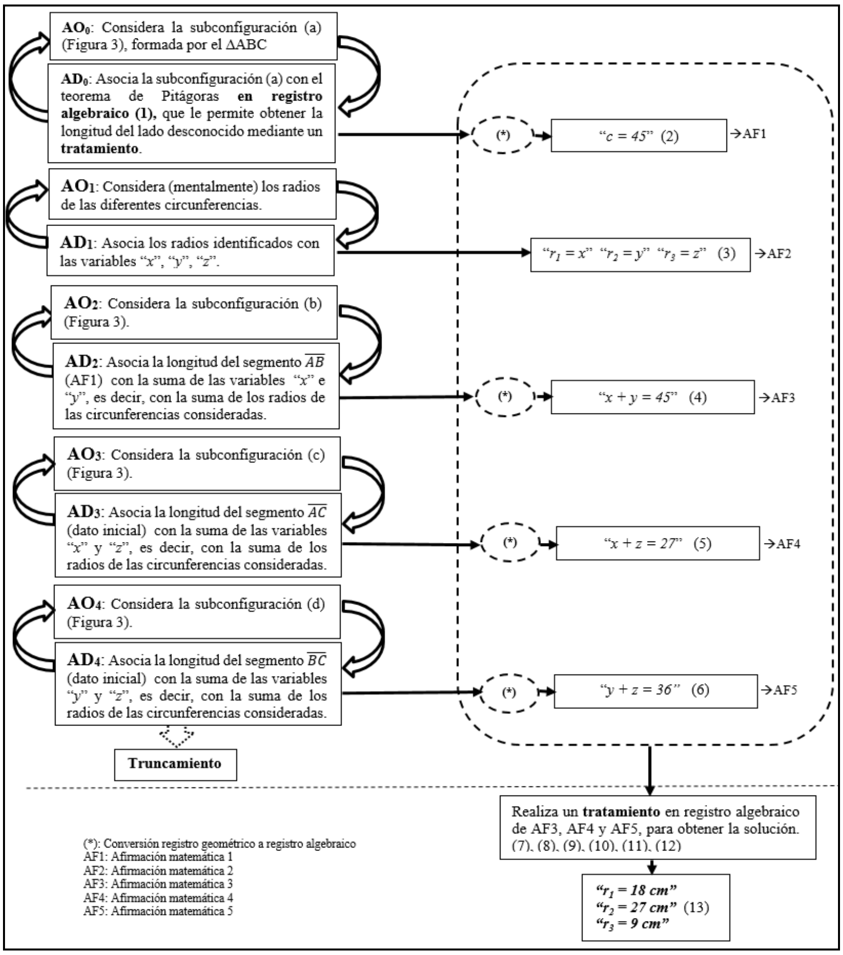


Figura 4. Razonamiento configural desarrollado por AL26 al resolver P1

En (3), tras calcular el valor del lado del triángulo desconocido, identifica (mentalmente) los radios de las circunferencias para asignarles las variables "*x*", "*y*" y "*z*" ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$). En (4), considera la subconfiguración (b) formada por las circunferencias con centros en A y B junto con el segmento

$\overline{AB}$ que los une para asociar su longitud (45 cm) con la suma de los radios “r_1” y “r_2” (identificados con las variables “x” e “y”), realizando una conversión de la subconfiguración descrita (registro geométrico) al registro algebraico, expresando la relación indicada en registro algebraico mediante la afirmación matemática *AF3* ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$). En (5), considera la subconfiguración (c) formada por las circunferencias con centros en A y C junto con el segmento $\overline{AC}$ que los une para asociar su longitud (27 cm) con la suma de los radios “r_1” y “r_3” (identificados con las variables “x” y “z”), realizando una conversión del registro geométrico al algebraico de la subconfiguración descrita, que le permite expresar la relación indicada en registro algebraico mediante la afirmación matemática *AF4* ($AO_3 \leftrightarrow AD_3$). En (6), considera la subconfiguración (d) formada por las circunferencias con centro en B y C junto con el segmento $\overline{BC}$ que los une para asociar su longitud (36 cm) con la suma de los radios “r_2” y “r_3” (identificados con las variables “y” y “z”), realizando una conversión del registro geométrico al algebraico de dicha situación mediante la afirmación matemática *AF5* ($AO_4 \leftrightarrow AD_4$).

En (7), (8), (9), (10), (11) y (12) utiliza las afirmaciones expresadas en registro algebraico en (4), (5) y (6) (*AF3*, *AF4* y *AF5*) para realizar un tratamiento que le permite obtener los valores de las variables “x”, “y” y “z”, para en (13) volver a asociarlas con los radios correspondientes, permitiendo concluir el problema emitiendo una solución.

En esta última fase, encontramos que no se da ningún ciclo coordinado de aprehensiones, sino que únicamente se realiza un tratamiento en registro algebraico de las relaciones establecidas para calcular una solución al problema. Por ello consideramos que el razonamiento configural desemboca en truncamiento debido a que los ciclos coordinados entre aprehensiones han proporcionado al estudiante las relaciones (extraídas de las subconfiguraciones identificadas) que permiten resolver correctamente el problema. El razonamiento configural finaliza una vez el estudiante ha establecido las relaciones (en forma de afirmaciones matemáticas en registro algebraico) necesarias para resolver el problema, es decir, una vez que sabe cómo se resuelve, hecho que caracteriza el desenlace truncamiento del razonamiento configural. Sin embargo, continúa generando discurso escrito (en registro algebraico) que refleja un razonamiento lógico-deductivo conducente a comunicar la solución al problema, aunque se trata de un razonamiento totalmente independiente del registro geométrico.

La Figura 5 se muestra la respuesta del alumno 1 (AL1) al problema 2 (P2).

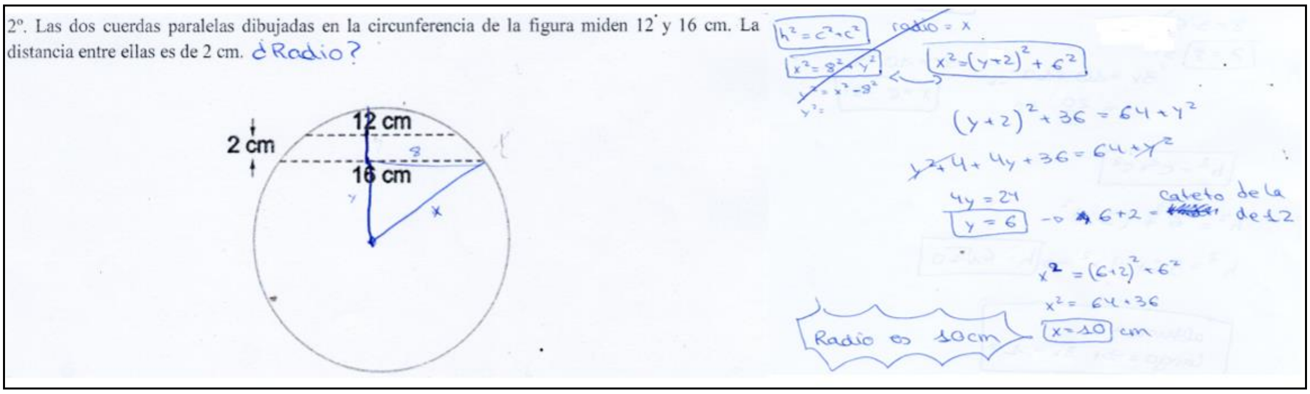


Figura 5. Respuesta de AL1 a P2

En este caso, el estudiante traza dos radios, uno que une el extremo de la cuerda de 16 cm con el centro de la circunferencia y otro perpendicular a las cuerdas dadas en su punto medio, por lo que ambas quedan divididas en dos partes iguales, tal y como se muestra en (1) (Figura 6). Por tanto, realiza una aprehensión operativa de cambio figural (AO_0) (Figura 7).

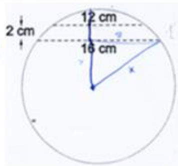
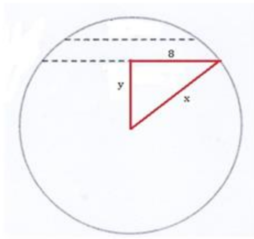
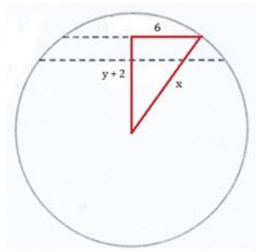
Unidades de análisis	Subconfiguraciones identificadas
(1)  (2) radio = x (3) $h^2 = c^2 + c^2$ (4) $x^2 = 8^2 + y^2$ (5) $x^2 = (y+2)^2 + 6^2$ (6) $(y+2)^2 + 36 = 64 + y^2$ $\cancel{y^2} + 4 + 4y + 36 = 64 + \cancel{y^2}$ $4y = 24$ $y = 6 \rightarrow 6+2$ = cateto de la de 12 (7) $x^2 = (6+2)^2 + 6^2$ $x^2 = 64 + 36$ $x = 10$ cm (8) Radio es 10 cm	(a)  (b) 

Figura 6. Unidades de análisis y subconfiguraciones identificadas

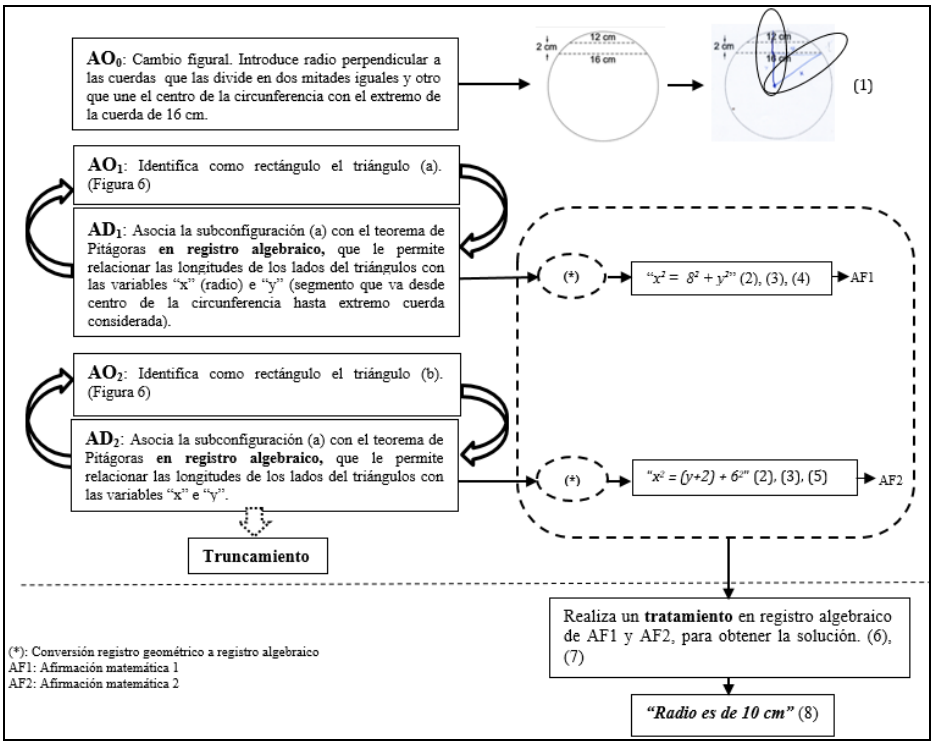


Figura 7. Razonamiento configural desarrollado por AL1 al resolver P2

Tras la modificación de la configuración inicial, considera la subconfiguración (a) (Figura 6) a la que asocia el teorema de Pitágoras en registro algebraico (3) (Figura 6) permitiéndole establecer la relación (4) (Figura 6) en registro algebraico, es decir, la afirmación matemática *AF1*, terminando así el primer ciclo del razonamiento configural ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$) (Figura 7). Análogamente, el hecho de considerar la subconfiguración (b) (Figura 6) le conduce a establecer la afirmación matemática *AF2*, finalizando el segundo ciclo del razonamiento configural ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$) (Figura 7). Tras establecer ambas afirmaciones, realiza un tratamiento en registro algebraico (resolviendo el sistema de ecuaciones planteado en (6) y (7) (Figura 6) y comunica la solución al problema en (8) (Figura

6). De esta forma, el razonamiento configural (ciclos coordinados de aprehensiones), junto con los procesos de conversión entre registros, han permitido al estudiante conocer la forma de resolver el problema (truncamiento) antes de realizar el tratamiento en registro algebraico para concluirlo. Así, el razonamiento configural finaliza una vez se han establecido las relaciones necesarias, en forma de afirmaciones matemáticas (ecuaciones), que permiten resolver de forma deductiva el problema mediante un tratamiento en registro algebraico de las mismas. Del mismo modo que en caso descrito anteriormente para P1, una vez que el estudiante sabe cómo resolver el problema a partir de las relaciones establecidas continúa con su discurso escrito destinado a comunicar la solución final al problema, desarrollando un razonamiento lógico-deductivo sin considerar el registro algebraico, que omite una vez el razonamiento configural finaliza.

Forma en que los estudiantes construyen el discurso escrito (respuesta)

Al analizar la forma en que los estudiantes construyen su discurso escrito (respuesta) considerando los modos de expansión del discurso (Duval, 1999), tenemos que AL26 al resolver P1 comienza extrayendo información de la subconfiguración (a) en forma de afirmación matemática (1) (Figura 3) que representa, en registro algebraico, la forma general del teorema de Pitágoras. Esta afirmación es establecida mediante el modo de acumulación, ya que sólo refleja información inferida de la subconfiguración considerada, como podría ser también, por ejemplo, que la suma de sus ángulos interiores es 180º. A partir del teorema de Pitágoras realiza un tratamiento (considerando los datos iniciales) para obtener que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es de 45 cm (2) (Figura 3). Consideramos que este valor es obtenido por sustitución, ya que su cálculo implica una secuencia ordenada y lógica de operaciones, siendo cada una de ellas resultado de la anterior. En (4), tras identificar los radios con las variables *x*, *y*, *z* en (3), escribe en forma de afirmación matemática (en registro algebraico) la relación entre los radios r_1 y r_2 extraída de la subconfiguración (b) (Figura 3). De forma análoga, establece las relaciones existentes entre los radios restantes en (5) y (6) a partir de las subconfiguraciones (c) y (d) (Figura 3). Estas afirmaciones son sólo el “reflejo” de la información inferida de las subconfiguraciones consideradas y expresadas en registro algebraico, no siendo consecuencia lógica una de otra y pudiendo haberse establecido en cualquier orden. Por ello, tenemos que (4), (5) y (6) son afirmaciones construidas por acumulación. Sin embargo, las afirmaciones (7), (8), (9), (10), (11) y (12) (Figura 3) no son establecidas a partir de información extraída de las subconfiguraciones geométricas identificadas, sino que provienen del tratamiento de las afirmaciones (4), (5) y (6), generándose una secuencia ordenada y lógica de afirmaciones matemáticas que permite resolver el problema y dar una solución en (13). Por tanto, consideramos que esta parte final del discurso escrito se construye mediante un modo de sustitución.

Para el caso de AL1 al resolver P2, tenemos que el estudiante empieza recopilando toda la información inferida de la subconfiguración (a) (Figura 6) estableciendo las afirmaciones (2), (3) y (4). En (2) se refleja la relación entre la variable “*x*” y el radio, en (3) indica la forma general del teorema de Pitágoras, para en (4) aplicarlo a los valores del triángulo rectángulo identificado. De igual modo, la información extraída de la subconfiguración (b) (Figura 6), le permite establecer la afirmación (5). Estas afirmaciones resultan de convertir toda la información extraída de las subconfiguraciones (a) y (b) (Figura 6) al registro algebraico y “acumularla” en el discurso escrito, no siendo consecuencia lógica una de la otra, por lo que son establecidas mediante un modo de acumulación. Las afirmaciones (6), (7) y (8) (Figura 6) son construidas a partir de relaciones lógicas establecidas entre la información previa acumulada en registro algebraica. En (6) iguala (4) y (5) y realiza un tratamiento para obtener el valor de la variable “*y”* que le permite en (7) calcular el valor de la variable *“x”* mediante otro tratamiento. En (8) asocia el valor obtenido para la variable “*x*” con la longitud del radio finalizado de esta forma el problema. En parte del discurso escrito se genera un razonamiento lógico-deductivo en el que cada afirmación es consecuencia lógica de la anterior, por lo que se construye por sustitución.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo es identificar características del desenlace *truncamiento* del modelo *razonamiento configural* cuando los estudiantes resuelven problemas empíricos geométricos, considerando la forma en que construyen la respuesta escrita (discurso) que comunica el proceso de resolución.

En los problemas analizados el truncamiento del razonamiento configural se da en el momento en el que los estudiantes han establecido las relaciones en registro algebraico necesarias para resolver el problema mediante un tratamiento de las mismas. En el caso de P1, el estudiante AL26, una vez establece las relaciones (4), (5) y (6) (Figura 3), ya sabe cómo resolverlo a pesar de no haber propuesto ninguna solución. De forma análoga sucede en P2, ya que cuando el estudiante AL1 establece las relaciones (4) y (5) (Figura 6), conoce como se resuelve el problema, a pesar de no haber finalizado el proceso de resolución. Los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas finalizan una vez los estudiantes han conseguido establecer las relaciones que resuelven el problema y son conscientes de ello. Por tanto, cesan las interacciones entre las subconfiguraciones identificadas y las definiciones, propiedades o teoremas que van formando el discurso escrito, hasta que los estudiantes, mediante procesos de conversión entre registros, han expresado las relaciones identificadas en las subconfiguraciones consideradas en registro algebraico. Es decir, han conseguido establecer un modelo en registro algebraico de una situación geométrica. Una vez modelan la situación en registro algebraico, el registro geométrico se hace innecesario para finalizar la resolución, ya que únicamente es necesario un tratamiento para poder obtener la solución al problema. Por tanto, en esta parte final del proceso de resolución los alumnos ponen de manifiesto el desarrollo de un razonamiento deductivo independiente del registro geométrico, y por tanto de cualquier proceso de visualización, en consonancia con los resultados de Duval (2016).

Por otro lado, en los truncamientos analizados, los estudiantes van componiendo el discurso escrito (respuesta) a partir de la acumulación de la información inferida de las subconfiguraciones identificadas, hasta que establecen las relaciones necesarias, en registro algebraico, que permiten resolver el problema, por lo que esta parte del discurso se caracteriza por un predominio del modo de acumulación. Una vez "acumuladas" las relaciones necesarias para resolver el problema, los estudiantes empiezan a desarrollar un razonamiento lógico-deductivo mediante un tratamiento de las mismas, en las que cada afirmación es consecuencia de la anterior, con total independencia del registro geométrico, por lo que predomina el modo de sustitución. Por tanto, encontramos que el discurso se inicia desde un modo de acumulación para finalizar mediante el modo de sustitución. De este modo, el truncamiento podría caracterizarse, además, por un cambio en el modo de expansión del discurso, que podría explicarse por el cambio en el estatus (rol) de las relaciones necesarias para resolver el problema dentro del razonamiento desarrollado (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017a).

El análisis bajo la perspectiva del razonamiento configural, considerando los procesos de conversión entre registros y de tratamiento, y los modos de expansión del discurso, nos puede permitir arrojar luz sobre el momento en el que los estudiantes son conscientes de cómo se resuelven los problemas, es decir, sobre cuando se produce el truncamiento al resolver problemas empíricos en contexto geométrico y de qué forma puede manifestarse en el discurso escrito (respuesta).

Referencias

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.

Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el "truncamiento" del razonamiento configual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds), *Investigación en Educación Matemáticas XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-61). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 234-250.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 339-368.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017a). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P, Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017b). Razonamiento configural extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. II CEMACYC. Cali, Colombia, 2017.

Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 1-17.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 327-340.

SABER MÁS NO IMPLICA RESOLVER MEJOR

Knowing more does not imply resolving better

Sua-Flórez C.[a]

[a]Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Los problemas de demostración, vistos como un ejemplo de la resolución de problemas, demandan poner en juego distintos conocimientos y habilidades en el uso de la geometría dinámica cuando se cuenta con el apoyo de esta. Apoyados en dos grupos de estudiantes para profesor de matemáticas con un nivel de formación matemática distinta, mostramos que el proceso de resolución de un problema deja ver estrategias de solución distintas, sin embargo, algo llamativo de los resultados obtenidos, es que los estudiantes con formación matemática inferior muestran mejores resultados. El objetivo de este documento es mostrar que los conocimientos con los que un individuo cuenta y su conocimiento del software no son los únicos aspectos relevantes en el proceso de resolución.

Palabras clave*: resolución problemas, GeoGebra, episodios, problemas de demostración.*

Abstract

Proof problems, seen as an example of problem solving, demand to use different knowledge and skills about dynamic geometry when they can use it. Supported in two groups of pre-service mathematics teachers with a different level of mathematical training, we show that problem solving reveals different solution strategies, however, what is striking about the results obtained, is that the students who have a lower mathematical background show better results. The objective of this document is show that someone's knowledge and their knowledge about the software aren't the unique relevant aspects in the problem solving.

Keywords*: problem solving, GeoGebra, episodes, proof problems.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las herramientas tecnológicas ha permitido su incorporación en propuestas de formación. El potencial de estos recursos radica en la posibilidad de alejarse de representaciones estáticas, donde los objetos involucrados se dotan de propiedades no necesariamente ciertas y predomina la mecanización de procedimientos, favoreciendo ahora el uso de representaciones manipulables, que por su naturaleza, promueven procesos matemáticos como: visualizar, conjeturar, argumentar y conceptualizar (Valencia, Sanabria, y Ibáñez, 2012). En el caso de la geometría se ha privilegiado el uso de programas de geometría dinámica [PGD/GD], donde los objetos geométricos se dotan de movimiento gracias a la función de arrastre. Dada la conservación de las propiedades de estos objetos al manipularlos, en este recurso se vislumbra una herramienta para promover el descubrimiento de relaciones de dependencia difícilmente observables en configuraciones estáticas. Esto ha despertado nuevos intereses en la enseñanza de la geometría entre los que se encuentra la demostración (Hanna, 2001, p. 12). La investigación reconoce un tránsito, desde enfoques donde se pretendía promover habilidades para la demostración en los estudiantes, hacia enfoques donde se estudia la evolución de la comprensión de los estudiantes al respecto y formas para apoyarla (Marrades y Gutiérrez, 2001, p. 88). Entre las bondades reconocidas de la GD se encuentra la posibilidad favorecer dicha comprensión (Hanna, 2001, p. 13; Marrades y Gutiérrez, 2001).

Algunas investigaciones reconocen la dificultad de los estudiantes al afrontar la demostración (Koichu y Leron, 2015) y por ello han involucrado constructos teóricos para comprender esta

Sua-Flórez, C. (2018). Saber más no implica resolver mejor. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 564-573). Gijón: SEIEM.

dificultad. Fruto de este ejercicio, se han establecido nexos entre la demostración y la resolución de problemas, donde la primera es instancia de la segunda (Mamona-Downs y Downs, 2005; citado en Koichu y Leron, 2015). Las investigaciones realizadas al respecto han analizado las actuaciones de los estudiantes al afrontar demostraciones a la luz de teorías construidas sobre la resolución de problemas (Furinghetti y Morselli, 2009). Lo anterior muestra ya esfuerzos investigativos, sin embargo, poco se ha reportado sobre de la naturaleza del proceso de resolución de problemas de demostración en geometría con ayuda de la GD y la forma en que el conocimiento matemático incide en este. Esto sitúa un asunto que merece la pena ser estudiado, a saber, la esencia del proceso de resolución de problemas de demostración en geometría cuando esta es asistida por la GD. En esta vía, estudiamos el proceso de resolución de problemas de demostración en geometría llevado a cabo por dos grupos con formación matemática distinta, enfocándonos en los episodios que tienen presencia allí, con el fin de identificar y comparar la naturaleza de este proceso y determinar la forma en que sus conocimientos inciden en el mismo. Para ello presentamos en este documento los referentes conceptuales adoptados, la estrategia metodológica involucrada y el análisis del proceso de resolución de un problema a la luz los referentes teóricos. En un momento final se presentan las conclusiones derivadas del análisis presentado en función de los objetivos declarados líneas atrás.

MARCO TEÓRICO

Problemas de demostración

Un problema es una situación que no se relaciona inmediatamente con un conocimiento matemático que juegue un rol en la solución (Nunokawa, 2010). La situación problema no puede ser resuelta inmediatamente por el que la afronta, quien tampoco conoce algún mecanismo conducente a su resolución. Esto lleva a analizar la situación abordada y usar heurísticas que permitan trazar una ruta de solución (Nunokawa, 2010), que pueden ser específicas o generales a un dominio de conocimiento y pueden promover una estrategia general de resolución o apenas un pequeño avance. Establecer una demostración puede verse como un problema, pues se reconocen condiciones iniciales y un resultado a obtener con base en estas, avanzando desde el estado inicial del problema hasta un estado final del mismo, transitando por estados intermedios gracias al uso de elementos de un sistema teórico de referencia a través de un razonamiento deductivo (Perry, Samper, Camargo, y Molina, 2013). Denominaremos a estas situaciones *problemas de demostración*, conservando así la idea propuesta por Polya al referirse a estos como una clase de problemas en que los estudiantes proveen una justificación a alguna aserción, explícita en el enunciado del problema o descubierta y formulada como parte de la tarea (Marrades y Gutiérrez, 2001).

Episodios de la resolución de problemas

Adoptamos el modelo de Kuzle (2015), elección que atiende a la caracterización del proceso de resolución de problemas cuando media la GD, pues para esta autora los recursos tecnológicos (incluida la GD) tienen implicaciones favorables en la resolución de problemas. Esto da pertinencia y relevancia a este modelo por la presencia de la GD en el estudio presentado acá. Este modelo involucra siete episodios (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), los cuales son presentados por Schoenfeld originalmente, e interpretados y complementados por Kuzle (2015) como fundamento teórico de su investigación. Aun cuando el modelo sugiere una trayectoria lineal entre los episodios, el recorrido por estos puede darse de forma cíclica, repetitiva o incluso omitiendo algunos episodios. Una descripción de estos se presenta a continuación.

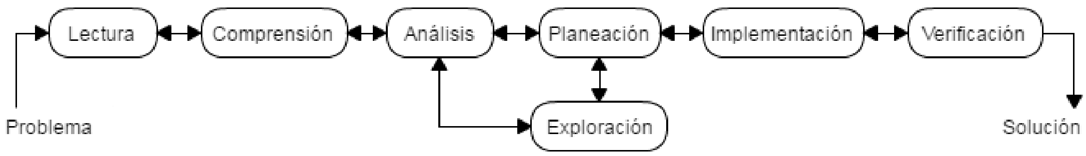


Figura 1. Episodios de la resolución de problemas (Fuente: Kuzle, 2015)

Tabla 1. Descripción episodios de resolución

Episodio	Descripción
Lectura (L)	Tiene lugar cuando un sujeto inicia a leer el enunciado del problema en voz alta. Esto incluye el reconocimiento de las condiciones del problema, la verbalización de las partes del enunciado y momentos de silencio que podrían llevar a una lectura mental, que indicaría contemplación del enunciado del problema, o pensamientos en blanco.
Compr. (C)	Engloba los intentos de un sujeto por clarificar el significado del problema, sus partes y la relación entre estas. Se identifican objetivos del problema, este se representa y se evalúa el conocimiento personal respecto al demandado.
Análisis (A)	Cuando no hay una forma aparente de proceder después de haber leído el problema, tiene presencia un ejercicio de análisis. Aquí el estudiante descompone el problema en otros, examina las relaciones entre los datos, las condiciones y el objetivo del problema, seleccionando posibles rutas de solución. Esto lleva a reformular o simplificar el problema.
Explo.(E)	Se realiza un recorrido por el espacio del problema, descubriendo información relevante que pueda ser incorporada en episodios de análisis, planeación o implementación. Aquí tienen presencia distintas heurísticas, la examinación de problemas relacionados, el uso de analogías, etc. La distinción entre la exploración y el análisis puede darse en su estructura. Mientras el análisis se caracteriza por ser bien estructurado, ciñéndose a las condiciones o logros del problema, la exploración es menos estructurada, desligada del problema original.
Planea.(P)	Se da un cuestionamiento del sujeto sobre cómo proceder para resolver el problema. Algunas rutas tentativas pueden ser trazadas y consideraciones o anticipaciones sobre estas rutas se pueden vislumbrar, lo que puede llevar o no a su implementación.
Imple.(I)	Se ejecutan acciones para operar con la información de la que se dispone. Estas acciones pueden apoyarse en planes considerados. Sin embargo, es posible que se implemente alguna estrategia sin que esta se planificara (actuar de forma automática a un estímulo sin reflexionar sobre este). Es posible que aun cuando se haya planificado una ruta de trabajo para resolver un problema, esta no se ejecute porque al considerar su efectividad no se vea mayor avance, o porque factores externos al sujeto impidan su ejecución.
Verifi.(V)	Se llevan a cabo acciones de revisión sobre los resultados obtenidos y su correspondencia con lo solicitado en el enunciado del problema. Este episodio no es punto final del proceso de resolución, dado que puede desencadenar que el sujeto se sitúe en el punto de partida nuevamente si el resultado obtenido no es adecuado o consecuente con lo solicitado.
Transi.(T)	Entre los episodios mencionados tiene lugar una transición, vista como una coyuntura en la que se evalúa un estado del problema, su avance o resultados y se toman decisiones que llevan a seleccionar nuevas direcciones, esto es, un nuevo episodio.

METODOLOGÍA

En este documento analizamos el trabajo de dos parejas de estudiantes al resolver cuatro problemas de demostración con ayuda de GD. Exploramos y comprendemos las dinámicas que tienen presencia en esta configuración dentro de un contexto particular, como lo es la resolución de problemas. Por ello, consideramos que el estudio hace parte de un estudio de caso cuya unidad de análisis es el proceso de resolución de los problemas (Baxter y Jack, 2008).

Contexto del estudio

Dos estudiantes para profesor de primer semestre (Ana y Juan) y dos de cuarto semestre (Caro y Paul), de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) fueron involucrados. La elección de trayectorias académicas distintas atendía al deseo de comparar el proceso de resolución exhibido en cada grupo y estudiar la relación entre la profundidad en la formación matemática y el proceso de resolución manifestado. Ana y Juan apenas habían tomado un curso en que se realizan aproximaciones a definiciones y propiedades de objetos geométricos (rectas, circunferencias, cuadriláteros y triángulos), se promueven procesos de argumentación y se usa de manera inicial la GD, mientras que Caro y Paul habían tomado cuatro cursos de geometría, estudiando formalmente objetos y relaciones en el plano, el espacio y la geometría analítica.

Para ambos grupos era común la metodología de los cursos. Esta es la propuesta metodológica formulada por el grupo de investigación AEG (Perry et al., 2013), a través de la cual los elementos teóricos estudiados en clase surgen como resultado de un trabajo grupal en el que los estudiantes se involucran en la resolución de problemas y la GD es protagonista, al permitir que procesos de conjetura y justificación tengan lugar. Las producciones de los estudiantes se someten a la evaluación de sus compañeros, quienes las apoyan o refutan. Los elementos aceptados conforman un sistema teórico (definiciones, teoremas y postulados) en el marco de la geometría euclidiana.

Diseño de la secuencia

Se contemplaron problemas que involucraran asuntos del primer curso de geometría que pudieran ser vistos como problemas de demostración. Frente al recurso tecnológico, los problemas situaban a los estudiantes en un escenario en el que era indispensable apoyarse en las bondades de la GD para operar con los datos dados. Así pues, se realizó una revisión en la literatura para identificar problemas bajo estas consideraciones, seleccionando así cuatro problemas. Estos problemas se diferenciaban por los objetos geométricos que involucraban, las relaciones geométricas estudiadas y el uso dado a la GD en cada uno (función de arrastre, traza, construcciones blandas y robustas). Por motivos de extensión, presentamos el trabajo realizado por Caro y Paul alrededor de uno de estos problemas, el cual se presenta a continuación. Esta elección atiende a la naturaleza inductiva de la estrategia de solución y la forma rígida en que la GD se involucra.

Construya un cuadrilátero que cumpla la siguiente propiedad: Las bisectrices de dos ángulos adyacentes del cuadrilátero determinan un ángulo recto. Formule conjeturas y justifíquelas.

Acopio de datos y análisis retrospectivo

Se conformaron parejas de estudiantes del mismo semestre. En el transcurso de una semana, durante ocho sesiones fuera del espacio de clases, se reunió el investigador, autor del documento, con cada pareja para resolver cada problema. Cada pareja contó con un computador con GeoGebra y un archivo con los enunciados de los problemas. La elección de este PGD atendió a la familiaridad de los estudiantes con el mismo en el desarrollo de sus cursos de geometría. El investigador, acompañó los grupos sin tomar parte en la discusión que entre sus miembros se generó. Él solicitaba a los estudiantes verbalizar sus pensamientos cuando se presentaban pausas o silencios prolongados con el fin de registrarlos. Se utilizó *Camtasia* para registrar la interacción llevada a cabo en la pantalla del computador, las conversaciones sostenidas entre los estudiantes y una captura, con ayuda de la cámara frontal del computador, de sus manifestaciones corporales; las producciones escritas de los estudiantes al abordar cada problema también se acopiaron. Al finalizar el trabajo con cada grupo el investigador realizaba algunas preguntas a los grupos con el fin de obtener información sobre episodios que requirieran una explicación adicional o fueran llamativos.

Los audios de las grabaciones realizadas fueron transcritos. Las transcripciones fueron fragmentadas teniendo en cuenta los objetivos de los sujetos durante el proceso de resolución. Esto permitió convertir cada transcripción en una secuencia de bloques. Los registros generados por cada grupo fueron analizados de manera independiente para reconocer episodios de resolución y su duración. Posteriormente, se realizó un cuadro comparativo entre el trabajo realizado por los grupos al afrontar los problemas, analizando el proceso de resolución y la forma en que la GD se involucró.

Un episodio emergente

Al involucrar el modelo de Kuzle en el análisis se pudo observar que no todas las acciones de los estudiantes podían ser "codificadas" a la luz de este. Se reconocieron momentos del proceso de resolución en los que los estudiantes establecían resultados parciales y recogían los resultados del trabajo realizado. Esto llevó a considerar un nuevo episodio que se describe a continuación.

Tabla 2. El episodio de síntesis

Síntesis (S)	Se retoman resultados que se han obtenido al realizar distintos esfuerzos al resolver el problema. Estos resultados, que pueden ser parciales, provienen de la exploración realizada en una situación particular, el análisis de esta o las creencias de quien afronta el problema.

UN EJEMPLO DE LO OCURRIDO

Presentamos el proceso de resolución de uno de los problemas propuestos. Para ello haremos un recuento del proceso, identificando la emergencia de episodios de resolución, los cuales se presentan utilizando su letra inicial.

Las bisectrices del cuadrilátero

Caro inicia realizando una lectura del enunciado sin hacer énfasis o repetir alguna parte de este [L]. Una vez termina, Paul sugiere involucrar GeoGebra y construir un cuadrilátero [P], preguntando a Caro sobre la pertinencia de esta idea, a lo que Caro manifiesta aceptación. Paul representa gráficamente el cuadrilátero [I] y Caro le pide que construya las bisectrices de los ángulos involucrados. Al final retoman las condiciones del problema para que la cantidad de bisectrices construidas corresponda a las solicitadas. Caro determina las medidas de los ángulos a los que se les construyó su bisectriz y considera que se manipule [P] el cuadrilátero con el fin de identificar las propiedades de este, en función de sus ángulos, que hacen que la perpendicularidad de las bisectrices se satisfaga. Para Paul no es claro qué ángulos deben ser rectos, por lo que Caro le comenta que es el ángulo determinado por las bisectrices el que debe medir 90 [C]. Caro determina las medidas de los otros ángulos del cuadrilátero y la del ángulo determinado por las bisectrices (ángulo E) [I] a la vez que hace explícito que, con base en estos, determinarán el tipo de cuadrilátero para el cual las bisectrices son perpendiculares (Figura 2).

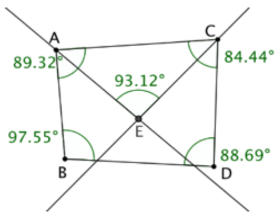


Figura 2. Construcción de Caro y Paul

Paul pide a Caro que arrastre los puntos y al hacer esto [E] establecen un primer resultado apoyados en lo que la pantalla de GeoGebra les muestra: no cualquier cuadrilátero satisface esta condición. El resultado observado hace que Paul considere que una propiedad del cuadrilátero que hace que la perpendicularidad de las bisectrices se cumpla es que un par de ángulos opuestos del cuadrilátero sean congruentes. Apoyados en las medidas de los ángulos, arrastran los puntos B y C hasta que sus medidas son aproximadamente iguales, pero la representación gráfica expuesta en pantalla muestra que el ángulo E no es recto, lo que lleva a Paul a descartar esta posibilidad. Al final, Paul propone [P] que se realice una exploración en cuadriláteros conocidos por ellos.

Caro no considera la propuesta de Paul y, apoyada en la representación gráfica en pantalla, inicia un análisis de esta [A] que la lleva a involucrar algunos elementos teóricos con el fin de justificar que los ángulos A y C deben ser rectos. Esta propuesta no es compartida por Paul, ante lo cual Caro propone [P] que se evalúe esta posibilidad modificando el cuadrilátero de tal forma que su sospecha se cumpla. Paul arrastra el punto B [I] pero las medidas de los ángulos mostrados en pantalla no dan exactamente 90. Aun así, la aproximación de las medidas permite ver que el ángulo E, determinado por las bisectrices, tiene una medida cercana a 90. Este trabajo lleva a Paul a anticipar que en el rectángulo las bisectrices de los ángulos adyacentes deben ser perpendiculares.

La sospecha de Paul lleva a que el grupo analice lo que ocurre en cuadriláteros particulares [P]. De acuerdo con Caro, se transformará el cuadrilátero en pantalla con el fin de que este sea un rectángulo. Al arrastrar los vértices del cuadrilátero [I] para lograr esto las aproximaciones de los ángulos les permiten observar que el ángulo E es recto, aun cuando el valor no es exactamente 90. Paul sugiere realizar una construcción robusta del cuadrilátero para verificar este resultado [V], pero Caro interrumpe su idea y asegura, basada en la evidencia empírica suministrada en pantalla, a modo de conclusión, que contar con que las medidas de los ángulos A y C sea igual a 90, conlleva a que el ángulo determinado por sus bisectrices sea también de 90. Al final ambos estudiantes, apoyados en este resultado, mencionan [S] que la propiedad solicitada en el problema se cumple cuando el cuadrilátero es cuadrado o rectángulo, explicando que el cumplimiento de la propiedad en el cuadrado se da en cuanto este es rectángulo también.

Paul sugiere ahora considerar un paralelogramo [P], para lo cual realiza una construcción de este, apoyado en rectas paralelas [I], así como las bisectrices de dos ángulos adyacentes de este cuadrilátero. Paul anticipa que la propiedad parece cumplirse y al determinar la medida del ángulo determinado por las bisectrices, esta da exactamente 90, resultado que lo lleva a señalar que en cualquier paralelogramo [S] esta propiedad es verdadera. Apoyándose en este resultado, Caro señala que es por ello que el rectángulo y cuadrado cumplen esta propiedad, pues ambos cuadriláteros son paralelogramos. Paul arrastra uno de los vértices del paralelogramo en la pantalla [V], con lo que observan que bajo arrastre esta propiedad se conserva.

Paul propone [P] construir un trapecio. Caro no sabe si construir un trapecio ordinario o uno isósceles, a lo que Paul responde que será un trapecio ordinario. Caro construye dos rectas paralelas [I] y dos segmentos de forma tal que en pantalla se puede observar un trapecio. Después de ello, Paul construye las bisectrices de los ángulos que comparten uno de los lados paralelos y al determinar la medida del ángulo determinado por estos rayos, observan que esta no da 90, resultado que los lleva establecer que el trapecio ordinario no cumple la propiedad y a determinar qué ocurre en el trapecio isósceles [P], para lo cual arrastran los extremos de los segmentos de los lados no paralelos [I], de tal forma que sus longitudes coincidan. El resultado en pantalla les muestra que una vez los lados no paralelos son congruentes, el ángulo determinado por las bisectrices construidas no es recto. Con base en esto, Paul y Caro descartan este cuadrilátero como solución [S].

