SUPERFICIES

Parametrizaciones de superficies

Una parametrización de superficie es una función continua $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *donde* D *es un dominio en* $\mathbb{R}^2$. *La superficie* S *correspondiente a la parametrización* $\overline{T}$ *es su imagen:* $S = \overline{T}(D)$. *Se suele escribir*

$$\overline{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

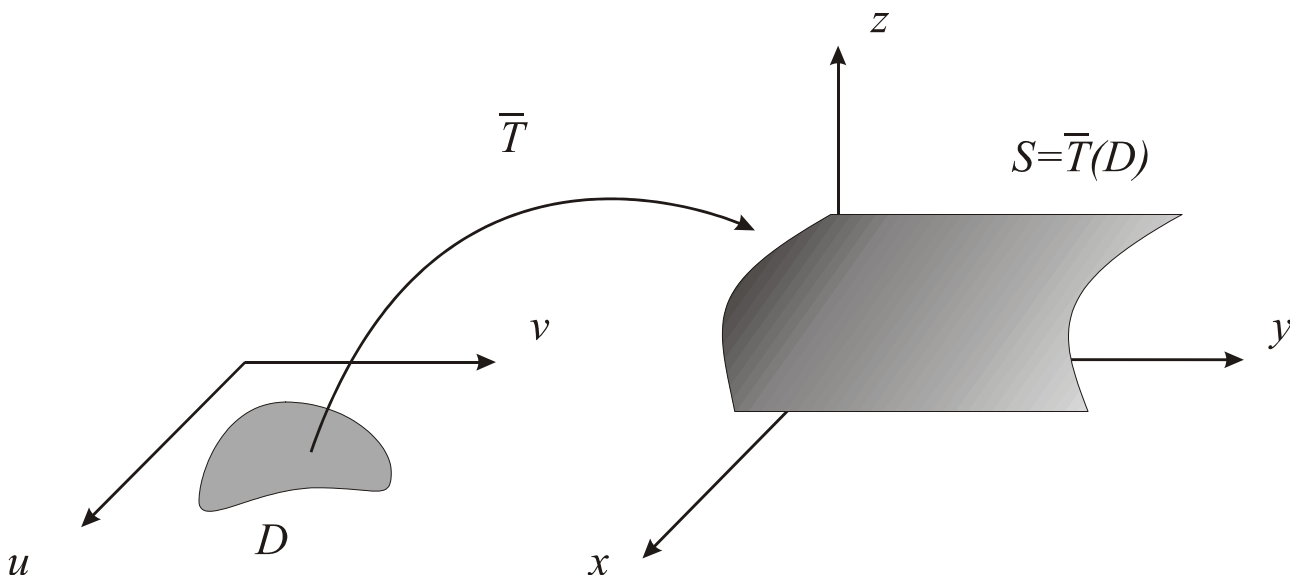

Figura: Parametrización de Superficie.

SUPERFICIES

$\overline{T}(u, v)$ va trazando una superficie S en $\mathbb{R}^3$ conforme el punto (u, v) va recorriendo el conjunto D.
Si $\overline{T}$ es diferenciable o es de clase C^1 (que es lo mismo que decir que $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones diferenciables o C^1 decimos que S es una superficie diferenciable o C^1.
La función $\overline{T}(u, v)$ también la podemos expresar en forma vectorial

$$\overline{T}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\overline{k}$$

A las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

se les llama *ecuaciones paramétricas* de la superficie S y u, v son los *parámetros*.

Normal a una superficie

Suponiendo que $\overline{T}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\overline{k}$ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, y fijando u en u_0 obtenemos una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$v \to \overline{T}(u_0, v) = x(u_0, v)\bar{i} + y(u_0, v)\bar{j} + z(u_0, v)\overline{k}$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie . El vector tangente a esta curva en el punto $\overline{T}(u_0, v_0)$ es

$$\overline{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\overline{k}$$

De la misma forma, si fijamos v y obtenemos una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$u \to \overline{T}(u, v_0) = x(u, v_0)\bar{i} + y(u, v_0)\bar{j} + z(u, v_0)\overline{k}$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie . El vector tangente a esta curva en el punto $\overline{T}(u_0, v_0)$ es

