INT. DOBLES SOBRE CONJUNTOS ACOTADOS

Teorema de Fubini en regiones de integración de $\mathbb{R}^2$

Supongamos que f es continua en D (o bien, supongamos que al menos es continua en el interior de D y acotada en D). Si la región D es del tipo (I), es decir, si

$$D = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

donde $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre D se calcula por

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Si la región D es del tipo (II), es decir, si

$$D = \{(x, y) \,/\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

donde $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas en el intervalo* $[c, d]$, *entonces la integral doble de* $f(x, y)$ *sobre* D *se calcula por*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

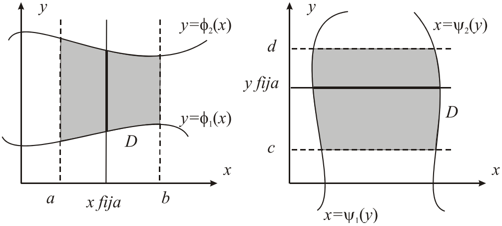

Figura: Visualización de las integrales iteradas.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL T. DE FUBINI

Para ver la interpretación geométrica del teorema de Fubini, recordemos el método para calcular volúmenes conocido como principio de Cavalieri. Supongamos que tenemos un cuerpo sólido y denotemos por $A(x)$ el área de su sección transversal medida a una distancia x del plano de referencia Oyz. De acuerdo con el principio de Cavalieri, el volumen del cuerpo está dado por

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\, dx$$

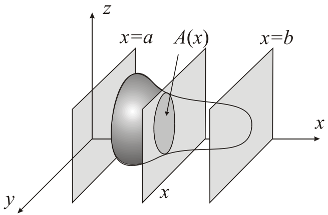

Figura: Principio de Cavalieri.

donde a y b son las distancias mínima y máxima al plano de referencia.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL T. DE FUBINI

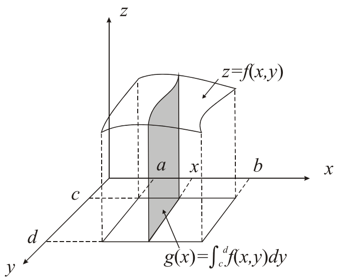

Figura: Interpretación geométrica del Teorema de Fubini.

Consideremos el cuerpo Ω que queda limitado entre la gráfica de $f(x, y)$, el plano xy, y el "cilindro" limitado por el rectángulo R. Para cada $x \in [a, b]$, la función

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

nos da el área de la sección transversal que se obtiene de la intersección del cuerpo Ω con el plano perpendicular al eje x correspondiente al valor considerado de x.

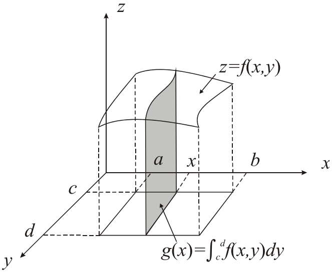

Figura: Interpretación geométrica del Teorema de Fubini.

De esta forma, el cuerpo Ω queda dividido en infinitas secciones transversales, paralelas al plano yz, siendo el área de cada una de ellas de valor $g(x)$. Suponiendo esta función $g(x)$ integrable, al integrarla desde $x = a$ hasta $x = b$, lo que haremos será pegar las infinitas secciones transversales, y así, de manera intuitiva, vemos que lo que finalmente se obtiene es el volumen de Ω

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b g(x)\, dx = \text{Volumen de } \Omega$$