Paul sugiere ahora ensayar con una cometa [P]. Al inicio dudan sobre las condiciones de este cuadrilátero, pero logran recordar que en esta se debe cumplir la congruencia de los lados consecutivos. Antes de representar gráficamente este cuadrilátero, Paul propone construir primero un rombo y evaluar el cumplimiento de la propiedad allí, idea rechazada por Caro en cuanto este cuadrilátero es un paralelogramo. Retomando la construcción de la cometa [I], ambos estudiantes tienen problemas para representar este cuadrilátero al no tener claridad sobre cómo involucrar las herramientas de GeoGebra para tal fin. Su estado de incertidumbre las lleva a construir un cuadrilátero en el que apenas dos lados adyacentes son congruentes y los otros no lo son con certeza (sus longitudes son apenas cercanas). Construyen las bisectrices y sin determinar la medida del ángulo determinado por estos dos rayos, anticipan el no cumplimiento de la propiedad, pues una observación de este ángulo en pantalla lleva a concluir que las bisectrices no son perpendiculares. Caro propone determinar la medida del ángulo, arrastrar uno de los vértices de tal forma que los lados no congruentes lo sean y corroborar si su apreciación es acertada. Cuando Paul hace esto, el resultado en pantalla no permite asegurar que el ángulo determinado por las bisectrices sea recto, lo que los lleva a concluir que en este cuadrilátero no se cumple la propiedad estudiada y que esta solo tiene presencia en los paralelogramos [S]. En este punto ellos retoman las experiencias del trabajo con los otros cuadriláteros, aquellas afortunadas y otras donde no se cumplió la propiedad. Paul le pregunta a Caro si algún cuadrilátero falta por ser evaluado [V], a lo que ella responde que ya se han evaluado los cuadriláteros conocidos y que el problema ha sido resuelto.

La persona que acompañaba a los estudiantes les indica que revisen el enunciado del problema con el objetivo de que no dejen de lado algún requerimiento puesto que ellos consideraban que no había algo más por hacer. Los estudiantes realizan esto [L], identificando que en este se solicita formular conjeturas y justificarlas. Luego de esto retoman la construcción del paralelogramo en GeoGebra e inician a mencionar algunos hechos geométricos que en este tipo de cuadrilátero se satisfacen [A] como lo son la congruencia de los lados y los ángulos opuestos y que las medidas de los ángulos adyacentes suman 180. En este punto no logran reconocer una forma de justificar su conjetura.

83. Paul: ¡Ay! ¡Ya sé cómo sale! Mira. Como estos (Figura 3), como el ángulo GFJ y el ángulo FJI suman 180 y como las, eh, bisectrices pues es la mitad del ángulo, entonces si los dos suman 180, pues la mitad de ellos van a sumar 90, entonces como ya aquí se forma un triángulo [FJK], pues ya se cumple. Como estos son de 90 [ángulos determinados por las bisectrices], pues tiene que cumplirse que este es de 90, y ya.

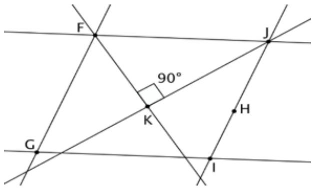


Figura 3. Construcción de Caro y Paul

La intervención de Paul es repentina y finaliza el estado de indagación en el que ellos se encontraban inmersos. Paul parte de que la suma de las medidas de los ángulos GFJ y FJI es 180. Luego involucra las bisectrices de estos ángulos para asegurar que la suma de las medidas de los ángulos KFJ y KJF tiene que dar 90. Haciendo uso del triángulo FJK, que en pantalla se ha determinado, junto a lo que se acaba de establecer y un hecho geométrico que señala que en el triángulo la suma de las medidas de sus ángulos da 180, Paul asegura el ángulo FKJ debe ser recto. Posterior a ello, pareciera que Caro no tiene claridad sobre esta justificación, sin embargo, retoma las ideas de Paul y repite los pasos claves de la justificación propuesta por él [V]. Paul regresa al enunciado del problema y lo observa, mencionando que la conjetura del trabajo realizado [S] es que en los paralelogramos la propiedad involucrada se cumple. Con esto finaliza el trabajo realizado.

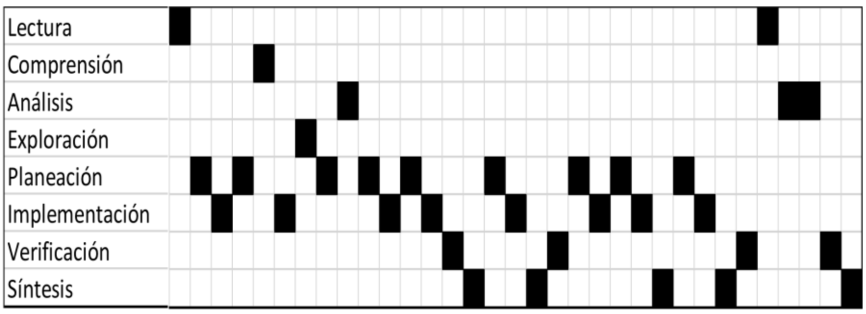
ANÁLISIS DE CARO Y PAUL

Descripción del proceso de resolución

Paul y Caro se comprometieron principalmente con acciones de planeación e implementación, dada la frecuencia de estos episodios (Tabla 3a), mientras que acciones de comprensión y exploración fueron casi nulas, lo cual no es bueno o malo en una primera lectura, habría que analizar en estos episodios lo acontecido para determinar su incidencia en el proceso de resolución. Un poco más del 40% del tiempo empleado en el proceso de resolución se destinó a acciones de implementación, mientras que acciones dirigidas a la comprensión del problema emplearon un tiempo reducido.

Tabla 3. Caracterización de los episodios

	Frec	Tiempo (s)	%
L	2	33	2,6
C	1	8	0,6
A	2	229	17,9
E	1	154	12,0
P	9	152	11,9
I	8	541	42,3
V	4	78	6,1
S	5	84	6,6



El proceso de resolución (Tabla 3b) permite reconocer un momento inicial de lectura, seguido por uno de planeación e implementación, en el que intervinieron acciones dirigidas a la comprensión, lo que llevó a proponer un plan alterno al considerado inicialmente. Posteriormente el trabajo realizado se tornó cíclico pues se analizó lo que ocurría en cuadriláteros conocidos. Esto involucró planear e implementar la construcción del cuadrilátero y así descartar o validar hipótesis. Al finalizar esto se reconoció una propiedad, revisaron el enunciado y procedieron a justificar dicha propiedad. Este ejercicio de justificación no requirió mucho tiempo, lo que permite asegurar que para ellos la dificultad del problema se concentró principalmente en el proceso de conjetura. Esto se puede apreciar al establecer una justificación rápidamente. Al final, Caro y Paul verificaron la justificación realizada y formularon la conjetura fruto de su trabajo. Sin embargo, esta conjetura reportó apenas el cumplimiento de la propiedad en un cuadrilátero particular (paralelogramo) y dejó de lado la posibilidad de reconocer una propiedad general que involucraba otros cuadriláteros.

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE GRUPOS

Naturaleza del proceso de resolución

Sobre la frecuencia de los episodios se puede señalar una alta presencia de acciones encaminadas a planear e implementar estrategias de solución (Figura 4 y 5). Los episodios de implementación son menores en cantidad respecto a los de planeación, aspecto dado por la diversidad de acciones que pueden darse al planear alguna acción. Por otro lado, se reconoce una baja presencia de episodios de síntesis. Este episodio tuvo lugar cuando se daba fin al trabajo enfocado a la exploración o descubrimiento de propiedades, formulando conjeturas que posteriormente se justificaban.

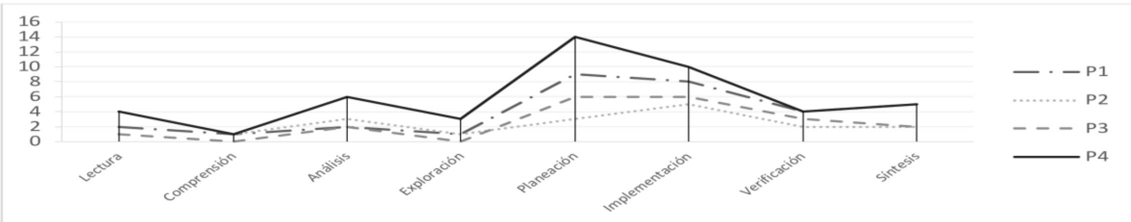


Figura 4. Frecuencia de episodios en Caro y Paul. P1, P2, P3 y P4 son los problemas propuestos

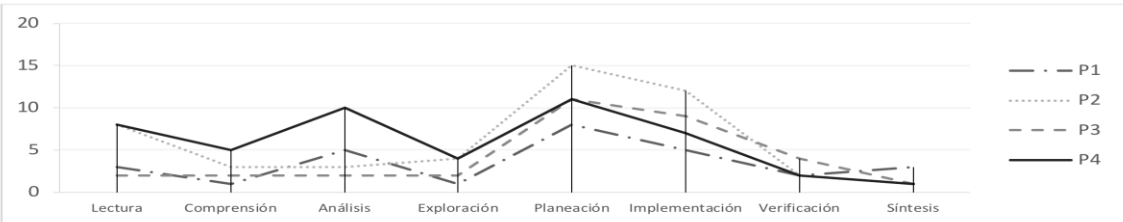


Figura 5. Frecuencia de episodios en Ana y Juan. P1, P2, P3 y P4 son los problemas propuestos

La presencia del episodio de verificación tampoco es alta. En ambos grupos se observó que este episodio apareció cuando se ponía a prueba alguna hipótesis. Sin embargo, por la naturaleza de la GD, las acciones de verificación estuvieron encaminadas a realizar construcciones robustas de los objetos y relaciones geométricas que se descubrían para tener certeza de que estas realmente se satisfacían. Las Figuras 4 y 5 dejan ver un comportamiento similar en ambos grupos en términos de las frecuencias de cada episodio a lo largo de los cuatro problemas. Sin embargo, algunos aspectos fueron distintos en el trabajo realizado por ellos, principalmente en los cuatro primeros episodios presentados en estos diagramas. Respecto a los episodios de lectura y comprensión debe mencionarse que mientras Caro y Paul se limitaron a una lectura inicial del problema y una poca comprensión de este, Ana y Juan manifestaron una mayor cantidad de estos episodios.

En el episodio de análisis, Ana y Juan exhibieron mayor cantidad de episodios de esta naturaleza. Esto puede observarse en el tipo de trabajo realizado al abordar cada problema. Mientras Caro y

Paul se enfocaban en trabajar en casos particulares para verificar en cada uno el cumplimiento de propiedades, lo que parecía una reacción inmediata, Juan y Ana se enfocaron en descubrir características suficientes y necesarias de objetos geométricos en los que estas propiedades se satisficieran. Esto tuvo una implicación en las conjeturas elaboradas por cada grupo, las conjeturas de Caro y Paul no gozaron de generalidad en su contenido, mientras que Juan y Ana sí lo lograron.

Las Figuras 6 y 7 muestran los minutos empleados en la resolución de cada problema y el porcentaje de tiempo destinado a cada episodio. Al mirar estos valores se ve que Paul y Caro se dedicaron principalmente a realizar acciones de implementación, seguido de acciones propias de análisis (Figura 6). Algo distinto aconteció con Juan y Ana, quienes dedicaron en algunos problemas una cantidad de tiempo mayor para el análisis del problema y una menor cantidad de tiempo en la implementación de acciones (Figura 7) Este comportamiento ya se ha reportado en la literatura, autores como Cai (1994) han mencionado que cuando los estudiantes dedican una mayor cantidad de tiempo en la planeación y análisis del problema abordado, con respecto a la ejecución de acciones, obtienen mejores resultados que aquellos estudiantes que dedican una gran cantidad de tiempo realizando acciones sobre las cuales no hay un proceso de reflexión, análisis o planeación.

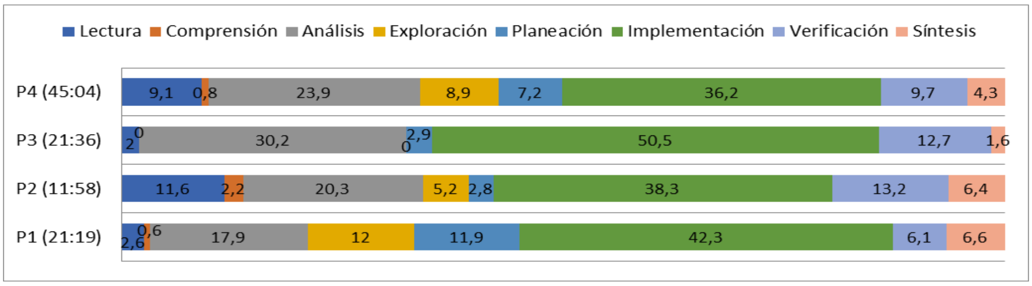


Figura 6. Porcentaje de duración episodios Grupo Caro y Paul

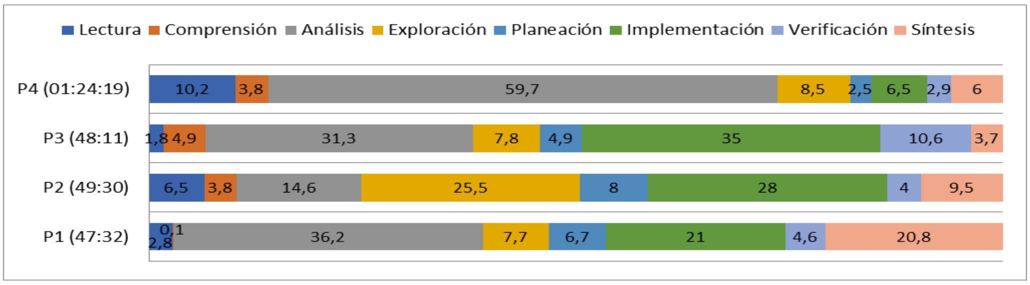


Figura 7. Porcentaje de duración episodios Grupo Ana y Juan

Aunque se observan diferencias entre ambos grupos, estas no son abismales, de hecho se observa una distribución semejante entre ellos. Parte de los motivos que llevaron a que el trabajo de Juan y Ana fuera mucho más productivo, en términos de las conjeturas formuladas, que el presentado por Paul y Caro, obedeció a la estrategia de trabajo adoptada, aquella que en el caso de Caro y Paul consistió en trabajar en casos particulares y que en el trabajo de sus compañeros se caracterizó como una búsqueda de condiciones suficientes y necesarias que permitieran satisfacer lo solicitado.

CONCLUSIONES (DECIR ALGO SOBRE UBICACIÓN DEL EPISODIO DE SINTESIS)

A través del estudio se quería identificar la naturaleza del proceso de resolución de problemas de demostración, en los que tenía presencia la GD, por parte de futuros profesores de matemáticas. Lo presentado acá es apenas el estudio de un contexto particular, que si bien aporta elementos al campo investigativo, no permite generalizar los resultados. Se requieren estudios adicionales en otros contextos, que permitan avanzar en la formulación de generalidades. Consideramos que la GD tiene un papel relevante en la resolución de problemas. Su naturaleza provocó que los estudiantes reconocieran en este recurso una herramienta de validación y soporte de resultados obtenidos. El software permite verificar resultados, permitiendo establecer resultados cuyo soporte puede ser empírico o teórico. Lo anterior muestra que los recursos a los que acceden los estudiantes realimentan sus acciones, esto modifica sus concepciones y amplía su campo de visión y comprensión. En consecuencia, la GD aporta elementos al trabajo colaborativo.

Se observa que los grupos al afrontar cada problema muestran una tendencia en la presencia de cada episodio de resolución. En el trabajo de los estudiantes se reconoce una gran presencia de episodios de implementación y planeación. Sin embargo, otros episodios como la verificación, la comprensión y la exploración muestran una tendencia baja. Se concluye que no todos los episodios aparecen de la misma forma, algunos tienen mayor protagonismo y no se manifiestan en orden lineal. Esto último guarda relación con lo señalado por Kuzle (2015). La presencia de grupos con formación académica distinta fue otra variable considerada. Se concluye que el grupo de estudiantes de cuarto semestre no reportó mejores resultados que el grupo de primer semestre. Este resultado brinda evidencia a lo reportado por la literatura y lleva a considerar la posibilidad de que, a lo largo del proceso formativo, a través del cual se amplían los conocimientos teóricos de la geometría, el trabajo con GD, en particular la implementación de estrategias no lineales, se vean perjudicados.

Finalmente, vale la pena señalar que la inclusión de un nuevo episodio de resolución (síntesis) permitió reconocer momentos particulares del proceso analizado que a la luz del modelo original no podrían ser caracterizados. La inclusión de este episodio permitió reconocer los momentos en que los estudiantes retomaban los asuntos que consideraban relevantes en el camino recorrido hacia la obtención de una respuesta. Esto permite asegurar que la actividad realizada por los estudiantes está permeada por acciones que pretenden consolidar una respuesta a medida que se avanza en la resolución del problema y que esta se ve favorecida por la presencia de la GD. Ejemplo de ello es el trabajo de Caro y Paul, quienes se apoyaban en la exploración sobre cuadriláteros conocidos para ir puliendo la respuesta del problema afrontado.

Referencias

Baxter, P. y Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, *13*(4), 544-599. doi: citeulike-article-id:6670384

Cai, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *6*(2), 166-183. doi: 10.1007/BF03217270

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 71-90.

Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Koichu, B. y Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 233-244. doi: 10.1016/j.jmathb.2015.10.005

Kuzle, A. (2015). Nature of metacognition in a dynamic geometry enviroment. *LUMAT*, *3*(5), 627-646.

Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 87-125. doi: 10.1023/A:1012785106627

Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 223–236). Springer US. doi: 10.1007/978-1-4419-0576-5_15

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Valencia, N., Sanabria, L. y Ibáñez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, Episteme Y Didaxis*, *31*(1), 45-65.

ESTRUCTURAS, GENERALIZACIÓN Y SIGNIFICADO DE LETRAS EN UN CONTEXTO FUNCIONAL POR ESTUDIANTES DE 2º PRIMARIA

Structures, generalization and meaning of letters in a functional context for 2nd primary students

Torres, M. D.[a], Cañadas, M. C.[a] y Moreno, A.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del early algebra en España. Nuestro objetivo de investigación es profundizar en el pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de segundo de educación primaria (7-8años). Nos centramos en las estructuras que identifican estos estudiantes, la generalización y el significado que les atribuyen a las letras mediante un problema de generalización contextualizado que involucra la función $f(x)=x+3$.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, pensamiento funcional, estructura, generalización, significado y uso de letras.*

Abstract

This work is part of a broader research that is developed in the context of early algebra in Spain. Our research objective is to deepen in the functional thinking of a group of second graders (7-8 years old). We focus on the structures that these students identify, the generalization and the meaning that they assign to letters through a contextualized generalization problem that involves the function $f(x)=x+3$.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, generalization, meaning and use of letters, structure.*

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las investigaciones en el marco de la propuesta *early algebra* ponen de manifiesto que los niños de Educación Primaria tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Martínez, 2012). Existe un interés por el estudio del pensamiento algebraico promoviendo en las aulas el estudio de patrones, relaciones y propiedades matemáticas que permita a los alumnos de edades tempranas explorar, predecir, modelizar, discutir y argumentar (Molina, 2009). En concreto nuestro interés está en el pensamiento funcional, entendido como "un modo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 3). La identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones entre variables promueve en los estudiantes el pensamiento funcional facilitándoles herramientas para la adquisición de conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010). La generalización es un elemento central en la investigación sobre pensamiento funcional en los primeros cursos. Diferentes autores destacan que los niños tienen una inclinación natural para percibir y discutir sobre regularidades (Schifter, Monk, Russell y Bastable, 2008), lo cual es la clave para la generalización, aun cuando estos no cuenten con todos los recursos necesarios para

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

representar dichas relaciones generales. La manera en la cual se organizan los elementos de una regularidad corresponde a la noción de estructura (Kieran, 1989).

Las funciones son el tópico matemático protagonista en el pensamiento funcional donde el simbolismo algebraico es un sistema de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011). El uso de letras y símbolos convencionales del álgebra conlleva pensamiento funcional, por tanto ya que se conocen que hay dificultades asociadas al uso de letras quizás puedan solventarse si conseguimos explorar cómo entienden los alumnos de primaria estos aspectos para poder actuar en consecuencia. Mulligan, Mitchelmore, and Prescott (2006) comentan que hay pocas investigaciones centradas en la noción de estructura en el contexto algebraico de los estudiantes de Educación Primaria. Igualmente son escasas las investigaciones sobre el uso del significado de las letras en edades tempranas. Con este trabajo destacamos el interés de indagar sobre las estructuras y la generalización así como en el significado y uso que de las letras hacen los estudiantes porque ayuda a conocer los procesos matemáticos y el pensamiento funcional que manifiestan. De esta forma queremos dar continuidad al estudio sobre las nociones implicadas ya que analizar la manera en la cual los estudiantes son capaces de interpretar una regularidad y, potencialmente, generalizar dicha regularidad ayuda a los procesos matemáticos involucrados.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. “Se centra en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones” (Kaput, 2008, p. 143). El estudio de los patrones y las regularidades son fundamentales ya que relacionan las variables existentes en una situación. El pensamiento funcional incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que covarían; la expresión de estas relaciones utilizando el lenguaje natural, símbolos, tablas o gráficos; y el uso de esas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). En esta línea de investigación, estudios previos (e.g., Mason, Stephens y Watson, 2009) ponen de manifiesto la capacidad de estudiantes de Educación Primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos conjuntos de valores. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la identificación de la regularidad en el comportamiento entre las variables, se puede llegar a la generalización. Hablar de generalización en Educación Primaria supone aceptar que estos estudiantes pueden expresar dichas relaciones no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (e.g., Radford, 2002). Actualmente, las letras, no son consideradas como la única forma de manifestar la generalización en el contexto funcional. Si bien las letras son esenciales, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras: la representación verbal y la pictórica resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (2012) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras, para representar con fluidez variables y cantidades generalizadas.

En el contexto funcional en el que nos situamos, la generalización y la forma de expresarla constituyen elementos centrales (Kaput, 2008). Pinto y Cañadas (2017) concluyen que los alumnos de tercero de primaria emplean 17 estructuras diferentes para un mismo patrón, de las cuales solo 5 son correctas, y que de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario. Pinto y Cañadas (en revisión) se centran en cómo estudiantes de quinto de primaria (10-11 años) perciben la forma inversa de una función fundamentándose en las nociones de estructura y generalización. Analizan las respuestas de un grupo de 24 estudiantes ante un problema que involucra una función lineal y que contiene preguntas para las formas directa e inversa de la función. Concluyen que 10 estudiantes establecen diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizan esta forma de la función. Por otro lado, Ayala (2017) se centra en analizar los significados que estudiantes de tercer curso de primaria (8-9 años) atribuyen a las letras, encontrando que son múltiples los significados que los estudiantes asignan a las letras. Brizuela y Blanton (2014) mostraron que los niños de primero de primaria tienden a asignar un valor fijo a las letras determinado por su posición en el alfabeto o también la aceptación de que podían representar diversos valores, pero de todos modos les asignaban valores numéricos de forma arbitraria para resolver las situaciones. En segundo de primaria (7-8 años) se obtienen resultados similares por Cañadas et al. (2016). En esta ocasión se involucra la relación y = 2x y los estudiantes expresan relaciones funcionales usando letras. De nuevo hay estudiantes que evidencian que el valor de la letra depende de la posición en el alfabeto y reconocen las letras como representaciones de cualquier número. De la revisión de literatura se desprende la necesidad de llevar a cabo más estudios que, por un lado, clarifiquen los descriptores del pensamiento funcional y, por otro, muestren evidencias sobre lo que son capaces de hacer los estudiantes de Educación Primaria en relación con este tipo de pensamiento: identificación de estructuras, generalización y usos de letras. Esto aportaría información de utilidad para la toma de decisiones docentes en las aulas de este nivel educativo, y para la formación de maestros de primaria (Cañadas y Molina, 2016).

Sustentamos el marco conceptual de este estudio en las nociones de generalización y estructura. La generalización se considera clave para la generación de conocimiento (Lakatos, 1978). Como un elemento central del pensamiento algebraico está la generalización, la cual es reconocida como un proceso de pensamiento matemático fundamental, la cual requiere ver detrás de las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión (Driscoll, 1999). Considerar la generalización en el contexto de los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton, Levi Crites y Dougherty, 2011). Las tareas de generalización de relaciones entre variables radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general. Por tanto, requieren de la identificación de una pauta o patrón de comportamiento de los casos particulares. Desde el contexto funcional, la noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre las variables, que puede ser evidenciada a través de diferentes representaciones por los estudiantes, tanto al trabajar con casos particulares como al generalizar la relación (Pinto y Cañadas, en revisión). Algunos investigadores destacan que antes de que los estudiantes lleguen a generalizar, deben “ver” la estructura de una situación matemática (Mason, Stephens y Watson, 2009). De manera general, la noción de estructura corresponde a la forma en la cual se organizan los elementos de una regularidad y la relación que existe entre esos elementos (Kieran, 1989). Pinto y Cañadas (en revisión) la definen como un conjunto de números y variables numéricas (expresadas mediante diferentes representaciones), algunas operaciones y propiedades entre estas operaciones, las cuales se presentan cuando los estudiantes identifican alguna regularidad. Mason et al (2009) evidencian que los estudiantes que identifican estructuras en tareas matemáticas, después tienen experiencias matemáticas más profundas.

El simbolismo algebraico es fundamental en temas relacionados con las funciones. Sin embargo, los investigadores sobre el pensamiento funcional consideran la representación algebraica pero no de forma exclusiva. Las letras como representación simbólico-algebraica son herramientas lingüísticas para representar las ideas matemáticas de forma concisa (Blanton et al, 2015). En cuanto al uso de las letras, estudios previos evidencian que los estudiantes de quinto curso de primaria las usan con diferentes significados (Ayala, 2017). La autora fundamenta su investigación en el trabajo de Küchemann (1981). Tomamos las categorías sobre el significado de las letras de Ayala (2017) y las recogemos en la Tabla 1.

Tabla 1. Significado de las letras

Categoría	Descripción
Rechazo de la letra	Señala que no se pueden utilizar letras porque no significan nada
Acepta uso letra	Utiliza la letra pero al analizar sus intervenciones el significado asociado no se puede determinar con exactitud
Letra como objeto o como etiqueta	Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí
Letra evaluada	Relaciona la letra con una cantidad, no obstante no es posible identificar los motivos por los cuales asignó ese valor.
Letra evaluada/ valor lógico	El valor de la letra es único y determinado por alguna lógica, por ejemplo el orden en el alfabeto
Letra como variable/ valor aleatorio	Señala que la letra puede tener un valor variable, el cual ejemplifica. Por ejemplo un caso es “ La Z puede ser 5 y luego le sumas …”
Letra como variable/ valor indeterminado	Señala que la letra puede tener valores variables y puede analizar la situación sin necesidad de recurrir a un ejemplo numérico concreto. Responde generalizando

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre la capacidad de generalización de estudiantes de segundo de Educación Primaria, describiendo las estructuras matemáticas que identifican y analizando los significados y usos que les dan a las letras un grupo de estos alumnos al abordar una actividad de generalización que parte del trabajo con casos particulares en un contexto funcional.

Los objetivos de investigación de este trabajo son los siguientes:

- Identificar y describir las estructuras que evidencian los estudiantes.
- Describir las estructuras que generalizan los estudiantes.
- Identificar e interpretar los diferentes significados que les atribuyen los estudiantes a las letras.

MÉTODO

Este trabajo se sitúa dentro de una investigación más amplia sobre el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria en España. Este estudio es de tipo cualitativo con carácter descriptivo.

Estudiantes

Trabajamos con una muestra intencional, según la disponibilidad del centro. Los sujetos fueron 24 alumnos de 2º curso de educación primaria (7-8 años), de un colegio de Granada (España). Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas y sin llevar. Nunca habían trabajado con problemas que involucraran alguna función lineal, la generalización y tampoco habían hecho uso de las letras en matemáticas.

Instrumentos para la recogida de datos

Diseñamos un cuestionario individual escrito y entrevistas semiestructuradas para la recogida de datos. Las preguntas del cuestionario y de las entrevistas surgen de nuestros antecedentes y se basan en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007): parten de casos particulares para llegar a la generalización. El problema planteado introduce un contexto novedoso aunque la relación funcional ha sido empleada en investigaciones previas relativas al pensamiento funcional.

El cuestionario se implementó a los 24 estudiantes. El análisis de las respuestas escritas al cuestionario nos permitió seleccionar a los seis alumnos que entrevistamos.

Cuestionario

El cuestionario incluyó siete preguntas sobre una máquina en la que se metía una cantidad de bolas y salía otra cantidad de bolas bajo la relación funcional $f(x) = x+3$. Cuatro preguntas abordaron casos particulares planteados como aparece en la Figura 1.

1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? ______ bolas.

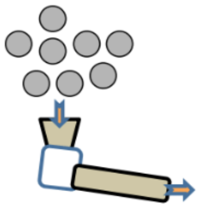


Figura 1. Pregunta sobre casos particulares

Dos preguntas fueron sobre generalización. Un ejemplo lo presentamos en la Figura 2.

6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

Figura 2. Pregunta sobre el caso general

En un último apartado del cuestionario abordamos la veracidad o falsedad de unas afirmaciones en las que se usaban letras. Los estudiantes debían rodear la opción (verdadera o falsa) según considerasen. La aplicación del cuestionario duró una hora. Mostramos algunas de las preguntas en la Figura 3.

(f) Si meto A bolas en la máquina, salen A+1 bolas.

Verdadera Falsa

(g) Si meto A bolas en la máquina, salen A+3 bolas.

Verdadera Falsa

Figura 3. Preguntas basadas en letras

Entrevista

Organizamos y clasificamos a los estudiantes según las respuestas que dieron al cuestionario en tres grupos según su avance: inicial, intermedio y avanzado. El primer grupo estaba formado por ocho estudiantes que no habían identificado el patrón o solo lo habían hecho en alguna ocasión. El segundo grupo estaba compuesto por nueve estudiantes que habían identificado, en varias de las preguntas que les planteábamos, la regularidad existente y el último grupo lo formaban siete alumnos que habían logrado generalizar. De esta clasificación, la maestra del grupo seleccionó a seis estudiantes, dos de cada categoría (inicial: E16, E22; intermedio: E13, E14; avanzado: E03, E08). Nombramos mediante una E y un número aleatorio a los distintos estudiantes para mantener su anonimato. Llevamos a cabo las entrevistas individualmente en un espacio del centro y las videograbamos. Diseñamos un protocolo de entrevista con base en los objetivos de investigación. Presentamos un resumen de este protocolo en la Figura 4.

1º Recordar el problema presentado

- ¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina?
  - Si la respuesta era positiva se preguntaba: ¿Me darías dos ejemplos? ¿qué hiciste para obtener esa respuesta?
  - Si la respuesta era negativa se procedía a recordar y mostrar los ejemplos y se preguntaba: ¿qué relación existen entre las bolas que entran y salen? Siguiendo por volver a preguntar por ejemplos concretos que habían aparecido.

2º Aplicar regularidad en casos particulares:

- Casos particulares dados
- Casos particulares del estudiante
- Caso particular de un tercero

3º Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso

- Interpretación de lo indeterminado. Se preguntaba: ¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?
- Generalización: ¿cómo puedes saber cómo funciona la máquina?

Uso de letras:

- ¿Para qué crees que se usan las letras? ¿qué puede significar A bolas?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+1?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+3?
- Si entran α bolas ¿cuántas salen?

Figura 4. Protocolo de entrevista

Análisis de datos

Realizamos el análisis de datos con base en la información que proviene de las entrevistas. Tras transcribir las entrevistas, realizamos un análisis de datos que combina lo cualitativo y lo cuantitativo. Diseñamos las categorías de análisis para estructuras, generalización y significados otorgados a las letras para atender a los objetivos de investigación y con base en el marco conceptual y nuestros antecedentes. Identificamos y describimos estructuras, en respuestas a cuestiones que involucran casos particulares y el caso general. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Identificamos los diferentes significados atribuidos en la última parte del cuestionario donde aparecían letras. En este punto y usando la información de la Tabla 1, modificamos la categoría (acepta uso letra) de Ayala (2017) por "no dice nada sobre la letra, (NL)", ya que no hemos encontrado evidencias de aceptación en las respuestas de los alumnos con el significado por la categoría del trabajo de la autora.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos resultados sobre estructuras y generalizaciones identificadas. Después nos centramos en los resultados sobre los significados que los estudiantes atribuyen a las letras.

Estructuras y generalización

Distinguimos entre los estudiantes que identifican estructuras en el trabajo con casos particulares y aquellos que lo hacen en la generalización. En general, todos los estudiantes identifican alguna estructura en uno u otro caso. Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 2. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de su trabajo; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 2. Estructuras identificadas

Estudiante	Estructura casos particulares	Estructura caso general
E1	x + x x + 3	y = x + 3
E2	x + 1, x + 2 (1,10) x + 2, x + 3 (10,…)	y = x + 3
E3	x + 3	y = x + 3
E4	x + 3 x + x	y = x + 3
E5	x + 3	y = x + 3
E6	x + x x + 3 x + x	y > x

En la Tabla 2 observamos que un mismo estudiante evidenció entre una y tres estructuras diferentes a lo largo de su entrevista en el trabajo con casos particulares. En total, observamos cuatro tipos diferentes de estructura que se pueden expresar mediante simbolismo algebraico como: $x+x$, $x+1$, $x+2$ *y* $x+3$. Registramos las estructuras mediante simbolismo algebraico, aunque los estudiantes no emplearan ese sistema de representación. Por ejemplo, en el siguiente fragmento observamos las diferentes estructuras evidenciadas por el estudiante E2.

84. E (Entrevistador): hay un niño de la clase que me dijo que si entraban 25 bolitas debieran salir 27 ¿crees que es verdad?
85. E2: está mal porque digo que se suman 3 a 20, a 1000 y a 100 y a todos los demás. Mira yo al 1, 2, 3, 5, 6,7, 8 y al 9 le sumo como un poquito menos, le sumo 1, le sumo 2, pero a los que son más grandes le sumo o 2 o 3
86. E (Entrevistador): ¿y cuáles serían esos números más grandes? ¿Más grandes que el 10?
87. E2: sí más grandes que 10 y más grandes que el 100

Atendiendo a las estructuras identificadas en el caso general (Tabla 2, última columna) destacamos que los seis estudiantes generalizan la relación funcional de manera verbal. En estas generalizaciones identificamos la estructura $y = x+3$ en cinco casos. Apreciamos diferentes formas de expresar verbalmente la generalización. Por un lado, tres estudiantes generalizan dando ejemplos con casos particulares de bolas y generalizando al añadir que se debe de sumar 3. Por ejemplo, E3 expresa: "1 bola nos salen 3, 2 bolas nos salen 5, 3 bolas salen 6, 4 bolas y salen 7. Siempre hay que sumarle 3, 1 millón te sale 1 millón 3". O E2: "Ponemos 7, 8 o las que tú quieras, entonces pueden salir más de esas. La máquina coge las bolas y le suma 3. La máquina siempre está sumando 3 pero me gusta sumarle 1 y además que es más interesante". Otros tres estudiantes coinciden en expresar que "saldrán más bolas que las que han entrado". De estos tres alumnos, E6 generaliza sin cuantificar: "Sé que la máquina saca las bolas iguales y lo que sé es que por dentro mete muchas más bolas". Los otros dos especifican además que están pensando en la estructura $x+3$.

Hay cinco estudiantes que identifican la estructura adecuada (x+3) tanto en el caso general como en los casos particulares.

Significado de las letras

Resumimos los significados que los estudiantes atribuyen a las letras en la Tabla 3.

Tabla 3. Significados atribuidos a las letras

Estudiante	RL	NL	LO	LE	LL	LVA	LVI	Total
E6				X			X	2
E5	X		X	X		X	X	5
E4	X				X			2
E3		X						1
E2					X		X	2
E1					X			1
Total	2	1	1	2	3	1	3	

Nota. RL= rechazo de la letra; NL= no dice nada sobre el uso de la letra; LO = letra como etiqueta o como objeto; LE = letra evaluada; LL = letra evaluada/ valor lógico; LVA = letra como variable/valor aleatorio; LVI = letra como variable/ valor indeterminado.

En general, los estudiantes evidencian siete significados de las letras: (a) rechazo, (b) no dice nada sobre el uso de la letra, (c) letra como etiqueta o como objeto, (d) letra evaluada de una forma lógica, (e) letra como variable/valor aleatorio y (f) letra como variable/ valor indeterminado. Cada significado se da entre uno y tres estudiantes. Cada estudiante evidencia entre uno y cinco significados de las letras. Los significados más frecuentes en estos estudiantes fueron el uso de la letra como cantidad evaluada mediante un valor lógico (LL) y el uso de la letra como cantidad indeterminada (LVI), presentes en tres estudiantes. Un caso como ejemplo de categoría (LL) viene dado por E2 “A de como el abecedario, esto te da una pista. Yo creo que la A significa 1 porque va primero, segundo B, el número 3 la C”.

Los significados de rechazo de la letra (RL) y letra evaluada (LE) son los siguientes por orden decreciente de aparición. Por ejemplo, E4 rechaza la letra comentando que “Una letra y un número no se pueden sumar”. Algunos estudiantes responden mediante una generalización: E5 expresa “si metemos esto, un símbolo, pues te saldría 3 bolas más” y E6: “si hubiera N bolas, saldrían N bolas más”. Los significados atribuidos cuando no dicen nada sobre el uso de la letra (NL) y la letra como variable/valor aleatorio (LVA) aparecen con una frecuencia menor al resto de significados. Un ejemplo de la categoría (NL) viene dado por E3 “no tengo nada que decir pero es falsa”.

Como se observa en la Tabla 3 hay estudiantes que evidencian varios significados de la letra durante la entrevista. Uno de ellos identifica hasta cinco significados posibles de las letras, E5.

CONCLUSIONES

Con base en los objetivos de investigación y centrándonos en las nociones de estructura y generalización, hemos identificado cómo los estudiantes interpretan la relación entre variables. Destacamos que tenemos la evidencia del uso de cuatro tipos diferentes de estructura en el trabajo con casos particulares. Los estudiantes emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas de las entrevistas, estando presente en todos los casos estudiados la relación funcional $y = x+3$, que es adecuada. Hemos identificado la estructura x+3 en el caso general dada por cinco de los seis estudiantes entrevistados. A diferencia de estudios previos, hemos identificado una forma de generalizar en la que no concretan la relación funcional: expresan que el valor de la variable dependiente es mayor que la independiente pero sin llegar a cuantificar esa diferencia.

En general, evidenciamos así, capacidades en los estudiantes de 2º de Educación Primaria para identificar estructuras en problemas que involucran relaciones funcionales y generalizarlas. Los resultados de este estudio nos llevan a reafirmar los resultados de Pinto y Cañadas (2017): existe una inconsistencia en el uso de las estructuras por parte de los estudiantes al responder a diferentes casos particulares involucrados en el problema. Por otra parte, en nuestro estudio identificamos una mayor consistencia cuando atendemos al empleo de una misma estructura tanto para casos particulares como para el general, en todos los casos analizados. El estudio de las estructuras que identifican los estudiantes nos puede ser de utilidad en un posterior análisis de las estrategias que usan los alumnos de Educación Primaria para establecer una regla general entre variables.

Por otro lado, nuestro trabajo está en consonancia con el estudio de Brizuela y Blanton (2014) y Cañadas et al. (2016) sobre el uso de la letra, dándose casos en los que el valor de la letra depende de su posición en el alfabeto.

Hemos validado las categorías de Ayala (2017) con los datos de este trabajo, salvo la que hace referencia a la aceptación de la letra, que en nuestro caso no encontramos evidencias en las respuestas de los estudiantes, por lo que no consideramos oportuno tenerla en cuenta. En cambio, hallamos respuestas del tipo “no tengo nada que decir”, lo que nos llevó a incluir esta categoría. Además, observamos que la mayor parte de las respuestas aparecen tomando la letra como un valor único y determinado por alguna lógica (LL) y como variable o valor indeterminado (LVI). Presentamos así una adaptación de la categorización de la autora para los significados de las letras en este trabajo.

Como aporte para la docencia, creemos que los diferentes significados de las expresiones algebraicas con letras supone una dificultad para los estudiantes. Los significados asignados a las letras afectarán a la manera en se resuelven los problemas, pudiendo ser resueltos de manera inesperada (Kucheman, 1981). Consideramos importante tener en cuenta los diferentes significados de las letras desde el punto de vista docente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Ayala, C. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funciónales.* TFM, Universidad de Granada.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). Nueva York, NY: Routledge.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Driscoll, M. J. (1999). Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). Londres, Reino Unido: Murray.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology*. Philosophical Papers. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Traducción al castellano: D. Ribes, 1981, Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.)

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PMA, 3*(3), 135-156.

Mullingan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). Praga, República Checa: PME.

Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 27-42). Cambridge, Reino Unido: Mathematical Association of America.

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalization in fifth graders within a functional approach.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 413-448). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Strother, S. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability* (Tesis doctoral). Louisville, KY: Universidad de Louisville.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE CUARTO CURSO DE PRIMARIA BAJO EL ENFOQUE FUNCIONAL

Generalization with fourth grade students under the functional approach

Ureña, J.[a], Molina, M.[b] y Ramírez, R.[c]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Salamanca, [c]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia centrada en la capacidad de generalización de estudiantes de primaria en contextos funcionales. En este estudio descriptivo se analizan los niveles de generalización que manifiestan ocho estudiantes de cuarto de primaria durante una entrevista en la que se les propone una tarea que involucra una relación funcional. De los resultados se aprecia la capacidad de los alumnos de primaria para expresar la relación funcional y manifestar generalización en diferentes grados, incluso a un nivel simbólico.

