Coordenadas cilíndricas

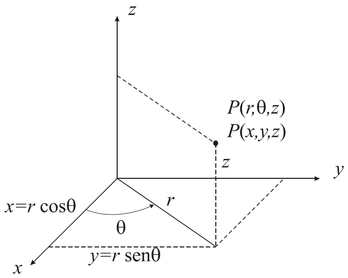
Vamos a introducir tres nuevas coordenadas para un punto $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$, denotadas por r, θ, z, según las fórmulas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

o en forma equivalente, consideramos la función de transformación de coordenadas $\overline{F} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\overline{F}(r, \theta, z) = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

A la terna ordenada (r, θ, z) se le llama *coordenadas cilíndricas* del punto P.



CAMBIO A COORDENADAS CILÍNDRICAS

Nótese que la tercera coordenada z del sistema cartesiano es la misma que la tercera coordenada del sistema de coordenadas cilíndricas (que denotamos con la misma letra z). Para que la función $\overline{F}$ sea inyectiva, se debe pedir que :

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

El jacobiano de la transformación $\overline{F}(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ es, en este caso

$$\det \overline{F}(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

Por lo que la fórmula de cambio de variables x, y, z a coordenadas cilíndricas r, θ, z en una integral triple es

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \, rdzdrd\theta$$

donde Ω' es la región del espacio $r\theta z$ transformada en Ω por la función $\overline{F}$.