CURVAS

Velocidad y rapidez

Sea $\overline{\sigma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ *una parametrización de clase* C^1 *de una cierta curva. El vector velocidad es*

$$\overline{v}(t)=\overline{\sigma}'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$$

y la rapidez de la partícula es $S(t)=\big|\big|\overline{\sigma}'(t)\big|\big|$*, es decir la longitud del vector* $\overline{\sigma}'(t)$*.*

Ejemplo

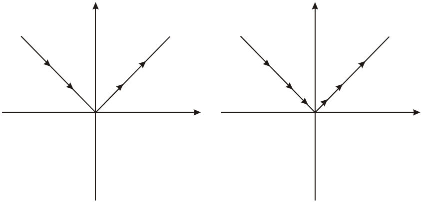
Vamos a considerar la parametrización $\overline{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\overline{\sigma}(t) = \left(t^3, t^2 |t|\right)$$

La función $x(t) = t^3$ es diferenciable; la función $y(t) = t^2 |t|$ también lo es. Por otra parte, obsérvese que

$$|x(t)| = \left|t^3\right| = \left|t^2 t\right| = \left|t^2\right| |t| = t^2 |t| = y(t)$$

de modo que la curva descrita por la parametrización es la gráfica de la función $y = |x|$. Por tanto, $\overline{\sigma}$ es una parametrización diferenciable (sus funciones componentes lo son) y la curva que describe es la gráfica de la función $y = |x|$.



Este ejemplo nos muestra que la diferenciabilidad de una parametrización no determina la forma geométrica de la curva que describe.
El vector velocidad $\overline{\sigma}'(t)$ es

$$\overline{\sigma}'(t) = \begin{cases} (3t^2, -3t^2) & \text{si} \quad t < 0 \\ (0,0) & \text{si} \quad t = 0 \\ (3t^2, 3t^2) & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Si imaginamos un punto p en $\mathbb{R}^2$ recorriendo $\overline{\sigma}(t) = (t^3, t^2|t|)$ observamos que dicho punto viene desde el infinito por la recta $y = -x$ a una cierta velocidad que va disminuyendo según se acerca al origen, de modo que al llegar al $(0,0)$ se detiene y a continuación sigue su recorrido por la recta $y = x$ aumentando su velocidad a medida que aumenta t.
La diferenciabilidad de una parametrización $\overline{\sigma}$ no detecta puntos angulares de la curva que representa. En el punto angular no podemos asociar una recta tangente a la curva. La propiedad de las curvas referente a la posibilidad de trazar rectas tangentes a ellas se llama *suavidad*.

Parametrización suave. Curva suave

Decimos que la parametrización de curva $\overline{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *es una parametrización suave en* $\overline{\sigma}(t_0)$ *si* $\overline{\sigma}'(t)$ *es continua en* t_0 *y* $\overline{\sigma}'(t_0) \neq \overline{0}$ *(el vector* $\overline{0}$ *de* $\mathbb{R}^n$*). La parametrización es suave en* C *si es suave en todos los puntos* $t \in I$*.*

Decimos que una curva es suave si existe al menos una parametrización de dicha curva que sea suave.

Un punto p *de la curva correspondiente al valor* t_0 *del parámetro se dice punto no singular si* $\overline{\sigma}'(t_0) \neq \overline{0}$*. En caso contrario el punto se denomina singular.*

Ejemplo
Consideremos la cicloide asociada con $\overline{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\overline{\sigma}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$$

Se puede ver que ésta es una parametrización de clase C^1, pues las funciones componentes lo son. El vector velocidad de esta curva es

$$\overline{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (a - a\cos t, a \operatorname{sen} t)$$

Se puede ver que por cada múltiplo de 2π (cada vez que la circunferencia que rueda sobre el eje x, da una vuelta completa), se tiene

$$\overline{\sigma}'(2k\pi) = (a - a\cos 2k\pi, a \operatorname{sen} 2k\pi) = (0, 0) = \overline{0}$$

Por tanto la parametrización de la cicloide, siendo de clase C^1, no es suave.

CURVAS

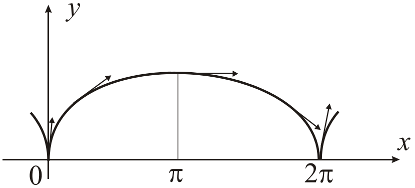


Figura: Vector velocidad en la cicloide.

En este ejemplo se observa que, a medida que el punto que recorre la cicloide se va acercando a los vértices, su velocidad va disminuyendo, para llegar a cero en ellos y de nuevo aumentar al dejarlos atrás. Se podría demostrar que la curva no es suave (como se deduce de los picos que aparecen en su gráfica), y por tanto no existe ninguna parametrización suave de esta curva.

Reparametrizaciones de curvas

Veamos la relación existente entre las diversas parametrizaciones que describen una misma curva. Tal relación se llama "reparametrización". De manera informal podemos decir que una reparametrización de $\overline{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es otra parametrización $\overline{\sigma^*} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con la misma imagen que $\overline{\sigma}$. De otro modo, $\overline{\sigma^*}$ es una reparametrización de $\overline{\sigma}$ si la curva descrita por $\overline{\sigma^*}$ es la misma que la descrita por $\overline{\sigma}$.

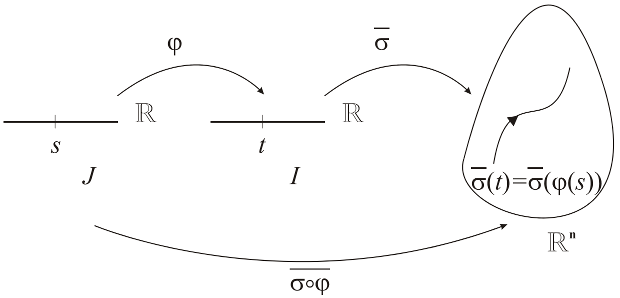


Figura: Reparametrización.

Establezcamos la definición de reparametrización.

Reparametrización

> *Sea* $\overline{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *una parametrización suave. Sea* $t = \varphi(s) : J \subseteq \mathbb{R} \to I$ *una función de clase* C^1 *biyectiva tal que* $\varphi'(s) \neq 0, \forall s \in J$*. Entonces* $\overline{\sigma^*} = \overline{\sigma \circ \varphi} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *se llama reparametrización de* $\overline{\sigma}$ *(la cual también es suave).*