Palabras clave: *niveles de generalización, early algebra, relaciones funcionales.*

Abstract

This piece of work is part of a larger research focused in primary students' generalization skills in functional contexts. In this descriptive study we analyze the generalization levels manifested by eight fourth graders during an interview in which they solve a task involving a functional relationship. From the results it is clear the students' ability to express the functional relationship and to manifest various levels of generalization, even a symbolic level.

Keywords: *levels of generalization, early algebra, functional relationships.*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años en diversas investigaciones (ej. Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Blanton y Kaput, 2011; Molina, Ambrose y Rio, 2018) se han mostrado las capacidades algebraicas que poseen los estudiantes de primaria y, en consecuencia, se propone aprovecharlas. Al igual que estos trabajos, nuestra comunicación se enmarca en la propuesta curricular *early algebra*, orientada a una mejor comprensión de la matemática y del álgebra desde los primeros años escolares (Molina, 2009). El énfasis del *early algebra* está en la comprensión de la generalidad de la matemática, de modo que se fomente la construcción, expresión y justificación de generalizaciones desde el inicio de la escolarización de los niños (Blanton y Kaput, 2011). De lo anterior se extrae que parte importante del pensamiento algebraico reside en la generalización y en las formas en que esta es representada por los estudiantes. Las funciones son vistas como una vía de introducción al álgebra (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). Se estudian las capacidades algebraicas de los niños por medio de la propuesta de tareas que involucran relaciones funcionales, demostrándose al mismo tiempo que las funciones pueden ser abordadas desde la primaria (Blanton y Kaput, 2011).

En este marco, describimos los niveles de generalización que manifiestan estudiantes españoles de cuarto curso de primaria. En particular analizamos cómo reconocen y expresan la relación funcional presente en una tarea propuesta durante una entrevista semiestructurada. Además de complementar resultados de estudios previos, pretendemos contribuir con información que facilite la implementación en el aula de la propuesta del *early algebra* que ya aparece reflejada en los programas curriculares de diversos países (Merino, Cañadas y Molina, 2013). En el caso de España, mediante el Real Decreto 126/2014 se establece que al finalizar la primaria se espera que el

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2018). Generalización con estudiantes de cuarto curso de primaria bajo el enfoque funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 584-593). Gijón: SEIEM.

estudiante "sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p.19387), de modo que también se aprecia la presencia del pensamiento funcional y la generalización en el currículo escolar.

MARCO TEÓRICO: GENERALIZACIÓN

La generalización es una habilidad matemática importante y juega un papel trascendental en el álgebra. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) llegan incluso a referirse a ella como "el latido de la matemática" considerando el álgebra como "el lenguaje en el cual es expresada" (p.8). Radford (2010) refiere a la generalización algebraica como la habilidad de reconocer lo común en los elementos de una secuencia de modo que se puede brindar una expresión que represente a todos los términos de la sucesión. Para caracterizar este tipo de generalización define tres niveles. La generalización factual es aquella en la cual se utilizan acciones numéricas en forma de esquemas de operaciones, siempre dentro del nivel numérico, expresado en acciones concretas. En la generalización contextual se percibe un patrón y se explica para cualquier término de la secuencia; el lenguaje incluye en este caso expresiones de indeterminación. Por último, en la generalización simbólica hay una representación para todos los elementos de la sucesión o patrón, se habla en general. Radford (2018) enfatiza que existen formas de pensar algebraicamente en las que no se requiere del uso estricto de simbolismo algebraico. El pensamiento algebraico se puede dar también por medio del uso de otros sistemas semióticos como el lenguaje natural y las señas. Para este autor la esencia del pensamiento algebraico radica en el trabajo con cantidades indeterminadas que van más allá de los números, así como en las representaciones de estas.

En relación con la expresión de la generalización, Mason y Pimm (1984) hacen una diferenciación de las concepciones de específico, genérico y general. Lo específico refiere a los casos en los que siempre se trabaja y alude a números concretos. El caso genérico refiere al uso de casos concretos para representar una generalidad a modo de representantes de una clase. El caso general brinda una respuesta que representa a todos los elementos de los que se está hablando, hay una representación de lo indeterminado.

Antecedentes

En las investigaciones relativas a la propuesta *early algebra* es claro un foco centrado en la capacidad de generalización de los niños y la forma en que expresan la generalización. En el contexto del pensamiento funcional se considera la generalización de relaciones entre cantidades que covarían, la forma en que son representadas en palabras, tablas, gráficos o símbolos así como el razonamiento con las representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). A continuación, destacamos algunos estudios asociados al *early algebra* en los que se identifican como objetos de estudio el pensamiento funcional y la generalización.

Radford (2018) realiza un estudio longitudinal desde segundo a sexto curso de primaria en el cual indaga sobre la emergencia del pensamiento algebraico simbólico en un contexto de generalización basado en una secuencia. La generalización aquí se da al deducir una fórmula según una secuencia, reconociendo que la forma en que se expresa no es relevante. De los resultados de la investigación se identifican generalizaciones no simbólicas y simbólicas desde edades tempranas y un progreso en estas conforme al curso. Al mismo tiempo se observa una evolución en el uso de las variables involucradas en la situación propuesta y las relaciones entre estas.

Blanton et al. (2015) describen una trayectoria de aprendizaje con estudiantes de primer curso en la que caracterizan su pensamiento funcional en relación con la generalización de diferentes relaciones funcionales. Las autoras identifican que los niños de educación primaria pueden aprender a pensar sobre funciones y progresar en sofisticación. Para ello definen niveles en el reconocimiento de las relaciones, desde una posición preestructural hasta el reconocimiento de la función como objeto.

Otros antecedentes de relevancia, ubicados en el mismo proyecto de investigación que el trabajo que aquí se reporta, son los siguientes. Molina et al. (2018) indagan en los significados que estudiantes de primer y tercer curso le atribuyen a las letras cuando son introducidas como representación de cantidades indeterminadas, en tareas que involucran relaciones funcionales. Las investigadoras encuentran que hay estudiantes que dan un significado apropiado a las letras y establecen relaciones entre las cantidades asociadas. Por otro lado, también se presentan alumnos que rechazan su uso o les asignan valores fijos arbitrarios o de acuerdo a su posición en el alfabeto. Al mismo tiempo, sugieren introducir desde la primaria las letras como representación de cantidades indeterminadas. Por su parte Pinto y Cañadas (2017) realizan un estudio comparativo con estudiantes de tercero y quinto de primaria centrado en las estructuras y generalizaciones que muestran durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional lineal. Los investigadores observan variedad en las estructuras identificadas por los estudiantes y, aunque en tercero se presentan más estructuras, la mayoría de estas es incorrecta, a diferencia de lo que ocurre en quinto. También se aprecia cómo muchos más estudiantes de quinto llegan a generalizar para la cuestión general de la tarea e, incluso en algunos casos, emerge el uso de simbolismo algebraico. Los de tercero, en cambio, tienden a trabajar más con los casos particulares.

Hidalgo (2018) describe el proceso de generalización evidenciado por estudiantes de sexto de primaria cuando trabajan en una tarea que involucra un patrón dado por configuraciones puntuales. Entre los elementos que analiza están los tipos de generalización que alcanzan los estudiantes. En este sentido evidencia que los estudiantes muestran diversos niveles de generalización desde el factual (principalmente) al simbólico, en términos de las categorías de Radford (2010), influenciados al mismo tiempo por las intervenciones efectuadas por el entrevistador.

Los resultados de todos estos trabajos sustentan la afirmación de que estudiantes de primaria pueden trabajar y describir situaciones sobre relaciones lineales de covariación entre dos cantidades.

En el Simposio XXI de la SEIEM se presentó una comunicación ligada al pensamiento funcional y generalización con estudiantes de primaria (Pinto y Cañadas, 2017). Al mismo tiempo se expusieron otros trabajos con relación a la misma temática durante la sesión del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico ligados a niveles de generalización que evidencian estudiantes de primaria y la influencia de las ayudas efectuadas por entrevistadores (ej. Hidalgo y Cañadas, 2017; Ureña, Molina y Ramírez, 2017). En anteriores ediciones del simposio han sido expuestas otras investigaciones centradas en el pensamiento funcional y con la generalización presente de forma implícita. Dichos trabajos abarcan perspectivas diferentes a la nuestra como es el caso de sistemas de representación, tipos de relaciones funcionales, estrategias que los alumnos usan cuando trabajan con relaciones funcionales, entre otras. Por ejemplo, Cañadas y Fuentes (2015) muestran los sistemas de representación y estrategias que utilizan estudiantes de primer curso al trabajar con una tarea que involucra una relación funcional lineal.

METODOLOGÍA

Esta investigación es descriptiva y forma parte de un proyecto más amplio, ya mencionado, que persigue indagar sobre las capacidades algebraicas que estudiantes de primaria exhiben en situaciones en las que se involucran relaciones funcionales. El objetivo asociado a la parte de la investigación que presentamos en esta comunicación es describir los niveles de generalización que manifiestan estudiantes de cuarto de primaria durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional.

Técnica de recolección de información

Para dar respuesta al objetivo planteado se realizan entrevistas individuales semiestructuradas de tipo clínico a un grupo de estudiantes de cuarto curso de primaria. La entrevista fue conducida por una investigadora del proyecto en que se enmarca este estudio. La duración de cada entrevista fue entre 15 y 25 minutos aproximadamente, según el tiempo necesario por cada estudiante para resolver la tarea planteada. En el curso previo dichos estudiantes, como parte de un grupo de 27 alumnos de tercero de primaria, habían participado en un experimento de enseñanza orientado a explorar su pensamiento funcional, siendo esta su única experiencia previa relativa al trabajo con funciones. Dicha muestra previa fue intencional con motivo de la disponibilidad del centro. En cuarto curso los ocho participantes fueron seleccionados a juicio de su profesora de modo que se cubrieran en la asignatura de matemáticas los niveles de rendimiento académico bajo, medio y alto.

Diseño de la entrevista

En la entrevista se propone a los alumnos resolver una tarea que involucra la relación funcional X+2. La organización de la entrevista es inductiva, va de los casos particulares hacia el más general. La situación a la que refiere la tarea es la siguiente: A mi familia y a mí nos gusta mucho ir a esquiar a la sierra. Mientras esquiamos dejamos el coche en el parking. Entrar en el parking cuesta 2€ y cada hora completa que pasa el coche en el parking cuesta 1€.

La entrevista está compuesta de las siguientes cuestiones:

P1. Si hace mal tiempo y solo dejamos el coche una hora en el parking ¿cuántos euros nos cuesta?

P2. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 3 horas?

P3. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 5 horas?

P4. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking si dejamos el coche 10 horas?

P5. Como lo estamos pasando muy bien, decidimos quedarnos allí una noche y esquiar al día siguiente. Entre los dos días, el coche ha estado en el parking 20 horas, ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P6. Si pasamos un puente entero de cinco días (120 horas), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P7. Decidimos pasar tres semanas (500 horas aproximadamente), ¿cuántos euros nos cuesta el parking?

P8. Lo estamos pasando tan bien que hemos perdido la noción del tiempo y no sabemos cuántas horas hemos pasado ¿Cómo podemos saber cuántos euros nos cuesta el parking?

P9. Imagina que llamamos N al número de horas que hemos dejado el coche en el parking mientras esquiábamos. ¿Cuántos euros nos cuesta el parking?

Las primeras siete preguntas involucran cantidades concretas y se espera que a partir del trabajo con números específicos (casos particulares) el estudiante identifique y exprese la relación funcional. Las dos últimas preguntas involucran los casos generales orientados a que el alumno represente de forma general la relación funcional, finalizando con el uso de simbología algebraica propuesta.

Análisis de los datos

Una vez que se realizaron las entrevistas, la información recabada por medio de grabaciones de video y producciones escritas, fue transcrita y codificada por los autores de esta comunicación de acuerdo a las categorías que a continuación describimos. En las transcripciones de las respuestas que da cada estudiante, se analizan las manifestaciones de generalización.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes a la tarea descrita elaboramos unas categorías que distinguen las formas en que cada alumno muestra indicios de reconocer la relación funcional. Al mismo tiempo se tiene en consideración que un mismo estudiante puede manifestar diferentes niveles durante la entrevista sin estar estos condicionados por las preguntas planteadas. Para definir los niveles de generalización se parte de los aportes teóricos de Mason y Pimm (1984) y Radford (2001, 2010, 2018), y de un análisis preliminar de los datos. Distinguimos cuatro niveles:

Generalización numérica (N): el estudiante reconoce la relación funcional en el trabajo con cantidades específicas dadas y lo expresa refiriendo específicamente a dichas cantidades particulares. La categoría se separa según si en su respuesta el estudiante reconoce la relación funcional con números menores a 100 (N1) o con números mayores o iguales a 100 (N2).

Generalización genérica (G): el estudiante reconoce la relación funcional y en su explicación recurre a una ejemplificación que involucra números específicos a modo de ejemplo genérico.

Generalización verbal (V): el estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando expresiones verbales generales que aluden a lo indeterminado.

Generalización simbólica (S): el estudiante reconoce la relación funcional y la expresa usando simbolismo algebraico. Se incluyen en este nivel los casos en que los estudiantes no generan por su cuenta la expresión simbólica pero la utilizan al serle propuesta y muestran comprenderla.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados en términos de los niveles de generalización que manifiestan los estudiantes. Para referirnos a cada estudiante se usa la letra E y un número que la acompaña. En la Tabla 1 se resume la manifestación de los niveles de generalización para cada uno de los alumnos cuando les son planteadas las preguntas de la entrevista.

Tabla 1. Niveles de generalización manifestados por los estudiantes

	Nivel de generalización				
Estudiantes	N1	N2	G	V	S
E1	X	X	X		
E2	X	X	X		
E3		X			
E4				X	
E5	X	X			
E6	X	X	X		
E7	X	X		X	X
E8		X		X	

Nota. E1 = estudiante 1, E2 = estudiante 2…, E8 = estudiante 8.

En la Tabla 1 se aprecia que la mayoría de los estudiantes llega a generalizar a nivel numérico. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los niveles superiores en los cuales hay una disminución de los estudiantes que los exhiben conforme se avanza en la entrevista hacia el caso general.

Generalización numérica (N)

Este nivel de generalización es manifestado casi por todos los estudiantes al enfrentarse a las primeras preguntas de la entrevista que involucran números específicos. Sólo el estudiante E4 muestra dificultades recurrentes. El resto de los estudiantes determina sin mayores dificultades la cantidad de euros que se paga según el número de horas dado. Al aumentar el número de horas, la manifestación se va consolidando, esto se percibe mediante las explicaciones de la relación funcional conforme se avanza (más estudiantes son los que manifiestan N2 que N1). En el siguiente extracto se aprecia en la argumentación de E2, la relación que establece entre el número de horas específico que ha transcurrido y la de euros que se paga. El estudiante reconoce que la justificación de los resultados es la misma que ha brindado antes para otros números específicos de horas:

> E (Entrevistadora): Ah. Ahora imagínate que vas pero vas a estar un rato más, vas a estar 5 horas, ¿cuánto tendrías que pagar?
>
> E2: 7
>
> E: ¿7?, ¿Por qué?

E2: Pues lo mismo, las 5 horas, porque las 5 horas un euro, entonces serían un euro cada una y me da 5, más las 2 al entrar, 7.

Respecto al estudiante E4, si bien explica la relación funcional en momentos muy específicos con números como mil o un millón, no muestra una identificación clara de la relación funcional. Exhibe una tendencia a contar, realizar sumas repetidas o recurre a un proceso recursivo en que retoma resultados previos para determinar nuevos. Muestra mayor énfasis en obtener respuestas que en determinar un patrón que le facilite los cálculos.

Este nivel de generalización también es manifestado por un estudiante cuando se le plantea la última pregunta de la entrevista orientada a la generalización simbólica. Esto ocurre cuando el estudiante E2 asigna el número 13 a la letra N por su posición en el abecedario para calcular los euros a pagar.

Generalización genérica (G)

Tres estudiantes manifiestan este nivel al usar casos concretos con carácter de ejemplo genérico, eligiendo ejemplos no considerados previamente en la entrevista. La manifestación ocurre en las últimas preguntas que involucran indeterminación en la cantidad de horas por medio de la expresión "un número cualquiera de horas" o una letra que las representa.

Los estudiantes E2 y E6 manifiestan este nivel en la pregunta ocho. E2 reconoce la relación funcional en la que el dinero a pagar depende de la cantidad de horas que han trascurrido, para tal efecto ejemplifica su razonamiento con el caso particular de 50 horas. El estudiante E6 explica la relación funcional recurriendo a un ejemplo específico como recurso que engloba la generalidad de la situación, advirtiendo usar un caso concreto:

E: Ah. Entonces siempre si tenemos, vamos a poner "un número de horas en parking" [lo escribe], ¿Cómo explicaríais tú aquí los euros que pagas?, ¿cómo lo podríais calcular? Si tú sabes el número de horas que está el coche en el parking ¿cómo podríais calcular los euros que pagas?, ¿cómo lo haces?

E6: ¿Puedo usar un número?

E: Como tú quieras, puedes usar operaciones explicando, te puedes salir de la caja esta y puedes explicar aquí o donde quieras.

E6: Vale, vale, si fuera por ejemplo 183 entonces…

E: ¿horas no?

E6: Sí, 183 horas, entonces yo le añado 2, 185.

Este nivel de generalización también se presenta en la última pregunta que contiene simbología algebraica sugerida.

E: Si yo quiero poner ahí algo. Imagínate que no sabemos las horas que vamos a dejar el coche en el parking. Son muchas y vamos a poner N, le vamos a llamar N el número de horas, ¿cómo calcularías los euros que tienes que pagar para N horas?

E1: ¿N qué número es?

Pues no sé, si son 30 horas tienes que pagar lo que te diga el parking.

E: Y si por ejemplo ponemos aquí así "son N horas", ¿cómo sabrías lo que tienes que pagar?

E1: Igual, las horas que te quedas.

E: Igual… Le vamos a llamar a esto número de horas, ¿cómo calcularías el número de euros?

E1: Pues una hora un euro entonces sumando, sumando, sumando y luego 2 de entrada y si estaba 30 horas, pues 32.

En el fragmento anterior, a pesar de que la pregunta busca que el estudiante haga uso de simbolismo algebraico, E1 manifiesta generalización genérica. Muestra comprensión de la relación funcional entre las cantidades involucradas, así como de la indeterminación presente.

Generalización verbal (V)

Este nivel es evidenciado también por tres estudiantes y, al igual que el nivel descrito antes, se da en la pregunta ocho. Por un lado, el estudiante E4, a pesar de las dificultades que ha presentado al trabajar con números específicos en las cuestiones previas, al calcular los euros a pagar para un "número cualquiera de horas" expone la dependencia entre las cantidades asociadas de forma explícita, aludiendo a la propia indeterminación del número de horas, sin embargo, se reconoce que su razonamiento es aislado y no es extendido a otros casos de la entrevista. Por otra parte, los estudiantes E7 y E8 exponen la forma de la relación funcional como "horas+2":

E: Y ahora imagínate que no sabes cuántas horas exactamente has tenido el coche en el parking pero tú le quieres contar a alguien cómo saber lo que tienes que pagar ¿cómo se lo explicarías?

E8: Pues que al entrar tienes que pagar 2 euros y luego contando las horas que estés pues cada hora vale un euro.

E: Y entonces en total ¿cuánto?

E8: Entonces luego le sumo las horas que has estado más 2.

Ante la propuesta de "un número cualquiera de horas" y la pregunta de cómo calcular siempre lo que se paga E7 afirma "pues a ese número le pones dos euros de la entrada y esos serían los euros".

Los estudiantes que no manifiestan los niveles de generalización verbal o genérico exhiben alguna dificultad inicial para comprender la indeterminación en las horas que han transcurrido o para operar con estas. Por ejemplo, E3 ante la cuestión de cómo calcular los euros a pagar para "un número cualquiera de horas" inmediatamente responde que no sabe. E5 afirma que se deben comprobar las horas que han transcurrido ya sea preguntando al maquinista o viendo las cámaras de seguridad, esto para determinar con precisión los euros que se pagan y evitar cualquier trampa en el cobro.

Generalización simbólica (S)

Una estudiante evidencia una generalización simbólica en la última pregunta. La estudiante E7 extiende el razonamiento que había utilizado en los casos anteriores que implicaban números específicos o la indeterminación de las horas, ahora a la letra X. E7 expresa una vez más la relación funcional entre las cantidades covariantes en la cuestión nueve independientemente de la nueva representación que se le da a las horas trascurridas. La alumna utiliza la letra en la expresión de la relación:

E: ¿Entonces cómo calcularías tú si tienes el coche X horas pero no sabemos exactamente qué es ese número? ¿Cómo calcularías lo que tienes que pagar?

E7: Pues, serían esas X horas, igual que aquí [señala los resultados anteriores], sólo que en vez de "un número" sería una X.

E: ¿Y cómo pongo eso?, ¿se te ocurre una forma de cómo ponerlo?, ¿cómo lo escribo aquí?

E7: Que a X horas le sumas 2.

Se constata una aceptación del lenguaje algebraico a pesar de que la estudiante por cuenta propia no representa simbólicamente la relación funcional. Dados los resultados, la entrevistadora propone a la alumna la representación X+2 y es aceptada como equivalente a lo que expresaba:

E: Ah, muy bien, ahora yo te voy a escribir una cosa a ver qué te parece si esto estaría bien "X+2" [lo escribe]. ¿Eso qué te parece?

¿Es lo mismo que pones ahí?

E7: Es lo mismo.

E: Es lo mismo ¿por qué?

E7: Porque aquí esto, aquí lo hemos resumido en números y cruces.

Los estudiantes que no manifiestan este nivel no atribuyen un significado a la letra o rechazan involucrarla con operaciones. El alumno E1 no acepta la forma "número de horas+2" ya que piensa que la forma correcta debería ser "2+número de horas" por la forma en que ocurren los eventos en la situación planteada. Al no ser considerada la conmutatividad de la suma no llega a concretar la generalización, tampoco cuando es introducida la letra N. El estudiante E5 rechaza el uso de la letra evidenciando dificultad para concebir una cantidad indeterminada de horas y trabajar con esta. E2 asigna el valor concreto 13 a la letra N. Por último, el estudiante E4 manifiesta dificultades para expresar la operación cuando es introducida la letra N, inicialmente afirma que el resultado sería "ene 2" aludiendo a las cifras del número. Posteriormente extraemos que se refiere a la posible apariencia del resultado, dependiendo del valor que tuviera en las unidades, entre 0 y 7, cuando se le suma el 2, para el alumno el resultado que se obtendría con las letras sería N1, N2, N3, N4… y N9.

DICUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta comunicación se evidencian habilidades matemáticas de estudiantes de primaria para pensar algebraicamente, específicamente para expresar una relación funcional en términos de generalizaciones. Hemos descrito cuatro niveles de generalización que manifiestan estudiantes de entre aproximadamente 9 y 10 años durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional. Estas manifestaciones se producen como respuesta a las cuestiones de la entrevista descrita, sin ayudas por parte de la investigadora. En Ureña (2017) se recogen otros resultados complementarios relativos a una fase posterior, considerando diferentes tipos de estímulos efectuados por la entrevistadora para solventar algunas dificultades de los alumnos.

De los resultados presentados se concluye que todos los alumnos evidencian un reconocimiento de la relación funcional. Esto se manifiesta en niveles según la forma en que generalizan la relación entre las cantidades covariantes. Se percibe facilidad en los estudiantes para establecer la relación funcional entre números específicos o casos concretos, al igual que observa Hidalgo (2018) con estudiantes de sexto curso y Pinto y Cañadas (2017) con alumnos de tercero. No se aprecia una dificultad conforme se aumenta el tamaño de los números.

Los niveles genérico y verbal son evidenciados por menos alumnos (3 estudiantes en cada nivel) y solo cuando se enfrentan a cuestiones que involucran cantidades indeterminadas. Asociado a dificultades en estos niveles, al igual que señala Radford (2018), se perciben limitaciones en la capacidad de los estudiantes para articular y expresar verbalmente las variables y la relación funcional a pesar de reconocerla. Los estudiantes recurren a otros medios que también revelan su pensamiento algebraico, mediante los cuales expresan la relación funcional sin hacer uso del simbolismo algebraico.

Con respecto al último nivel de generalización, solo una estudiante generaliza simbólicamente cuando es planteada la pregunta final. En esta cuestión, única que involucra simbolismo algebraico, algunos estudiantes rechazan el uso de las letras o no le atribuyen un significado específico, con lo que no se concreta una comprensión de la representación simbólica. Al igual que señalan Molina et al. (2018), se detecta la asignación de valores fijos a las letras, según variados criterios tales como su posición en el alfabeto.

Las dificultades de los estudiantes son esperables dada su poca experiencia con situaciones que involucran relaciones funcionales, generalización y simbología algebraica. Se aprecia una dificultad para expresar o justificar ideas debida al lenguaje, como detecta también Warren, Miller y Cooper (2013). La propuesta de una tarea con organización inductiva que involucra una relación funcional ha permitido explorar la habilidad de los estudiantes para generalizar en diferentes grados. Las últimas preguntas fueron las más exigentes de modo que los estudiantes usaron otros medios (ejemplos genéricos y expresiones verbales de indeterminación) para dar respuesta a la situación y, en consecuencia, evidenciar un reconocimiento de la relación funcional. Reforzamos algunos de resultados de Blanton (2008) al mostrar que los niños pueden trabajar y describir situaciones de pensamiento funcional, la relación entre cantidades que varían y hacer uso del lenguaje matemático y las representaciones (en nuestro estudio, verbal, simbólica-algebraica y numérica) para expresar dichas relaciones. En nuestro caso, en una sola entrevista se observa una gama de formas para expresar la relación funcional, como se aprecia en los niveles de generalización.

Se hace patente, en consonancia con otros estudios (ej. Blanton y Kaput, 2011; Molina, et al., 2018) el interés del trabajo con relaciones funcionales como una vía para acercar al estudiante al pensamiento algebraico y promover el desarrollo de sus capacidades desde los primeros cursos escolares. Apoyamos el principio de introducir tareas con patrones y que están descritas por medio de relaciones funcionales desde los primeros cursos. Esto además de contribuir al fortalecimiento de la capacidad de generalizar matemáticamente, brinda herramientas al estudiante para articular u organizar sus ideas y le familiariza con contenido algebraico y de funciones respecto a notación, representación y la naturaleza variable de las cantidades asociadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento de los estudios de posgrado del primer autor por parte de la Universidad de Costa Rica y como parte del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-old’s thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Hidalgo, D. (2018). *Proceso de generalización de estudiantes de 6° de educación primaria: respuestas inadecuadas, intervenciones y efectos* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Hidalgo, D. y Cañadas, M. C. (2017). El proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos. Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM, en el *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM*, Zaragoza, España.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Milton Keynes, Reino Unido: The Open University Press.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15(3)*, 277-287.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria (Vol. BOE N°52, pp. 19349-194420). Madrid, España: Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 261-280). Hamburgo, Alemania: Springer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Ureña, J. (2017). *Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra relaciones funcionales* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2017). Manifestación del pensamiento funcional según niveles de generalización y a través de estímulos del profesor. Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM, en *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM*, Zaragoza, España.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalization in algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Utrecht, Holanda: PME.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Hamburgo, Alemania: Springer.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2013). Exploring young students’ functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

TAREAS PROPUESTAS POR LOS LIBROS DE TEXTO DE 1º DE BACHILLERATO PARA EL TEMA DE DERIVADA

Tasks proposed by the 1st grade of bachillerato textbooks for the derivative topic

Vargas, M. F.[a, b], Fernández-Plaza, J. A.[b] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[b]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo presenta un estudio del significado sobre derivada que se manifiesta en las tareas de libros de texto de 1º de Bachillerato. Para ello, establecemos un marco teórico que considera aspectos de significado, de enseñanza y de aprendizaje, pero, a diferencia de los estudios habituales sobre libros de texto que se centran en aspectos de aprendizaje, nosotros focalizamos el estudio en los dos primeros. Para ello, establecemos unas variables de análisis a priori y utilizamos el análisis de contenido como método de análisis de libros de texto de tres editoriales. Los resultados muestran el predominio, en los tres libros, de ciertas características de las tareas, por ejemplo, la presencia de la derivada principalmente dentro de situaciones matemáticas y la importancia dada a las reglas de derivación frente a otros aspectos.

Palabras clave: *tareas, libros de texto, derivada, significado conceptos matemáticos escolares.*

Abstract

This work presents a study of the meaning of the derivative manifested in the tasks of textbooks of the 1st year of "Bachillerato". To do this, we establish a theoretical framework that considers aspects of meaning, teaching and learning, but, unlike the usual studies about textbooks that focus on aspects of learning, we focus the study on the first two. To do this, we establish a priori analysis variables and used content analysis as method applied to textbooks from three publishers. The results show the predominance, in the three books, of certain characteristics of the tasks, for example the presence of the derivative mainly within mathematical situations and the importance given to the derivation rules in front of other aspects.

Keywords: *tasks, textbooks, derivative, meaning of school mathematics concepts.*

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto han ocupado un lugar importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde hace ya algunos años tanto en Educación Primaria como Secundaria. Esto debido a su papel como organizador del contenido, material de consulta, registro de las actividades de los alumnos, así como una guía de ejercicios y problemas a resolver (González y Sierra, 2004).

Su importancia e influencia en la Educación Matemática ha generado que las investigaciones basadas en los libros de texto hayan ido cobrando relevancia. Su notorio crecimiento generó que en el 2004, en el 10º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-10), se dedicara por primera vez un grupo de discusión a esta línea de investigación. Posteriormente, se incluyó también en el ICME-11 celebrado en el 2008; además se ha incorporado en otras actividades internacionales (Fan, 2013).

Particularmente en España, Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) mostraron como, solo en los trabajos presentados en la SEIEM durante el periodo 1997-2015, los estudios

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

basados en los libros de texto representaban un 8,8% evidenciándose así su desarrollo. No obstante, pese al crecimiento de este tipo de investigaciones; esta área está apenas iniciando si se compara con otras líneas en Educación Matemática (Fan, 2013). De ahí la necesidad de ampliar el conocimiento en esta dirección.

Por ello, en este trabajo centramos nuestra atención en las tareas propuestas por tres libros de texto de 1º de Bachillerato para el tema de derivadas. El análisis aquí desarrollado forma parte de una investigación más amplia en la que estudiamos el significado que atribuyen los profesores al concepto de derivada; esto motivados en las dificultades puestas de manifiesto tanto por estudiantes como por docentes al trabajar este tópico (Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg, 2008; Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

Abordamos así una investigación de tipo cuantitativa y de naturaleza descriptiva, cuyos objetivos son los siguientes:

- Estudiar los aspectos descriptivos o estructurales de las tareas escolares propuestas por los libros de texto de 1º bachillerato para el tema de derivada.
- Estudiar algunos elementos del significado de derivada puesto de manifiesto por los libros de bachillerato mediante las tareas propuestas.

ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre libros de texto se pueden dividir en tres grandes grupos: (a) aquellas en las que los libros de texto son el objeto principal de la investigación, (b) trabajos en los que se analiza el modo en que otros factores influyen sobre los libros de texto y (c) por último las investigaciones en las que se analiza cómo los libros de texto influyen sobre otros factores (Fan, 2013). De las tres categorías, la mayoría de trabajos se encuentran en la primera de ellas y pese a que se destaca la necesidad de realizar trabajos más allá de lo descriptivo se reconoce su importancia como un primer paso.

En el caso específico de España es posible hallar distintos trabajos en esta línea (p. e. Conejo y Ortega, 2014; González y Sierra, 2004). Concretamente para el caso de la derivada de una función se encuentra el trabajo de Aires y Esteves (2012) en el que analizan los problemas de optimización que se proponen en un libro del año 1974. El análisis se basa en las en cuatro fases de resolución de problemas propuestas por Polya; además, analiza la forma del enunciado, el contexto, el tipo de optimización y el tipo de resolución. Por otra parte, Conejo, Arce y Ortega (2014) analizan la justificación dada a las reglas de derivación en los libros de cuatro editoriales desde distintas legislaciones. Asimismo, Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017) comparan el concepto de derivada y contenidos relativos al cálculo diferencial en dos textos universitarios.

Ahora bien, tal como señala Fan (2013), dado que la investigación basada en libros de texto es algo relativamente reciente, aun no se dispone de un marco teórico unificado que especifique las herramientas disponibles. No obstante, la revisión de algunos trabajos realizados en esta línea permite identificar algunos marcos que han sido utilizados. Por ejemplo, para el caso particular del análisis de tareas en los libros de texto de Matemática, Brändström (2005) destaca el uso de la taxonomía de SOLO o la de Boom; la primera enfocada en clasificar respuestas dadas por los estudiantes, mientras que la segunda permite catalogar las tareas según lo que ésta pretende.

En nuestro caso, el marco teórico que utilizaremos para el análisis e interpretación de los datos será el desarrollado por Rico, Lupiáñez y Molina (2013) y Rico y Moreno (2016) que se denomina Análisis Didáctico. Este se estructura según cuatro tipos de análisis, cada uno con objeto de estudio distinto, según las dimensiones del currículo de matemáticas. En el caso concreto de un contenido matemático escolar, se entiende como un método para estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación.

El primer método de análisis tiene como objeto el significado de los contenidos matemáticos escolares. El segundo contempla los aspectos cognitivos o de aprendizaje matemático escolar. El tercero se centra en las cuestiones relacionadas con la instrucción, su planificación e implementación. Por último, el análisis didáctico cuenta con un análisis de los aprendizajes logrados, es decir, de la evaluación. En el caso concreto de este trabajo, las tareas matemáticas escolares son uno de los organizadores del análisis de la instrucción escolar. Una de las partes primordiales del análisis de instrucción es el estudio y diseño de tareas, en particular, se ha de indagar en las variables de tarea, sus funciones y los distintos tipos existentes. Por tarea matemática escolar entendemos “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244).

Organizamos las variables propuestas por Moreno y Ramírez (2016) y Gómez y Romero (2015) para el análisis de las tareas en tres grandes bloques:

- Relacionadas con aspectos descriptivos de la tarea: la formulación de la tarea, el modo en que se presenta; los materiales y recursos necesarios; el tipo de agrupamiento, el cual indica cómo se dispondrán los alumnos; la situación de aprendizaje donde se propone la acción; y la temporalización, esto es, su duración estimada. Al tratarse de un análisis de libros de texto, para este trabajo nos centramos en la formulación y materiales.
- Relacionadas con aspectos de aprendizaje o cognitivos: esta categoría incluye la meta o finalidad, referida a la expectativa que se trabaja. Asimismo, podríamos considerar la variable complejidad de la tarea, pero la eliminamos a la vista de su desaparición en los nuevos marcos teóricos PISA (OCDE, 2016) y los problemas que planteó en anteriores trabajos (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).
- Relacionadas con el contenido matemático y su significado: utilizando el marco teórico basado en el significado de un concepto matemático escolar desarrollado por Rico (2012, 2013), Rico y Moreno (2016) o Fernández-Plaza, Castro-Rodríguez, Estrella, Martín-Fernández, Rico, Ruiz-Hidalgo y Vílchez-Marín (2016). El significado está determinado por tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso, este último incluye las situaciones y contextos en las que se involucra el contenido matemático. Por lo tanto, entendemos que en la matemática escolar comprender el significado de un concepto implica “conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (Rico, 2016, p. 94).

MARCO METODOLÓGICO

En el presente trabajo se consideraron los libros de texto de 1º de bachillerato de las editoriales Anaya (Colera, Oliveira, García, y Santaella, 2008), Edelvives (Cardona y Rey, 2015a, 2015b) y SM (Vizmanos, Hernández, Alcaide, Moreno y Serrano, 2008). La elección de estos se basa en una consulta realizada a algunos centros educativos de Granada sobre los libros de texto utilizados. Resultando ser estos tres los de mayor frecuencia.

De cada uno de los libros tomamos el capítulo en el que se introduce el concepto de derivada y analizamos tanto las tareas propuestas dentro del texto (conforme de desarrollan los contenidos), como las incluidas en el apartado de ejercicios. En la Tabla 1 se muestra el número de tareas e ítems analizadas. Entendiendo por ítem a cada uno de los apartados de la tarea, generalmente numerados o enlistados utilizando letras *a), b), c).*

Tabla 1. Numero de tareas e ítems por libro de texto

	SM		Anaya		Edelvives	
Posición de la tarea	Tareas	Ítems	Tareas	Ítems	Tareas	Ítems
En el desarrollo del contenido	31	67	33	45	-	-
En un apartado específico de ejercicios	72	148	106	205	73	200
Total	102	215	139	250	73	200

En el caso de libro de la editorial Edelvives los ejercicios vienen en un libro aparte por lo que se analizó también el capítulo correspondiente. Así en total se analizaron 314 tareas equivalentes a 665 ítems. Para su respectivo análisis se empleó el análisis de contenido, mediante el cual se definió una serie de variables y categorías, el cual se detalla a continuación.

Análisis de contenido

Para Rico y Fernández-Cano (2013), el análisis de contenido es uno de los métodos más extendidos para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas y cualitativas en los contenidos de la comunicación; además, dicho análisis "se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas" (p. 11).

El análisis de contenido se efectúa por medio de la codificación que nos permite destacar las características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En nuestro caso, las unidades de información están constituidas por cada uno de los apartados independientes (o ítems) de cada tarea, considerada en su sentido en el que aparece en los libros de texto de ejercicio o actividad.

Sistema de categorías para el análisis

Basados en nuestro marco teórico contamos con algunas categorías iniciales de análisis; no obstante, mediante el análisis de contenido pudimos definir otras categorías de manera inductiva. Finalmente analizamos aspectos de la categoría descriptiva y de la relacionada con el significado.

De la categoría descriptiva:

- Estructura de la tarea (abierta/cerrada): Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta es la que involucra cierto grado de indeterminación en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas. Ponte (2004) señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones. Este tipo de tareas demandan que el estudiante indague sobre la temática para poder abordar el problema pues no basta con diseñar o emplear algún método de resolución. Por ejemplo, una tarea en la que se le solicite al alumno determinar los extremos relativos de una función que modela cierto fenómeno (hasta este punto sería una tarea cerrada) y que posteriormente se le pida comparar los resultados obtenidos con lo que señalan las estadísticas sobre dicho fenómeno para los últimos cinco años. Realizar esto requiere que el estudiante busque estos datos, luego, compare sus resultados y los interprete a la luz de lo investigado.

- Planteamiento de la tarea (directo/inverso): un último aspecto descriptivo que observamos en los ítems tiene que ver con un planteamiento directo o inverso de la tarea. Para Groestch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un resultado, el cual es único. Por el contrario, en las tareas inversas, lo que se desconoce son los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o bien ser insolubles. Un ejemplo de tarea inversa es cuando se pide hallar una función cuya derivada sea tal, o cuando se dan ciertas condiciones y a partir de ellas se pide graficar.

- Materiales: en esta categoría analizaremos el material o recurso didáctico empleado para resolver la tarea. Aunque de antemano prevemos que la mayoría serán resueltos utilizando papel y lápiz, cabe la posibilidad de que el libro sugiera el uso de algún otro material.

De la categoría de significado:

- Sistemas de representación empleados en la formulación de la tarea: en este caso prestaremos atención a los distintos sistemas de representación que aparecen en la formulación de la tarea. Estos pueden ser: verbales, gráficos, numéricos, simbólicos y/o tabulares. Debemos aclarar que no consideraremos las representaciones verbales que por defecto aparecerán en una tarea escrita (redacción general), sino entenderemos el uso de representaciones verbales cuando estas hagan alusión a aspectos propios de la matemática. Además, adelantamos que una tarea puede hacer uso de varios tipos de sistemas de representación.
- Situación: esta categoría nos permitirá agrupar las tareas según en la situación que se presentan. Estas pueden ser, atendiendo al marco teórico PISA (OCDE, 2016): personales (si se enmarcan en una situación cotidiana del estudiante), sociales (si se relacionan con actividades o aspectos de la sociedad como la contaminación, la pobreza…), laborales (si se relacionan con aspectos empresariales o de mercado) o científicas (si tienen que ver con situaciones presentadas en alguna ciencia).
- Contexto de la derivada: con base en nuestro marco teórico, tomamos en cuenta los distintos contextos matemáticos, funciones o necesidades a las que la derivada atiende en cada uno de los ítems de las tareas.
- Tipo de función involucrada: el tipo de función involucrada en la tarea es un factor que influye en la complejidad de la misma. Es por ello que en los casos en los que aplique nos detendremos a mirar la función que se involucra. Para ello, basados en el trabajo desarrollado por Jiménez (2017), consideraremos los siguientes rasgos de la función: polinómico, potencia de exponente negativo, radical, función algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, producto, cociente, composición de funciones, función a trozos y valor absoluto. De este modo, entenderemos como función simple a aquella que presente solo uno de los siguientes rasgos: polinomio, trigonométrico, trigonométrica inversa, logarítmico, exponencial o radical. De lo contrario será no simple con *n* rasgos. Asumiendo que aquellas funciones no simples conllevan un mayor nivel de dificultad.

