TEORÍA VECTORIAL DE CAMPOS

Operador $\overline{\nabla}$

Denotaremos al operador nabla $\overline{\nabla}$ como

$$\overline{\nabla} = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\overline{\nabla}$ es un operador que puede actuar sobre campos escalares o campos vectoriales.

Gradiente

Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar. Se define el gradiente de f como

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}$$

Rotacional

Sea $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$. Se define el rotacional de $\overline{F}$ como

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{F} &= \overline{\nabla} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\overline{k} \end{aligned}$$

Divergencia

Sea $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j} + F_3\overline{k}$. *Se define la divergencia de* $\overline{F}$ *como*

$$\operatorname{div}\overline{F} = \overline{\nabla}\cdot\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ejemplo:

Sea $\overline{F}(x, y, z) = x\overline{i} + xy\overline{j} + \overline{k}$. *Hallar* $\operatorname{rot}\overline{F}$ y $\operatorname{div}\overline{F}$.

Solución:

Tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\overline{F} &= \overline{\nabla}\times\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)\overline{i} - (0-0)\overline{j} + (y-0)\overline{k} = y\overline{k} \\
\operatorname{div}\overline{F} &= \overline{\nabla}\cdot\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + y
\end{aligned}$$

TEOREMA DE GREEN

Teorema de Green

Sean D una región del tipo (III) y C su frontera. Supongamos que $P : D \to \mathbb{R}$ y $Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

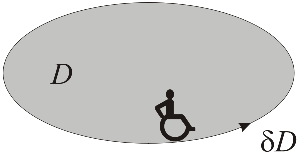


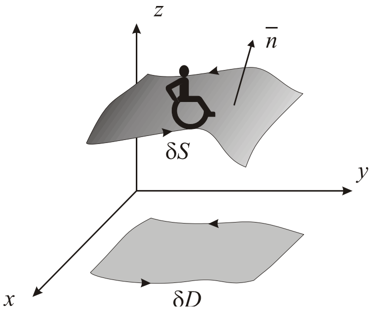
Figura: Orientación correcta.

Para poder aplicar el teorema de Green a regiones más generales, vamos a definir la *orientación correcta*, para las curvas frontera de una región D, como la orientación, que deja a dicha región a la izquierda.

Teorema de Stokes

Supongamos que S es una superficie orientada definida por una parametrización $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Sea $C = \partial S$ la curva cerrada simple que constituye la frontera orientada de S y sea $\overline{F}$ un campo vectorial C^1 en S. Entonces se cumple

$$\iint_S \mathrm{rot}\, \overline{F} \cdot \overline{dS} = \int_{\partial S} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$



Teorema de Gauss o teorema de la Divergencia

Supongamos que Ω es una región en el espacio del tipo (IV). Denotemos por $\partial\Omega$ la superficie cerrada orientada, según la normal exterior, que es la frontera de Ω. Sea $\overline{F}$ un campo vectorial C^1 definido en Ω. Entonces se cumple

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{F}\cdot\overline{dS} = \iiint_{\Omega} (\mathrm{div}\,\overline{F})\, dxdydz$$

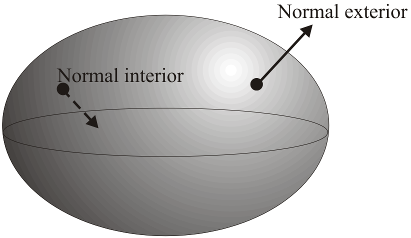


Figura: Orientaciones de una superficie cerrada.