$$\overline{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\overline{k}$$

SUPERFICIES

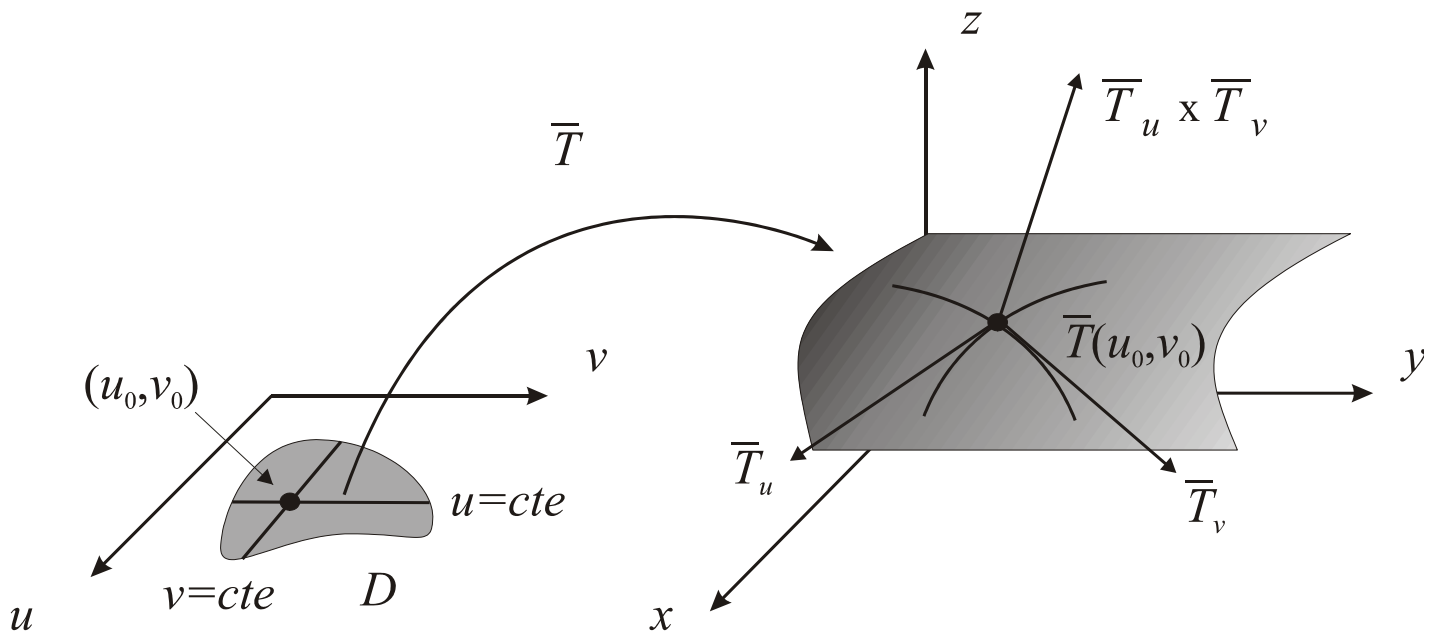

Figura: Parametrización de superficie. Significado de $\overline{T}_u \times \overline{T}_v$.

Debido a que los vectores $\overline{T}_u$ y $\overline{T}_v$ son tangentes a dos curvas sobre la superficie, en $\overline{T}(u_0, v_0)$, deben determinar el plano tangente a la superficie en este punto, por lo que la normal será:

$$\overline{T}_u \times \overline{T}_v$$

Superficie orientada

Decimos que una superficie es una superficie orientada si tiene dos lados, uno de ellos se toma como positivo y el otro como negativo. En cada punto $(x, y, z) \in S$ *habrá dos vectores normales unitarios* $\overline{n}_1$ *y* $\overline{n}_2$*, donde*

$$\overline{n}_1 = -\overline{n}_2$$

Cada una de estas normales se asocia con un lado de la superficie. Así, para especificar un lado de una superficie S*, en cada punto escogemos el vector unitario* $\overline{n}$ *que apunta hacia afuera desde ese lado de* S *en ese punto.*

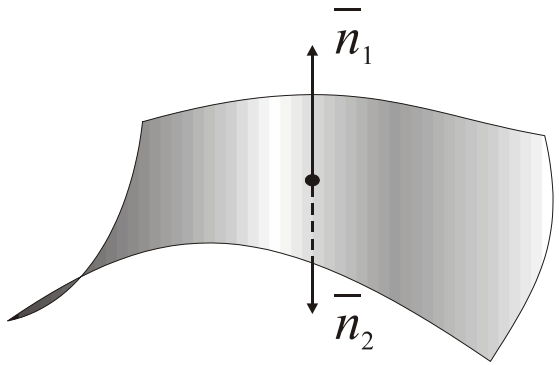

Figura: Superficie orientada.

SUPERFICIES

A lo largo del capítulo vamos a trabajar sólo con superficies orientadas y que, por tanto, siempre van a tener dos lados, pero existen superficies con un sólo lado y que, por tanto, no son superficies orientadas. Un ejemplo muy conocido de dicho tipo de superficie es la cinta de Möbius.

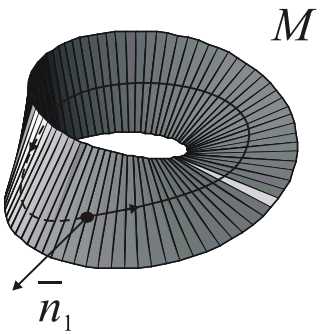

Figura: Superficie no orientada. Cinta de Möbius.

En cada punto de M hay dos normales unitarias, $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_2$. Sin embargo, ni $\overline{n}_1$ ni $\overline{n}_2$ determinan un lado único de M. Para ver esto de manera informal, podemos deslizar $\overline{n}_1$ alrededor de la curva cerrada que se indica. Cuando $\overline{n}_1$ regrese al mismo punto de la curva, coincidirá con $\overline{n}_2$, mostrando que tanto $\overline{n}_1$ como $\overline{n}_2$ apuntan desde el mismo lado de M y, por tanto, M tiene un solo lado.