RESULTADOS

A continuación, detallamos los resultados obtenidos al analizar cada una de las tareas haciendo uso de las categorías descritas anteriormente. Presentamos los aspectos descriptivos de manera conjunta, mientas que los relativos al significado de manera individual.

En cuanto a los aspectos descriptivos de la tarea

Respecto a la *estructura de la tarea*, es decir, si su planteamiento era abierto o cerrado, predomina la tarea cerrada. De hecho, solo dos tareas planteadas por Anaya y una de las propuestas por Edelvives pueden ser consideradas preguntas abiertas. Adicionalmente, el libro de SM propone al final un proyecto en el que se le pide al estudiante analizar ciertos datos y funciones respecto al Sida. Aquí el alumno debe buscar datos en internet además de hacer uso de otras herramientas gráficas para su solución. No obstante, en términos generales, este tipo de tareas no son usuales.

En cuanto a los *materiales*, la mayoría de tareas son propuestas para ser resueltas empleando papel y lápiz, de hecho solo en el libro SM se da la indicación de usar calculadora en 8 tareas. No obstante, en ese mismo libro se detectaron 3 ítems más que aunque no explicitan el uso de la calculadora, dado los valores numéricos con los que se trabaja, es probable que lo requieran.

Ahora bien, el libro de Edelvives dedica un par de páginas para explicar "paso a paso" cómo representar gráficamente una función, su derivada y la recta tangente a una curva haciendo uso tanto de GeoGebra como de Wiris. Posteriormente no propone tareas exclusivas para utilizar dichos software, pero en cada tarea de cálculo de derivadas plantea la sugerencia de comprobar los resultados empleando alguno de ellos.

Finalmente, en cuanto al planteamiento *inverso/directo*, predominan las tareas directas. En el caso de Anaya, solo 19 ítems son planteados de forma inversa, en SM solo 12 y en el libro de Edelvives únicamente 11.

En cuanto a los sistemas de representación

La mayoría de las tareas empleaban más de un sistema de representación en su formulación; en la Figura 1 se presenta el porcentaje de ítems que empleaba cada uno de los sistemas de representación.

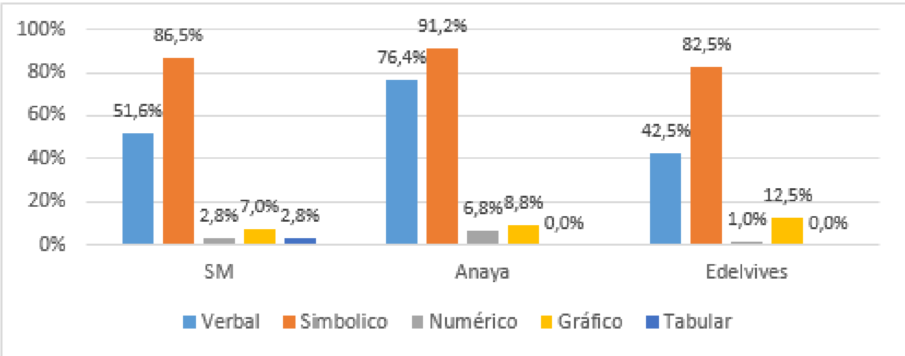


Figura 1. Sistemas de representación utilizados en cada ítem

En términos generales, se aprecia que el simbólico es el sistema de representación más utilizado. El verbal ocupa el segundo lugar aunque debe destacarse que la mayoría de veces este fue acompañado de la representación simbólica. Es importante señalar que adicionalmente en el libro SM y Edelvives se aprecian algunas tareas con ilustraciones cuya función es solo decorativa. En el libro de Elelvives 3 tareas incluyen una imagen alusiva a la situación, mientras que en el de SM 4 tareas usan este tipo de ilustración.

En cuanto a la situación de la tarea

En este caso predomina la situación matemática, desligándose la derivada de su aplicabilidad en el mundo real. En la Tabla 2 se presenta el porcentaje de ítems en cada una de las situaciones descritas. Es importante mencionar que en el caso de ser científica, se especifica la rama a la que se refiere.

Tabla 2. Situación en la que se presentan las tareas

	Porcentaje (%) de ítems en cada situación		
Situación	SM	Anaya	Edelvives
Personal	-	-	3.5
Laboral	2.4	2	7
Social	1.4	0.4	2
Científica-Matemática	91	97.6	85.5
Científica-Física	5.2	-	2

Resulta interesante que pese a que los tres libros incluyen tareas en situaciones distintas a la matemática, estas ocupan un papel mucho menor, pues en ninguno de los casos suponen un porcentaje significativo.

En cuanto al contexto

Analizar el contexto de la tarea nos permite de cierta manera profundizar en el significado que cada uno de los libros transmite respecto a la derivada, poniéndose de manifiesto su utilidad o aplicabilidad. En la Tabla 3 se muestra el porcentaje de veces que aparece cada uno de los contextos en los diferentes ítems.

Tabla 3. Contextos en los que se presentan las tareas

	Porcentaje (%) de ítems en cada contexto		
Contexto	SM	Anaya	Edelvives
Calcular TVM-TVI	4.6	5.2	5
Calcular la derivada en un punto	8.4	18	2
Determinar función derivada	41.4	27.2	56.5
Ecuación de recta tangente o normal	10.2	8.4	7.5
Hallar intervalos de monotonía	4.1	4.4	6
Hallar extremos relativos	8	10.8	6
Estudio y representación gráfica de funciones	-	17.2	-
Resolver problemas (optimización)	14	2.4	13.5
Geométrico	9.3	6.4	3.5

Creemos que los contextos son bastante claros; sin embargo, queremos señalar que en el contexto *geométrico* agrupamos aquellos ítems en los que se presentan distintas propiedades o resultados de la derivada para que sean analizados o interpretados desde la gráfica de una función.

Por otra parte, debe aclararse que el libro de Anaya incluía en su capítulo sobre la derivada la aplicación sobre el estudio y representación de funciones, mientras que los libros de las editoriales SM y Edelvives lo hacían en un capítulo aparte, los cuales para efectos de este trabajo no fueron considerados.

En términos generales, se aprecia que en los tres libros se presentan diversos contextos en los que se involucra la derivada; no obstante, tal como puede observarse su presencia en los libros de texto no es homogénea. Se puede ver claramente que en los tres casos el determinar la función derivada ocupa un papel predominante. La aplicación y manejo de las reglas de derivación es sin duda uno de los contenidos más reforzados en los tres casos. De hecho son muy pocas las tareas en las que se señala el uso de la definición de derivada.

En cuanto a la función involucrada

Un primer análisis permite ver cuál de los rasgos es más o menos frecuente en las tareas propuestas por los libros. En la Tabla 4, presentamos el porcentaje de tareas que empleó cada uno de los rasgos.

Tabla 4. Rasgos de funciones presentes en las tareas

	Porcentaje (%) de ítems en los que aparece		
Rasgo	SM	Anaya	Edelvives
Polinómica	55.3	54.8	59
Trigonométrica	0.9	8	21
Trigonométrica inversa	-	2.4	6
Logarítmica	-	6	17.5
Exponencial	1.8	6.4	13
Exponente negativo	0.9	-	-

	Porcentaje (%) de ítems en los que aparece		
Rasgo	SM	Anaya	Edelvives
Radical	15.3	8.8	13
A tozos	1.8	-	1
Valor absoluto	0.4	-	-
Algebraica	13.4	24.4	9
Cociente	3.2	3.6	5
Producto	1.5	4.8	9
Composición	19	19.6	40.5

Cabe señalar que en el libro Edelvives dos tareas involucraban cónicas en su planteamiento. Estas se contabilizaron dentro del rasgo polinómico, por su similitud al derivarlas y operar con ellas; pero es un aspecto interesante que debe ser mencionado pues en los otros dos libros esto no se presentó.

En términos generales, destaca la frecuencia de la función polinómica en las tareas asignadas. Se puede observar que la función polinómica y la composición son los rasgos más frecuentes tanto en el libro de SM y Edelvives, mientras que en Anaya sobresalen la función polinómica y algebraica. Llama la atención; además, que en el libro de Edelvives se involucra bastante las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, las cuales tienen poca presencia en los otros dos libros.

Ahora bien, al clasificar las funciones como simples o no simples con n rasgos, los resultados fueron los que se muestran en la Figura 2:

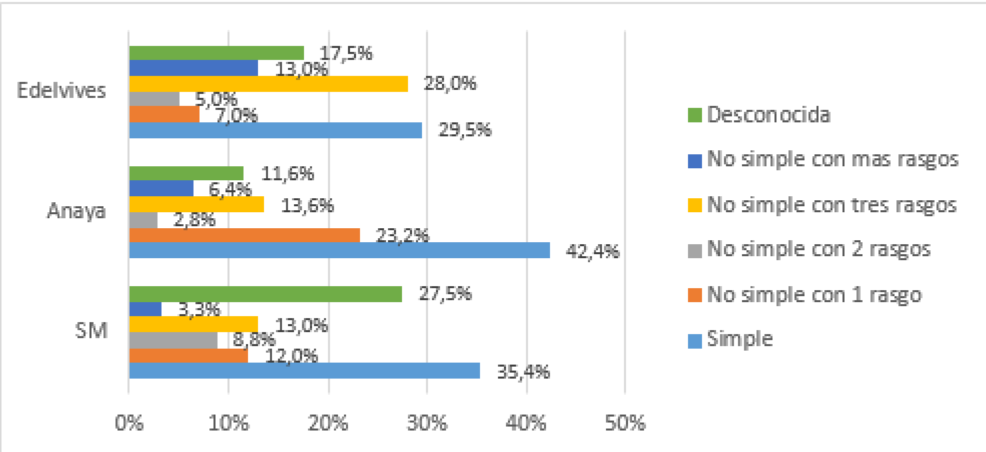


Figura 2. Tipo de función empleada en cada ítem

Se incorporó la opción *desconocida*, para aquellas tareas en las que o bien no se especificaba, se daba de forma gráfica o el alumno debía definirla. Sobresale en los tres casos la función simple.

CONCLUSIONES

Este trabajo nos permitió analizar algunos aspectos descriptivos y del significado en las tareas propuestas por tres libros de texto de 1º de bachillerato respecto al concepto de derivada de una función. Somos conscientes que los aspectos cognitivos constituyen un análisis importante (Brändström, 2005); sin embargo, por cuestión de espacio no pudo abordarse en esta comunicación.

Sin duda alguna, los resultados obtenidos llaman la atención. Se puede destacar el predominio o la tendencia de los tres libros de plantear tareas cerradas y directas, en las cuales pareciera que su objetivo principal es el dominio y manejo de procedimientos algorítmicos, pues la mayoría de las tareas requieren de un proceso bastante conocido para su resolución. Lo anterior es algo que requiere cuidado, ya que es importante plantear tareas que promuevan un aprendizaje más analítico y menos algorítmico o mecánico.

Otro aspecto que requiere reflexión es el desarrollo del concepto de derivada como un elemento meramente matemático. Así lo deja ver el hecho de que casi todas las tareas son planteadas dentro de una situación matemática y escasas veces dentro de un contexto de resolución de problemas. Esto es relevante pues no se promueve la visión de la matemática como una herramienta útil en el abordaje de situaciones reales, colocándola más bien como un conjunto de procesos mecánicos que se deben aprender.

A modo de conclusión, creemos que aún es necesario que los libros de texto involucren tareas que permitan al alumnado ver realmente la utilidad e importancia que tiene el concepto de derivada, asimismo, que exploten otras herramientas y recursos que permitan estudiar el significado de la derivada de manera más enriquecedora y haciendo uso de diversos sistemas de representación.

Finalmente, aunque lo aquí presentado es solo una parte del análisis que perseguimos y pese a que de momento es solo un trabajo descriptivo, creemos que estos primeros resultados son bastante interesantes tanto por los resultados mostrados como por lo novedoso del enfoque. Tal como lo señala Fan (2013) consideramos que es un primer paso para en el futuro poder indagar en el efecto que estos resultados pueden tener en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del Proyecto Nacional I+D+I EDU2015-70565-P, titulado "Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares" y el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). También agradecemos a la Universidad de Costa Rica por la beca otorgada a la autora Vargas, lo que le permitió trabajar en esta investigación.

Referencias

Aires, A. y Esteves, A. (2012). Las derivadas: análisis del libro de texto de la enseñanza secundaria en Portugal con sus primeras aplicaciones. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 29*(3), 9-22.

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. y Presmeg, N. (2008). Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Brändström, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Tesis de licenciatura). Lulea University of Technology, Lulea, Sweden.

Cardona, S. y Rey, J. (2015a). *Bachillerato 1. Matemáticas. Práctica*. Zaragoza, España: Editorial Edelvives.

Cardona, S. y Rey, J. (2015b). *Bachillerato 1. Matemáticas. Teoría*. Zaragoza, España: Editorial Edelvives.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Bachillerato 1. Matemáticas I.* Madrid, España: Grupo Anaya.

Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en los libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca, España: SEIEM.

Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números, 87*, 5-23.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*, 765-777.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 259-268). Málaga, España: SEIEM.

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 61-88). Madrid, España: Pirámide.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematics, 24*(1), 89-94.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). México, D.F.: McGraw Hill.

Herrera, M. E. (2017). *Análisis de las tareas de las pruebas de acceso a la universidad: Matemáticas II, 2016* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA, 11*(4), 280-306.

Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). Málaga, España: SEIEM.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 243-257). Madrid, España: Pirámide.

OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. París, Francia: OECD Publishing.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, online.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 11-27.

Rico, L. (2016). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Granada, España: Editorial Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato. Ciencias y tecnología.* Madrid, España: Ediciones SM.

PÓSTERES

MAESTROS EN FORMACIÓN RESOLVIENDO PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO RUTINARIOS: RETROALIMENTACIÓN Y ESTILOS DE INTERACCIÓN

Prospective Primary School Teachers solving non-routine mathematical problems: Feedback and Interaction Styles

Alonso-Castaño, M.[a], Alonso, P.[a] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo

En este trabajo se ha desarrollado una investigación experimental en la que se ha observado y estudiado una sesión de resolución de problemas del Grado en Magisterio. En ella, futuros maestros han resuelto una serie de problemas, a nivel de 6º de primaria, de tipo no rutinario. Se ha analizado la interacción profesor-alumno mediante transcripciones de grabaciones de voz, con el objetivo de identificar los estilos de interacción predominantes (Verschaffell, Greer y De Corte, 2000, y Turner et al., 2002), los patrones de intercambio empleados (Wells, 2001) y la influencia de las retroalimentaciones en el aula a la hora de plantear y resolver correctamente dichos problemas.

En esta experimentación participaron una profesora novel y un grupo de 10 estudiantes de tercer curso que habían recibido formación previa sobre resolución de problemas mediante heurísticos. De los datos recogidos se analizaron los distintos ciclos de interacción, entendidos como la comunicación desde que se plantea la pregunta inicial hasta que se llega a un acuerdo sobre la resolución del problema (Rosales, Vicente, Chamoso, Muñez, y Orrantia, 2012). Se pudo observar que el patrón de intercambio de información predominante fue el IRF (Indagación-Respuesta-Feedback) resultando en una mayor participación por parte del alumnado. La dificultad del problema también influyó en la participación del alumnado (a más dificultad, menos participación y viceversa) y en los distintos estilos de interacción empleados (con problemas sencillos el estilo fue no invasivo y genuino, fomentando las retroalimentaciones entre los propios estudiantes, y más superficial e invasivo cuando los problemas aumentaron en dificultad, con escasa participación de los estudiantes). Al igual que ocurre en Schoenfeld, Minstrell y Van Zee (1999), dónde se compara a un profesor experimentado con uno novel, cuando la profesora observa que el alumnado no llega a la respuesta, resultando la discusión improductiva, es ella misma quién resuelve el problema.

Referencias

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint Word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*, 1185-1195.

Schoenfeld, A. H., Minstrell, J. y Van Zee, E. (1999). The detailed analysis of an established teacher's non-traditional lesson. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 281-325.

Turner, J. C., Midgley, C., Meyer, D. K., Gheen, M., Anderman, E. M., Kang, Y. y Patrick, H. (2002). The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics: A multimethod study. *Journal of Educational Psychology*, *94*(1), 88.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of Word problems.* The Netherlands: Swets y Zeitlinger Publishers.

Wells, G. (2001). *Action, talk, and text: Learning and teaching through inquiry*. New York: Teachers College Press.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Maestros en formación resolviendo problemas matemáticos no rutinarios: Retroalimentación y estilos de interacción. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 605). Gijón: SEIEM.

ESTADÍSTICA POR PROYECTOS: ANÁLISIS DE TEMÁTICAS, VARIABLES Y RECURSOS PROPUESTOS POR MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Statistics by projects: Analysis of themes, variables and resources proposed by teachers in initial training

Anasagasti, J.[a] e Izagirre, A.[a]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Son muchos los estudios que demuestran los beneficios de aprender estadística mediante la metodología basada en proyectos; en general, cuando al alumnado se le brinda la oportunidad de elegir e investigar acerca de un tema de interés personal, la motivación y la implicación aumenta considerablemente (Batanero y Díaz, 2011).

En esta investigación, a partir de un módulo diseñado específicamente para el trabajo de la Estadística a través del Aprendizaje Basado en Proyectos (Anasagasti y Berciano, 2016), el alumnado ha desarrollado un proyecto de investigación en grupo y han sido ellos mismos los que han decidido los temas a investigar. Los participantes, 12 grupos en total, han sido estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad del País Vasco.

El objetivo en esta ocasión es analizar cuáles son las temáticas propuestas por el alumnado y qué tipo de recursos estadísticos utilizan para obtener respuesta a sus preguntas y presentarlas en el aula, centrándonos sobre todo en qué tipo de variables y gráficos emplean y si van acorde con el objetivo definido. Los temas investigados por los 12 grupos podemos clasificarlos en 4 categorías: Salud (ejercicio físico y alimentación), aficiones (música, shopping, mascotas y deporte), pedagogía (trabajo cooperativo, situación socio-afectiva de los jóvenes, utilización de redes sociales entre el alumnado de educación primaria y un análisis sobre las lenguas de interés) y otros (transporte público y el aborto).

En el análisis de los datos, el sexo y la edad de los participantes son dos variables que el 66.6% y el 83.3% de los grupos, respectivamente, tiene en cuenta. Por otro lado, se observa que las variables cualitativas cobran el protagonismo. Por esta razón, los gráficos estadísticos que utilizan para mostrar los datos son principalmente diagramas de barra (35%) y diagramas de sectores (51%); en menor medida también utilizan histogramas, pictogramas o polígonos de frecuencia. Se debe señalar que en muchas ocasiones el tipo de variable no corresponde con el tipo de gráfico adecuado, sobre todo cuando no tienen en cuenta si la variable que están representando es cuantitativa discreta o contínua.

En conclusión, observamos que son diversos los temas elegidos por el alumnado por lo que podemos deducir que sus inquietudes son muy variadas. Entendemos que si bien es importante considerar la elección del propio alumnado, dándole libertad para elegir los temas a tratar, también contemplamos la necesidad de que el profesorado guíe su trabajo a la hora de seleccionar las variables o utilizar ciertos gráficos.

Referencias

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos, Revista de Educación, vol. (Extra 1)*, 31-43.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Anasagasti, J., e Izagirre, A. (2018). Estadística por proyectos: Análisis de temáticas, variables y recursos propuestos por maestros en formación inicial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 606). Gijón: SEIEM.

DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL RESOLVER TAREAS GEOMÉTRICAS NO RUTINARIAS

Performance of prospective teachers solving non-routine geometrical tasks

Arce, M.[a], Conejo, L.[a], Pecharromán, C.[a] y Ortega, T.[a]

[a]Universidad de Valladolid

El póster contiene un resumen de una investigación de tipo experimental que se está desarrollando en la Universidad de Valladolid para averiguar si los estudiantes para maestro de Educación Primaria (EPM) adquieren las competencias suficientes para que, en su futuro profesional, puedan enseñar a sus alumnos tareas no rutinarias de Geometría. La investigación surge desde una inquietud docente, y desde esta posición queremos conocer el desempeño de los EPM en la resolución de problemas enunciados en un contexto matemático que involucran figuras geométricas tridimensionales y sus elementos planos. Para analizar el nivel de resolución de estos problemas, y de las diferentes tareas que los componían, se ha adoptado una distinción entre tarea rutinaria (TR) y tarea no rutinaria (TNR). Siguiendo a Díaz y Poblete (2001) y a Jiménez (2012), entendemos por TR aquella que puede ser resuelta de forma automática a través de la reproducción de contenidos previamente aprendidos, y por TNR aquella en la que no basta esa reproducción automática, sino que hay que elaborar una estrategia de solución a partir de contenidos y experiencias previas.

Se plantearon dos problemas geométricos que involucraban tanto TR como TNR a dos grupos de EPM con 69 y 29 alumnos, al acabar la asignatura de fundamentos y didáctica de la geometría. Por ejemplo, uno de ellos pedía obtener el volumen y área de la figura de revolución generada al girar alrededor de un eje una figura plana proporcionada, y compuesta por tres subfiguras: un triángulo rectángulo isósceles, con un cateto de 12 cm sobre en el eje; un rectángulo de lados 12 y 8 cm, con un lado mayor sobre el eje; y un cuarto de círculo con radio 8 cm, y un radio en el eje. En este problema, se consideraron como TR el cálculo del volumen de la semiesfera, del cilindro y del cono generados al revolucionar, y el área de la semiesfera; y como TNR el área lateral del cilindro, el del cono y el área de la corona circular surgida. Se analizó la producción en cada tarea utilizando una escala de puntuación 0-10: 10 para resoluciones correctas, 0 para procedimientos o fórmulas incorrectas, y 5 para procedimientos y fórmulas correctas, pero con errores relevantes en el cálculo.

Los resultados indican una diferencia importante en la media de puntuaciones obtenida teniendo en cuenta la diferenciación entre TR y TNR. Las cinco TR entre ambos problemas tuvieron puntuaciones medias (en la escala 0-10) de 6.56, 7.81, 7.03, 5.70 y 5.52. Por otra parte, las cinco TNR tuvieron puntuaciones medias sustancialmente más bajas, de 3.75, 2.89, 1.25, 1.03 y 1.38. En las TR las dificultades principales se asociaron al uso de fórmulas incorrectas (fórmulas mezcladas o con una dimensionalidad inadecuada). En los TNR se añadió una dificultad manifiesta para identificar las figuras planas que formaban parte del área y las que quedaban ocultas, especialmente en figuras que surgen combinando elementos de varias subfiguras (como es la corona circular). Los resultados han mostrado un desempeño muy pobre en los EPM participantes al resolver TNR sencillas ligadas a la identificación y gestión de elementos planos en cuerpos geométricos. ¿Podrían estos EPM incluir en su enseñanza TNR? ¿Cómo podrían enseñar estrategias para resolverlos?

Referencias

Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *NÚMEROS: Revista de didáctica de las matemáticas*, *45*, 33-41.

Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de problemas matemáticos: un estudio sobre las dificultades de los niños en la resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación*, *24*(3), 351-362.

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T. (2018). Desempeño de estudiantes para maestro al resolver tareas geométricas no rutinarias. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 607). Gijón: SEIEM.

UNA MIRADA A LAS COMPETENCIAS GENERALES Y ESPECÍFICAS DE LOS FUTUROS LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS DE COLOMBIA

A look at the general and specific competences of the future licensed in mathematics of Colombia

Ariza Muñoz, E.[a], González-Calero, J. A.[a] y Cozar Gutierrez, R.[a]

[a]Universidad de Castilla La Mancha

Recientes investigaciones han puesto en manifiesto la importancia de la calidad de los profesores en los resultados de sus alumnos (Eurydice, 2013; Eurydice, 2009; OCDE, 2005). El estudio PISA destaca que, entre los países con economías desarrolladas, los que priorizan la inversión en formación de los profesores frente a otros conceptos suelen tener mejores resultados, por ello la formación inicial, recobra tanta importancia y más aún el hecho de cómo se mide esa formación. Existen diversas estrategias para medir los resultados de la formación inicial docente, en Colombia sólo contamos a nivel externo con las Pruebas Saber Pro, estas mediciones se han vuelto relevantes en la medida que, en distintos países, las usan no solo sobre cómo mejorar los procesos formativos sino incluso sobre la legitimidad y utilidad de la formación docente y cómo ésta, influencia la efectividad de los profesores y los ubica en un análisis de su inserción y retención en el ámbito laboral, así como sus percepciones de preparación y la evaluación de sus empleadores una vez en el mundo del trabajo (Darling-Hammond, 2006).

Por todo lo anterior es necesario plantear la pregunta ¿Cuál es el nivel de las competencias generales y específicas de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de Colombia? Para dar respuesta, se ha recurrido a la base de datos del Icfes Saber Pro 2017 y a través de un análisis de la varianza de los puntajes se realizó la comparación. Se encontró, que en todas las competencias hay diferencias significativas entre los licenciados en Matemáticas y las otras Licenciaturas. La base de datos cuenta con información de 15.142 estudiantes, en las competencias genéricas de Razonamiento Cuantitativo, Lectura Crítica, Competencias Ciudadanas, Inglés, Comunicación escrita. Las competencias específicas de Enseñar, Formar y evaluar. El máximo puntaje es de 300 puntos. En las competencias genéricas, Los Licenciados en Matemáticas se llevan el primer puesto con 167 puntos en Razonamiento cuantitativo, y en las competencias específicas Enseñar 162,75; evaluar 164,79 y formar la más baja con 147,85, por lo que es necesario compartir con la academia, para abrir un espacio de reflexión y visualizar los retos y compromisos que tienen las Universidades frente a estos resultados.

Referencias

Darling-Hammond, L. (2006). Assessing Teacher Education: The Usefulness of Multiple Measures for Assessing Program Outcomes. *Journal of Teacher Education*, *57*, 120-138.

OECD. (2005). *Teachers Matter: Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers, Education and Training Policy*. Paris: OECD Publishing.

Eurydice. (2009) (2013). *Pruebas nacionales de evaluación del alumnado en Europa: objetivos, organización y utilización de los resultados*. Bruselas: Eurydice.

Ariza Muñoz, E., González-Calero, J. A. y Cozar Gutierrez, R. (2018). Una mirada a las competencias generales y específicas de los futuros licenciados en matemáticas de Colombia. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 608). Gijón: SEIEM.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS EN 3º ESO. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA QUE COMBINA EL USO DE GEOGEBRA Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Graphical representation of quadratic functions in 3º ESO. A didactic proposal that combines the use of GeoGebra and advanced mathematical thinking.

Arnal, M.[a], Baeza, M. A.[b] y Claros, J.[b]

[a]Universidad Rey Juan Carlos, [b]Universidad Complutense de Madrid

Con este trabajo se pretende mostrar una forma de representar funciones cuadráticas en 3º ESO que fomenta la aparición del Pensamiento Matemático Avanzado haciendo uso de la herramienta tecnológica GeoGebra. Un gran número de libros de texto introducen la representación gráfica de este tipo de funciones de una manera procedimental, facilitando a los alumnos la fórmula para el cálculo del vértice sin apelar a ninguna justificación sobre la misma. Nuestra propuesta consiste en calcular este elemento fundamental de las funciones cuadráticas completando cuadrados, demostrando así su obtención. Trabajando de esta forma, se desarrolla en los alumnos el Pensamiento Matemático Avanzado en el sentido de Tall (1991), ya que se favorece la aparición de la demostración y la abstracción, elementos fundamentales del mismo. Por otro lado, en nuestra propuesta didáctica se hace uso de la herramienta tecnológica GeoGebra. Son muchos los autores que hablan sobre los beneficios de utilizar este tipo de herramientas en el aula para la representación de funciones. Arce y Ortega (2013) destacan que una de las limitaciones para la representación de funciones es el papel, por la imposibilidad de realizar zoom en la representación gráfica para analizar su comportamiento. Gay, Tito y San Miguel (2014) evidencian además que los resultados pueden llegar a ser muy positivos con la utilización de GeoGebra ya que la posibilidad de experimentar facilita la obtención de múltiples ejemplos.

En este estudio han participado 23 alumnos de 3º ESO pertenecientes al Instituto de Innovación Tecnológica Calderón de la Barca de Pinto (Madrid). La propuesta didáctica realizada constó de dos fases. En la primera, se explicó cómo representar gráficamente una función cuadrática: concavidad/convexidad, identificación del vértice completando cuadrados, puntos de corte con los ejes y representación tabular. Posteriormente se realizó una evaluación en la que los alumnos tuvieron que representar gráficamente dos funciones cuadráticas, una cóncava y otra convexa, calculando previamente todos sus elementos fundamentales. En la segunda fase se introdujo a los alumnos en la herramienta tecnológica GeoGebra a través de la realización de ejemplos guiados por el profesor. Posteriormente los alumnos realizaron una serie de tareas individuales sin guía, tales como: representar gráficamente diferentes funciones cuadráticas y encontrar diferencias y similitudes entre ellas, determinar cuatro puntos distintos del vértice que perteneciesen a diferentes funciones cuadráticas propuestas, relacionar la representación gráfica de una función cuadrática con su respectiva representación tabular (sin proporcionar la expresión algebraica) y hallar diferentes funciones cuadráticas a partir de un vértice, advirtiendo al alumno de la no unicidad en la solución.

Referencias

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, *8*(2), 61-73.

Gay, M., Tito, J. y San Miguel, S. (2014). GeoGebra como facilitador del estudio de funciones de variable real. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.

Tall, D. (1991). The psichology of advanced mathematical thinking. En *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer.

Arnal, M., Baeza, M.A. y Claros, J. (2018). Representación de funciones cuadráticas en 3º ESO. Una propuesta que combina el uso de GeoGebra y el Pensamiento Matemático Avanzado. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 609). Gijón: SEIEM.

UNA EXPERIENCIA DE AULA. MOTIVACIÓN DEL ALUMNADO A TRAVÉS DE LA GAMIFICACIÓN

A classroom experience. Encouraging students through gamification

Bacelo, A.[a], Arnal, M.[a] y Duarte, I.[a]

[a]Universidad Rey Juan Carlos

Durante años, hemos visto como la asignatura de matemáticas genera sentimientos de frustración y rechazo en el alumnado, provocando un estancamiento en el desarrollo científico de los estudiantes. Se propone un programa de intervenciones en centros de Educación Primaria con el que, a través de sesiones mensuales, se trabaje la aplicación y contextualización de los conceptos matemáticos vistos en el aula. Con este programa se busca conseguir una visión más social de las ciencias teóricas, rompiendo barreras sociales y permitiendo a los estudiantes ser conscientes de la necesidad de esta ciencia debido a sus múltiples aplicaciones en la vida diaria. Se trabaja para, además, aumentar la confianza de los alumnos al enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos, motivarles en su aprendizaje y fomentar el descubrimiento científico de manera personal.

Este estudio se fundamenta en dos pilares fundamentales: la motivación y la gamificación.

Mato, Espiñeira y Chao (2014) afirman que los alumnos que tienen una buena percepción de su profesor y de las matemáticas, están motivados hacia su aprendizaje. Para ello, estudian el aprecio, gusto y motivación hacia la asignatura de matemáticas. A valores positivos de la relación actitud-rendimiento se obtienen mayores calificaciones.

Por otra parte, Werbach y Hunter (2012) afirman que, a partir de la gamificación, es decir, el uso de estrategias, modelos y características propias de los juegos, se pueden transmitir contenidos o cambiar un comportamiento en el aula, propiciando la motivación, la implicación y diversión de los alumnos, logrando los objetivos propuestos y obteniendo una retroalimentación a lo largo del proceso.

Al comienzo se realizó un cuestionario, Adelson y McCoach (2006), con el que evaluar las actitudes del alumnado hacia las matemáticas.

Algunas de las actividades realizadas durante las sesiones son las siguientes:

Batalla de operaciones: Aprendizaje de la jerarquía de operaciones. Se trabaja por equipos y a cada equipo se le asigna una operación que deberá ser expresada a través de un movimiento gestual. Las reglas del juego se basan en la jerarquía de operaciones.

Fórmula de Euler: A través de un garabato cualquiera se les pide que cuenten las veces que se cruzan las líneas, y sumen el principio y el final de la línea (vértices); las zonas encerradas más la zona exterior (caras), y las líneas que hay entre los cruces que se han contado primero (aristas). A partir de varios ejemplos y su deducción, se descubre la Fórmula de Euler.

Los 4 ases: Se basa en el hecho de que si a cualquier número de dos cifras de una determinada decena se le resta la suma de sus cifras siempre se obtiene el mismo número.

Referencias

Adelson, J. L. y McCoach, D. B. (2006). *Math and me survey.* Unpublished instrument.

Mato, M.D., Espiñeira, E. y Chao, R. (2014). Dimensión afectiva hacia la matemática: resultados de un análisis en educación primaria. *Revista de Investigación Educativa, 32*(1), 57-72.

Werbach, K. y Hunter, D. (2012). *For the win: How game thinking can revolutionize your business*. Wharton Digital Press.

Bacelo, A., Arnal, M. y Duarte, I. (2018). Una experiencia de aula. Motivación del alumnado a través de la gamificación. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 610). Gijón: SEIEM.

UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA EN SECUNDARIA

Didactic situation for the learning of random variable concept in secondary

Bizet-Leyton, V.[a], Ramos-Rodríguez, E.[b] y Ruz, F.[c]

[a]Colegio Rayen Caven, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [c]Universidad de Granada

En los últimos veinticinco años, el tratamiento de la probabilidad se ha ido incorporando progresivamente a lo largo de los distintos niveles educativos del currículo de matemática en gran parte de los países desarrollados (Vásquez y Alsina, 2014). Autores como Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016), proponen el concepto "variable aleatoria" (v.a.) entre aquellos conceptos fundamentales en la enseñanza de la probabilidad, posicionándola como un conocimiento esencial y relevante de la educación escolar, para entender situaciones de la vida real. Desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, Ruiz (2006) reporta que a los estudiantes les resulta difícil la naturaleza funcional de las variables aleatorias y la composición de funciones vinculada con ellas y la probabilidad.

En este contexto, el presente estudio aborda el aprendizaje del concepto "variable aleatoria" desde su carácter funcional en educación secundaria, por lo que planteamos como objetivo identificar las dificultades que presentan estudiantes al enfrentarse a una situación didáctica sobre dicho concepto. Para ello, hemos diseñado, aplicado y analizado los datos de la puesta en práctica de una situación de aprendizaje, considerando como fundamento teórico elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), de manera de atender a la pregunta de investigación ¿Cuáles son las dificultades que presentan estudiantes al enfrentarse a una situación didáctica centrada en el concepto de "variable aleatoria"? La situación propuesta tiene la intención que los estudiantes logren reconocer y representar dos relaciones entre conjuntos (entre A y B y entre B y C), para posteriormente darles a conocer que en el contexto de probabilidad esas relaciones son funciones y reciben el nombre de v.a. y función de probabilidad, respectivamente.

El estudio se enmarcó en un paradigma de investigación cualitativo, los sujetos informantes fueron 22 estudiantes de 15 a16 años de un colegio de Chile. Como instrumento de recogida de datos se empleó la situación didáctica sobre v.a., cuyos elementos de su análisis a priori, permitieron definir categorías para su análisis. Los resultados evidencian dificultades en la comprensión de la v.a. como función real, relativas a los potenciales tipos de registros usados por los estudiantes y los obstáculos intrínsecos asociados a estos. Del mismo modo se constata la dificultad en identificar elementos del espacio muestra asociado a un experimento aleatorio. De esta forma, proyectamos la situación didáctica propuesta como un recurso valioso para profesores en ejercicio o formación, que tengan la tarea de enseñar el concepto de "variable aleatoria".

Referencias

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. New York: Springer

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN. México

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números, 85,* 5-23.

Bizet-Leyton, V., Ramos-Rodríguez, E. y Ruz, F. (2018). Una situación didáctica para el aprendizaje del concepto de variable aleatoria en secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 611). Gijón: SEIEM.

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES STEAM EN UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA

Analysis of STEAM activities in an inclusive mathematics education

Blanco, T. F.[a], Gorgal-Romarís, A.[a], Salgado, M.[a], Salinas-Portugal, M. J.[a], Núñez-García, C.[a], Sequeiros, P. G.[a], Diego-Mantecón, J. M.[b] y Ortiz-Lasa, Z.[b]

[a]Universidad de Santiago de Compostela, [b]Universidad de Cantabria

En este trabajo se presentan los primeros resultados de un programa de intervención con adolescentes en riesgo de exclusión social. Este programa socioeducativo, llamado *Anaquiños Matemáticos*, tiene como objetivo analizar cómo las actividades STEAM estimulan a los estudiantes en relación a las matemáticas. Estas actividades se articulan en base a dos ejes comunes: integrar conocimientos de diferentes áreas y trabajar en un ambiente colaborativo, principales fundamentos de la metodología STEAM (Durando, 2013; McDonald, 2016).

La investigación experimental se ha llevado a cabo con dos grupos diferentes de 15 adolescentes en riesgo de exclusión social debido a sus circunstancias familiares (Vermunt, 2005), con edades comprendidas entre los 12 y 13 años y seleccionados por el departamento de orientación de un instituto de enseñanza secundaria situado en Galicia. El desarrollo del programa ha tenido lugar durante un período de un curso académico, una hora por semana en horario extraescolar. Las actividades STEAM se han planteado en formato juego o en formato de pequeños proyectos de investigación, para realizar, en cualquier caso, en una hora. Para el desarrollo de las actividades se han utilizado tanto materiales manipulativos como recursos tecnológicos (Blanco, Gorgal, Salgado y Diego, 2017). Los instrumentos de recogida de datos empleados en este estudio han sido la grabación en vídeo de las sesiones, el cuaderno de los investigadores como observadores participantes y las entrevistas semiestructuradas a profesores y alumnos. Asimismo, se ha pasado un cuestionario de creencias y actitudes hacia las matemáticas al alumnado participante.

Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes que participaron en el programa experimentaron cambios positivos, tanto en lo referido a su rendimiento académico en matemáticas como en su actitud hacia ellas. De forma general, el alumnado presentó una disposición receptiva hacia la metodología empleada, mostrándose participativo en todas las sesiones y asistiendo de forma regular a las mismas.

Referencias

Blanco, T.F., Gorgal, A., Salgado, M. y Diego-Mantecón, J.M. (2017). Proyecto piloto basado en actividades STEAM para adolescentes en riesgo de exclusión social. En V. Martínez, N. Melero, E. Ibáñez y M. C. Sánchez (Eds.), *Derribando Muros. El compromiso de la Universidad con la justicia social y el desarrollo sostenible* (pp. 109-110). Sevilla, Spain.

Durando, M. (2013). Towards 2020 Priorities for STEM education and careers in Europe. *Inginius project*. European Schoolnet.

McDonald, C. V. (2016). STEM Education: A Review of the Contribution of the Disciplines of Science, Technology, Engineering and Mathematics. *Science Education International*, *27*(4), 530-569.

Vermunt, J. D. (2005). Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance. *Higher education*, *49*(3), p. 205.

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Salgado, M., Salinas-Portugal, M. J., Núñez-García, C., Sequeiros, P. G., Diego-Mantecón, J. M. y Ortiz-Lasa, Z. (2018). Análisis de actividades STEAM en una educación matemática inclusiva. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 612). Gijón: SEIEM.

INFLUENCIA DEL MATERIAL EN LA COMPRENSIÓN DE LA DECENA EN ALUMNADO CON SÍNDROME DE DOWN

Influence of material in the understanding of the ten in students with Down syndrome

Bruno, A.[a] y Noda, A.[a]

[a]Universidad de La Laguna

El aprendizaje matemático, y en especial el numérico, presenta múltiples dificultades a las personas con Síndrome de Down (Turner y Alborz, 2003). Se muestran resultados de un estudio realizado con estudiantes con síndrome de Down que siguieron una secuencia de enseñanza para la adquisición de la decena, organizada en cuatro constructos: contar, particionar, agrupar y relacionar (Jones et al, 1997). La secuencia se adaptó a sus características cognitivas y se utilizaron diferentes materiales concretos: bloques aritméticos (adaptados en formato para facilitar su manejo), materiales cotidianos y monedas (1 y 10 céntimos). Los materiales se seleccionaron para ayudarles a pasar de la representación de la decena como *unidad numérica compuesta* a la *unidad numérica abstracta* (Steffe, Cobb, y Von Glasersfeld, 1987).

