0.1. PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejemplo 1

Hallar la ecuación diferencial que rige el circuito eléctrico de la figura 1. **Solución:**

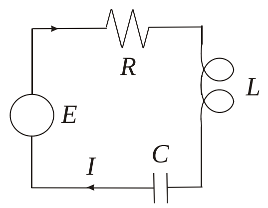

Figura 1: Circuito eléctrico.

Los elementos que componen el circuito eléctrico son:
- Una fuente de fuerza electromotiz $E(t)$ que produce una corriente de intensidad I.
- Una resistencia R que se opone al paso de la corriente, produciendo una caída de tensión cuyo valor es

$$E_R = RI$$

- Una inductancia L que se opone a cualquier cambio en la corriente, produciendo una caída de tensión

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

- Un condensador de capacidad C, que almacena una carga Q. La caída de tensión es

$$E_C = \frac{Q}{C}$$

Todos esos elementos actúan conjuntamente según la ley de Kirchoff que afirma que la suma de las fuerzas electromotrices en un circuito cerrado es 0. En nuestro caso se tiene $E - E_R - E_L - E_C = 0$, es decir

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

y dado que $I = \frac{dQ}{dt}$, siendo Q la carga, podemos escribir

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

A veces es interesante derivar la relación inicial y se obtiene

$$\frac{dE}{dt} - R\frac{dI}{dt} - L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

$\boxdot$

Ejemplo 2

Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 gramos de sal. Una solución salina de 2 g/l entra en el tanque a 10 litros por minuto mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 litros por minuto. Describir mediante la ecuación diferencial apropiada la cantidad de sal que hay en el tanque en cada instante.

Solución:

Sea $Q(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t. Sea c_α la concentración de sal en el fluido que entra y c_β la concentración de sal en la mezcla que sale. Representamos por α y β las velocidades de entrada y salida de líquido, respectivamente. Entonces

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha c_\alpha - \beta c_\beta$$

En nuestro caso, de acuerdo con el enunciado, se tiene la condición inicial $Q(0) = 25$ y los datos $\alpha = 10$ l/min, $c_\alpha = 2$ g/l, $\beta = 5$ l/min.

Por otra parte, la concentración c_β de la mezcla que sale puede calcularse como sigue: Si $N(t)$ es la cantidad de litros de solución salina es $N(t) = 150 + 5t$ pues el tanque se llena a la velocidad de 5 l/min. Por tanto, la concentración de la mezcla es

$$c_\beta = \frac{Q}{150 + 5t}$$

La ecuación diferencial a resolver, con la condición inicial $Q(0) = 25$, es, por consiguiente

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{30 + t} = 20, \quad \text{con} \quad Q(0) = 25$$

$\boxdot$

Ejemplo 3

Escribir la ecuación diferencial asociada a la curva de descenso más rápido entre dos puntos A y B.

Solución:

Consideramos únicamente el caso en que A y B no están situados en la misma vertical (en ese caso, la solución será la recta que los une). Consideremos el sistema de coordenadas de la figura 2, siendo A el origen, α el ángulo que forma la tangente con la vertical y siendo v la velocidad de descenso. La hipótesis de que el camino seguido es el más rápido nos lleva (es una versión de la ley de refracción de Snell) a la condición

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{cte} = c$$

Por el principio de conservación de la energía, la velocidad v alcanzada en cada instante viene determinada por la pérdida de energía potencial para llegar a él, es decir, $v = \sqrt{2gy}$ siendo g la aceleración de la gravedad. Finalmente

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

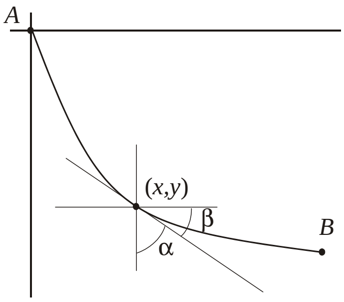

Figura 2: Curva de descenso más rápido.

Así pues, la condición $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = c$ se convierte en

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}{\sqrt{2gy}} = c \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c$$

Elevando al cuadrado y englobando todas las constantes en una constante k se obtiene

$$y(1+y'^2) = k$$

El problema planteado se conoce con el nombre de problema de la braquistócrona y fue planteado por Jean Bernoulli en 1696. La integración de la ecuación diferencial anterior conduce a las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{k}{2}\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)\,, \quad y = \frac{k}{2}\,(1 - \cos\theta)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide. $\boxdot$

Ejemplo 4

Un conejo parte del punto $(0, a)$ y corre sobre el eje OY en dirección positiva con una velocidad constante v_c. Un perro parte de la posición $(b, 0)$ y persigue al conejo con velocidad v_p de forma que siempre corre dirigiéndose a la posición del conejo. Determinar la ecuación diferencial que rige la trayectoria del perro.

