Bóveda de Viviani

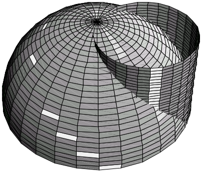
En este ejemplo vamos a ver una figura clásica llamada *Bóveda de Viviani*. Se trata de la porción de superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

de centro el origen y radio a limitada por el cilindro descentrado

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - ax &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

de centro $(\frac{a}{2}, 0)$ y radio $\frac{a}{2}$ (como se puede ver fácilmente buscando un cuadrado perfecto). La curva C es la frontera de dicha bóveda.

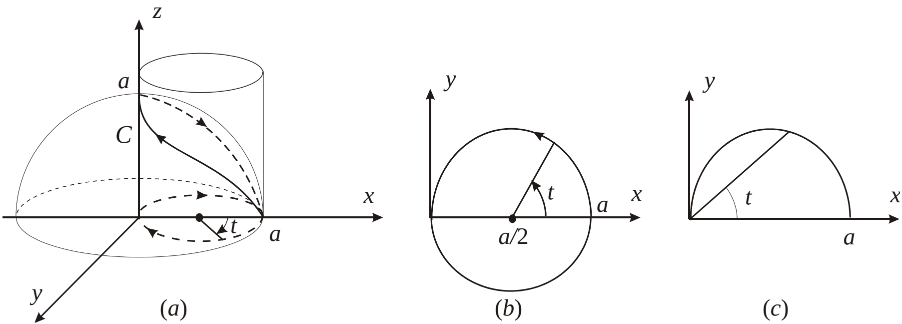


Bóveda de Viviani

Vamos a obtener para ella dos parametrizaciones.

(1) En primer lugar proyectamos la curva alabeada sobre el plano xy y parametrizamos dicha proyección. Elegimos este plano proyectante por coincidir con la base del cilindro). Operando adecuadamente, la base del cilindro podemos ponerla en la forma

$$x^2 + y^2 - ax = 0; \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{a}{2}}\right)^2 = 1$$



Bóveda de Viviani

Y parametrizando esta circunferencia, tomando como parámetro el ángulo polar

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = \cos t \\ \frac{y}{\frac{a}{2}} = \operatorname{sen} t \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\operatorname{sen} t \end{array}\right.$$

Una vez que tenemos x e y, recuperamos la componente z de la curva alabeada despejando de la ecuación de la esfera y se obtiene, operando,

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\operatorname{sen} t \\ z = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t} \end{array}\right.$$

y observamos que para recorrer entera la curva, en el sentido indicado en la figura, la variación del parámetro debe ser $0 \leq t \leq 2\pi$.

Bóveda de Viviani

(2) Otra posible parametrización de la curva consiste en tomar las coordenadas polares centradas en el $(0,0)$

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}$$

y calcular r en función del ángulo polar sustituyendo en la ecuación de la proyección

$$x^2 + y^2 - ax = 0; r = a\cos t$$

de donde, una vez hallada la componente z, despejando en la esfera,

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - (a\cos t)^2} = a \operatorname{sen} t$$

tenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\cos t \operatorname{sen} t \\ z = a \operatorname{sen} t \end{cases}$$

siendo el sentido marcado en la figura, desde $t = -\frac{\pi}{2}$ a $t = \frac{\pi}{2}$.