El objetivo del trabajo es analizar cómo influye el tipo de material en sus estrategias al dar el cardinal, unir y quitar decenas en la resolución de problemas de sumar y restar. La investigación se realizó en la Asociación Tinerfeña de Trisómicos XXI (Tenerife), en clases de apoyo escolar. Se siguió una metodología cualitativa con tres estudiantes de 11, 17 y 27 años, seleccionados de modo que su conocimiento numérico se adecuara al objetivo del estudio. Las fases del estudio fueron: una entrevista inicial, una secuencia de enseñanza durante seis meses y una entrevista final. Se presentan resultados de la entrevista final en la que se plantearon, entre otras tareas, seis problemas de enunciado verbal: tres de suma (agrupar) y tres de resta (particionar), con los tres tipos materiales y con números menores que 40.

Se concluye que hay una influencia del tipo de material en la estrategia empleada por los estudiantes. Se encontró una tendencia a usar el recuento uno a uno en los problemas con materiales discretos, mientras que empleaban la decena como unidad de conteo, con los bloques aritméticos. La principal dificultad mostrada fue contar las decenas como unidades. Los resultados indicaron un avance en la comprensión de la decena como *unidad numérica compuesta* y un desarrollo incompleto de la *unidad numérica abstracta*.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación “Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores”. EDU2017-84276-R

Referencias

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, A., Rich, B. y Van Zoest, L.R. (1996). Multi-digit Number sense: a Framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336.

Steffe, L.P., Cobb, P. y Von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag.

Turner, S. y Alborz, A. (2003). Academic attainments of childre with Down’s syndrome: A longitudinal study. *British Journal of Educaional Psychology, 73*, 563-585.

Bruno, A. y Noda, A. (2018). Influencia del material en la comprensión de la decena en alumado con síndrome de Down. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 613). Gijón: SEIEM.

LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Multiple intelligences in mathematics problem solving in primary education

Caballero, A.[a], Cerrato, J. F.[a], Melo, L.V.[a] y Jiménez-Gestal, C.[b]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de La Rioja

El bajo rendimiento en el área matemáticas y más concretamente en la resolución de problemas matemáticos (RPM) ha sido puesto en evidencia por múltiples estudios. Tomando como base la Teoría de las Inteligencias Múltiples (TIM) de Gardner (1995, 2001, 2016), consideramos que el alumno debe recibir una enseñanza individualizada basada en sus intereses e inquietudes y que la RPM no está exenta de ello. Sin embargo, son exiguos los trabajos en los que se trabaja la RPM de forma individualizada, encaminando la RPM a la TIM. Considerando estas dos premisas, nos cuestionamos cómo mejorar los resultados matemáticos mediante la influencia que presenta la TIM en la RPM. De ahí el objetivo de este trabajo: determinar si la adaptación de los problemas matemáticos en función de la Inteligencia Múltiple Predominante (IMP) de cada alumno mejora el rendimiento en la RPM.

Para la consecución de dicho objetivo desarrollamos un diseño pre-experimental de pretest / postest con un grupo experimental que responde al esquema: GE O_1 x O_2. Donde O_1 corresponde a la administración de una prueba de "Problemas matemáticos en contexto matemático" y O_2 corresponde a la administración de una prueba de "Problemas matemáticos en contexto de IM" siendo x la adaptación de dicha prueba a la IM de cada sujeto objeto de estudio. Ambos instrumentos de recogida de datos son de elaboración propia y han sido sometidos a juicio de expertos. Además se utilizaron el Test de Inteligencias Múltiples de Gardner (1995) y el Cuestionario de Autoevaluación de las Inteligencias Múltiples de Kertész (2013) para determinar la inteligencia predominante de cada uno de los participantes. La muestra está compuesta por 32 alumnos de quinto y sexto de Educación Primaria.

Del análisis de datos realizado se obtiene que la puntuación obtenida en la prueba de "Problemas matemáticos en contexto de IM" es mayor que la obtenida en la prueba de "Problemas matemáticos en contexto matemático", siendo esta diferencia estadísticamente significativa. Concluimos por tanto que los resultados obtenidos en la RPM adaptados según la IMP son mejores que los obtenidos en la RPM sin adaptar, evidenciando que a través de la TIM se puede obtener una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RPM. Ello supone desarrollar nuevas estrategias educativas basadas en lo que antes se denominaba "talento" y ahora es "habilidad" de un tipo de inteligencia.

Referencias

Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples: La Teoría en la Práctica.* Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada: las inteligencias múltiples en el siglo XXI.* Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (2016). *Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples.* Fondo de cultura económica.

Kertész, R. (2013). Construcción y validación del cuestionario de Autoevaluación de las inteligencias múltiples. *Hologramatica, 17*(3), 85-111. Recuperado de http://cienciared.com.ar/ra/usr/3/1461/hologramatica_n18v3pp85_111.pdf

Caballero, A., Cerrato, J. F., Melo, L. V. y Jiménez-Gestal, C. (2018). Las inteligencias múltiples en la resolución de problemas matemáticos en educación primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 614). Gijón: SEIEM.

MUSIMÁTICAS

Musimathics

Caballero, A.[a], Fernández, S.[a] y Jiménez-Gestal, C.[b]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de La Rioja

Muchos son los estudios que explican la relación entre música y matemáticas y defienden que ambas disciplinas son claramente complementarias en el ámbito educativo, entre otros los de Blanco, Cárdenas, Caballero, y López (2016), Casals, Carrillo, y González (2014), Cateura (2007) y Chao, Mato y Chao (2015). Sin embargo, encontramos pocos ejemplos claros de cómo aunar ambas disciplinas en el aula, por lo que nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿se podría mejorar la motivación y el rendimiento en el aprendizaje de las fracciones mediante una propuesta interdisciplinar que aúne música y matemáticas?

El objetivo principal de este trabajo es mejorar la motivación y el rendimiento académico en el aprendizaje de las fracciones a través de la Educación Musical del alumnado de primaria.

Para ello se ha efectuado una investigación evaluativa a través de un diseño cuasiexperimental con un grupo de control con sólo post test. En el grupo experimental, compuesto por 20 alumnos del grupo A de 4º de Educación Primaria, se ha implementado una unidad didáctica denominada Musimáticas que desarrolla contenidos de fracciones matemáticas a través de la educación musical, basándonos en la experimentación corporal para sentir la división y la fragmentación; en el grupo de control, constituido por 20 alumnos del grupo B de 4º de Educación Primaria, se han trabajado los mismos contenidos matemáticos de forma tradicional. Tras la implementación de la unidad didáctica, se administró en ambos grupos un instrumento de elaboración propia para evaluar el rendimiento académico en el aprendizaje de las fracciones matemáticas y el Cuestionario para valorar la motivación del alumno/a de 8 a 12 años de Ávila de Encío (2012).

Los resultados obtenidos indican que el grupo experimental presenta mayor rendimiento y motivación que el grupo de control, siendo dichas diferencias estadísticamente significativas. Concluimos por tanto que la unidad didáctica Musimáticas, esto es, aunar matemáticas y música en el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones, mejora la motivación y el rendimiento académico.

Referencias

Ávila de Encío, C. (2012). *Cuestionario para valorar la motivación del alumno/a de 8 a 12 años*. Recuperado de mimosa.pntic.mec.es/aorcajad/Cuestionario_motivacion.doc

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A., Caballero, A. y López, M. (2016). *Itinerario matemático en el museo arqueológico provincial de Badajoz.* Badajoz: Junta de Extremadura.

Casals, A.; Carrillo, C. y González, C. (2014). La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula. *Léeme, 34*, 1-17.

Cateura, T. (2007). *Expresiones Pedagógicas de la Música*. México: McGrawHill.

Chao, R.; Mato, M.D. y Chao, A. (2015). Actividades interdisciplinares de matemáticas y música para educación infantil. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, *6*, 32-36.

Caballero, A., Fernández, S. y Jiménez-Gestal, C. (2018). Musimáticas. L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 615). Gijón: SEIEM.

LENGUAJE DE LA VARIABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA EN MÉXICO

Language of variability in secondary Mexican school textbooks

Castro, F. J.[a], Ortiz, J. J.[b] y Garzón, J.[b]

[a]Instituto Tecnológico de Sonora, [b]Universidad de Granada

En los últimos años se ha producido una reforma curricular en México que ha supuesto un refuerzo de los contenidos de estadística y probabilidad desde los niveles básicos (SEP, 2011), en particular, en educación secundaria se agregó un eje temático denominado “Manejo de la información”, donde se destacan la importancia de las medidas centrales y de dispersión como dos de los conceptos principales en la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

Como parte de un proyecto de investigación más amplio sobre la enseñanza de la estadística, en particular sobre la variabilidad estadística, presentamos este trabajo de tipo exploratorio, con el objetivo de analizar el lenguaje relacionado con la dispersión en el tema de estadística, en tres libros de texto mexicanos de tercer curso de educación secundaria. El libro de texto ocupa un papel destacado en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que es uno de los recursos educativos más utilizados y ejerce una importante influencia en las decisiones que toman los profesores sobre las tareas a realizar. A su vez el tipo de lenguaje utilizado en los libros de texto (entendido en un sentido amplio como lenguaje verbal, numérico, simbólico, tabular o gráfico) es muy importante, ya que debe ser adecuado al nivel del alumnado y es un elemento fundamental de la actividad matemática (Ortiz, Mohamed, Serrano y Albanese, 2017).

Para realizar el análisis hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a la importancia que concede al lenguaje matemático, al que considera fundamental en las prácticas personales o institucionales que se realizan durante la resolución de problemas. Otro constructo importante en este marco teórico es la noción de conflicto semiótico, que puede presentarse al interpretar de forma diferente una expresión dos sujetos (personas o instituciones).

Los resultados muestran un gran número de expresiones verbales, donde se utilizan algunas palabras del lenguaje cotidiano con sentido distinto al matemático, lo que puede provocar conflictos semióticos en el alumnado. Los números enteros son los más utilizados y aparecen algunos decimales, siendo casi inexistentes los símbolos matemáticos. Con respecto al lenguaje tabular y gráfico, las tablas más utilizadas son las de datos y los gráficos más usados son los de barras, aunque también aparecen algunos histogramas y diagramas de caja y bigotes.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V. (2017). La estimación de la media: análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza: SEIEM.

SEP. (2011). *Programas de Estudio2011. Guía del Maestro. Educación básica secundaria*. México D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Castro, F. J., Ortiz, J. J. y Garzón, J (2018). Lenguaje de la variabilidad en libros de texto de secundaria en México. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 616). Gijón: SEIEM.

TREINTA AÑOS DE PRODUCCIÓN DOCUMENTAL EN ESPAÑA: CURRÍCULO Y CONTENIDO MATEMÁTICO

Thirty years of documentary production in Spain: Curriculum and mathematical content

Castro, P.[a], Gómez, P.[a] y Cañadas, M. C.[b]

[a]Universidad de los Andes, [b]Universidad de Granada

Exponemos avances de una caracterización de la producción documental en Educación Matemática en España entre 1986 y 2016, con la que complementamos estudios sobre la investigación española en los simposios de la SEIEM (Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal, 2011; Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza, 2011). Las fuentes de información son memorias de la SEIEM, artículos de las revistas Números, PNA, Suma, AIEM y Edma 0-6, documentos de grupos españoles de investigación y producción no publicada. Con el propósito de caracterizar la documentación con base en su contenido, nos basamos en una taxonomía de términos clave específica para la Educación Matemática (Gómez y Cañadas, 2013) con la que establecimos los focos temáticos de interés de la producción documental analizada. Las variables del estudio son *nociones curriculares* y *temas matemáticos*.

Los resultados muestran que, en promedio, las nociones curriculares más abordadas entre 1986 y 2016 son *aprendizaje* y *aula*. Les siguen las *nociones de enseñanza*, *resolución de problemas*, *profesor*, *sistemas de representación* e *historia de los contenidos matemáticos*. La *fenomenología* se ha tratado de manera importante en los trabajos difundidos en este periodo de tiempo. Esta noción se destaca por encima de las nociones *de gestión curricular*, *alumno*, *sistema educativo*, *evaluación* y *centro educativo*. Desde el año 2001, se percibe aumento en el interés por cuestiones relacionadas con el profesor y el alumno. Hay una reducción significativa de trabajos asociados a *sistema educativo* desde el año 2000 y en *historia* de los contenidos desde 2010.

Las proporciones de los temas matemáticos no variaron de manera significativa entre 1986 y 2016, y ponen de manifiesto el interés por abordar cuestiones asociadas a Números, Geometría, Álgebra, Estadística y Probabilidad, y Cálculo. Hay un número reducido de trabajos relacionados con Medida y Ecuaciones Diferenciales. Números es el tema más tratado en *aprendizaje*, *resolución de problemas* y *sistemas de representación*, mientras que Geometría se trata con mayor importancia en *aula*, *enseñanza* e *historia* de los contenidos. Álgebra y Cálculo se abordan en iguales proporciones en todas las *nociones curriculares*. Se destaca la relevancia que las nociones de *aula* y *aprendizaje* tienen en todos los temas matemáticos, en especial en Geometría y Números, respectivamente.

Referencias

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2013). Development of a taxonomy for key terms in mathematics education and its use in a digital repository. Library Philosophy and Practice (e-journal).

Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, Á. M. y Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P. y Hidalgo-Ariza, M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, *5*(4), 163-184.

Castro, P., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2018). Treinta años de producción documental en España: Currículo y contenido matemático. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 617). Gijón: SEIEM.

EL USO DE FICHAS EN ACTIVIDADES DISEÑADAS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Worksheets in classroom designs by prospective preschool teachers

Codes, M.[a]

[a]Universidad de Huelva

En un curso de maestros de educación infantil, se trabajó a partir de la lectura de un cuento infantil con alto contenido matemático que no se revelaba obvio. Una de las tareas propuestas a los estudiantes consistió en el diseño una actividad que se complementara con la trama del cuento para profundizar en los contenidos matemáticos de la narración, indicando el enfoque metodológico y los recursos que se emplearían para llevarla a cabo en el aula. Con ella, se pretende que pongan en juego su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, para el que el modelo de conocimiento especializado del profesor MTSK asocia las categorías de (i) conocimiento de las teorías sobre enseñanza, (ii) conocimiento de recursos materiales y virtuales, y (iii) conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Montes, 2014). En las clases teóricas se trabajó el beneficio de una metodología de enseñanza basada en el juego, que propicia el desarrollo de habilidades matemáticas y brinda al niño oportunidades para construir su conocimiento con sentido (Kamii, 2014; Lera, 2007).

Los estudiantes estaban organizados en grupos de entre dos y seis individuos. En un primer análisis de las respuestas de los grupos, ha llamado la atención que en algo más de la mitad, 15 de un total de 26, los estudiantes hayan recurrido al empleo de las fichas tradicionales. La mayoría utilizaron la ficha en la propuesta de al menos una de las dos actividades que debían diseñar. Algunos grupos solo la emplearon cuando plantearon una actividad para evaluar o para atender a las necesidades de los niños que pudieran manifestar alguna dificultad.

Estas propuestas son menos atractivas y motivadoras que las basadas en juegos que promueven el desarrollo de actividades que tienen sentido para el niño. Nos preguntamos cómo influyen las creencias y concepciones de los EPM sobre el conocimiento que han gestado a lo largo de su vida como estudiantes, en relación a cómo enseñar matemáticas a niños de entre 3 y 6 años. Por otra parte, como formadores de maestros, debemos cuestionarnos cuál es nuestro papel en la construcción del conocimiento de los EPM en general, y en particular sobre la enseñanza de la matemática.

Referencias

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Kamii, C. (2014). Direct versus indirect teaching of number concepts for ages 4 to 6: The importance of thinking. *Young Children*, *69*(5), 72-77.

Lera, M. J. (2007). Calidad de la Educación Infantil: instrumentos de evaluación. *Revista de educación*, *343*, 301-323.

Codes, M. (2018). El uso de fichas en actividades diseñadas por estudiantes para maestro en educación infantil. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 618). Gijón: SEIEM.

LA ENSEÑANZA BASADA EN PROYECTOS EN MATEMÁTICAS Y CIENCIAS

Project based learning in mathematics and science

Delgado-Martín, L.[a] y Ruiz-Méndez, C.[a]

[a]Universidad de Salamanca

En el plan de estudios del Grado de Maestro de Primaria, se trabaja de forma separada los contenidos correspondientes a las asignaturas de Ciencias y Matemáticas, sin embargo, en el mundo educativo, la realidad nos dice que esta separación no es lo más deseable, ya que en la práctica laboral real, a veces es el mismo profesional el encargado de impartir ambas asignaturas, y debe coordinar los contenidos de las mismas. Las mayores afinidades, aparecen entre los contenidos de Física y Química y Matemáticas, materias que en el grado de maestro de la Universidad de Salamanca, corresponden a Ciencias de la Naturaleza II y IV y Matemáticas y su Didáctica I y II. Los profesores de estas materias, consideramos que para conseguir que nuestros alumnos integren conocimientos, vinculen ciencias y matemáticas y sean capaces de proponer proyectos para sus alumnos en los que estos deban resolver un trabajo desde diferentes puntos de vista, deberíamos nosotros mismos trabajar de forma más interdisciplinar y plantear en teoría, y en la práctica, una mayor coordinación de actividades, de contenidos que previamente hayamos trabajado en clase, en unas u otras asignaturas. De este modo conseguiremos mejores resultados académicos, un mayor aprendizaje significativo de nuestros alumnos, y no olvidando su futuro laboral y el mundo del siglo XXI en el que van a desarrollar su labor profesional, ayudarles a desarrollar sus habilidades de trabajo en equipo y de integración de todos los saberes, puestos al servicio de sus futuros alumnos. De acuerdo con esta idea, durante el curso 2017-18, los profesores responsables de estas asignaturas, planteamos una metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (de ahora en adelante ABP), en la que el alumnado realmente es el gestor, protagonista y ejecutor de su propio aprendizaje. En esta metodología, el aprendizaje de contenidos propiamente dichos, tiene igual importancia que las habilidades, actitudes y consecución de competencias.

Los alumnos deberán diseñar un proyecto, que a su vez debe ser factible de implementar en un aula de Primaria. Diseñarlo, supone enfrentarse a él como alumnos, y también como futuros maestros, su desarrollo, implementación, recursos, vinculación con los contenidos del curriculum oficial de matemáticas y ciencias, aunque somos consciente de que pueden aparecer otras materias. En este poster, presentaremos las contribuciones más relevantes que realizaron los alumnos, integradoras, en las que buscaron los porqués del aprendizaje, el sentido a lo que aprenden, vinculándolo a la realidad educativa. La enseñanza en los Grados de Maestro siempre debe tener esa doble vertiente: el aprendizaje importante en sí mismo, así como la reflexión como futuro docente, en cómo usar esos aprendizajes y ponerlos siempre al servicio de los alumnos.

Referencias

Domènech-Casal, J. (2017) Aprendizaje basado en proyectos y competencia científica. Experiencias y propuestas para el método de estudios de caso. Enseñanza de las ciencias, Núm. Extra (2017) , p. 5177-5184.

García-Varcálcel Muñoz-Repiso, A. y Basilotta Gómez-Pablos, V. (2017). Aprendizaje basado en proyectos (ABP): evaluación desde la perspectiva de alumnos de Educación Primaria. *Revista de Investigación Educativa, 35*(1), 113-131. doi: 10.6018/rie.35.1.246811

Delgado-Martín, L. y Ruiz-Méndez, C. (2018). La enseñanza basada en proyecto en matemáticas y ciencias. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 619). Gijón: SEIEM.

LAS MATEMÁTICAS DEL CAMBIO CLIMÁTICO: FORMACIÓN DE PROFESORES FUERA DE LAS AULAS

The mathematics of Climate Change: Training teachers out of classrooms

Delgado-Martín, L.[a], Sánchez-Puente, A.[a], Andrés-Sánchez, S.[a], Corrochano-Fernández, D.[a], Asensio-Sevilla, M. I.[a], Ballegeer A. M.[a], Sampedro-Gómez, J.[a], Almaraz-Menéndez, F. E.[a] y Ruiz-Méndez, C.[a]

[a]Universidad de Salamanca

El cambio climático es uno de los grandes desafíos del Planeta en la actualidad y las décadas próximas. La Ciencia nos ofrece perspectivas y soluciones para hacer frente al problema, pero consideramos que es la educación la clave para que la sociedad comience a reaccionar. Uno de los principales problemas que tiene la concienciación acerca del cambio climático es el hacer llegar a todos, independientemente de su formación, la base científica que sustenta todas las decisiones que debiéramos responder. La base de todas las ramas científicas que se ven implicadas son las matemáticas y estas se convierten en un eje vertebrador del proyecto que presentamos. Por su complejidad, supone un esfuerzo adicional adaptar sus contenidos para ser explicados a cualquier docente, independientemente de la etapa educativa en la que desarrolla su actividad y del país en el que se encuentre, para que conozca su importancia y las soluciones que ofrece al problema.

En base a esto, y para formar y adaptar los currículos científicos de primaria y secundaria tenemos el proyecto "Concienciación y capacitación en materia de cambio climático para profesores de Primaria y Secundaria", financiado por la Fundación Biodiversidad del Ministerio Agricultura y Pesca, Alimentación y Medio Ambiente. Con el objetivo de formar y crear conciencia de este tema central diseñamos y creamos un MOOC (Massive Online Open Course) acerca de la ciencia del cambio climático para profesores de primaria y secundaria. Desde una perspectiva de rigor científico y una narrativa positiva hemos diseñado este curso desde la Universidad de Salamanca. Esta institución cuenta con expertos científicos de primera línea que aportan el rigor científico del contenido, a la vez que expertos en educación avalan el buen diseño de los materiales. Así, los profesores podrán disponer de formación y material de calidad, actualizado y coherente con la LOMCE para su actividad docente habitual. Los MOOC son una interesante herramienta para lograr una audiencia global en español donde este tipo de materiales escasea y para experimentar las posibilidades y retos de las nuevas plataformas digitales. Siguiendo la filosofía de universalizar el conocimiento después de 800 años de ser fundada y a través del Servicio de Producción e Innovación Digital la Universidad de Salamanca pone a disposición de los centros de formación de profesorado y a todos los profesores de habla española este material de referencia.

Referencias

Delgado, L., Andrés, S., Corrochano, D., Asensio, M. I., Ballegeer, A. M., Sampedro, J. M., Almaraz, F.E. y Ruiz C. (2018) La formación del profesorado en materia de cambio climático. Diseño de un MOOC. En C. López Esteban (Ed.), *Innovar en las aulas Modelos y experiencias de innovación educativa en el Máster de Profesorado de Educación Secundaria, Bachillerato, Formación profesional y Enseñanza de Idiomas* (pp. 171-182). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Galindo Villardón, M. P., Vicente Galindo, M. P. y Sánchez García, A. B. (2017). Elementos del diseño pedagógico del MOOC "Estadística para investigadores". *AULA Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, *23*, 287-301. doi: 10.14201/aula20172

VV.AA. (2014) *Climate Change 2014. Intergovernmental panel on climate change IIPCC. WMO, UNEP*. Recuperado de https://www.ipcc.ch/report/ar5/syr/index_es.shtml

Delgado-Martín, L., Sánchez-Puente, A., Andrés-Sánchez, S., Corrochano-Fernández, D., Asensio-Sevilla, M. I., Ballegeer, A. M., Sampedro-Gómez, J., Almaraz-Menéndez, F. E. y Ruiz-Méndez, C. (2018). Las matemáticas del cambio climático: Formación de profesores fuera de las aulas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 620). Gijón: SEIEM.

USO DE VISUALIZACIÓN POR ESTUDIANTES DE ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA AL PROGRAMAR UN BEE-BOT

Use of visualization by gifted students when programming a Bee-bot

Diago, P. D.[a], Gutiérrez, Á.[a], Jaime, A.[a] y Yáñez, D. F.[b]

[a]Universitat de València, [b]Universidad Católica de Valencia

La atención específica a los estudiantes de alta capacidad matemática (acm) es crucial para lograr el máximo desarrollo de sus capacidades. Diversos estudios caracterizan habilidades matemáticas típicas de estos estudiantes, como organizar datos, generalizar, resolver problemas flexiblemente, transferir conocimientos adquiridos, desarrollar estrategias eficientes, etc. (Freiman, 2006). En especial, la resolución de problemas con uso de visualización ofrece un marco adecuado para desarrollar habilidades relacionadas con la matematización (Guillén, 2010) y las relaciones entre percepción visual y razonamiento matemático (Rivera, 2011).

El objetivo de esta investigación es identificar qué habilidades de visualización ponen en juego estudiantes de edades tempranas al resolver problemas en un entorno tecnológico *Bee-bot* y si los estudiantes de acm manifiestan mejor uso de esas habilidades que sus compañeros de capacidad media. Los problemas planteados consisten en planear recorridos del robot *Bee-bot*, el cual admite instrucciones de avance o retroceso de 1 paso y giros de 90º a derecha o izquierda. Los estudiantes usaban fichas con estas instrucciones para planificar la secuencia de pasos del recorrido. Después programaban el robot con esa secuencia y finalmente observaban el recorrido hecho por el robot, lo cual les permitía evaluar si su secuencia era correcta o en qué pasos fallaba. La toma de datos se realizó mediante grabación en video de las sesiones experimentales.

Mostramos un análisis exploratorio del uso de elementos de visualización por estudiantes de 1º y 2º de Primaria al resolver dichos problemas. No tuvieron dificultad con el avance del robot, salvo contar mal la cantidad de pasos de algún segmento del recorrido, pero sí las tuvieron con los giros. Tanto los estudiantes medios como los de acm experimentaron dificultades importantes al elegir la tarjeta de giro correspondiente al giro que habían imaginado y después al convertir dicha tarjeta en la pulsación del botón de giro del robot para programar el recorrido pensado. Observamos elementos de lenguaje gestual (movían la cabeza, hacían gestos con las manos o cambiaban de posición alrededor del tablero) para interpretar los giros con más facilidad al tomar decisiones, a pesar de lo cual cometían errores sistemáticos. Una diferencia significativa que observamos es la iniciativa de los estudiantes de acm por encontrar recorridos más cortos, es decir con el menor número de instrucciones, haciendo uso del movimiento de retroceso, que previamente no se les había enseñado.

Agradecimientos

Investigación financiada por EDU2017-84377-R (Mineco/Feder) y GVPROMETEO2016-143 (Gen. Valenciana).

Referencias

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.

Rivera, F. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. Dordrecht: Springer.

Diago, P. D., Gutiérrez, Á., Jaime, A. y Yáñez, D. F. (2018). Uso de visualización por estudiantes de alta capacidad matemática al programar un Bee-Bot. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 621). Gijón: SEIEM.

ACOTACIÓN COMPETENCIAL DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LOS ACTUALES GRADOS EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Competencial limits of mathematical training in the current Spanish Degrees in Business Administration and Management

Díaz, F. J.[a] y Marbán, J. M.[a]

[a]Universidad de Valladolid

La caracterización de competencias y perfiles profesionales constituye una línea de trabajo e investigación consolidada desde hace tiempo en otros ámbitos profesionales y académicos (Manso, 2000). Sin embargo, en el ámbito de la Administración y Dirección de Empresas, la búsqueda de una caracterización de la competencia matemática y su relación con las competencias específicas y transversales del perfil profesional es un campo de trabajo escasamente explorado. Desde la perspectiva de la *investigación curricular* (Clements, 2007), la creciente sensibilización por esta cuestión en el mundo académico y profesional relacionado con el ámbito económico-empresarial, ha generado algunas aproximaciones tendentes a, por un lado, analizar la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas en las universidades españolas y, por otro lado, identificar las conexiones existentes entre dicha formación matemática y la variada categorización de competencias (básicas, específicas, transversales) profesionales. En el proceso de diseño de dichos grados en las universidades españolas, las entonces novedosas declaraciones *competenciales* exigieron, por una parte, una profunda reflexión a la hora de caracterizar con precisión los perfiles profesionales objeto de la formación, y por otra, un posicionamiento claro en cuanto al papel otorgado al saber matemático incardinado en dichos perfiles. Pero, puesto que el principio del *carácter instrumental o de servicio* de la Matemática (Thompson, 1985) impera desde hace décadas en el campo de la Economía y de la Gestión de Empresas, ampliamente soportado en la hoy omnipresente *modelación económica*, surgen dos interrogantes: ¿ha sido el carácter instrumental o de servicio el preponderante a la hora de diseñar las *competencias* vinculadas a la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas? Si así fuese, el hecho de no haber establecido una sólida y explícita *conexión* con las *competencias profesionales*, ¿no supondría una lamentable *acotación competencial* de la formación matemática, con la consiguiente pérdida del potente enfoque formativo que la misma puede aportar en este ámbito? El objetivo del presente trabajo, desde la perspectiva de la *investigación curricular*, consiste en *identificar y analizar* las competencias profesionales que *no aparecen vinculadas* a la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas, con el fin de detectar si tales desconexiones, que *acotan el campo competencial* del saber matemático en dichos estudios, cercenan posibilidades potencialmente formativas del mismo.

Referencias

Clements, D. H. (2007). Curriculum Research: toward a framework for "Research-based Curricula". *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 1, 35-70.

Manso Martínez, J. M. (2000). ¿Qué enseñar en ciencias de la salud? Técnicas para definir competencias y perfiles profesionales (1a. parte). *Educación médica, 3*(2), 61-68.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 189-243.

Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2018). Acotación competencial de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 622). Gijón: SEIEM.

RESPUESTAS DE ALUMNADO DE SECUNDARIA A TAREAS DE ESTIMACIÓN NUMÉRICA Y REPRESENTACIONES GRÁFICAS

High school students' answers to numerical estimation tasks and graphical representations

Fariña, M.[a] y Bruno, A.[b]

[a]CPEIPS La Milagrosa, [b]Universidad de La Laguna

La estimación es un importante proceso matemático que implica razonamientos no rutinarios y requiere aplicar flexibilidad de pensamiento (Siegler y Booth, 2005). Realizar estimaciones numéricas a partir de un gráfico es un proceso que permite a los estudiantes conectar componentes de su conocimiento numérico (McIntosh, Reys, y Reys, 1992). La investigación sobre estimación numérica presenta resultados en su componente abstracta y en menor medida, se ha investigado con la estimación a partir de gráficos (Siegler y Booth, 2005; Sowder, 1992).

Se presentan resultados de un estudio sobre estimaciones numéricas que realizan los estudiantes a partir de datos extraídos de representaciones gráficas. El objetivo es analizar y valorar cómo se emplea el gráfico para apoyar los cálculos estimativos y para justificar sus repuestas. El estudio sigue una metodología cualitativa con entrevistas individuales realizadas a ocho estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Las entrevistas permitieron indagar en los razonamientos, en ellas se plantearon cinco cuestiones en las que debían hacer uso de gráficos: rectángulo (o barra), recta numérica y diagramas de sectores. Los conocimientos numéricos que se evaluaron fueron relativos a estimación de números y operaciones, sobre números decimales, fracciones y porcentajes.

Los resultados de las entrevistas indicaron que el alumnado recurre, principalmente, a la realización de operaciones y valora altamente la precisión de sus cálculos frente a las estimaciones basadas en el uso del gráfico. Se reflejó que la enseñanza recibida por los estudiantes evaluados les ha llevado a creer que los cálculos exactos son los válidos. El uso del gráfico para seguir sus razonamientos tiene una importancia secundaria, a pesar de que su uso les facilitaría la resolución en las tareas presentadas. Se hace necesario un tratamiento directo en el aula de las estrategias asociadas a las estimaciones en representaciones y al tiempo que dicho uso sea valorado por el profesorado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores". EDU2017-84276-R

Referencias

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-8.

Siegler, R. S. y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). New York: MacMillan Publishing Company.

Fariña, M. y Bruno, A. (2018). Respuestas de alumnado de secundaria a tareas de estimación numérica y representaciones gráficas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 623). Gijón: SEIEM.

MIDIENDO LA AUTOESTIMA EN CONTEXTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Measuring self-discipline in problem solving contexts

Marbán, J. M.[a] y Fernández-Gago, J.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Málaga

La investigación en educación matemática ha dedicado tradicionalmente una notable atención a la búsqueda de factores latentes que influyan en el rendimiento académico, junto con el estudio de sus múltiples y posibles interrelaciones para comprender mejor cómo se manifiesta dicha influencia. Así, algunos autores han tratado de analizar la relación entre actitudes y otros elementos afectivos, como la ansiedad, con el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, con la resolución de problemas matemáticos (Gamboa y Moreira-Mora, 2016; Hannula, 2012), sin que se hayan alcanzado datos concluyentes en términos causales, aunque sí grandes avances en el conocimiento de las interacciones entre dominios afectivo y cognitivo. Otros estudios, como los de Perry y McConney (2010), han focalizado su investigación en el análisis de factores tales como el nivel socioeconómico, las estrategias de enseñanza, la activación cognitiva, el clima de clase, la memorización, el control y las actitudes hacia las matemáticas.

Fuera del contexto de la educación matemática, resultan especialmente relevantes las aportaciones de las teorías socio-cognitivas y su incorporación a la comprensión de las características de los sujetos que influyen en su aprendizaje de constructos tales como la autorregulación, el autocontrol y la autodisciplina (Gong, Rai, Beck y Heffernan, 2009; Zimmerman y Kitsantas, 2014), siendo este último el que resulta objeto de este trabajo, entendida la autodisciplina en el sentido dado por Duckworth y Seligman (2005). Lamentablemente, esta idea de autodisciplina no atiende a la especificidad de la situación y la problemática propia del aprendizaje de las matemáticas, motivo por el cual este trabajo presenta, partiendo del mencionado antecedente conceptual y adaptando escalas ya existentes en dicho marco, una fase preliminar de diseño de instrumentos de medida en forma de escalas o cuestionarios que puedan dar cuenta de la *autodisciplina* en contextos propios de la resolución de problemas matemáticos.

Referencias

Duckworth, A. L. y Seligman, M. E. (2005). Self-discipline outdoes IQ in predicting academic performance of adolescents. *Psychological Science*, *16*(12), 939-944.

Gamboa, R. y Moreira-Mora, T. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 27-51.

Gong, Y., Rai, D., Beck, J. E. y Heffernan, N. T. (2009). Does Self-Discipline Impact Students' Knowledge and Learning? *International Working Group on Educational Data Mining*.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161.

Perry, L. B. y McConney, A. (2010). Does the SES of the school matter? An examination of socioeconomic status and student achievement using PISA 2003. *Teachers College Record*, *112*(4), 1137-1162.

Zimmerman, B. J. y Kitsantas, A. (2014). Comparing students' self-discipline and self-regulation measures and their prediction of academic achievement. *Contemporary Educational Psychology*, *39*(2), 145-155.

Marbán, J. M. y Fernández-Gago, J. (2018). Midiendo la autoestima en contextos de resolución de problemas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 624). Gijón: SEIEM.

PRIMEROS INDICIOS DE EXTENSIÓN DEL PLANO AL ESPACIO: APORTES DE JOHANN HUDDE Y PHILIPPE DE LA HIRE A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN 3 DIMENSIONES

First signs of extension of the plane to the space: Contributions of Johann Hudde and Philippe de La Hire to 3-dimensional analytical geometry

García, P. L.[a] y González-Astudillo, M. T.[a]

[a]Universidad de Salamanca

El estudio de curvas en el campo de la geometría es uno de los ejes del análisis de la evolución del concepto de función de varias variables hasta llegar al momento actual. El objetivo que persigue el presente trabajo es presentar una aproximación histórica sobre los primeros indicios de representaciones gráficas en el espacio a partir de la generalización de representaciones en el plano.

Para abordar las curvas asociadas a una ecuación algebraica Descartes (1596-1650), en su segundo libro, señala que su método podía extenderse del plano al espacio, siendo clave según Anfossi (2004) que “mencionó la geometría de tres dimensiones, pero nada escribió acerca de ello” (p. 25). Por ello la importancia del trabajo de traducción y divulgación del grupo de Van Schooten (1615-1660), pues a pesar de que Fermat (1607-1665) y Descartes provocaron una auténtica revolución en el campo de la Geometría, esta nueva disciplina, tal y como la concibieron resultaba desde un punto de vista didáctico poco eficaz y difícil de comprender.

De ese equipo de la Universidad de Leiden se debe citar a Hudde (1628-1704), quien presentó un anticipo del uso de coordenadas espaciales en sus trabajos sobre secciones planas de una superficie. A pesar de que no desarrolló una notación propia para 3 dimensiones destaca por lo novedoso de manipular curvas de grado superior a dos como secciones planas de una superficie (Boyer, 1967).

La Hire (1640-1719), de forma paralela, presentó importantes y significativos avances a esta nueva disciplina. Especial atención merece su obra publicada en 1679 titulada: “Nouveaux Éléments des Sections Coniques: Les Lieux Géométriques: Les Constructions ou Effections des equation” (Collette, 2000). En ella presenta el uso de métodos cartesianos para resolución de problemas geométricos y su traducción a ecuaciones, establece condiciones para un lugar geométrico, así como las ecuaciones para la construcción de esos lugares. Es precisamente mediante ese dominio excepcional de la geometría analítica que presenta el primer indicio de cómo se puede extrapolar esa condición a tres dimensiones. La Hire describe y define las ecuaciones de los lugares geométricos para el plano y describe, con su respectiva figura, la forma como debe abordarse para el caso de una superficie.

Estos son los dos primeros indicios de la etapa de transición que se produjo a finales del siglo XVII, entre la interpretación geométrica y su correspondiente traducción algebraica. Los matemáticos, a pesar de que no desarrollan una notación propia y sistemática para superficies, manifiestan la necesidad de utilizar construcciones auxiliares tridimensionales para realizar demostraciones planas.

Referencias

Anfossi, P. (2004). *Geometría Analítica.* (18a. Ed.). México: Editorial Progreso S. A. de C. V.

Boyer, C. B. (1965). Johann Hudde and space coordinates. *The Mathematics Teacher, 58*(1), 33-36.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II.* (4a. Ed.). México: Siglo XXI de España Editores.

García, P. L. y González-Astudillo, M. T. (2018). Primeros indicios de extensión del plano al espacio: Aportes de Johann Hudde y Philippe de la Hire a la geometría analítica en 3 dimensiones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 625). Gijón: SEIEM.

RAZONABILIDAD NUMÉRICA EN GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Numeric reasonability in statistical graphs

García-Alonso, I.[a] y Bruno, A.[a]

[a]Universidad de La Laguna

Comprender las gráficas estadísticas permite conseguir ciudadanos estadísticamente cultos. Interpretar estas gráficas requiere usar conocimiento tanto aritmético como no aritmético (Friel, Curcio y Bright, 2001) y tener un adecuado desarrollo de las componentes del sentido numérico (McIntosh, Reys, y Reys, 1992). Entre estas componentes numéricas destaca la capacidad para razonar si una repuesta a una tarea es adecuada (razonabilidad numérica), tanto desde un punto de vista matemático como, en su caso, contextual. Arteaga, Batanero, Ortiz y Contreras (2011) analizan el sentido numérico mostrado al analizar gráficos estadísticos futuros docentes de primaria destacando que no lograron visualizar las tendencias o los patrones numéricos en los datos.

En este trabajo analizamos la relación entre la interpretación de un gráfico estadístico y la razonabilidad numérica, por parte de estudiantes de secundaria. Para ello, se utilizan las categorías establecidas por Langrall y Mooney (2002) sobre la interpretación de datos mediante gráficos y los niveles de lecturas de gráficos indicados por Curcio (1987). El objetivo del estudio es analizar si estudiantes de tercero de Enseñanza Secundaria Obligatoria muestran una relación entre el nivel de interpretación/lectura de gráficas y su capacidad para justificar y dar razonabilidad numérica. Se ha seguido una metodología cuantitativa y cualitativa, analizando las respuestas a un cuestionario formado por dos tareas, que combinan aspectos relativos a la interpretación de datos gráficos y numéricos. En ellas se solicita la razonabilidad de los datos en el contexto.

Los estudiantes fueron capaces de predecir información a partir de los datos aportados en un solo gráfico, mientras que mostraron dificultades para integrar la información dada en dos gráficos. Muchos estudiantes presentan problemas para integrar la información gráfica y numérica. Por otro lado, las justificaciones que ofrecen suelen estar directamente relacionadas con sus vivencias y en menor medida utilizan argumentos numéricos para ser críticos con la información aportada.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores". EDU2017-84276-R

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Contreras, J.M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, *41*, 33-49.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 382-393

Friel S. N., Curcio, F. R. y Bright G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehensions and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2002). The development framework characterizing middle school students' statistical thinking. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town (South Africa). International Association for Statistical Education.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-8.

García-Alonso, I. y Bruno, A. (2018). Razonabilidad numérica en gráficos estadísticos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 626). Gijón: SEIEM.