Solución:

Este enunciado corresponde a un tipo de problemas que se modelizan por medio de EDOs y que reciben el nombre de *problemas de persecución*. El esquema de la persecución puede verse en la figura 3. Dado que el conejo corre con una velocidad constante, su posición en el instante t es $Q = (0, a + v_c t)$. Por otra parte, si $P = (x, y)$ es la posición del perro en el instante t, la recta PQ es tangente a la trayectoria del perro y por tanto

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y - a - v_c t}{x} \quad \text{de donde} \quad xy' = y - a - v_c t$$

Derivando de nuevo, se tiene

$$y' + xy'' = y' - v_c \frac{dt}{dx} \Longrightarrow xy'' = -v_c \frac{dt}{dx}$$

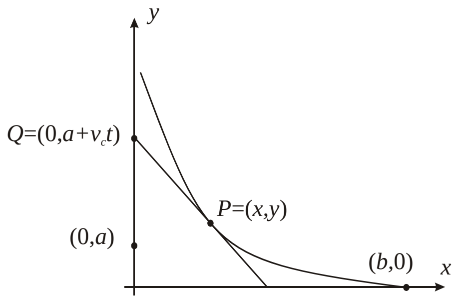

Figura 3: Perro y Conejo.

Sea s la longitud del arco de la trayectoria del perro. Entonces $v_p = \frac{ds}{dt}$, por definición de velocidad, mientras que, por definición de longitud de arco,

$$\frac{ds}{dx} = -\sqrt{1+y'^2}$$

donde el signo menos indica que s aumenta cuando x disminuye. Se sigue que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_p}$$

Así pues, la ecuación diferencial de la trayectoria descrita por el perro es

$$xy'' = \frac{v_c}{v_p}\sqrt{1+y'^2}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden. La solución se determina utilizando además las condiciones iniciales

$$y(b) = 0; \quad y'(b) = -\frac{a}{b}$$

$\boxdot$

Ejemplo 5

Supongamos que se deposita en una reserva una cantidad x_0 de conejos y una cantidad y_0 de zorros. Supongamos que los zorros se alimentan de conejos y los conejos de alfalfa, que existe en cantidades ilimitadas. Cuando los conejos son abundantes, los zorros no tienen problemas y su población aumenta, de forma que la población de conejos disminuye. En ese caso, comienza un período de escasez para los zorros y su población disminuye, mientras que los conejos se multiplican, con lo que el ciclo se inicia. Describir mediante un sistema de ecuaciones diferenciales las fluctuaciones entre las poblaciones de zorros y conejos.

Solución:

Sea $x(t)$ el número de conejos en el instante t e $y(t)$ el número de zorros en el instante t. En ausencia de zorros, la población de conejos debe crecer a un ritmo proporcional al número de conejos existente, debido a la provisión ilimitada de alfalfa. Así pues, debe ser

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (a > 0)$$

Es lógico suponer, que el número de encuentros por unidad de tiempo entre zorros y conejos es conjuntamente proporcional a x e y. Además, de esos encuentros, una cierta proporción dará como resultado la captura de un conejo por un zorro. Así pues, debemos considerar que

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad (a, b > 0)$$

Por otro lado, en ausencia de conejos, la población de zorros decrece a un ritmo proporcional al número de zorros, es decir

$$\frac{dy}{dt} = -cy, \quad (c > 0)$$

Ahora bien, como en el caso anterior, se produce un crecimiento de la población de zorros debido a sus encuentros con los conejos. Así pues

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \quad (c, d > 0)$$

Tenemos así que la interacción de las dos especies viene descrita por el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0$, con las condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.
El sistema de ecuaciones diferenciales anterior recibe el nombre de ecuaciones *depredador-presa de Volterra.* $\boxdot$

Ejercicio 1 *Un circuito eléctrico RL contiene una fuerza electromotriz que produce un voltaje de $E(t)$ voltios (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito contiene también un resistor de una resistencia de R ohmios (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrios (H). Aplicando la ley de Ohm y la ley de Kirchhoff hallar la ecuación diferencial de primer orden que representa el funcionamiento del circuito.*

Solución: $L\frac{dI}{dt} + RI = E$.

Ejercicio 2 *Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian las curvas de aprendizaje. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de una persona que aprende una habilidad en función del tiempo de adiestramiento t. La derivada $\frac{dP}{dt}$ representa la velocidad a la que mejora el desempeño. Si M es el máximo nivel de desempeño que es capaz el aprendiz, resulta razonable suponer que $\frac{dP}{dt}$ es proporcional a $M - P(t)$ (al principio el aprendizaje es rápido pero luego, cuando aumenta el desempeño y tiende a su valor máximo, la velocidad de aprendizaje disminuye). Hallar la ecuación diferencial que representa el aprendizaje.*

Solución: $\frac{dP}{dt} = k(M - P(t))$.

