INTRODUCCIÓN

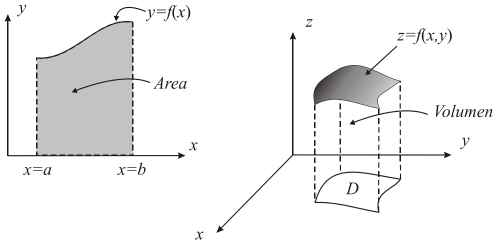
Recordemos que en el cálculo de funciones de una variable $y = f(x)$ la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área que se indica en la figura (si $f(x) \geq 0$). Ahora vamos a generalizar este concepto para integrales de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, y trabajaremos sobre subconjuntos del plano. Veremos que la idea análoga que surgirá será que la integral

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

es el volumen que se indica en la figura (si $f(x, y) \geq 0$).



(a) (b)

INT. DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Rectángulo de $\mathbb{R}^2$

Llamaremos rectángulo R de $\mathbb{R}^2$ a un conjunto de la forma

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d \right\}$$

Partición regular de un rectángulo

Por una partición regular de R de orden n, entenderemos dos colecciones ordenadas de $n+1$ puntos igualmente espaciados $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{n}$ y $\left\{y_k\right\}_{k=0}^{n}$; esto es, puntos que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}; \qquad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

Sea R_{jk} el rectángulo $\left[x_j, x_{j+1}\right] \times \left[y_k, y_{k+1}\right]$ y sea c_{jk} cualquier punto de R_{jk}, como se indica en la siguiente figura.

INT. DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Suponemos que $f(x, y) : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada de dos variables.

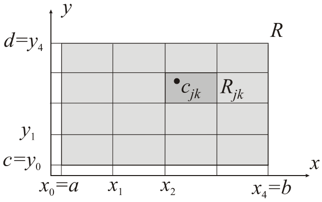


Figura: Formación de la suma de Riemann.

Formamos la suma

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta x \Delta y = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta A$$

La suma está tomada sobre todo j y k de 0 a $n-1$, de modo que hay n^2 sumandos. Una suma de este tipo se llama *suma de Riemann* para f.

La integral doble, como límite de una sucesión de sumas

Supongamos que f es una función acotada, definida en R. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \longrightarrow \infty$ y el límite S es el mismo para cualquier selección de puntos c_{jk} en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es integrable sobre R. Al límite S lo denominamos integral doble de f sobre R y lo denotamos por

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy$$

De esta forma podemos escribir la integrabilidad de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta x \Delta y = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R_{jk}$.

Interpretación de la Integral doble como un volumen

Si $f\left(x,y\right)\geq 0$ y si c_{jk} es un punto en donde $f\left(x,y\right)$ tiene su mínimo en cada R_{jk}, entonces la suma

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right)\Delta x\Delta y$$

es igual al volumen de un sólido inscrito, parte del cual se muestra en la figura.

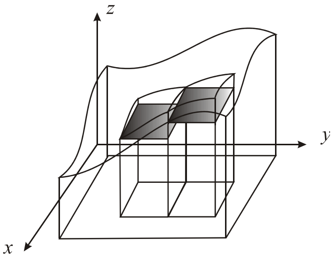


Figura: Volumen de un sólido inscrito.

De manera análoga, si c_{jk} es un punto en donde $f(x,y)$ tiene su máximo en cada R_{jk}, entonces la suma

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right)\Delta x \Delta y$$

es igual al volumen de un sólido circunscrito, parte del cual se muestra en la figura.

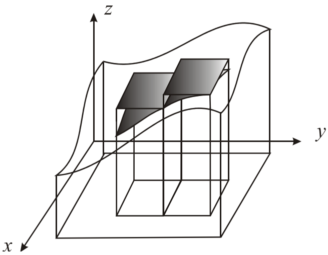


Figura: Volumen de un sólido circunscrito.

INT. DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Por lo tanto, si existe $\lim_{n \to \infty} S_n$ y es independiente de $c_{jk} \in R_{jk}$, entonces los volúmenes de los sólidos inscrito y circunscrito tienden al mismo límite cuando $n \to \infty$, que será el volumen del sólido cilíndrico que se indica en la figura.

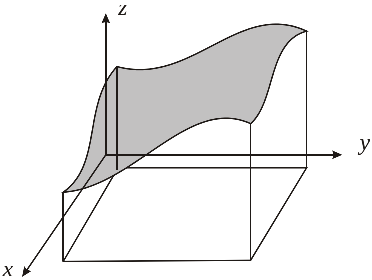


Figura: Volumen del sólido.

Es inmediato ver que si $f(x, y) = 1$, entonces $\iint_R dxdy =$ área de R.