ARTICULACIÓN DE TEORÍAS EN TORNO AL ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE CLASES: SBA Y EOS

Networking of theories from the analysis of a classroom episode: SBA and OSA

Giacomone, B.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Manolino, C.[c]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Universidad de Torino

El estudio en torno a la posibilidad de articulación de teorías en educación matemática, conocida internacionalmente como "Networking of Theories", es un tema que está ganando cada vez más interés en el área (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010). Muchas son las investigaciones que vienen siendo producto de esta línea de pensamiento, en las cuales no se trata de evitar las diferencias, sino de encontrar estrategias de conexión entre los diferentes marcos teóricos (e.g. Bosch, Gascón y Trigueros, 2017; Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013). Continuando con esta perspectiva, en este póster se presentan los primeros resultados de una investigación que tiene como objetivo estudiar las similitudes y complementariedades de dos marcos teóricos: el enfoque de Semiotic Bundle (SBA), descrito en Arzarello, Paola, Robutti y Sabena (2009) y el Enfoque Ontosemiótico (EOS), descrito en Godino, Batanero y Font (2007). Para lograr este objetivo partimos del análisis de un episodio de clase sobre un problema aritmético-algebraico usando herramientas teóricas de ambos marcos; los participantes son un grupo de estudiantes de educación primaria. La confrontación de ambas perspectivas muestra cómo el análisis conjunto conduce efectivamente a una visión más completa del fenómeno estudiado. El SBA permite enfocarse en el sistema de signos (según un significado inclusivo) producido por los sujetos que interactúan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que evoluciona con el tiempo. A su vez, enriquece la noción de lenguaje, entendida desde el EOS como objeto matemático ostensivo, insertándola en una óptica embodied y multimodal. El EOS permite enfocarse en el análisis a-priori de la tarea y en las prácticas matemáticas desarrolladas por los participantes, estudiando el fenómeno a partir de trayectorias didácticas. Además, la herramienta configuración de prácticas, objetos y procesos favorece la descripción detallada del conocimiento matemático puesto en juego, ya que permite identificar unidades de análisis basadas en los usos e intencionalidad de los sistemas de prácticas.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2016-748448-P (FEDER, AEI) y los grupos de investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España) y «S119-Investigación en Educación Matemática» (Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo).

Referencias

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories – An approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). New York: Springer.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 39-52.

Drijvers, P. Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 23-49.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Manolino, C. (2018). Articulación de teorías en torno al análisis de un episodio de clases: SBA y EOS. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 627). Gijón: SEIEM.

TRABAJANDO PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE UNA ETAPA MEDIANTE GRUPOS INTERACTIVOS CON ALUMNOS DE 2º DE ESO EN DESVENTAJA SOCIOEDUCATIVA

Working one-step arithmetic problems using interactive groups with 8th grade students in socio-educative disadvantage

Gómez-Benito, A. M.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]I.E.S. Vallecas-Magerit, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Los problemas aditivos de una etapa sencillos se introducen en la educación primaria. Involucran únicamente dos cantidades conocidas y una desconocida sometidas a relaciones de cambio, combinación, comparación o igualación (Puig y Cerdán, 1988). En secundaria estos problemas se abandonan en favor de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas y, posteriormente, de problemas algebraicos. Consideremos, sin embargo, un problema como este: "Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas canicas tiene Ana más que Luis?". A pesar de tratarse de un problema de comparación de una etapa, parece claro que tiene una mayor complejidad pues las cantidades conocidas resultan de la combinación de dos cantidades desconocidas y la comparación solicitada debe establecerse entre dos cantidades que no se conocen ni pueden conocerse. Pensamos que estos problemas resultan interesantes puesto que implican el manejo de cantidades desconocidas que no son necesarias para la resolución del problema pero que, aun así, juegan un papel importante en su planteamiento y resolución. Por ejemplo, utilizando notación simbólica, el problema anterior involucra la identidad $(y - z) = (x + y) - (x + z)$.

Sin embargo, pese a su interés, este tipo de problemas no se trabajan actualmente en el aula de manera sistemática. En este trabajo presentamos los elementos fundamentales del diseño de una propuesta didáctica sobre este tipo de problemas, así como algunos resultados obtenidos tras su implementación con alumnos de especial dificultad en 2º de ESO. La propuesta, de ocho sesiones de clase, se ha llevado a cabo durante el curso 2017-2018 en el IES Vallecas-Magerit, centro de especial dificultad de la Comunidad de Madrid con un 40% del alumnado clasificado como alumnado de compensatoria (2 años de desfase curricular y situación socio-cultural de riesgo). La metodología utilizada se basa principalmente en el uso de los grupos interactivos (Chocarro de Luis y Sáez de Jubera Ocón, 2016). Esta metodología ha sido ampliamente respaldada por diversos estudios (INCLUD-ED, 2011) que muestran que el aprendizaje dialógico (Aubert, Flecha, Garcái, Flecha y Racionero, 2010) y los grupos interactivos son actuaciones de éxito educativo que mejoran el aprendizaje y disminuyen la conflictividad. Tras la implementación de la propuesta se ha mostrado una mejora en el desempeño y en la motivación de los alumnos, no sólo ante este tipo de problemas, sino también en comparación con sus resultados en otros bloques de la asignatura.

Referencias

Aubert, A., Flecha, A., García, C. Flecha, R. y Racionero, S. (2010). *Aprendizaje Dialógico en la Sociedad de la Información. Barcelona*: Hipatia.

Chocarro de Luis, E. y Sáenz de Jubera Ocón, M. (2016). Grupos interactivos: estrategia para la mejora de la convivencia, la participación y el aprendizaje. *Revista Complutense de Educación*, *27*(2), 585-601.

INCLUD-ED. (2011). *Actuaciones de éxito en las escuelas europeas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Gómez-Benito, A. M. y Oller-Marcén, A. M. (2018). Trabajando problemas aritméticos de una etapa mediante grupos interactivos con alumnos de 2º de ESO en desventaja socioeducativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 628). Gijón: SEIEM.

ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS DE SUMA AVANZADAS A NIÑOS CON DIFICULTADES DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

Teaching advanced additive strategies to children with math difficulties

González, E. M.[a] y Polo-Blanco, I.[a]

[a]Universidad de Cantabria

La investigación sugiere que entre el 7 y el 12 por ciento de los estudiantes en edad escolar experimentan algún tipo de dificultad de aprendizaje en matemáticas. Estos estudiantes muestran con frecuencia dificultades para identificar información clave, para establecer relaciones entre conceptos generales y detalles, y para abordar estrategias efectivas en la resolución de problemas matemáticos. Desafortunadamente, es probable que los estudiantes con dificultades en matemáticas se queden aún más atrás durante su trayectoria escolar porque gran parte del aprendizaje de las matemáticas es acumulativo, con muchos de los nuevos conceptos construyéndose sobre los anteriores (Montague, 2007). Es por tanto crucial intervenir desde una edad temprana proporcionando instrucciones adaptadas a las necesidades de cada estudiante para ayudarles a mejorar su rendimiento matemático.

Se presenta un estudio con diseño de línea base múltiple y enfoque microgenético con el objetivo de ayudar a desarrollar estrategias informales de suma a tres estudiantes con dificultades de aprendizaje en el área de matemáticas: un alumno de 7 años con hipoacusia bilateral, una alumna de 7 años con un retraso motor y un alumno de 9 años con Trastorno Espectro Autista (TEA). Durante las sesiones de línea de base los tres alumnos mostraron estrategias de suma basadas en la representación y el conteo de todo. Se llevaron a cabo 9 sesiones de instrucción en las que se proporcionaron secuencias de enseñanza de la estrategia "sumar desde el mayor" mediante la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación. Se instruyó en dicha estrategia con apoyo de material, disminuyendo secuencialmente el número de sumandos representados. Durante la experiencia dos de los alumnos adquirieron y manifestaron de forma estable la estrategia y fueron capaces de trasladarla a problemas de varias etapas. El tercer alumno, diagnosticado con TEA, adquirió también de forma estable la estrategia, aunque tuvo dificultades en la fase de generalización a problemas de varias etapas los cuales resolvió mediante un conteo de todo. Además, en la secuencia de enseñanza de la estrategia a este alumno fue necesaria la utilización de lenguajes aumentativos en forma de pictogramas que se mostró efectiva y se mantuvo a lo largo de toda la instrucción.

Los resultados arrojan información sobre el proceso de aprendizaje de estrategias informales en niños con dificultades de aprendizaje, y en particular en alumnado TEA y sugieren pautas metodológicas que les ayuden a avanzar en el aprendizaje de estos y otros conceptos matemáticos.

Referencias

Montague, M. (2007). Self-regulation and mathematics instruction. *Learning Disabilities Research and Instruction*, *22*(1), 75-83.

González, E. M. y Polo-Blanco, I. (2018). Enseñanza de estrategias de suma avanzadas a niños con dificultades de aprendizaje en matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 629). Gijón: SEIEM.

ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN VARIAS ETAPAS

Analysis of the resolution methods on multi-stage arithmetic problems

González-Calero, J. A.[a], Martínez, S.[a] y Sotos, M. A.[a]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha

Este póster presenta parte de los resultados analizados en una investigación más amplia sobre problemas aritméticos compuestos (Rico et al., 1994) que se está llevando a cabo en la Universidad de Castilla-La Mancha. En concreto se pretende indagar sobre la competencia matemática en la resolución de este tipo de problemas y analizar los métodos de resolución que alumnos de 6º de primaria y Estudiantes para Maestros utilizan a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas.

En particular, se han planteado 4 tipos de problemas con una etapa comparativa tanto aditiva como multiplicativa y otra etapa de isomorfismo de medidas con partición o cuotición/agrupamiento (Puig, 1998). Así, los problemas deben ser resueltos mediante dos operaciones: una suma o resta y una división, obteniéndose los resultados mostrados en la siguiente tabla:

		% resolucionescorrectas	
Categoría	Ejemplo	Primaria N=29	EPM N=42
Comparación aditiva-partición (Resolución mediante resta y división)	"*Tengo 48 libros colocados en 2 estanterías. En una estantería hay 8 libros más que en la otra. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?"*	17,2%	28,6%
Comparación multiplicativa-partición (Resolución mediante suma y división)	*"Tengo 48 libros colocados en 2 estanterías. En una estantería hay el doble de libros que en la otra. ¿Cuántos libros hay en cada estantería?"*	13,8%	26,2%
Comparación aditiva-agrupamiento (Resolución mediante resta y división)	*"Una profesora tiene 10 chocolatinas y 25 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolatinas. ¿Cuántos alumnos son?"*	0,7%	1,2%
Comparación multiplicativa-agrupamiento (Resolución mediante suma y división)	*Tengo igual cantidad de monedas de 5 céntimos que de 1 céntimo y entre las dos tengo 90 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?"*	0%	0,5%

Los resultados confirman una falta de competencia matemática para la resolución de este tipo de problemas, sin embargo, los problemas cuya división es partitiva parecen tener, por parte de los alumnos, una lectura aritmética más natural que aquellos cuya división es por agrupamiento.

Además, entre las resoluciones correctas realizadas por los alumnos de primaria, alumnos que todavía no se han iniciado en el estudio del algebra, se observa una tendencia a utilizar principalmente el método de resolución prueba y error, aunque, sin embargo, se observan ciertas actuaciones muy interesantes que se apoyan en representaciones gráficas para su resolución.

Sin embargo, entre las resoluciones correctas realizadas por los estudiantes para maestros, se evidencia una gran disposición, en todos los casos, al uso de procedimientos algebraicos para su resolución.

Referencias

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Editorial Síntesis

Rico, L., Castro E. y Gonzalez E. (1994). Two-Step Addition Problems with duplicated semantic structure. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.IV, (pp. 121-128). University of Lisbon. Portugal.

González-Calero, J. A., Martínez, S. y Sotos, M. A. (2018). Análisis de los métodos de resolución en problemas aritméticos en varias etapas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 630). Gijón: SEIEM.

PROPUESTA DE USO DE TECNOLOGÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Problem solving with technology: A teachers training proposal

Hernández, A.[a], Perdomo-Díaz, J.[a] y Camacho-Machín, M.[a]

[a]Universidad de La Laguna

En este trabajo se muestran los resultados de una investigación sobre el uso de tecnología para la resolución de problemas en la formación de profesores. Se identifica un conjunto de *eventos* que serán el punto de partida para la definición de situaciones que promuevan el desarrollo de la comprensión matemática para la enseñanza en secundaria (Heid, Wilson, y Blume, 2015). Los eventos describen acontecimientos que pueden ocurrir durante la práctica docente, de los que se extraen distintos elementos matemáticos para la discusión.

En esta investigación participaron dieciocho estudiantes de una asignatura optativa de cuarto curso del grado en Matemáticas, en la que se realizó un Taller de Resolución de Problemas con Tecnología. En este Taller se propusieron cuatro actividades que integran el uso de la tecnología en la resolución de problemas y brindan oportunidades para que los participantes representen, exploren y examinen los problemas desde diversas aproximaciones, a fin de formular conjeturas y buscar argumentos (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Antes de realizarlas, los participantes tuvieron formación teórica y práctica sobre resolución de problemas, uso de GeoGebra y análisis de situaciones. Las actividades se realizaron en parejas, durante nueve sesiones de dos horas cada una.

El uso del GeoGebra en la resolución de problemas hizo emerger una amplia variedad de discusiones matemáticas entre los participantes: estudiantes e investigadores. En este póster se presentan los primeros resultados de la investigación, extraídos del análisis de las discusiones matemáticas de una de las parejas mientras realizaban una de las actividades propuestas.

Se observó que las discusiones entre los estudiantes son de naturaleza tecnológica o matemática, dependiendo de qué las haya promovido y se identificaron tres *eventos*: Trazar un ángulo, Triángulos de altura constante, Distancia desde la diagonal.

Con estos resultados, tenemos los elementos necesarios para formular situaciones para la formación de profesores en el uso de GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

Agradecimientos

Se agradece la financiación concedida a la ULL por la Consejería de Economía, Industria, Comercio y Conocimiento, cofinanciada en un 85% por el Fondo Social Europeo. Así como la recibida por el Plan Nacional del Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto EDU2017-84276-R

Referencias

Heid, M., Wilson, P. S. y Blume, G. W. (2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* United States of America: NCTM and IAP.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast, 10*(1&2), 279-302.

INTRODUCCIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Introducing computational thinking in the secondary curriculum

Jiménez-Gestal, C.[a], Jorge-Pozo, D.[b] y Murillo, J.[a]

[a]Universidad de La Rioja, [b]C.P.C. Escuelas Pías

Presentamos una propuesta de integración del pensamiento computacional en el currículo de secundaria. Según Wing (2006), el pensamiento computacional consiste en la resolución de problemas, diseño de sistemas y comprensión de la conducta humana haciendo uso de los conceptos fundamentales de la informática. La integración que proponemos implica trabajar el pensamiento computacional desde el primer curso de secundaria, pero desde la asignatura de matemáticas, ya que consideramos que tener pensamiento computacional afianzará los conocimientos adquiridos. Papert (1980) ya propuso la herramienta del Logo para trabajar la programación y adquirir de esta manera el control sobre la tecnología. En su libro Mindstorms decía que, al programar un ordenador, el niño adquiere un nivel de poder y control sobre la tecnología. En consonancia con esto Blinkstein (2013) propone que sean los niños quienes programen a las máquinas y no al revés. Consideramos muy interesante la posibilidad de incluir el pensamiento computacional en la asignatura actual de matemáticas. Como dice Valverde, Fernández-Sánchez y Garrido-Arroyo (2015), mediante la codificación se pueden construir aprendizajes significativos. Para nosotros será no solo la codificación o el escribir código sino el propio pensamiento computacional. El hecho de que un alumno sea capaz de escribir en seudocódigo o con sus propias palabras un programa que resuelva un problema o una situación real va a consolidar el aprendizaje del contenido trabajado.

Referencias

Blikstein, P. (2013). Seymour Papert's Legacy: Thinking about Learning, and Learning About Thinking. Recuperado de https://tltl.stanford.edu/content/seymour-papert-s-legacy-thinking-about-learning-and-learning-about-thinking

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Valverde-Berrocoso, J., Fernández-Sánchez, M. R. y Garrido-Arroyo, M. C. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED, Revista de Educación a Distancia. 46*(3).

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. It represents a universally applicable attitude and skill set everyone, not just computer scientists, would be eager to learn and use. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Jiménez-Gestal, C., Jorge-Pozo, D. y Murillo, J. (2018). Introducción del pensamiento computacional en el currículo de secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 632). Gijón: SEIEM.

IMPLEMENTACIÓN DE UNA APP EDUCATIVA

Implementation of an educational app

Lorenzo-Fernández, M. E.[a]

[a]Universidad de Oviedo

¿Cómo repercutiría la introducción de videojuegos educativos como herramienta de enseñanza y aprendizaje en las aulas? ¿Qué beneficios conllevaría? El objetivo principal es promover la reflexión acerca de la utilización de este recurso en la Educación Secundaria, partiendo de nuestra experiencia con la implementación de una app didáctica. Actualmente, a través de un proyecto de difusión de las matemáticas, estamos llevando a cabo diversas actividades dirigidas a alumnos de ESO entre las que se encuentra esta apuesta por el aprendizaje de las matemáticas a través de un formato tecnológico. Desde que hemos puesto en marcha esta iniciativa hemos tenido una muy buena acogida por parte de los centros educativos de nuestra área, que vuelven a visitarnos con nuevos alumnos curso tras curso.

La app cuenta con tres videojuegos diferentes que se presentan en tablets, específicamente diseñados para fomentar el aprendizaje activo en un formato atractivo para los estudiantes. En el primero de ellos se potencia el aprendizaje a través de la manipulación de conceptos de carácter geométrico, como la curvatura y la distancia recorrida según el ángulo de partida, así como la estimación de tiempos y distancias y la orientación espacial. Con este juego, los alumnos toman conciencia de la constante presencia de las matemáticas: la continua necesidad de estimar, medir o contabilizar en el ámbito cotidiano (estimar si llegan a tiempo de coger el autobús, calcular cuánto queda para el recreo,…). El segundo juego está basado en el conocido problema de las Torres de Hanoi. Con el fin de resolverlo, los alumnos deben encontrar heurísticas que solucionen el problema en el menor número de pasos necesarios, optimizando a su vez el tiempo de resolución. Ambas variables se reflejan en todo momento en sendos marcadores. Con respecto al tercer juego, tiene como base el teorema de los Cuatro Colores y también implica la elaboración por parte de los estudiantes de estrategias de resolución de problemas, al tratar de colorear los edificios de una ciudad según las indicaciones del mencionado teorema en el menor tiempo posible.

A partir del trabajo con los diferentes grupos de alumnos, hemos observado que a través de la experimentación con estas actividades manipulativas en formato tecnológico, los alumnos no solamente aprenden a aplicar distintas técnicas de resolución de problemas, sino que también potencian su agilidad mental, su memoria y el trabajo en equipo, al jugar las partidas compartiendo las tablets entre varios compañeros. Finalmente, hemos de mencionar el interés que despierta en los alumnos esta actividad interactiva en concreto, costándoles en numerosas ocasiones abandonarla sin haber adquirido la destreza suficiente para superar los récords que figuran en cada tablet, establecidos por alumnos de otros centros o por sus propios compañeros. Nuestras observaciones también ponen de manifiesto que el factor de la competitividad fomenta en buena medida el interés y la disposición por resolver los problemas planteados.

Referencias

Deulofeu, J. (2014). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes: teoría de juegos*. Villatuerta, España: RBA Coleccionables.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid, España: Síntesis.

Lorenzo-Fernández, M. E. (2018). Implementación de una app educativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 633). Gijón: SEIEM.

ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA REPERCUSIÓN DE SMARTICK EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Preliminary analysis of the impact of Smartick on Primary pre-service teachers' mathematical education

Marbán, J. M.[a], Arce, M.[a], Maroto, A.[a], Palop, B.[a], Novo, M. L.[a] y Conejo, L.[a]

[a]Universidad de Valladolid

En el ámbito de la investigación en educación matemática existe una preocupación compartida por la identificación, el diseño y el análisis de buenos modelos de desarrollo profesional docente. En el contexto de la formación inicial de maestros en las Facultades de Educación, suelen atenderse tanto las cuestiones relacionadas con el contenido matemático como las vinculadas al conocimiento didáctico del contenido, siguiendo algunos modelos de referencia como el modelo MKT de Ball, Thames y Phelps (2008), o el modelo MTSK de Carrillo, Escudero y Flores (2014), entre otros. Sin embargo, estudios como los de Boyd, Foster, Smith y Boyd (2014) o Giné de Lera y Deulofeu (2015), informes como TIMSS o PISA, y la propia realidad de las aulas apuntan a la necesidad de prestar más atención tanto al conocimiento común del contenido como a las cuestiones relacionadas con el dominio afectivo-matemático. Con este propósito en mente, se ha llevado a cabo una experiencia de innovación-investigación, en el contexto de la formación inicial de maestros de Primaria, basada en la incorporación de la herramienta Smartick para desarrollar actividades matemáticas complementarias a las del aula y como fuente para el análisis didáctico de tareas, en el marco del Proyecto de Innovación Docente (PID) *El uso de Smartick en la formación matemática de "Smart-teachers"*. Los objetivos perseguidos con esta incorporación son el afianzamiento de conocimientos básicos, el acercamiento de la realidad curricular de la etapa de Educación Primaria y la mejora de aspectos afectivos esenciales, tales como el autoconcepto y la ansiedad matemática.

Para analizar la posible repercusión del uso de Smartick, se recogieron datos de naturaleza cuantitativa (pruebas competenciales y escalas afectivo-emocionales matemáticas) y cualitativa (portafolios de estudiantes, entrevistas con estudiantes, aportaciones en foros en línea). Los primeros resultados del análisis muestran avances positivos tanto en el conocimiento común del contenido como en el conocimiento didáctico del mismo, si bien en el caso del dominio afectivo solo parecen apreciarse mejoras en ciertos perfiles de estudiantes, cuestión esta aún en estudio y sobre la que se presentarán más detalles en el póster.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Boyd, W., Foster, A., Smith, J. y Boyd, W. E. (2014). Feeling Good about Teaching Mathematics: Addressing Anxiety amongst Pre-Service Teachers. *Creative Education, 5*, 207-217.

Carrillo, J., Escudero, D. I. y Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1*, 16-26.

Giné de Lera, C. y Deulofeu, J. (2015). Creencias de profesores y estudiantes de profesor de Educación Primaria y Secundaria sobre los problemas de matemáticas. *REDIMAT, 4*(2), 161-178.

Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A, Palop, B., Novo, M. L. y Conejo, L. (2018). Análisis preliminar de la repercusión de Smartick en la educación matemática de futuros maestros de Primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 634). Gijón: SEIEM.

SESGOS RELACIONADOS CON LA HEURÍSTICA DE LA REPRESENTATIVIDAD

Biases related to the representativeness heuristic

Martínez, F.[a], Molina-Portillo, E.[a], Ruz, F.[a], Peña, L.[a] y Contreras, J. M.[a]

[a]Universidad de Granada

Un sesgo es aquella tendencia errónea del ser humano que se manifiesta cuando se interpretan los datos (por ejemplo, cuando se piensa que una secuencia que no siga un patrón determinado de caras y cruces en el lanzamiento de una moneda es más probable que otra que alterne caras y cruces).

Si bien no hay una definición formal para la palabra *heurística*, Batanero et al. (1994) indican que este término se emplea para referirse a los procesos cognitivos que se utilizan para reducir la complejidad de un problema durante el proceso de resolución. Es decir, cuando al resolver un problema se elige una forma de actuar con la idea de simplificar su dificultad. Como indican Contreras et al. (2017) un gráfico sesgado o mal construido puede provocar que la información no llegue de forma correcta al ciudadano.

Algunos sesgos relacionados con la heurística de la representatividad son los siguientes:

La insensibilidad a la probabilidad previa a los resultados se produce cuando no se tiene en cuenta la información general de un evento, guiándose únicamente por la información específica de ese caso en particular. La mente tiende a ignorar la información general, que recibe anteriormente, y a focalizarse sólo en la que percibe más tarde.

La *insensibilidad al tamaño de la muestra* se produce cuando no se tiene en cuenta el tamaño de la muestra a la hora de realizar un experimento aleatorio. Cavallaro y Anaya (2004) realizan un experimento relacionado con la insensibilidad al tamaño de la muestra a 30 estudiantes. Sus resultados muestran que, a pesar de que la formación es importante, tras el paso del tiempo los estudiantes vuelven de nuevo a sus intuiciones erróneas.

La *ilusión de validez* se manifiesta cuando hay una confianza sin justificación al hacer una predicción, observándose que se ajustan bien el resultado predicho y la información inicial. Arias (2010) indica que la ilusión de validez es “la confianza injustificada en una predicción en base exclusivamente a la correspondencia perfecta entre un resultado predicho y la información recibida, con poca o ninguna consideración de los factores que limitan la exactitud predictiva”.

En este trabajo se evalúan diferentes sesgos relacionados con la heurística de la representatividad y se establecen relaciones entre ellos, presentando los aspectos necesarios a tratar en la formación del alumno de Secundaria para alcanzar una cultura estadística suficiente para desenvolverse con garantías en la sociedad.

Referencias

Arias, E. R. (2010). Juicios e inferencias clínicas. Órgano de Difusión de la Psicología Científica. *Perspectivas psicológicas, 6-7*, 207-216.

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Cavallaro, M. I. y Anaya, M. (2004). Intuitive Reasoning in Early and Advanced Mathematics for Engineers. En 12th SEFI Maths Working Group Seminar (pp. 54-60). Seminario llevado a cabo en la Universidad de Tecnología. Viena, Austria.

Martínez, F., Molina-Portillo, E., Ruz, F., Peña, L. y Contreras, J. M. (2018). Sesgos relacionados con la heurística de la representatividad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 635). Gijón: SEIEM.

FALACIAS RELACIONADAS CON LA HEURÍSTICA DE LA REPRESENTATIVIDAD

Fallacies related to the representativeness heuristic

Martínez, F.[a], Ruz, F.[a], Molina-Portillo, E.[a], Peña, L.[a] y Contreras, J. M.[a]

[a]Universidad de Granada

Hoy en día, la población recibe una gran cantidad de información desde diversas fuentes que a menudo no es interpretada correctamente por los individuos, a pesar de que las personas que las reciben no son conscientes de ello. Éstos suelen incurrir en determinadas falacias relacionadas con la heurística de la representatividad. La heurística de la representatividad se describe como la evaluación de la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene (Kahneman y Tversky, 1972).

Autores como Arias (2000), indica que una falacia es “una mentira disfrazada de verdad”, mientras que Kahneman y Frederick (2002) indican que un juicio de razonamiento es denominado falacia cuando una gran parte de la gente que la comete, después de una explicación razonable, está dispuesta a aceptar los siguientes puntos: i) No es un error trivial, por lo que se repetiría en razonamientos similares. ii) El error es conceptual, no meramente verbal o técnico. iii) Las personas que lo han cometido deberían haber sabido la respuesta o un procedimiento para encontrarla.

Algunas falacias relacionadas con la heurística de la representatividad son las siguientes:

La *falacia de la base extensa* consiste en impresionar con la gravedad de la situación al hablar de un fenómeno raro que afecte a una base amplia de la población, utilizando sólo parte de la información. Se intenta impresionar al lector utilizando un número absoluto en un caso en que si se utilizase un porcentaje la noticia no tendría tanto impacto.

La *falacia de las tasas base* se produce cuando el receptor ignora la información general en un evento, guiándose únicamente por la información específica. Al igual que en la falacia de la base extensa se omite una parte de la información que es importante para llegar a comprender la noticia.

La *falacia de las comparaciones en valor absoluto* también trata de impresionar al lector, en este caso, utilizando valores absolutos en vez de tasas al comparar dos poblaciones mostrando sólo parte de la información. Esta falacia es bastante común en los medios de comunicación y en la vida cotidiana de los ciudadanos.

En este trabajo se evalúan diferentes falacias relacionadas con la heurística de la representatividad y se establecen relaciones entre ellas, presentando los aspectos necesarios a tratar en la formación del alumno de secundaria para alcanzar una cultura estadística suficiente para desenvolverse con garantías en la sociedad.

Referencias

Arias, F. (2000). ¿Hay dos modelos (teórico-descriptivo y técnico-prescriptivo) del proceso administrativo? *Contaduría y Administración, 196*, 5-14.

Kahneman, D. y Frederick, S. (2002). Representativeness revisited: Attribute substitution in intuitive judgment. En T. Gilovich, D. Griffin y D. Kahneman (Eds.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (pp. 49-81). Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology, 3*(3), 430-454.

Martínez, F., Ruz, F., Molina-Portillo, E., Peña, L. y Contreras, J. M. (2018). Falacias relacionadas con la heurística de la representatividad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 636). Gijón: SEIEM.

EL PROCESO DE GESTIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA FORMULADO EN UN CONTEXTO DE INCERTIDUMBRE EN UNA CLASE DE INFANTIL (5-6 AÑOS)

The process of monitoring of solving a problem formulated in an uncertainty context in a 5-6-old kindergarten class

Martínez, M. L.[a], Huerta, P.[b] y Andrés, L.[a]

[a]Florida Universitària, [b]Universitat de València.

Se sostiene que para el siglo XXI la sociedad debería estar suficientemente alfabetizada en Estadística, de manera que la ciudadanía dispusiera de un pensamiento libre y crítico que le permitiera tratar con la gran cantidad de información disponible en forma de datos, y que esta alfabetización debería comenzar ya en edades tempranas (Leavy y Hourigan, 2018). A pesar de las limitaciones que tradicionalmente se han atribuido al razonamiento probabilístico en el alumnado más joven, resultados de investigaciones actuales proporcionan algunas evidencias que podrían revertir estas limitaciones, sugiriendo que los conceptos de probabilidad deberían introducirse ya desde la Educación Infantil, para lo cual la enseñanza debería ser consciente de cuáles son las estrategias intuitivas y los modelos cognitivos de los estudiantes relacionados con la probabilidad y el sentido numérico (Mousoulides y English, 2009).

En consonancia con la línea anterior, hemos diseñado un experimento piloto de enseñanza en una clase natural, con niños de 5-6 años, consistente en la resolución de un problema formulado en un contexto de incertidumbre, con el fin de explorar qué experiencias adquieren los niños y niñas en este contexto y qué gestión hace la maestra del proceso. El diseño y la implementación del experimento pueden verse en Martínez y Huerta (2015). En este trabajo mostramos el proceso de gestión llevado a cabo por la maestra en el experimento piloto, junto con las dificultades que este proceso conlleva, en dos de las tres fases del mismo: la lectura del problema a la clase (fase 1) y la puesta en común de las experiencias (fase 3) que cada alumno había tenido con la simulación del mismo (fase 2).

La clase fue registrada en video y transcrita para su posterior análisis. Como consecuencia de este surgieron algunas preguntas sobre el proceso de gestión: ¿Influyen las intuiciones y conocimientos previos de la maestra en el proceso de resolución del problema?, ¿cómo traduce el enunciado del problema al lenguaje de los niños de 5-6 años en la fase 1?, ¿cómo gestiona el proceso de puesta en común de las resoluciones individuales del problema en la fase 2?, ¿cómo interpreta las respuestas dadas por los niños a las preguntas que les formula? Con posterioridad, en una entrevista semiestructurada, grabada en audio, tratamos de confirmar nuestras conjeturas iniciales sobre las respuestas iniciales a las preguntas formuladas. Los resultados se mostrarán en el póster.

Referencias

Leavy, A. y Hourigan, M. (2018). The role of perceptual similarity, context, and situation when selecting attributes: consideration made by 5-6-olds in data modeling environments. *Educational Studies in Mathematics*, 97: 163-183. doi: 10.1007/s106489-017-9791-2

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2015). Diseño e implementación de una situación de incertidumbre en una clase de educación infantil. *Edma0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4*(1), 24-36.

Mousoulides, N. G. y English, L. D. (2009). Kindergarten students' understanding of probability concepts. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 137-144. Thessaloniki, Greece: PME.

Martínez, M. L., Huerta, P. y Andrés, L. (2018). El proceso de gestión de la resolución de un problema formulado en un contexto de incertidumbre en una clase de infantil (5-6 años). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 637). Gijón: SEIEM.

DIFICULTADES DE LOS MAESTROS Y PROFESORES EN FORMACIÓN PARA IDENTIFICAR HIPÓTESIS Y CONJETURAS EN UNA TAREA DE PROBABILIDAD

Pre-service mathematics school teachers' difficulties in identifying hypothesis and conjectures in a probability task

Martínez, M. L.[a], Huerta, P.[b] y González, E.[a]

[a]Florida Universitària, [b]Universitat de València.

El currículum vigente para la educación primaria y secundaria propone, en la mayoría de las áreas de conocimiento, que los estudiantes sean capaces de formular y utilizar hipótesis y conjeturas en sus razonamientos. En particular, en el áreas de matemáticas y, más concretamente, en los bloques de contenidos "procesos, métodos y actitudes" y en "probabilidad y estadística" (Decretos 126/2014 1105/2014 del Ministerio de Educación y Ciencia, 2014). Es por esto que, con el fin de que su enseñanza sea fructífera, parece necesario explorar hasta qué punto los maestros y profesores en formación son capaces de formular y utilizar hipótesis y conjeturas en sus razonamientos en tareas que impliquen la probabilidad y en la resolución de problemas (Huerta, 2018).

Los términos hipótesis y conjeturas suelen usarse como sinónimos. Pero, este es solamente uno de los muchos sentidos en los que se pueden usar (Ferrater Mora, 1965). En las matemáticas formales pueden distinguirse las hipótesis de la conjetura y forman parte claramente de lo que entendemos por actividad matemática (Polya, 1966; Lakatos, 1986), aunque no así en las ciencias experimentales en las que las conjeturas son las hipótesis que se someten a un análisis experimental (Bunge, 2013). La probabilidad puede ubicarse en ambas ciencias, por lo que muchas veces comparte significados con ambas.

En este trabajo mostramos los resultados parciales obtenidos en una investigación más amplia que pretende observar el papel que tiene las nociones de hipótesis y conjetura en el razonamiento probabilístico de los futuros maestros y profesores. En particular, en este póster, mostramos, de una parte, cuál es el significado que mayoritariamente comparten maestros y profesores en formación sobre las citadas nociones en un test que combina la elección múltiple y la respuesta abierta y, de otra, cómo los profesores en formación tienen dificultades en identificar y diferenciar las hipótesis y las conjeturas en una tarea escolar con la que pretenden introducir elementos del razonamiento probabilístico en la asignación de probabilidades en una situación aleatoria que, por hipótesis, es considerada equiprobable.

Referencias

Bunge, M. (2013). *La ciencia. Su método y su filosofía*. Pamplona: Laetoli.

Ferrater Mora, J (1965). *Diccionario de Filosofía*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Huerta, M. P. (2018). Preparing teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics*, ICME-13 Monographs (pp. 293-311).

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014. BOE de 01 de enero de 2015. Madrid.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 1105/2014. BOE de 01 de enero de 2015. Madrid

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Martínez, M. L., Huerta, P. y González, E. (2018). Dificultades de los maestros y profesores en formación para identificar hipótesis y conjeturas en una tarea de probabilidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 638). Gijón: SEIEM.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ANDALUCÍA

Bibliographic references in the mathematics training of primary school teachers in Andalusia

Maz-Machado, A.[a], Argudo, C.[a], Madrid, M. J.[a], Gutiérrez-Rubio, D.[a], Jiménez-Fanjul, N.[a] y León-Mantero, C.[a]

[a]Universidad de Córdoba

Durante la formación del profesorado de Educación Primaria, los alumnos reciben conocimientos e información específica sobre las matemáticas y su enseñanza. Con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior y la desaparición de las asignaturas troncales, cada universidad es autónoma para impartir los contenidos que considere adecuados. Esto hace que no haya uniformidad en la formación que reciben los futuros maestros. Una vía para tener cierta idea de qué se les enseña es el análisis de las guías docentes, dado que estas son públicas y brindan toda la información oficial de cada asignatura. El objetivo es identificar cuáles son las referencias bibliográficas sobre las que se sustenta la formación matemática del profesorado de Educación Primaria en Andalucía.

Para realizar el estudio, se siguió un proceso de estandarización de los nombres de los autores y de las referencias porque, para cada asignatura, se utilizan formatos distintos incluso en aquellas que pertenecen a la misma universidad, tal como se había detectado en investigaciones previas para el Grado de Educación Infantil (Madrid, Jiménez-Fanjul y Maz-Machado, 2016). La información se volcó en una base de datos ad hoc y se realizaron conteos. En las 8 universidades andaluzas que imparten el Grado de Educación Primaria, se imparten un total de 29 asignaturas abordan el contenido matemático o de didáctica de las matemáticas. En total se contabilizaron 594 referencias bibliográficas. Se hallaron referencias, fechadas entre los años 1945 hasta 2016, estando publicadas la mayoría de ellas entre 1985 y 2011. En 5 guías docentes se hallaron referencias anteriores a 1974 (2,68%), mientras que solo el 10,61% de las referencias son posteriores al año 2010. La más antigua es de Polya, G. (1965). *Cómo resolver problemas*. México DF: Trillas (publicación original *How to solve it*, Polya, G. 1945). Las referencias más recientes son: Ramos, E. R. (2016). *Estadística para todos*. Ediciones Pirámide; y Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M. Escudero, D. y Flores, E. (Eds.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Madrid: Paraninfo. En general, puede decirse que las referencias son antiguas, con una media cercana a los 20 años.

Los documentos más referenciados en las guías docentes de asignaturas de matemáticas para el Grado de Educación Primaria son: Castro, E. (Eds.) (2001). *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*. Síntesis: Madrid; Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestro*s. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Referencias

Madrid, M. J., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2016). Bibliografía usada en la formación matemática del profesorado de infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 611). Málaga: SEIEM.

Maz-Machado, A., Argudo, C., Madrid, M. J., Gutiérrez-Rubio, D., Jiménez-Fanjul, N. y León-Mantero, C. (2018). Referencias bibliográficas en la formación matemática del profesorado de educación primaria en Andalucía. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 639). Gijón: SEIEM.

VALORACIÓN DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS PROFESIONALES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INFANTIL

Assessment of teachers in training in professional skill development regarding math teaching in pre-primary education

Maz-Machado, A.[a], Jiménez-Fanjul, N.[a], León-Mantero, C.[a], Gutiérrez-Rubio, D.[a] y Madrid, M. J.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

El conocimiento que tienen los estudiantes para profesor sobre la enseñanza, está altamente influenciado por sus propias experiencias de aprendizaje adquiridas durante su etapa como alumnos de educación primaria y secundaria (Comeaux, 1991; Sim, 2006); de ahí la importancia de conocer no solo los aspectos teóricos relacionadas con el sistema educativo y la enseñanza sino también de brindar a los futuros maestros actividades académicamente dirigidas que les permitan tener distintos tipos de experiencias con los niños. Enmarcada en esta idea, se empezó a realizar un Aula experimental de Educación Infantil (AEEI), denominada coloquialmente "*La casita*", dentro la Facultad de Ciencias de la Educación, que cuenta con la vinculación de diferentes áreas, entre ellas, el Área de Didáctica de la Matemática la cual participa en el diseño y ejecución de actividades con los futuros maestros dentro de la asignatura Desarrollo del pensamiento matemático (DPM). La preparación del Aula "La casita" consta de varias fases: (I) planificación de varios talleres para alumnado de infantil; (II) ejecución de los talleres previamente planificados durante la visita de niños de infantil de centros educativos, siendo esta intervención supervisada por el profesorado involucrado y por los maestros visitantes; (III) evaluación de la intervención.

Para recabar la información sobre la percepción de los futuros maestros de educación infantil se utilizó un cuestionario tipo escala Likert ya validado (Cañizares, Gallego y González, 2014) que recoge, entre otras, información relativa a las competencias profesionales del título. La muestra constó de 50 alumnos, de primer curso, de la asignatura DPM del curso 2016/2017 (45 mujeres y 5 hombres).

Las puntuaciones aportadas por los estudiantes señalan una media de 4,39 en su percepción global del desarrollo de las capacidades docentes. Las actuaciones mejor valoradas son: "observar a los niños y niñas" (media=4,68) y "plantear actividades creativas y motivadoras" (media=4,64). La actuación que obtuvo la valoración más baja es "conocer el currículum de Educación Infantil" (media=3,76), indicando que se precisa hacer un mayor énfasis en el conocimiento de los aspectos curriculares asociados a la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil. Se encontró que el 89,77% de los estudiantes tiene una actitud muy positiva a nivel global sobre la valoración del desarrollo de competencias profesionales mediado por el Aula "La Casita", mientras que el 9,45% lo valoran como normal y solo el 0,71% tiene una actitud muy desfavorable.

Referencias

Cañizares, A. B., Gallego, R. y González, I. (2014). La formación a través de la práctica profesional: el aula experimental de Educación Infantil de la Universidad de Córdoba. *Innovación educativa*, *24*, 273-288.

Comeaux M. (1991). But is it teaching? The use of collaborative learning in teacher education. En: B. Tabachnick y K. Zeichner (Eds.), *Issues and Practices in Inquiry Oriented Teacher Education* (pp. 151-165). London: Falmer.

