INTEGRALES DE SUPERFICIE DE F. ESCALARES

Supongamos que S es una superficie definida por la parametrización

$$\begin{aligned} \overline{T} &: D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3 \\ \overline{T}(u,v) &= x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k} \end{aligned}$$

donde los parámetros son u y v. Tomemos como hipótesis que x, y, z y sus derivadas parciales respecto de u y v están definidas y son continuas en una región D del plano uv. Las derivadas parciales de $\overline{T}(u,v)$ están dadas por

$$\overline{T}_u = \frac{\partial \overline{T}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}, \quad \overline{T}_v = \frac{\partial \overline{T}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k}$$

Integral de superficie de funciones escalares

Sea $f(x,y,z)$ una función continua con valores reales definida en S. Definimos la integral de f sobre S como

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y,z)dS &= \iint_S f dS = \iint_D f\left(\overline{T}(u,v)\right) \left\| \overline{T}_u \times \overline{T}_v \right\| dudv \\ &= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left\| \overline{T}_u \times \overline{T}_v \right\| dudv \end{aligned}$$

Caso particular: Coordenadas cartesianas

Ahora supongamos que S es la gráfica de una función C^1, $z = g(x, y)$. Si utilizamos x e y como parámetros, se puede ver fácilmente que:

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -(\partial g/\partial x)\,\bar{i} - (\partial g/\partial y)\bar{j} + \overline{k}$$

y, por tanto, el módulo de la normal (en cualquiera de las dos orientaciones) es en este caso es

$$\|\overline{T}_x \times \overline{T}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

por lo que

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx dy$$

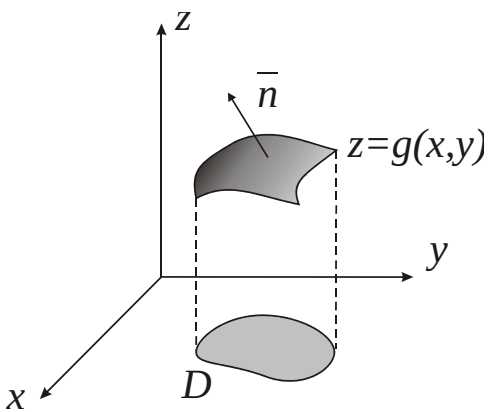
La integral doble está extendida a la región D, que es la proyección sobre el plano xy de la superficie S.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Área de una superficie

Sea S la superficie definida por la parametrización $\overline{T}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\overline{k}$ y sea D una región del plano uv en la cual x, y, z y sus derivadas parciales respecto de u y v están definidas y son continuas. El área de la superficie S está definida por

$$\text{área}(S) = \iint_S dS = \iint_D \left|\left|\overline{T}_u(u,v) \times \overline{T}_v(u,v)\right|\right| dudv$$

En el caso de que la superficie venga dada por $z = g(x,y)$, el área es

$$S = \iint_S dS = \iint_D \left|\left|\overline{T}_x \times \overline{T}_y\right|\right| dxdy = \iint_D \sqrt{1 + (g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2}\, dxdy$$