Integrales de superficie de funciones vectoriales

Supongamos que S es una superficie definida por la parametrización

$$\begin{aligned} \overline{T} &: D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3 \\ \overline{T}(u,v) &= x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\overline{k} \end{aligned}$$

Sea $\overline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\bar{i} + F_2(x,y,z)\bar{j} + F_3(x,y,z)\overline{k}$ un campo vectorial continuo definido en S. La integral de superficie de $\overline{F}$ sobre S la definimos como

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F}\left(\overline{T}(u,v)\right) \cdot \left(\overline{T}_u \times \overline{T}_v\right) dudv$$

La integral de superficie también se pueden representar en *forma diferencial* por

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_S F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy$$

Se puede ver en la figura el significado geométrico de $\overline{F} \cdot \left(\overline{T}_u \times \overline{T}_v\right)$. Esta integral sí depende de la orientación de la superficie.

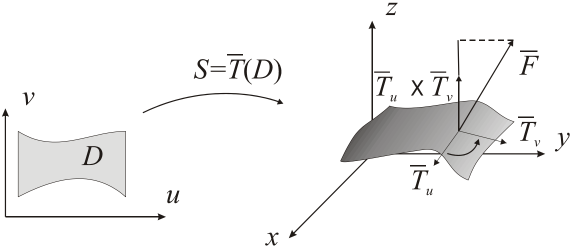

Figura: Integral de superficie de funciones vectoriales.

Caso particular: Coordenadas cartesianas

Consideremos la superficie S descrita por

$$z = g(x, y), \;\; (x, y) \in D$$

Sabemos que podemos parametrizar S por $\overline{T} : D \to \mathbb{R}^3$ con

$$\overline{T}(x, y, z) = x\overline{i} + y\overline{j} + g(x, y)\overline{k}$$

y que en este caso

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -(\partial g/\partial x)\,\overline{i} - (\partial g/\partial y)\overline{j} + \overline{k}$$

Por tanto si $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$ la integral de superficie será:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F} \cdot \left(\overline{T}_x \times \overline{T}_y\right) dxdy$$