Sim, C. (2006). Preparing for professional experiences – Incorporating pre-services teachers as 'communities of practice. *Teaching and Teacher Education*, *22*, 77-83. doi: 10.1016/j.tate.2005.07.006

Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Madrid, M. J. (2018). Valoración del profesorado en formación del desarrollo de competencias profesionales para la enseñanza de las matemáticas en infantil. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 640). Gijón: SEIEM.

EVALUACIÓN DE LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS POR FUTUROS MAESTROS MEDIANTE LA IDENTIFICACIÓN DE FUNCIONES SEMIÓTICAS CRÍTICAS

Evaluation of prospective school teachers' interpretation of statistical graphs by identifying critical semiotic functions

Molina-Portillo, E.[a], López-Martín, M. M.[a], Burgos, M.[a], Contreras, J. M.[a] y Godino, J. D.[a]

[a]Universidad de Granada

La interpretación de gráficos estadísticos, y en particular, de aquellos presentes en los medios de comunicación, forma parte de la cultura estadística que cualquier ciudadano debe disponer para poder desenvolverse plenamente en la sociedad actual. Entre los autores que han estudiado los errores y dificultades presentes en la interpretación de gráficos estadísticos, Curcio (1989) concluye que las mayores dificultades se encuentran en la consecución de los conocimientos matemáticos y habilidades estadísticas fundamentales para tal fin.

En este trabajo se analizan los conocimientos matemáticos como parte de la cultura estadística en 171 futuros maestros de Educación Primaria mediante una herramienta de análisis proporcionada por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2017), concretamente la noción de *función semiótica crítica*. Mediante la identificación de las funciones semióticas críticas apropiadas se determinan los conocimientos y competencias matemáticas esenciales involucradas a la hora de analizar el gráfico estadístico como un objeto matemático y estudiar los elementos que lo componen.

Los resultados evidencian que los futuros maestros presentan ciertas carencias en la identificación de algunos indicadores estadísticos en el gráfico, así como en la búsqueda de una conexión matemática entre los estadísticos de resumen, las gráficas o tablas y los datos sobre los que se basan. Estos resultados ponen en relieve la necesidad de reorientar los programas de formación para garantizar la adecuada cultura estadística en aquellas personas que, en su futura práctica docente, serán los responsables de formar a los ciudadanos de la sociedad de la información.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Granada: CIVEOS, 2017. p. 1-20.

Molina-Portillo, E., López-Martín, M. M., Burgos, M., Contreras, J. M. y Godino, J. D. (2018). Evaluación de la interpretación de gráficos estadísticos por futuros maestros mediante la identificación de funciones semióticas críticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 641). Gijón: SEIEM.

EFECTO DE UN PROBLEMA PROBABILÍSTICO IRRESOLUBLE

Effect of an irresoluble probabilistic problem

Molina-Portillo, E.[a], Ruz, F.[a], Álvarez-Arroyo, R.[a], Martínez, F.[a] y Contreras, J. M.[a]

[a]Universidad de Granada

Los problemas irresolubles permiten generar conocimiento matemático desde su irresolubilidad, ya que históricamente la matemática se ha basado en ellos para evolucionar a través del tiempo en busca de soluciones a éstos (Díaz, 2008). En particular, los problemas irresolubles permiten encontrar errores de razonamiento, conceptuales o procedimentales, asociados a ciertas características específicas del tipo de problema. Es por ello, que son una buena herramienta para evaluar las concepciones incorrectas.

La resolución de problemas, sobre todo en etapas de formación del estudiante, implica solución y unicidad. Como señala Jiménez (2012) las creencias de que "todo problema tiene una solución" o "hay una única solución posible" son ideas básicas para los estudiantes que cursan asignaturas de matemáticas. Incluso tienen más adherencia en ellos que otras ideas preconcebidas como "siempre deben realizarse cálculos" o "todos los datos numéricos deben ser empleados". En el mismo sentido, Verschaffel, Corte y Borghart (1997) en una evaluación de futuros profesores de primaria, demostraron que se prioriza la ejecución de los cálculos, aun cuando las respuestas no tengan sentido.

En este trabajo analizamos los sesgos probabilísticos ante un problema irresoluble que fue incluido en una prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años, en una muestra de 90 futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato.

Los resultados muestran como el problema en sí, dado su tipología, afecta al razonamiento de los futuros profesores, ya que no están acostumbrados a encontrarse problemas que no tengan solución en su quehacer diario. Los resultados inciden en la existencia de sesgos probabilísticos implícitos en la mayoría de los estudiantes, aunque tengan una formación suficiente para identificar que el problema es irresoluble, afectando principalmente a la identificación de las probabilidades iniciales de la tarea, y a algunos sesgos clásicos de razonamiento probabilísticos tales como la confusión entre tipos de probabilidades (simples, compuestas y condicionadas), la falacia de la condicional transpuesta, confusión entre dependencia e independencia y errores en la formulación utilizada.

Referencias

Díaz, A. (2008). La búsqueda de solución a problemas irresolubles. Enfoque de argumentación. *Revista de Enseñanza Universitaria, 31*, 17-25.

Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de problemas matemáticos un estudio sobre las dificultades de los niños en la resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación, 24*(3), 351-362.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 339-359.

Molina-Portillo, E., Ruz, F. Martínez, F., Álvarez-Arroyo, R., Martínez, F. y Contreras, J. M. (2018). Efecto de un problema probabilístico irresoluble. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 642). Gijón: SEIEM.

LOS SIGNIFICADOS COMO COMPONENTE FUNDAMENTAL DE UN MODELO MATEMÁTICO: UN ANÁLISIS EXPLORATORIO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Meanings as an essential part of a mathematical model: an exploratory analysis in secondary education

Montejo-Gámez, J.[a] y Amador-Saelices, M. V.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Colegio Legamar

Uno de los objetivos prioritarios de la educación obligatoria es el desarrollo de la competencia matemática de los ciudadanos del futuro. Existe un amplio debate entre investigadores, docentes e instituciones sobre cómo debe plantearse las tareas de instrucción para el desarrollo de esta competencia, aunque hay consenso en que debe incluirse la resolución de problemas contextualizados. Esta situación lleva a considerar la modelización como objeto de investigación en educación matemática con el fin de dar herramientas docentes y de evaluación al profesorado.

En las últimas décadas se ha desarrollado una extensa literatura obre el aprendizaje y la enseñanza de la modelización desde enfoques diversos, que dan relevancia al proceso de creación de un modelo (Borromeo-Ferri, 2006), a las destrezas que se desarrollan durante dicho proceso (Niss, y Højgaard, 2011) y al modelo en sí mismo. Este último enfoque del análisis de los modelos creados puede ser un instrumento de evaluación idónea para el profesorado, lo que lleva a la cuestión sobre qué elementos intervienen en un modelo matemático. En física e ingeniería se consideran tres: sistema (contexto), cuestión (problema) y objetos matemáticos (Velten, 2009). Estas dimensiones resultan insuficientes en educación matemática, ya que obvian la comprensión de los significados asociados a los conceptos matemáticos que se utilizan.

Este poster presenta un análisis exploratorio sobre la importancia de los significados involucrados en los modelos matemáticos que se plantean al resolver situaciones abiertas. Los participantes del estudio fueron dos grupos de 3º E.S.O. del colegio Legamar (Leganés), que resolvieron por grupos dos tareas que involucraban conocimientos sobre área, escala y optimización. El análisis de los significados se operativizó a partir del triángulo semántico propuesto por Rico (2012), que pone el foco en los conceptos subyacentes a los modelos, las representaciones utilizadas y los sentidos empleados dentro del contexto del problema. Estos elementos permiten relacionar la validez de los modelos empleados para resolver las tareas con la riqueza de los significados. Los resultados invitan a incorporar la noción de significado en la definición de modelización, lo que aporta completitud al concepto para la investigación y herramientas de evaluación para el profesorado.

Referencias

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95.

Niss, M. y Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Velten, K. (2009). Mathematical modeling and simulation. Introduction for scientists and engineers. Weinheim, Germany: WILEY-VCH Verlag GmbH y Co. KGaA.

Montejo-Gámez, J. y Amador-Saelices, M. V. (2018). Los significados como componente fundamental de un modelo matemático: Un análisis exploratorio en educación secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 643). Gijón: SEIEM.

EL MAPA DE LA COMPETENCIA EN SOSTENIBILIDAD PARA EL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE CCEE DE LA UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

The map of the competence in sustainability for the didactic area of the mathematics of the Faculty of CCEE of the University of Cadiz

Moreno-Pino, F.[a], Jiménez-Fontana, R.[a] y García-González, E.[a]

[a]Universidad de Cádiz

El trabajo que aquí presentamos se circunscribe al Grupo de Investigación Desarrollo Profesional del Docente-HUM462 de la Universidad de Cádiz y, más concretamente, es parte de los resultados del proyecto de investigación: Educación e innovación social para la sostenibilidad (ES). Formación en las Universidades españolas de profesionales como agentes de cambio para afrontar los retos de la sociedad (EDINSOST); proyecto I+D+i 2015 del programa estatal de investigación, desarrollo e innovación orientado a los retos de la sociedad, EDU2015-65574-R. El proyecto EDINSOST tiene entre sus objetivos específicos: Definir el mapa de sostenibilidad de las titulaciones participantes y establecer el marco que facilite su integración en los estudios de manera holística.

En este sentido, el objetivo de esta investigación ha sido establecer el itinerario competencial de la sostenibilidad para todas las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Cádiz usando -para ello- el mapa competencial en sostenibilidad, resultado de EDINSOST.

A nivel internacional, la Red ACES constituye uno de los principales referentes en materia de sostenibilización curricular entendida ésta como el diseño de programas formativos y/o planes de estudio -desde las diferentes áreas de conocimiento- que permita capacitar a los ciudadanos de los conocimientos, actitudes, destrezas y habilidades necesarios para la consecución de un mundo más sostenible. En base a como esta Red conceptualiza la sostenibilización curricular, la caracterización de un estudio ambientalizado viene dada por la integración en el mismo de diez criterios. En España, la Comisión Sectorial de la CRUE-Sostenibilidad (CSCS) tiene definidas cuatro competencias base relacionadas con la ES que, además, son el punto de partida del mapa competencial en sostenibilidad elaborado por EDINSOST (Albareda-Tiana et al, en prensa).

De esta manera, y para el establecimiento efectivo de nuestro itinerario competencial a partir del mapa producto de EDINSOST, se planificaron diferentes fases en el trabajo. En una primera fase se realizó un análisis documental de la presencia de la sostenibilidad en las memorias de los títulos de educación para las asignaturas vinculadas al área de Didáctica de la Matemática a partir de las competencias contempladas en sus asignaturas. Para realizar dicho análisis se usaron los diez criterios propuestos por la Red ACES. La relación existente entre la categorización propuesta por la Red ACES y las cuatro competencias genéricas en sostenibilidad propuestas por la CRUE permitió, en una segunda fase del trabajo, la asignación de competencias y asignaturas concretas del área de Didáctica de la Matemática al mapa de la competencia en sostenibilidad, conformándolo.

Referencias

Albareda-Tiana, S., Ruíz-Morales, J., Azcárate, P., Valderrama-Hernández, R. y Múñoz, J. M. (en prensa). The EDINSOST Project: Implementing the Sustainable Development Goals at University level. En W. L. Filho, F. Alves, U. Azeiteiro y E. Manolas (Eds.), *Universities as Living Labs for Sustainable Development: Supporting the Implementation of the Sustainable Development Goals* - Volume 2. World Sustainability Series. Springer.

Moreno-Pino, F., Jiménez-Fontana, R., García-González, E. (2018). El mapa de la competencia en sostenibilidad para el área de didáctica de la matemática de la Facultad de CCEE de la Universidad de Cádiz. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 644). Lugar: SEIEM.

REACCIONES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN ANTE LAS RESPUESTAS DEL ALUMNADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Mathematics student teachers' reactions to students' answer in secondary education

Muñiz-Rodríguez, L.[a], Alonso, P.[a], Rodríguez-Muñiz, L. J.[a] y Valcke, M.[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad de Gante

Este trabajo presenta los resultados de un estudio de investigación cuyo objetivo es analizar las reacciones del profesorado de matemáticas en formación ante las respuestas del alumnado en Educación Secundaria. Esta capacidad se vincula con la competencia del profesorado de matemáticas para proporcionar retroalimentación al alumnado. Investigaciones previas demuestran que esta competencia está siendo escasamente desarrollada y adquirida durante el Máster en Formación del Profesorado en Educación Secundaria en la especialidad de matemáticas (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz, y Valcke, 2017). Partiendo de esta idea, se diseñó una intervención formativa basada en el uso de video-viñetas durante la cual 14 estudiantes del mencionado programa de formación inicial visualizaron y reaccionaron mediante preguntas abiertas ante las diferentes situaciones de aula representadas. Los datos fueron recogidos antes (pre-test) y después (post-test) de la intervención formativa.

Con el fin de analizar las reacciones del profesorado en formación y ante la inexistencia de un marco teórico específico para el área de matemáticas, se ha utilizado el modelo de retroalimentación propuesto por Hattie y Timperley (2007). En particular, este estudio se centra en la perspectiva de *feed back*, que distingue entre cuatro niveles: tarea, proceso, autorregulación, y persona. Estos autores argumentan que la retroalimentación a nivel de persona es la menos efectiva, la retroalimentación a nivel de proceso y autorregulación es efectiva en términos de procesamiento y dominio de tareas, y la retroalimentación a nivel de tarea es útil para mejorar a posteriori el procesamiento de estrategias o la autorregulación.

Los resultados reflejan que el mayor número de reacciones aparecen en relación con la retroalimentación sobre el proceso, tanto antes (12) como después (12) de la formación, situándose en segundo lugar durante el pre-test la retroalimentación relacionada con la persona (8). Tras la intervención, las reacciones de los participantes se centraron más en la retroalimentación a nivel de tarea (10). Sin embargo, muy pocos sujetos hicieron referencia a la retroalimentación a nivel de la autorregulación ni antes (4) ni después (5) del periodo de formación. A partir de estos resultados, los autores de este trabajo consideran que la retroalimentación al nivel de autorregulación debe ser reforzada durante el periodo de formación inicial, proporcionando estrategias específicas que favorezcan la autorregulación del alumnado durante el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2017). Percepciones sobre las competencias del futuro profesorado de matemáticas en Educación Secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 357-366). Zaragoza: SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2018). Reacciones del profesorado de matemáticas en formación ante las respuestas del alumnado en educación secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 645). Gijón: SEIEM.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN DESDE LA PRÁCTICA PROFESIONAL: UN ESTUDIO DE CASO

Mathematical knowledge for teaching division from the professional practice: A case study

Naranjo-Castañeda, A.[a], Molina-Muñoz, D.[b] y Montejo-Gámez, J.[b]

[a]CEIP Maestro José Acosta, [b]Universidad de Granada

Las políticas educativas internacionales reconocen la importancia de la competencia matemática como parte indispensable desarrollo integral del individuo. En este contexto, la labor del profesorado de matemáticas adquiere una relevancia fundamental por lo que la formación matemática de los maestros debe ser objeto de análisis de la investigación.

En particular, surge la problemática sobre qué matemáticas debe conocer un profesor, cuestión que ha sido debatida en profundidad en la literatura sobre educación matemática. Desde la aportación de Shulman (1986), que diferenció entre conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido, han surgido modelos que buscan precisar las diferentes dimensiones del conocimiento matemático necesario para la práctica docente. Uno de los más extendidos a nivel internacional es el modelo de *Mathematical Knowledge for Teaching* o MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), que proporciona seis dominios para entender el conocimiento matemático del profesorado y ha dado lugar a diferentes investigaciones empíricas que evidenciaron la importancia del conocimiento del profesor en el aprendizaje matemático de sus alumnos (Hill, Rowan y Ball, 2005, por ejemplo).

Este póster presenta un estudio de caso en el que se profundiza en la práctica docente de maestros de educación primaria para la enseñanza de la división con el fin de extraer implicaciones para la formación inicial del profesorado de matemáticas. Para ello, se registraron en vídeo dos sesiones: una dirigida por maestra de amplia experiencia y otra dirigida por un maestro en formación inicial. Un procedimiento reiterado de visionado y codificación permitió detectar acciones de ambos participantes que evidenciaban conocimiento matemático de según los dominios de MKT y completar un análisis conjunto de ambos perfiles.

Los resultados evidencian conocimiento relacionado a los cuatro dominios principales de MKT en la práctica profesional de los dos participantes, destacando especialmente el conocimiento del contenido y la enseñanza. En cuanto al análisis conjunto el maestro en formación inicial mostró interés por elaborar una propuesta atractiva a los alumnos. Por su parte, la maestra en ejercicio profesional demostró mayor rigor metodológico y una capacidad adecuada para establecer la conexión entre las matemáticas que se trabajaron y la realidad. Estos hallazgos permiten trazar fortalezas y debilidades de cada perfil profesional y extraer implicaciones para la formación inicial del profesorado de matemáticas en educación primaria, que se discuten como conclusión.

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers’ Mathematical Knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Nueva York, Estados Unidos: McMillan.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Naranjo-Castañeda, A., Molina-Muñoz, D. y Montejo-Gámez, J. (2018). Conocimiento matemático en la enseñanza de la división desde la práctica profesional: Un estudio de caso. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 646). Gijón: SEIEM.

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES EN LA REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA EN EL AULA DE 5 AÑOS USANDO DICTADOS MATEMÁTICOS

Analysis of the difficulties in symbolic representation in 5 years old classroom in mathematical dictation tasks

Novo, M. L.[a] y Berciano, A.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Uno de los aspectos más relevantes en la educación matemática infantil es saber cómo fomentar la representación simbólica del entorno concreto que rodea a los niños y a las niñas. En concreto, Berdonneau (2008) enfatiza la necesidad de trabajar la representación mental en edades tempranas y Malaguzzi (2011) afirma que, en un determinado momento, los niños y las niñas precisan pasar a forma gráfica sus conversaciones orales y, es en este punto, el paso del lenguaje verbal al gráfico, donde se debe dar el salto al lenguaje simbólico y expresar lo que han interiorizado.

En este trabajo, con el fin de analizar el paso del lenguaje oral al gráfico, en consonancia con Berciano, Novo y Alsina (2017), se propone el uso de los dictados matemáticos como herramienta didáctica en la que los niños y las niñas deban representar diversas figuras que verifiquen ciertas propiedades en una progresión creciente de dificultad. Esta tarea está diseñada de acuerdo a una trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2015), donde los niños participen en distintas actividades según el nivel de pensamiento en el que se encuentren.

En particular, el objetivo de este trabajo es explorar los errores que comenten los niños y las niñas de 5 años en el paso a la representación simbólica utilizando como herramienta los dictados matemáticos.

El estudio de campo se ha llevado a cabo en tercer curso de Educación Infantil con 42 niños y niñas y, haciendo uso de una metodología cuantitativa y cualitativa, hemos comprobado que el uso de los dictados facilita que los niños y las niñas avancen a una representación simbólica más explícita y correcta compatible con el establecimiento de relaciones con las características de los objetos matemáticos involucrados; pero en este proceso de aprendizaje, hemos identificado que los errores más comunes que cometen se deben a dificultades en la representación de algún concepto más complejo como : a) la descomposición de cardinales más grandes como sumas de 2 números dados; b) la representación de formas como el triángulo y el segmento.

Referencias

Berciano, A., Novo, M. L. y Alsina, A. (2017). Dictados matemáticos: una herramienta para trabajar la competencia oral y escrita en el aula de matemáticas de Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *49*, 200-216.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Barcelona: Graó.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Gran Bretaña: Learning Tools LLC.

Malaguzzi, L. (2011). *La educación infantil en Reggio Emilia*. Barcelona: Octaedro.

Novo, M. L. y Berciano, A. (2018). Análisis de las dificultades en la representación simbólica en el aula de 5 años a través de dictados matemáticos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 647). Gijón: SEIEM.

LA ESTIMACIÓN DE LA PROPORCIÓN: ANÁLISIS DEL LENGUAJE EN LIBROS DE BACHILLERATO

The estimation of proportion: Analysis of language in Spanish high school textbooks

Ortiz, J. J.[a], Albanese, V.[a], Mohamed, N.[a] y Castro, F. J.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Instituto Tecnológico de Sonora

La inferencia estadística ha adquirido una gran importancia en el Bachillerato de Ciencias Sociales (17-18 años), tal y como puede observarse en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, del segundo curso de esta modalidad (MECD, 2015), entre cuyos contenidos aparece la distribución de las proporciones muestrales y la estimación de la proporción en una población.

El objetivo de este trabajo es analizar los distintos tipos de lenguaje (verbal, simbólico, numérico, tabular y gráfico) en el tema de estimación de la proporción en cuatro libros de texto españoles, de segundo curso de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias Sociales, publicados en 2016 según la nueva normativa. Un aspecto fundamental en un libro de texto es el lenguaje que utiliza, que debe contemplar no sólo el lenguaje verbal y simbólico sino también otras formas de representación. Cordero y Flores (2007) afirman que el discurso matemático escolar queda determinado con frecuencia por el libro de texto y regula la enseñanza y aprendizaje.

De las diferentes perspectivas teóricas disponibles para analizar los libros de texto, hemos escogido el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir en la interpretación diferente que pueden hacer dos sujetos (personas o instituciones) de una expresión o término matemático.

Los resultados muestran un mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto al de probabilidad y predominio del lenguaje simbólico. El lenguaje tabular es muy escaso y se observa una disminución del empleo de gráficas con respecto a textos de niveles educativos inferiores (Ortiz, Albanese y Serrano, 2016), aunque de mayor complejidad. En este análisis hemos encontrado algunas definiciones incorrectas o incompletas que no se corresponden con el significado matemático, que pueden provocar en el alumno un conflicto semiótico.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1), 7-38.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-semioticapproach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

MECD. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L.González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XX (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.

Ortiz, J. J., Albanese, V., Mohamed, N. y Castro, F. J. (2018). La estimación de la proporción: Análisis del lenguaje en libros de bachillerato. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 648). Gijón: SEIEM.

ESTRATEGIAS DE ESTUDIANTES EN UNA TAREA BASADA EN LA DESVIACIÓN MEDIA

Strategies used by students in a task based on the average deviation

Pallauta, J.[a], Gea, M. M.[a] y Venegas, A.[a]

[a]Universidad de Granada

Las medidas de dispersión son un tema fundamental en estadística. Como explica Moore (1990), la variación es omnipresente en los datos de un estudio estadístico y el interés está en cuantificarla y explicarla para encontrar los efectos sistemáticos que subyacen en ella. El tema se concreta, en el currículo chileno, en la educación media, con el estudio del rango, aunque en etapas previas los estudiantes calculan e interpretan promedios en contexto y comparan distribuciones de dos grupos (MINEDUC, 2012), por lo que el análisis de la dispersión se encuentra implícito en estas situaciones. Estepa y del Pino (2013) nos advierten del riesgo que asumimos al plantear la enseñanza de la dispersión de manera aislada, como por ejemplo, desvinculada del estudio de las medidas de tendencia central; por lo que somos responsables de la cultura estadística que ofrecemos. La investigación, tanto en estudiantes como en futuros profesores de educación primaria, evidencia que el tema no es fácil (Anasagasti y Berciano, 2012; Orta y Sánchez, 2013), principalmente, cuando se trata de integrar la dispersión en la toma de decisiones en contexto.

En nuestro trabajo se presentan las respuestas de 40 estudiantes de 3º de educación media (15-16 años) a una tarea basada en la desviación media. Los alumnos, en grupos de 5 estudiantes, deben justificar la decisión de cuál de dos series de datos, con igual media y rango, presenta menor dispersión. Cada serie de datos se corresponde a la posición que ocupan 5 bolas que se lanzan por un carril y ocupan un depósito numerado del 10 al 20 (11 depósitos), pudiendo albergar cada depósito hasta 5 bolas. Los estudiantes no disponen de conocimientos previos sobre el tema, sí sobre las medidas de centralización, y deben atender a la siguiente consigna: “gana aquel competidor que sus bolitas sean más cercanas al promedio de ellas”. Las estrategias que utilizan los estudiantes son diferentes, en su mayoría parcialmente correctas pues contienen errores (en cálculos o en gráficos) o se basan en intervalos centrados en la mediana de la serie dada por los depósitos. Las justificaciones que aportan informan de las ideas que poseen sobre la dispersión, en su mayoría incompletas, pero que evidencian que el concepto es intuitivo y por tanto, puede facilitar el estudio de otras medidas como la varianza y la desviación estándar.

Referencias

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2012). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de primaria: conocimiento de conceptos básicos de estadística. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 113 - 121). Jaén: SEIEM.

Estepa, A. y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números*, *83*, 43-63.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.

MINEDUC. (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Autor.

Orta, J. A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). Bilbao: SEIEM.

Pallauta, J., Gea, M. M. y Venegas, A. (2018). Estrategias de estudiantes en una tarea basada en la desviación media. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 649). Gijón: SEIEM.

UN INSTRUMENTO PARA EL ANÁLISIS DE LOS EJEMPLOS MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA

An instrument for the analysis of mathematical examples for teaching

Pascual, M. I.[a] y Contreras, L. C.[a]

[a]Universidad de Huelva

Los ejemplos matemáticos son uno de los principales recursos docentes para la enseñanza de la disciplina escolar. Existe cierta tendencia a usar ejemplos como herramienta de comunicación y diferentes estudios avalan la importancia del mismo en el aprendizaje de contenidos matemáticos. Ambas consideraciones justifican que deban ser analizados sistemáticamente con el fin de optimizar su uso. Para ello, presentamos una herramienta de análisis que permite clasificar los ejemplos y que ha sido puesta en uso en investigaciones sobre ejemplificación que hemos desarrollado.

Los ejemplos matemáticos para la enseñanza han sido analizados, desde el punto de vista de su potencialidad didáctica, mediante la conjugación de las variables de variación y transparencia (Figueiredo y Contreras, 2013); o bien como un todo organizado que configura un espacio de ejemplos (Watson y Mason, 2005), en términos de accesibilidad y corrección, riqueza y generalización (Zaskis y Leikin, 2008); entre otras aproximaciones. Nuestro acercamiento al análisis de los ejemplos matemáticos, trata principalmente de aunar las categorías de análisis propuestas, de un lado por Figueiredo, Blanco y Contreras (2006), y de otro lado, las derivadas de las investigaciones de Rowland, Tuner, Thwaites y Huckstep (2009), para comprender el fenómeno de selección y uso de ejemplos por parte del profesor, desde dos puntos de vista complementarios.

La primera de estas categorías, bajo la etiqueta *Tipo de ejemplo*, contempla la diferenciación entre ejemplos de *Definición*, *Representación*, *Características*, *Aplicaciones internas* y *Aplicaciones externas* e informa sobre el énfasis que hace el profesor en algún aspecto concreto del concepto matemático. La segunda, *Finalidad educativa*, derivada de la categorización de Rowland *et al.* (2009), incluye el análisis de ejemplos para *Enseñar conceptos o procedimientos*, *Practicar (Ejercicios)*, *Refutar conjeturas (Contraejemplos)* o *Caracterizar* (*Ejemplos genéricos*), haciendo hincapié en el objetivo con el que se ha seleccionado el ejemplo, unidas al ejemplo para *Delimitar fronteras (No-ejemplo)* propuesto por Bills *et al.* (2006). Nuestro instrumento se completa con las categorías de *Contenidos abordados*, *Secuenciación*, *Tipo de representación* y *Fuente*.

Referencias

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 236-264) Prague, Czech Republic: PME.

Figueiredo, C. A., Blanco, L. J. y Contreras, L. C. (2006). A Exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *8*, 23-39.

Figueiredo, C. A. y Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 45-68.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Transformation: Using examples in mathematics teaching. En T. Rowland, F. Turner, A. Thwaites, y P. Huckstep (Eds), *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet* (pp. 67-100). London: Sage.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Zaskis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131-148.

Pascual, M. I. y Contreras, L. C. (2018). Un instrumento para el análisis de los ejemplos matemáticos para la enseñanza. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 650). Gijón: SEIEM.

EVALUACIÓN DE LA CULTURA ESTADÍSTICA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Statistical literacy evaluation in high school students

Peña, L.[a], Molina-Portillo, E.[a], Ruz, F.[a], Martínez, F.[a] y Contreras, J. M.[a]

[a]Universidad de Granada

Diversos elementos estadísticos como gráficos y medidas de resumen (promedio, desviación estándar) están presentes en la vida cotidiana de los ciudadanos y son un buen medidor del nivel de cultura estadística que poseen los adultos (Contreras, Molina-Portillo, Godino y Batanero, 2017). En numerosas ocasiones, las noticias se ven influidas por el medio que las emite, de forma que la información que se comunica pretende favorecer determinados intereses. Es por esto que el receptor de la información debe ser capaz de analizar y decidir por sí mismo qué debe asumir como cierto. Así pues, los ciudadanos necesitan de unas herramientas que les permitan comprender el significado de los indicadores y la complejidad de sus repercusiones (Serradó, 2013). Teóricamente, dichas capacidades se adquieren a lo largo de la escolarización del alumnado. Sin embargo, la estadística ha carecido de importancia tanto en las aulas como en el currículo hasta las últimas décadas del siglo pasado. Los cambios de legislación en la enseñanza han permitido que se busque la cultura estadística del alumno en una edad más temprana, donde empiezan a introducirse los conceptos básicos de estadística. Esto pretende cimentar las bases del conocimiento para poder alcanzar niveles óptimos de cultura estadística que permitan desarrollar el pensamiento estadístico en los estudiantes, de manera que puedan afrontar con las garantías necesarias a la sociedad de la información. Durante la escolarización obligatoria, se trabajan todos los campos de la estadística con el objetivo de que, a su término, los alumnos sean cultos estadísticamente hablando. Por tanto, queriendo comprobar si efectivamente se logra un buen resultado en cada una de las diferentes componentes que según Gal (2002) conforman la cultura estadística (habilidades lingüísticas, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto, cuestionamiento crítico, actitud crítica, creencias y actitudes) se evalúa, mediante un cuestionario piloto, a 144 estudiantes de 3º y 4º de ESO. Los resultados muestran que los estudiantes encuentran problemas cuando se enfrentan a conceptos puramente estadísticos y que no existe una buena disposición, en general, hacia la estadística, como tampoco la activación de una actitud crítica frente a los medios de comunicación y demás entidades emisoras de información. Los resultados dejan entrever que los alumnos no han alcanzado un grado satisfactorio de cultura estadística al terminar su etapa de educación obligatoria. Aunque si bien, por lo general, no tienen problema al leer datos de un gráfico, observamos dificultades en el conocimiento estadístico y una deficiente actitud crítica hacia la estadística.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2016-74848-P, FCT-16-10974 y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Contreras, J. M., Molina-Portillo, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L., Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207-216). Zaragoza: SEIEM.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25.

Serrado, A. (2013). El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística. *Revista Números, 83*, 19-33.

Peña, L., Molina-Portillo, E., Ruz, F., Martínez, F. y Contreras, J. M. (2018). Evaluación de la cultura estadística en estudiantes de secundaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 651). Gijón: SEIEM.

USO DE LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN SIMBÓLICOS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON BEE-BOT

Use of symbolic programming languages in Bee-bot problem-solving

Pérez, G.[a] y Diago, P. D.[a]

[a]Universitat de València

La aparición de movimientos relacionados con la *robótica educativa*, como el movimiento maker, el *IOT* o el movimiento *STEM*, han potenciado en los últimos años la integración de contenidos de matemáticas y ciencias con aspectos propios de la tecnología, la ingeniería y la computación en las aulas (Grover y Pea, 2013). El uso de entornos tecnológicos en educación, así como el resurgimiento de la programación en la escuela son tendencia consolidada en el panorama educativo, dando lugar a nuevos conjuntos de destrezas y competencias. En concreto, en este estudio pretendemos explorar la capacidad de estudiantes infantil y primaria para: i) elaborar un programa (secuencia de instrucciones) a partir de su lenguaje propio (verbal, gestual o de signos); y ii) hacer uso de un lenguaje de programación simbólico para resolver un problema. Entendemos estos procesos de tipo computacional como procesos de resolución de problemas de matemáticas, en los que el estudiante debe idear, generar, desplegar y gestionar estrategias que le permitan abordar el problema (con o sin éxito) con la restricción de que la solución obtenida debe poder implementarse en un entorno tecnológico. Nos situamos en una perspectiva de la enseñanza de la resolución de problemas independiente del contenido, lo que según Puig (1996) sería el estudio de la "pura resolución de problemas" o estudio de la heurística matemática, en el sentido de Polya.

Para este estudio se diseña un conjunto de problemas, ordenados en complejidad, consistentes en llevar el robot *Bee-bot* de un punto inicial a uno final por un camino dado. Se hace uso, además, de un lenguaje de programación simbólico basado en tarjetas a modo de bloques que pueden secuenciarse uno detrás de otro y cuya interacción con el usuario se realiza mediante lenguaje natural. La población seleccionada consistió en siete parejas de 5, 6 y 10 años. Con respecto al primero de los objetivos se concluye que ya los estudiantes de 5 años son capaces de pasar de una representación espacial del problema (dibujo o esquema) a un programa elaborado mediante lenguaje verbal y de signos que contiene el plan para obtener la solución al problema. Estudiantes de 6 años ya incluyen características propias de los lenguajes de programación en estas producciones idiosincrásicas (como son los bucles o la indicación del fin de programa). Existe una diferencia cualitativa, en referencia a la capacidad para elaborar programas más complejos, en estudiantes de 10 años. Con respecto al segundo de los objetivos, en estudiantes de 5 y 6 años el uso del lenguaje simbólico de las tarjetas es crucial a la hora de resolver problemas que previamente no habían podido resolver, traduciéndose en una ayuda real a la resolución de problemas que les permite pensar de forma más estructurada y modificar el plan pensado. En cambio, para estudiantes de 10 años este lenguaje se convierte en superfluo, pues perciben de forma natural los botones de movimiento del robot como bloques de órdenes que pueden ser secuenciados.

Agradecimientos

Investigación financiada por EDU2017-84377-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (GVA).

Referencias

Grover, S. y Pea, R. (2013). Computational Thinking in K-12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher*, *42*(1), 38–43.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Pérez, G. y Diago, P. D. (2018). Uso de lenguajes de programación simbólicos en resolución de problemas con Bee-bot. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 652). Gijón: SEIEM.

LA GENERALIZACIÓN EN TAREAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL POR FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Primary prospective teachers' generalizations in functional thinking tasks

Polo-Blanco, I.[a], Henriques, A.[b] y Oliveira, H.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidade de Lisboa

La generalización es uno de los procesos destacados en los programas de Educación Primaria ya que la generalización de patrones numéricos y regularidades para describir las relaciones funcionales forman la base del posterior estudio de las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). Sin embargo, la investigación documenta las dificultades que manifiestan los estudiantes a la hora de identificar la generalización en secuencias debido a que la transición de lo particular a lo general lleva tiempo (Kieran, 2007). Por este motivo, es especialmente importante proporcionar a los estudiantes situaciones de enseñanza adecuadas para desarrollar su pensamiento funcional.

Teniendo como referencia el contexto teórico anterior, el estudio que presentamos tiene como objetivo analizar cómo los futuros maestros (FM) españoles de Primaria expresan e identifican la generalización en tareas que requieren pensamiento funcional. Los datos fueron recogidos mediante un cuestionario aplicado a 94 FM que cursaban el 1er año del grado de Magisterio en Educación Primaria al comienzo del curso escolar de 2017/18. Los resultados indican que alrededor el 25% fueron capaces de expresar la generalización de una manera funcional para un patrón geométrico. Un tercio de los FM pudieron interpretar la generalización de una relación entre dos cantidades en una expresión algebraica, pero casi la mitad de los participantes consideraron la co-variación de dos cantidades para un número finito de valores, sin generalizarla a todos los valores posibles. Estos resultados proporcionan información sobre el razonamiento de los FM sobre la generalización en tareas de pensamiento funcional y revelan las principales dificultades que encuentran, aspectos a considerar cuando se diseñan cursos de contenido matemático para futuros maestros de primaria.

El póster comienza con una presentación del estudio que incluye los objetivos, el contexto y la metodología. La atención después se centra en algunos ejemplos del trabajo de los estudiantes para documentar los resultados.

Referencias

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra in the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-761). Charlotte, NC: NCTM-IAP.

Polo-Blanco, I., Henriques, A. y Oliveira, H. (2018). La generalización en tareas de pensamiento funcional por futuros maestros de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 653). Gijón: SEIEM.

ESTUDIO COMPARATIVO DE RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE ALGORITMOS EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Comparison of resources for the instruction of algorithms to future teachers

Piñero Charlo, J. C.[a], Canto López, M. C.[a], Aballe Villero, M. Á.[a] y Guerrero Bey, A. Á.[a]

[a]Universidad de Cádiz

En el afán de ir más allá de los métodos basados en clases magistrales (MC) para la implementación del aprendizaje basado en problemas (PBL) en la enseñanza de conocimientos relacionados con el ámbito de las matemáticas en educación universitaria (Valero, 2016), los enfoques para promover el aprendizaje colaborativo se están volviendo cada vez más diversos, difundidos y generalmente bien aceptados dentro de la educación universitaria. Esta nueva etapa enfatiza en el creciente impacto de factores externos emergentes que, creemos, pueden promover un mayor uso de dicha técnica. Estos factores contextuales incluyen:

- Un creciente compromiso con el currículo basado en competencias, que focaliza en el aprendizaje de competencias específicas (incluidas competencias tecnológicas y de trabajo en equipo).
- Los avances en los medios digitales, que incrementan las posibilidades de desarrollo de los contenidos fuera del aula, liberando recursos para sintetizar y aplicar dichos conceptos.

Sin embargo, la adopción de tales enfoques está entrando en una nueva y difícil era, enfrentando desafíos persistentes, entre los cuales se encuentra la falta de directrices útiles (Piñero, 2017).

En la presente contribución, pretendemos demostrar consistentemente resultados de excelencia) cuando se utilizan tales métodos y estrategias de aprendizaje, evidenciados mediante la puesta en práctica de dicha metodología en la docencia de asignaturas universitarias durante el curso 2017-18.

Concretamente, en esta experiencia se ha trabajado la enseñanza del Algoritmo Basado en Números (ABN) partiendo desde diferentes perspectivas metodológicas en distintos grupos de la misma asignatura del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Cádiz. La metodología empleada, de clases invertidas, se ha puesto en funcionamiento facilitando recursos en distintos soportes a los distintos grupos de trabajo (lecciones en video o lecciones en texto) a fin de discriminar el rendimiento de estos recursos.

De igual manera, facilitaremos las directrices y métodos utilizados para su puesta en práctica en el contexto específico mencionado, así como los resultados de aprendizaje y las impresiones de los alumnos que han cursado dicha asignatura.

Referencias

Valero, P. (2016). Recontextualizaciones y ensamblajes: ABP y matemáticas universitarias. Educación matemática para el cambio. *Didacticae, 1*, 4-25.

Piñero, J. C. (2017). *Un paso más en el aprendizaje basado en problemas: aprendizaje mixto en la universidad.* Actas de la II Jornadas de innovación docente universitaria UCA.

Piñero Charlo, J. C., Canto López, M. C., Aballe Villero, M. A. y Guerrero Bey, A. Á. (2018). Estudio comparativo de recursos para la enseñanza de algoritmos en maestros en formación. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 654). Gijón: SEIEM.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA DE EDUCACIÓN INFANTIL EN UNA TAREA DE DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA

Mathematics teachers' specialized knowledge to teach numerical decompositions in early childhood education

Ramírez-García, M.[a], Joglar-Prieto, N.[a] y Muñoz-Catalán, M. C.[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Sevilla

En este trabajo pretendemos avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil en lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, centrándonos en aquél que moviliza al llevar a la práctica una actividad de descomposición numérica para promover aprendizaje en sus alumnos. Utilizamos el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes, y Climent, 2015) para el análisis del conocimiento especializado del profesor. Analizamos la práctica de una profesora con más de 25 años de experiencia al implementar una actividad diseñada por ella para trabajar la descomposición numérica en la que utiliza los distintos sistemas de representación, según el modelo de Lesh, Post y Behr (1987), con niños de 5 años. Esa sesión fue grabada en vídeo y, posteriormente, se visionó en un contexto colaborativo con otras maestras e investigadoras para reflexionar conjuntamente sobre ella. El análisis se realiza sobre la transcripción de las sesiones aplicando un *enfoque interpretativo* (Kvale, 1996) en el que los datos se enmarcan en el modelo analítico MTSK. Se identifica el conocimiento movilizado por el profesor sustentado en manifestaciones orales o gestuales del profesor consideradas en dos grados de certeza por el investigador, indicios y evidencias (Carrillo, Montes, et al., 2017). El análisis ha revelado la especificidad del conocimiento que requiere un profesor para su labor docente, incluso en la etapa de Educación Infantil, teniendo un gran peso aspectos del dominio del Conocimiento Matemático, en especial, del Conocimiento de los Temas y Conocimiento de la Práctica Matemática. También ha evidenciado la riqueza de elementos de Conocimiento sobre la Enseñanza de las Matemáticas, íntimamente relacionados con las matemáticas que se enseña y sustentados en el dominio del MK.

