CAMBIO A COORDENADAS ESFÉRICAS

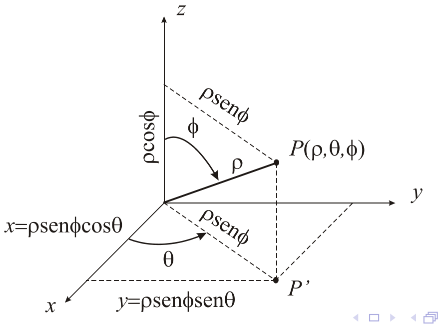
Coordenadas esféricas

Vamos a introducir ahora tres nuevas coordenadas para un punto $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$, denotadas por ρ, θ, ϕ, según las fórmulas

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho \cos\phi$$

o, lo que es lo mismo, consideramos la función de transformación de coordenadas $\overline{F} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\overline{F}(\rho, \theta, \phi) = (x, y, z) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \cos\phi)$$



CAMBIO A COORDENADAS ESFÉRICAS

Para que la función $\overline{F}$ sea inyectiva, los límites de variación de las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ se establecen de la forma siguiente

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Calculamos ahora el jacobiano de la función de transformación a coordenadas esféricas

$$\frac{\partial\,(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\phi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix} = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

de modo que la fórmula de cambio de variables es

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$