Referencias

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *22*, 185-205.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing.* Thousand Oaks: Sage.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): Un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 589-605.

Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Muñiz-Catalán, M. C. (2018). Conocimiento especializado de una maestra de educación infantil en una tarea de descomposición numérica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 655). Gijón: SEIEM.

APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN POR ESTUDIANTES CON DIFERENTES GRADOS DE TALENTO MATEMÁTICO

Learning to prove by students with different levels of mathematical giftedness

Ribera, J. M.[a], Jaime, A.[b], Ramírez, R.[c] y Gutiérrez, Á.[b]

[a]Universidad de La Rioja, [b]Universidad de Valencia, [b]Universidad de Granada

Los estudiantes con talento matemático avanzan más deprisa que la media en la adquisición de destrezas de razonamiento y son más eficaces resolviendo problemas (Castro, 2008). Pero el progreso en el razonamiento matemático requiere la reorganización y consolidación del conocimiento matemático, lo cual es un proceso que precisa tiempo y no se consigue con una cantidad fija de horas de estudio. En el modelo de razonamiento de Van Hiele se establecen cinco niveles, siendo más completo según se avanza, con diferente concepción de la demostración en cada nivel. Por otra parte, Marrades y Gutiérrez (2000) integran investigaciones anteriores y proponen una clasificación de tipos de demostración con diferentes grados de sofisticación.

En nuestra investigación nos planteamos la forma de razonar de estudiantes de talento matemático y estudiantes con rendimiento académico alto, pero no de talento, a través de un taller de 10 horas de duración.

Presentamos el caso de tres estudiantes: (A) de 1º ESO con alto nivel académico en matemáticas. (B) y (C) de 1º y 2º ESO, respectivamente, identificados como superdotados y adelantados de curso.

La experimentación, extraescolar, consistió en siete sesiones de resolución de problemas de 70-90 minutos de duración, entre noviembre de 2017 y febrero de 2018. Se realizaron mediante videoconferencia, conectando a los estudiantes y al profesor. Disponemos de registros en vídeo de las sesiones y mensajes de chats privados entre cada estudiante y el profesor.

La metodología de trabajo en las sesiones consistió en plantear un problema en la pantalla del ordenador, dar tiempo para que los estudiantes reflexionaran sobre su resolución y enviaran sus respuestas al profesor mediante un chat privado y discutir las ideas de los estudiantes. El profesor daba turnos a los participantes para debatir sobre las diversas soluciones aportadas. Se tenían en cuenta todas las ideas de los estudiantes y se orientaba la discusión a la resolución del problema.

Como resultado del análisis de las sesiones, destacamos que, desde la primera hasta la última sesión, se mantuvo una diferencia notable entre las concepciones de demostración y los estilos de demostrar de los tres estudiantes, siendo, de menor a mayor calidad, (A), (B) y (C). Los tres estudiantes mantuvieron el nivel de Van Hiele de sus demostraciones, (A) en el nivel 2, (B) en transición del nivel 2 al 3 y (C) en el nivel 3. En cuanto a los tipos de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000), también se mantuvieron a lo largo de la experimentación: (A) Empírica (ingenua o experimento crucial), (B) Empírica (experimento crucial o ejemplo genérico) y (C) Empírica (ejemplo genérico) y Formal (experimento mental).

Agradecimientos

Investigación financiada por EDU2017-84377-R (Mineco/Feder) y GVPROMETEO2016-143 (Gen. Valenciana).

Referencias

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-34). Badajoz: SEIEM.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 87-125.

Ribera, J. M., Jaime, A., Ramírez, R. y Gutiérrez, Á. (2018). Aprendizaje de la demostración por estudiantes con diferentes grados de talento matemático. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 656). Gijón: SEIEM.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO MATERIALES MANIPULATIVOS EN ALUMNOS DE ALTAS CAPACIDADES

Problem solving using manipulatives in gifted students

Ribera, J. M.[a] y Rotger, L.[a]

[a]Universidad de La Rioja

En los proyectos de enriquecimiento de la enseñanza en matemáticas, como el programa Estalmat, los alumnos con altas capacidades matemáticas no sólo aprenden nuevos conceptos matemáticos, sino que también trabajan la resolución de problemas. Estas sesiones les permiten preparar su participación en competiciones matemáticas. Nuestro objetivo es facilitar la comprensión de resultados geométricos y su aplicación en la resolución de problemas (tanto geométricos como algebraicos), además de promover el uso de la papiroflexia y otras estrategias manipulativas en las resoluciones aprovechando que los alumnos con altas capacidades tienen una sensibilidad más desarrollada para la resolución de problemas, cálculo o geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013). El núcleo fundamental de la enseñanza de la matemática lo constituye la resolución de problemas. Es por ello que presentamos una propuesta que pretende favorecer el uso de estrategias visualizadoras necesarias en los procesos de resolución de problemas y que ocupa un papel importante en el razonamiento de los estudiantes de altas capacidades matemáticas (Benedicto, Gutiérrez y Jaime, 2017). Dado que los alumnos de Estalmat no suelen disponer aun de suficientes herramientas algebraicas, el uso de estas estrategias puede facilitar el aprendizaje matemático (Ramírez, 2012).

En este póster presentamos las diferentes estrategias seguidas por nuestros alumnos en la resolución de problemas basadas en el uso de materiales manipulativos en dos sesiones del programa Estalmat. El objetivo principal del estudio, que este trabajo inicia, es promover el uso de diferentes materiales manipulativos para la resolución de problemas de matemáticas en alumnos de altas capacidades, además de conocer las preferencias de su uso.

Las sesiones se llevaron a cabo con un grupo de 40 estudiantes del curso de veteranos del programa Estalmat Comunidad Valenciana (14 a 16 años) divididos en grupos de 4. En ellas seguimos una metodología basada en el aprendizaje por descubrimiento para la presentación de las diferentes técnicas de resolución de problemas en la clase magistral. Posteriormente seguimos una metodología basada en el aprendizaje cooperativo para la resolución de problemas planteados a los alumnos quienes usaban papiroflexia y otros materiales manipulativos para obtener la solución de los mismos. Como resultado, los alumnos aplicaron los conceptos aprendidos en las sesiones y usaron materiales manipulativos en la resolución de problemas. Además, aportaron sus preferencias sobre el uso y utilidad de materiales manipulativos en los métodos de resolución de problemas.

Referencias

Benedicto, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas de visualización. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 509). Zaragoza: SEIEM

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Ribero, J. M. y Rotger, L. (2018). Resolución de problemas utilizando materiales manipulativos en alumnos de altas capacidades. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 657). Gijón: SEIEM.

SOBRE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DEL CARÁCTER NO DECRECIENTE DE LAS PRINCIPALES MEDIDAS ESTADÍSTICAS

On mathematic education of the non-decreasing character of the main summary statistics

Roldán López de Hierro, A. F.[a] y Roldán, C.[a]

[a]Universidad de Granada

En Matemáticas y Estadísticas, las medidas de posición (o de centralización) constituyen una familia de funciones, dependiendo de ciertos datos de entrada, que se utilizan para resumir la información contenida en un conjunto de datos. Estas medidas (como la media aritmética y la mediana) han sido ampliamente estudiadas en la investigación en Educación Matemática, tanto desde el punto de vista de sus propiedades elementales (Batanero, 2000), como del análisis de la comprensión de estas propiedades por parte de los estudiantes (por ejemplo, Cobo, 2003; Mayén, Cobo, Batanero y Balderas, 2009). En este poster hacemos un estudio detallado de una de estas propiedades, a la que llamamos *carácter no decreciente*. La intuición humana nos lleva a creer que las medidas de posición siempre deben ser no decrecientes. Sin embargo, la moda no satisface esta propiedad. Consecuentemente, primero analizamos algunas medidas de tendencia central y, posteriormente, estudiamos la idea de funciones no decrecientes. De hecho, describimos un posible significado en el que la moda es no decreciente. Concluimos con algunas implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las medidas de posición, relacionándolas con la formación de los docentes.

Referencias

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, *25*, 41-58.

Beliakov, G., Bustince, H. y Calvo, T. (2016). A practical guide to averaging functions Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Heidelberg, *Springer*.

Bustince, H., Fernández, J., Kolesárová, A. y Mesiar, R. (2015). Directional monotonicity of fusion functions. *European Journal of Operational Research*, *244*(1), 300-308.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

LibreOffice, The Document Foundation. Recuperado de *https://www.libreoffice.org*

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *UNION*, *9*, 187-201.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, BOE de 3 de enero, Madrid.

Roldán López de Hierro, A. F. y Roldán, C. (2018). Sobre la didáctica de las matemáticas del carácter no decreciente de las principales medidas estadísticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 658). Gijón: SEIEM.

TRATAMIENTO DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN COSTA RICA

Treatment of probability in primaryCosta Rican school textbooks

Rosales-Fernández, N.[a] y Ortiz, J. J.[b]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

El objetivo de este trabajo es analizar el contenido sobre probabilidad presente en tres libros de texto de Costa Rica, de tercer año de Educación Primaria (9-10 años), publicados recientemente y muy utilizados por el profesorado. Para el logro del objetivo propuesto, se plantean los siguientes objetivos específicos: identificar el concepto de probabilidad desde sus diferentes significados y describir los contextos utilizados en las actividades propuestas.

La reforma curricular en Costa Rica (MEP, 2012) presenta el área de estadística y probabilidad como un elemento disciplinar y reconoce su contribución al desarrollo de la competencia matemática, relacionada con la descripción de la realidad y su aplicabilidad en la resolución de problemas en diferentes contextos, así como a la mejora de las actitudes y creencias hacia las matemáticas. En este documento se sugiere que los conceptos de probabilidad deben introducirse de forma progresiva, intuitiva y práctica, y presentarse a través de problemas reales, que permitan las conexiones con otras materias, logros que se han incorporado paulatinamente en la educación estadística costarricense.

Para el análisis se han tenido en cuenta los diferentes significados de la probabilidad adecuados para la enseñanza en primaria (Batanero y Díaz, 2007): Significado intuitivo, significado clásico, significado frecuencial y significado subjetivo. También se ha utilizado el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a que considera fundamentales los conceptos porque son uno de los seis objetos matemáticos primarios, junto con las situaciones problemas, el lenguaje, las propiedades, los procedimientos y los argumentos, que permiten caracterizar el significado de un objeto en una institución, por ejemplo el libro de texto.

Los resultados muestran una gran variedad de significados de la probabilidad y contextos. En los tres libros predominan los significados intuitivo, frecuencial y el subjetivo, mientras que el significado clásico solo se presenta en uno de ellos. Los contextos más utilizados son los relacionados con los juegos de azar, no obstante se ilustran también entornos de los ámbitos social, económico, científico y ambiental.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

MEP. (2012). *Programas de Estudio. Matemática*. San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.

Rosales-Fernández, N. y Ortiz, J. J. (2018). Tratamiento de la probabilidad en libros de texto de educación primaria en Costa Rica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 659). Gijón: SEIEM.

TAREAS DE SIMETRÍA EN EL AULA DE 5 AÑOS, ANÁLISIS DE LA ARGUMENTACIÓN

Symmetry tasks in 5 years old classroom, analysis of argue strategies

Salgado, M.[a], Jiménez-Gestal, C.[b] y Berciano, A.[c]

[a]Universidade de Santiago de Compostela, [b]Universidad de La Rioja, [c]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

En esta comunicación presentamos un estudio del tipo de argumentación que realizan los niños y niñas de tercero de Educación Infantil cuando se les plantean tareas relacionadas con el concepto de simetría y se les pide justificar cuándo dos figuras son simétricas y por qué.

En la línea de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017), para poder analizar el grado y tipo de argumentación que usa cada infante, hemos usado como marco de referencia los tres niveles de aprehensión definidos por Duval (1998), esto es, 1) aprehensión perceptiva, caracterizada por la identificación simple de una configuración; 2) aprehensión discursiva, definida por el establecimiento de asociaciones entre la configuración dada y afirmaciones matemáticas; y 3) aprehensión operativa, caracterizada por la realización de modificaciones mentales o físicas de la configuración original.

El diseño de la experiencia de aula se ha basado en la Enseñanza Matemática Realista (Freudenthal, 1991), partiendo de un contexto significativo a través de un cuento y del propio cuerpo, como instrumento de representación para, posteriormente, centrar la tarea en justificar si dos figuras eran simétricas y por qué. Dicha experiencia se ha implementado en el aula de infantil de 5 años con un total de 7 niñas y 12 niños y, para su análisis, se ha procedido a la grabación de un vídeo.

Tras el análisis cualitativo del tipo de argumentación de las y los participantes, obtenemos que un porcentaje alto del alumnado ha mostrado inicialmente dificultades para identificar y justificar ejes de simetría, mostrando un nivel de aprehensión bajo, cercano al perceptivo.

Aún así, las actividades que se han llevado a cabo han favorecido la comprensión y abstracción del concepto de simetría; hecho constatado por medio de las verbalizaciones del alumnado durante las sesiones y después de las mismas.

Finalmente, destacar que este análisis ha permitido valorar la introducción del concepto de simetría en el aula de Educación Infantil y medir las dificultades del mismo, siempre de un modo vivencial, en un contexto significativo y con sentido para el alumnado.

Referencias

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). *Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso.* En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Salgado, M., Jiménez-Gestal, C. y Berciano, A. (2018). Tareas de simetría en el aula de 5 años, análisis de la argumentación. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 660). Gijón: SEIEM.

LA MEDIDA COMO ENCUENTRO DE APRENDIZAJE

The measurement as a centre point for a learning environment

Sánchez-Compaña, M. T.[a], Sánchez-Cruzado, C.[a], Macías-García, J. A.[b] y Duarte, I.[b]

[a]Universidad de Málaga, [b]Universidad Rey Juan Carlos

La educación es esencialmente un proceso social y, en consecuencia, una educación matemática de calidad también debe serlo. Esta afirmación parece trivial, pero la naturaleza social, humana y esencialmente interpersonal de la educación se suele ignorar por las prisas en adquirir técnicas matemáticas y por conseguir una educación científico-matemática 'eficiente' (Bishop, 1999). En este sentido Macías-García, Martín-Gámez, González y García (2018), proponen una formación desde dos dimensiones: una que haga posible al alumnado comprender las matemáticas para adaptarse al medio, organizarlo y transformarlo; y otra que capacite al individuo a buscar y ampliar información sobre una situación, analizar todas las posibilidades y elegir las mejores. Por ello, es necesario promover una formación matemática de calidad en la que el alumnado adquiera un cierto grado de autonomía física, personal, social y moral (López-Melero, Mancila y Sole, 2016). Esto supone modificar los diseños y desarrollos curriculares en el sentido de adoptar un enfoque didáctico mixto funcional-instrumental como eje. Esto ya se tiene en cuenta en las instituciones españolas, y que han puesto de manifiesto Duarte, Sánchez, Arnal y Sánchez (2018), al sacar a la luz cómo la actual normativa está apostando por un desarrollo de la competencia científico-matemática donde el carácter formativo de la misma juega un papel principal. Asimismo, estas competencias están íntimamente relacionadas, por un lado, con la funcionalidad del conocimiento que implican (Rico, 2012) y por otro, con la comprensión del conocimiento específico de cada una de estas disciplinas. En este sentido, proponemos trabajar a partir de propuestas basadas en problemáticas socio-científicas, cercanas y cotidianas para el alumnado, y que fomenten el trabajo colaborativo, las argumentaciones, la toma de decisiones, y la comunicación, entre otros. La experiencia fue llevada a cabo con 150 estudiantes de 4º del Grado de Maestro en Educación Primaria y 133 del CEIP La Biznaga en la asignatura de Didáctica de la Medida. Se llevaron a cabo 32 talleres, cuya finalidad principal fue poner en práctica con alumnado real de primaria, las tareas y actividades diseñadas para desarrollar procesos de enseñanza-aprendizaje de algunas de las nociones que se trabajan en esta asignatura. El alumnado se organizó en grupos de 4 de diversas edades, lo que provocó que los estudiantes de grado tuvieran que adaptar las actividades para poder dar respuesta a cualquier situación problemática que pudiesen encontrar. Finalmente entendieron perfectamente la intención de la propuesta y los resultados fueron bastante satisfactorios.

Referencias

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: PAIDOS.

Duarte, I., Sánchez, M. T., Arnal, M. y Sánchez, C. (2018). A Curricular Approach to Develop Autonomies from the Mathematics and Scientific Education. En *Conference proceedings. New perspectives in science education 7th edition* (pp. 236-239).

López-Melero, M., Mancila, I. y Sole, C. (2016). Escuela Pública y Proyecto Roma. Dadme una escuela y cambiaré el mundo. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 85*(30.1), 49-56.

Macías-García, J. A., Martín-Gámez, C., González, J. L. y García, F. (2018). Teleological structure of scientific and mathematical education. En *Conference proceedings. New perspectives in science education 7th edition* (pp. 227-230).

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Sánchez-Compaña, M. T., Sánchez-Cruzado, C., Macías-García, J. A. y Duarte, I. (2018). La medida como encuentro de aprendizaje. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 661). Gijón: SEIEM.

LA PERSPECTIVA DE GÉNERO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS: UN RETO PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Gender perspective in the mathematics class: A challenge for teacher training.

Sánchez-Compaña, M. T.[a], Sánchez-Cruzado, C.[a], Macías-García, J. A.[b], Duarte, I.[b], Arnal, M.[b] y García-Pardo, F.[a]

[a]Universidad de Málaga, [b]Universidad Rey Juan Carlos

Una educación matemática de calidad debe poner el énfasis en el carácter formativo que esta disciplina puede aportar a la sociedad del siglo XXI, sociedad que necesita una ciudadanía capaz de adaptarse, dar respuesta y actuar de manera responsable ante los cambios y desafíos de un mundo cada vez más globalizado. Los responsables de formar al futuro profesorado deben hacer hincapié en la educación STEM (Science, Mathematics, Engineering, and Technology). El aprendizaje de los contenidos de distintas disciplinas, como pueden ser la científica y la matemática, se debe plantear desde un enfoque interdisciplinar e integrador (Moore y Smith, 2014; Shernoff, Sinha, Bressler y Ginsburg, 2017). Se debe además situar la perspectiva de género en el epicentro, con la finalidad de fomentar la presencia de mujeres en carreras universitarias de áreas de Ciencia y Tecnología.

El trabajo que aquí presentamos se centra en la perspectiva de género, y en cómo visibilizar a las mujeres desde la ciencia en general -y la matemática en particular-, siendo el comienzo de una investigación mucho más amplia que se está realizando en el contexto de un Proyecto de Innovación Educativa financiado por la Universidad de Málaga, en el que también participa profesorado de la Universidad Rey Juan Carlos. En el desarrollo del mismo se plantea trabajar los contenidos didácticos de las asignaturas de las áreas de ciencias y matemáticas de los Grados de Maestra/o de Educación Primaria e Infantil y en el Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria, mediante el estudio del trabajo de distintas mujeres científicas y matemáticas utilizando la metodología del Flipped Clasroom (Bergmann y Sams, 2012).

En este primer estudio, nos hemos centrado en indagar si el futuro profesorado de secundaria, en su formación inicial, tiene conciencia de la necesidad de adoptar un enfoque socio-formativo con perspectiva de género en las disciplinas científicas y matemática, analizando qué estrategias metodológicas son útiles para adoptar este enfoque. Para ello se realizó un test, elaborado de manera interdisciplinar por las personas que forman parte del proyecto. Incluye dos preguntas abiertas, a responder tras la visualización de un fragmento de la película "Figuras Ocultas" de 4 minutos de duración. El análisis cualitativo pone de manifiesto que el futuro profesorado de secundaria en formación inicial posee muy poca conciencia acerca de la importancia de adoptar un enfoque desde la perspectiva de género en la enseñanza de las STEM, y un gran desconocimiento en cuanto a las estrategias a utilizar para implementar dicho enfoque.

Referencias

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom : Reach Every Student in Every Class Every Day*. Eugene, US: ISTE. Recuperado de https://goo.gl/KP5dPL

Moore, T. y Smith, K. (2014). Advancing the state of the art of STEM integration. *Journal of STEM Education*, *15*(1), 5-9.

Shernoff, D. J., Sinha, S., Bressler, D. M. y Ginsburg, L. (2017). Assessing teacher education and professional development needs for the implementation of integrated approaches to STEM education. *International Journal of STEM Education*, *13*(4), 1-16.

Sánchez-Compaña, M. T., Sánchez-Cruzado, C., Macías-García, J. A., Duarte, I., Arnal, M. y García-Pardo, F. (2018). La perspectiva de género en el aula de matemáticas: Un reto para la formación del profesorado. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 662). Gijón: SEIEM.

LOS PROBLEMAS DE ALIGACIÓN EN LOS LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES EN 3º Y 4º DE ESO

The problems of allegiance in the Spanish textbooks in 3rd and 4th of compulsory secondary education

Santágueda-Villanueva, M.[a] y Gómez Alfonso, B.[a]

[a]Universidad de Valencia

En este trabajo se muestra un análisis de los problemas de aligación presentes en quince libros de texto de 3º y 4º de la E.S.O de diferentes editoriales. Bajo el nombre de regla de aligación se conoce el procedimiento general para resolver los problemas relacionados con mezclas.

Nuestro trabajo tiene tres partes diferenciadas. En la primera se presenta la estructura de los problemas de aligación siguiendo a Freudenthal (1983, 2001, p. 75); en la segunda se muestra la clasificación tradicional de estos problemas: aligación medial, aligación alternada parcial y aligación alternada total (ver Gómez, 2015), presentando un ejemplo de cada tipo de problema; y en la tercera parte se muestran los métodos de resolución que se utilizan: método del promedio (con fórmula o simplemente haciendo cálculos), método de las ecuación (utilizando una ecuación, un sistema de ecuaciones o una proporción) y el método de las diferencias.

Del análisis de los libros de texto se puede concluir que:

1. No se suelen trabajar los distintos tipos de problemas de aligación; en la mayoría de libros solo se trabaja la aligación medial y la aligación alternada total.
2. No está presente la resolución aritmética de la aligación que se basa en la condición: después de hecha la aligación debe resultar el mismo valor que por separado, o lo que es lo mismo, que el total de las cantidades ha de valer lo mismo antes y después de la mezcla. Por lo que se elimina el significado de la aligación.
3. En la mayoría de los textos consultados estos problemas se trabajan en los capítulos de álgebra y los métodos numéricos de resolución tienden a desaparecer. Muy pocos libros dedican una sección a la resolución aritmética de estos problemas, lo que va en contra de la evolución histórica de estos problemas.

Referencias

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Gómez, B. (2015). Los problemas de aligación. *XIV CIAEM-IEACME*, Chiapas, México.

Santágueda-Villanueva, M. y Gómez Alfonso, B. (2018). Los problemas de aligación en los libros de texto españoles en 3º y 4º de ESO. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 663). Gijón: SEIEM.

ANÁLISIS CUANTITATIVO DEL USO DE MATERIALES DIDÁCTICOS PARA TRABAJAR LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Quantitative analysis of the use of teaching materials to work mathematics in childhood education

Sotos, M. A.[a] y Ródenas, M. A.[a]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha

Al menos en las etapas de Educación Infantil y Primaria, numerosos autores han señalado la necesidad de utilizar materiales y recursos manipulativos para la enseñanza de las matemáticas. La realidad que rodea al alumnado es donde este va construyendo su conocimiento, y lo hace a través de sus sentidos. El uso de objetos manipulables no es sólo una recomendación didáctica sino una obligación pedagógica (Alsina, 2004; Canals, 2013; Puig, 1958).

Aunque puede parecer que lo anterior forma parte de los saberes docentes y que numerosas aulas escolares cuentan con materiales que pueden cumplir esta función, nuestro interés se centra en observar los recursos materiales matemáticos de que dispone un aula de infantil y analizar el uso real que tienen.

Por ello nos planteamos un doble objetivo: comprobar de qué materiales manipulativos se dispone en las aulas de Educación Infantil y comprobar qué uso se hace de dichos materiales.

Ambos objetivos se abordan, básicamente, desde una perspectiva cuantitativa, mediante un cuestionario estandarizado autoadministrado. La población objeto de estudio ha sido el conjunto de maestras y maestros de Educación Infantil del municipio de Albacete, compuesta por 170 docentes. Al tratarse de un cuestionario autoadministrado, la tasa de respuesta nunca es del 100% pero, en este caso, se han superado los porcentajes habituales, ya que se ha contado con una muestra de 83 docentes, lo que supone que el número de docentes que no responde sobre el total es de ± 8%. Para intentar maximizar las tasas de respuesta se optó por un cuestionario breve, centrado exclusivamente en qué materiales tenían en clase, qué usos hacían de estos y si les gustaría disponer de algún material adicional. Además, se incluyó una pregunta relativa a qué materiales eran los que más demandaba el alumnado.

Los resultados muestran dos grupos de materiales. Uno, de los que se dispone en gran parte de los centros (puzles, formas geométricas, bloques lógicos, regletas de Cuissenaire, calendario, juegos de números y cantidad y dominó de números y operaciones), y otro, cuya presencia es más escasa (dados, ábaco, tangrams, balanzas y geoplanos). Además, estos materiales se utilizan casi siempre para contenidos matemáticos para los que han sido diseñados, aunque suelen utilizarse de manera "especializada", sin aprovecharlos para otros posibles usos matemáticos. Respecto a las preferencias del alumnado, se han detectado algunas diferencias en función de la edad, que pueden estar directamente relacionadas con su proceso de desarrollo psicológico, aunque al tratarse de una población relativamente pequeña, estas diferencias no son estadísticamente significativas.

Referencias

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*. Madrid: Narcea.

Canals, M. A. (2013). *Vivir las matemáticas.* Barcelona: Ediciones Octaedro.

Puig, P. (1958). *El material didáctico matemático actual.* Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Sotos, M. A. y Ródenas, M. A. (2018). Análisis cuantitativo del uso de materiales didácticos para trabajar las matemáticas en educación infantil. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 664). Gijón: SEIEM.

COMPRENSIÓN GRÁFICA DE ESTUDIANTES DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Graphical understanding of vocational training students

Vigo, J. M.[a], Arteaga, P.[b], Batanero, C.[b] y Gea, M. M.[b]

[a]IES Puertas del Campo, [b]Universidad de Granada

Trabajos como los de Molina-Portillo et al. (2017) han analizado la importancia de la comprensión de gráficos estadísticos como parte de la cultura estadística de todo ciudadano. En este trabajo analizamos las respuestas de 47 estudiantes de Formación Profesional Básica a tres preguntas sobre una pirámide poblacional que apareció en Internet en un informe relacionado con la especialidad que cursan. Utilizamos una jerarquía propia para describir los niveles de comprensión de los mismos (Arteaga, Vigo y Batanero, 2017) que combina las de Bertin (1967) y Curcio (1989). En concreto, se proponen cinco niveles (NBx indica el nivel x de Bertín y NCy el nivel y de Curcio):

- *N1: Leer los datos* (NB1; NC1): Cuando el alumno realiza una lectura literal de un dato del gráfico (bien directa o inversa).
- *N2: Extracción de tendencias* en una única distribución (NB2; NC2): Cuando se requiere analizar conjuntos de datos o realizar cálculos con ellos.
- *N3: Extracción de estructura*: en una representación de datos múltiples, comparar las tendencias de dos conjuntos de datos (sólo lo podemos evaluar en gráficos que representan dos o más distribuciones) (NB3; NC2).
- *N4: Leer más allá de los datos* (NC3): Dar un valor que no está en el gráfico, es decir, interpolar o extrapolar. No lo vamos a tener en cuenta en nuestro trabajo, pues no realizamos preguntas sobre interpolación.
- *N5: Leer detrás de los datos* (NC4): Dar una interpretación crítica del contenido de un gráfico.

La edad de los estudiantes es de 15 años (29 estudiantes de 1º curso) y 16 años (18 estudiantes de 2º curso). Más de la mitad de los estudiantes (58,6% en 1º curso y 66,7% en 2º) alcanza el nivel N3, máximo posible en la primera pregunta. Sin embargo, mientras un porcentaje muy alto (55,6% y 77,8% de estudiantes de 2º curso alcanzan los niveles máximos (N3 en la pregunta 2 y N5 en la pregunta 3) menos del 10% de estudiantes de 1º curso lo consiguen. En consecuencia, se observaron mejores resultados en los estudiantes de 2º curso, y la necesidad, en general, de mejorar la enseñanza de los gráficos en la formación profesional.

Referencias

Arteaga, P., Vigo, J. M. y Batanero, C. (2017). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de formación profesional. *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 129-136). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Zaragoza: SEIEM.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Molina-Portillo, E., Burgos, M., Garzón, J., Martínez-Ortiz, F., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2017). Evaluación de las destrezas matemáticas de la competencia gráfica en futuros profesores. *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 563). Zaragoza: SEIEM.

Vigo, J. M., Arteaga, P., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). Comprensión gráfica de estudiantes de formación profesional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 665). Gijón: SEIEM.

MATEMÁTICA Y ARTE: LAS FIGURAS PRECOLOMBINAS EN EL ESTUDIO DE LA PROPORCIÓN EN PRE-CÁLCULO

Mathematics and art: Pre-columbian figures in pre-calculus proportion's study

Vargas, N.[a], Cáceres, M. J.[b] y Vargas, J.[a]

[a]Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, [b]Universidad de Salamanca

Con el estudio de figuras precolombinas, desde las artes plásticas, se pretende aportar, consolidar y armonizar el conocimiento concerniente a la noción de proporción en matemáticas, planteando una propuesta de enseñanza que se sustente en la teoría de la práctica social de Wenger (1998), reconociendo el aprendizaje como un proceso social de participación.

En el diseño de la propuesta, se abordó el estudio de la proporción desde la matemática (Euclides, 2000). Se examinaron en equipo las diversas culturas precolombinas, caracterizando figuras o iconos tanto por su simbología como por su posibilidad de ser analizadas; identificando semejanzas, diferencias y medidas.

Hemos de tener en cuenta que la propuesta de enseñanza, que está en construcción, involucra el repensar estrategias desde las prácticas matemáticas, concernientes a la identificación y uso de regularidades y patrones que permitan gestionar el aprendizaje de la noción de proporción, con un enfoque que englobe un acercamiento a elementos culturales.

La noción de regularidad y patrones se estudia indagando en objetos de orfebrería de la cultura precolombina Tairona en el período Nehuange, ubicada al norte de Colombia durante el 200 a.C. al 900 d.C. En la propuesta de enseñanza, se elige el icono del hombre-murciélago, en el cual, los patrones que permiten reconocer esta figura son el penacho o abanico sobre la cabeza, la nariguera, el antifaz o visera y el tembetá en el labio inferior (Legast, 1987).

El concepto de razón se estudia en objetos de orfebrería de la cultura precolombina Quimbaya, - período temprano - ubicada en el valle medio del río Cauca, en Colombia. Se presentan figuras zoomorfas de insectos y crustáceos en metamorfosis (Banrepcultural, s.f.).

El estudio del concepto de razón, en la propuesta, se concreta mediante el análisis de la figura orfebre de una crisálida de escarabajo, en ella se examinan y comparan medidas de longitud. Así, se integra una estrategia del dibujo artístico, con un sistema de medición perceptual donde se mide a ojo y se dibuja a mano alzada con el mayor rigor posible.

La indagación en artes plásticas, permitió localizar y examinar estudios relativos a las proporciones en figuras precolombinas en Colombia así como acceder a investigaciones concernientes a la comprensión de los estudiantes del concepto de proporción. Coincidiendo con varios autores, quienes afirman que las nociones de comparación y covariación son una base conceptual de la razón y la proporción.

Referencias

Euclides, (2000). *Los seis primeros libros de Los Elementos.* R. Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de Ediciones Universidad de Salamanca.

Legast, A. (1987). *El animal en el mundo mítico Tairona*. Bogotá: Banco de la República

Red Cultural del Banco de la República de Colombia – Banrepcultural –. Las colecciones y sus artífices. Recuperado de http://www.banrepcultural.org/coleccion-arqueologica/las-colecciones-y-su-artifices.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning and identity.* Cambridge, Cambridge University.

Vargas, N., Cáceres, M. J. y Vargas, J. (2018). Matemática y arte: Las figuras precolombianas en el estudio de la proporción en pre-cálculo. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 666). Gijón: SEIEM.

EL MECANISMO DE INVERSIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS EN PRECÁLCULO

The inversion mechanism in the teaching of logarithmic function in precalculus

Vargas, J.[a] y González-Astudillo, M. T.[b]

[a]Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, [b]Universidad de Salamanca

Algunos investigadores como Carlson, Oehrtman and Engelke (2010) señalan que los estudiantes que no son capaces de concebir una función como un proceso (sino que tiene una concepción acción) tienen grandes dificultades para invertir funciones. Además muchos estudiantes cometen errores al determinar cuál es la función inversa de otra puesto que no utilizan su conocimiento conceptual acerca de las propiedades de la función inversa y se limitan a realizar unos cálculos para obtener la respuesta (Even, 1992).

Carlson y Oehrtman (2005) han categorizado tres concepciones diferentes sobre la función inversa. Una algebraica (intercambiar x e y, y despejar y), una geométrica (la reflexión sobre la recta x=y) y una procesual en el sentido de deshacer.

Hemos de tener en cuenta que para la enseñanza de la función logarítmica, en precálculo, se suele partir de la función exponencial y determinar su función inversa. En esta investigación hemos utilizado la herramienta modelación de un mecanismo de construcción (Gavilán, García y Llinares, 2007), concretamente, del mecanismo de inversión (Dubinsky, 1991) para analizar la práctica del docente desde un punto de vista sociocultural. Mediante el análisis de las tareas realizadas en el aula por un docente, se ha determinado que esa modelación se realiza comenzando por caracterizar la función exponencial como una función uno a uno.

Para propiciar la construcción del objeto función inversa general; el profesor procede primero con tareas de construcción de varios procesos de funciones inversas particulares, como la función cuadrática, la lineal y la exponencial.

En el caso de la función lineal, al trabajar desde la representación algebraica, se considera la función lineal como un objeto al intercambiar la variable x por y. A través de la representación gráfica la inversión se hace de dos maneras: calculando la función simétrica respecto de la recta y=x y calculando la pendiente de la recta e invirtiéndola.

En la práctica analizada el mecanismo de inversión del objeto función exponencial (y= ax) está acompañado de la inversión de funciones exponenciales particulares (y=2x, y=10x, y=ex) apoyándose para tanto en la representación simbólica como en la gráfica.

Referencias

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005) Key aspects of knowing and learning the concept of function. Research Sampler, 9. (Mathematical Association of America).

Carlson, M., Oehrtman, M. y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Understanding, 28*(2), 113-145.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Even, R. (1992). The inverse function: Prospective teachers' use of 'undoing'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(4), 557-562.

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(2), 157-170.

Vargas, J. y González-Astudillo, M. T. (2018). El mecanismo de inversión en la enseñanza de las funciones logarítmicas en precálculo. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 667). Gijón: SEIEM.

CAMBIOS NEURONALES DURANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON ERROR DE INVERSIÓN

Neural changes during the verbal problem solving with reversal error

Ventura-Campos, N.[a], Ferrando, L.[a], Arnau, D.[b] y González-Calero, J. A.[c]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universitat de València, cUniversidad de Castilla-La Mancha

La resolución de problemas es uno de los elementos centrales de la enseñanza de las matemáticas. Una línea de investigación importante en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos (RPV) es el estudio de los procesos cognitivos cuando los sujetos traducen los problemas al lenguaje del álgebra. Un caso en que los estudiantes reconocen típicamente la información del enunciado, pero no son capaces de construir una ecuación correcta, sería el conocido como error de inversión (Clement, 1982). Los estudios realizados hasta el momento han constatado la persistencia del fenómeno, pero no se ha tenido en cuenta la importancia que tiene el desarrollo cerebral del alumnado en el aprendizaje ni su potencial explicativo para justificar las relaciones causales observadas entre características de los problemas y su dificultad. Varios estudios de neurociencia han examinado los procesos usados durante la RPV y cómo son adquiridos. Lee et al. (2007) en un estudio con adultos sobre la traducción de enunciados a ecuación, encontró activación en áreas cerebrales del córtex prefrontal y parietal asociadas con la memoria de trabajo y procesos atencionales. Un estudio con adolescentes y adultos durante la práctica de RPV (Qin et al. 2004) mostró que después de la práctica tanto los adultos como los adolescentes tenían una reducción de áreas prefrontales y solo en adolescentes se produce una reducción de activación en áreas parietales y un incremento en el putamen, asociado con la planificación de respuesta. Estos resultados respaldarían la idea de que los adolescentes necesitan un mayor esfuerzo apoyándose en áreas que no son necesarias en el desempeño de adultos.

Regiones cerebrales, tales como las áreas prefrontales y parietales parecen madurar relativamente más tarde y se cree que están involucradas en la cognición matemática y otros procesos de orden superior que se desarrollan a lo largo de la adolescencia (Blakemore, 2012). Tal percepción podría arrojar algo de luz sobre la transición desde la aritmética concreta hasta el lenguaje simbólico del álgebra (Qin et al., 2004, Lee et al., 2007). El objetivo principal de la investigación de la que presentamos los primeros resultados, obtenidos mediante el uso de imágenes de resonancia magnética funcional, es conocer las bases neurales subyacentes ligadas a las diferencias individuales durante la resolución de problemas verbales entre resolutores con y sin error de inversión.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto UJI-A2017-8 otorgado por la Universitat Jaume I.

Referencias

Blakemore, S. J. (2012). Imaging brain development: the adolescent brain. *Neuroimage, 61*, 397-406.

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Qin, Y. L. Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A. y Anderson, J. R. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 101, 5686-5691

Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V. y Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: neuroanatomical correlates. *Brain Res., 1155*, 163-171.

Ventura-Campos, N., Ferrando, L. Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Cambios neuronales durante la resolución de problemas verbales con error de inversión. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 668). Gijón: SEIEM.

ESTUDIO SOBRE COMPLEJIDAD-DIFICULTAD EN TAREAS CON PATRONES LINEALES DE REPETICIÓN CON ESTUDIANTES DE 5 AÑOS

Study on complexity-difficulty in repeating linear pattern tasks with 5-year old students

Yáñez, D. F.[a], Diago, P. D.[b] y Arnau, D.[b]

[a]Universidad Católica de Valencia, [b]Universitat de València

Las tareas relacionadas con patrones en las primeras edades escolares han sido objeto de estudio en las últimas décadas desde varias disciplinas, especialmente en el área de la psicología. Desde la educación matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia de las tareas de identificación de patrones como antesala del pensamiento algebraico (NCTM, 2000) y como motor del desarrollo del razonamiento lógico y matemático en las primeras edades (Kamii, Rummelsburg y Kari, 2005). Desde esta perspectiva, las tareas de reconocimiento e identificación de patrones pueden ser utilizadas para introducir el álgebra en niveles donde lo impediría el simbolismo.

En este trabajo se aborda la problemática de las tareas de identificiación y continuación de patrones lineales de repetición desde un contexto de resolución de problemas en el que el estudiante debe discriminar la información superflua de aquella que le permite obtener la regla de generación de la serie y resolver la tarea. En este sentido, se estudia la influencia de la presencia de información contradictoria o la ausencia de datos como factores que introducen complejidad en la tarea (Puchalska y Semadeni, 1987). Para ello se definen diferentes variables como la longitud del núcleo de repetición, el número de descriptores, su naturaleza o la aparición de distractores, que permiten establecer diferentes grados de complejidad en la tarea. Nuestro objetivo es explorar qué factores relacionados con la complejidad del patrón influyen en la dificultad experimentada por un grupo de 33 estudiantes de cinco años de Educación Infantil al abordar este tipo de problemas, a los cuales se les administró un cuestionario diseñado teniendo en cuenta las variables de tarea descritas. Los resultados indican que factores como la aparición de distractores o la repetición de atributos en el núcleo del patrón afectan significativamente a la tasa de éxito, mientras que otros como la longitud del núcleo o el tipo de descriptor, no ofrecen diferencias significativas. Además, el tamaño del efecto observado en los casos en que se producen diferencias significativas nos conduce a pensar que un estudio con una muestra mayor produciría resultados similares.

Agradecimientos

Investigación financiada por EDU2017-84377-R (MINECO/FEDER), GVPROMETEO2016-143 (GVA) y V Premi d'Investigació *Prevere Bernat Beny Montañana.*

Referencias

Kamii, C., Rummelsburg, J. y Kari, A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 39-50.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Puchalska, E. y Semadeni, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetic problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 9-16.

Yañez, D. F., Diago, P. D. y Arnau, D. (2018). Estudio sobre complejidad-dificultad en tareas con patrones lineales de repetición con estudiantes de 5 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 669). Gijón: SEIEM.

ÍNDICE DE AUTORES

A

B

C

D

F

G