Ejercicio 3 *Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si $s(t)$ representa la distancia recorrida en la caída al cabo de t segundos, entonces la velocidad es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza que actúa sobre el objeto dirigida hacia abajo es $mg - cv$, en donde c es una constante positiva. Aplicando la segunda ley de Newton, hallar la ecuación diferencial que representa el movimiento del objeto.*

Solución: $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$.

0.2. APLICACIONES DE LAS EDOs DE ORDEN 1

La resolución de muchos problemas lleva a la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias, como hemos visto en algunos ejemplos anteriores. Finalizamos esta sección presentando algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

0.2.0.1. Crecimiento de población y similares

Sea $x(t)$ la cantidad de individuos de una población en el instante t. El ritmo de crecimiento de la población es proporcional al número de individuos, es decir

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Existen otros fenómenos que se rigen por una ecuación diferencial similar: la desintegración radiactiva, el intercambio de calor, etc.

0.2.0.2. Caída de cuerpos y otros problemas de movimiento

La caída libre de un cuerpo viene determinada por la ecuación diferencial $m\frac{dv}{dt} = mg$. Si suponemos que el aire o cualquier otro medio ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo que cae, la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Ejemplo 6

Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de $20°C$ y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde $100°C$ hasta $60°C$, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta $30°C$?.
Solución:
La ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_0)$$

con $T_0 = 20$, rige el comportamiento del sistema. Por lo tanto se trata de una ecuación de variables separables cuya solución se obtiene del siguiente modo

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int k dt$$

es decir $\ln |T - T_0| = kt + C_1$, que equivale a

$$T = T_0 + Ce^{kt}$$

donde se ha tenido en cuenta que $T > T_0$.
En el instante inicial ($t = 0$), la temperatura del cuerpo es $T = 100°C$ y la del aire $T_0 = 20°C$. Entonces $C = 80$ y la solución es

$$T = 20 + 80e^{kt}$$

La constante k se determina con la condición de que para $t = 20$ la temperatura vale $T = 60°C$. Sustituyendo en la solución se obtiene

$$60 = 20 + 80e^{20k} \Longrightarrow k = -\frac{\ln 2}{20}$$

Por tanto el tiempo t que tarda en enfriarse a $30°C$ verifica $30 = 20 + 80e^{kt}$ de donde $t = \frac{\ln \frac{1}{8}}{k}$, es decir

$$t = \frac{-\ln 8}{-\frac{\ln 2}{20}} = \frac{20 \ln 8}{\ln 2} = 60 \text{ minutos}$$

⊡

Ejemplo 7

Calcular la velocidad límite que alcanza un paracaidista en su caída, si se sabe que la resistencia del paracaídas es proporcional a su velocidad.
Solución:
La ley de Newton se puede expresar, en este caso, como

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv$$

donde g es la aceleración de la gravedad, m la masa, v la velocidad y Kv es la resistencia del paracaídas, con $K > 0$. Se trata de una ecuación de variables separables, que se puede resolver haciendo

$$\int \frac{mdv}{mg - Kv} = \int dt$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{m}{K}\ln(mg - Kv) &= t + C_1 \Longrightarrow \ln(mg - Kv) = -\frac{K}{m}t + C_2 \\ -Kv + mg &= C_3 e^{-\frac{Kt}{m}} \end{aligned}$$

Si el valor de t crece muy deprisa ($t \to \infty$), tenemos que la velocidad límite es

$$v_{\text{lím}} = \frac{mg}{K}$$

ya que $e^{-\frac{Kt}{m}} \to 0$ cuando $t \to \infty$. ⊡

Ejemplo 8

Se sabe que la velocidad de la desintegración radiactiva es proporcional a la cantidad x de la sustancia que queda aún no desintegrada. Determínese cómo x depende del tiempo t, si en el instante incial t_0 se tenía $x = x_0$ de sustancia.
Solución:
La ecuación diferencial del proceso tiene por expresión

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Aquí, $k > 0$ es la constante de desintegración (se supone conocida), el signo $-$ es indicio de que x decrece con el tiempo t. Al separar las variables e integrar la expresión, obtenemos

$$\ln|x| = -kt + \ln|C|\,, \text{ de donde } \; x = Ce^{-kt}$$

Tomando en consideración la condición inicial $x|_{t=t_0} = x_0$ llegamos a que $C = x_0 e^{kt_0}$, por lo cual

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$$

$\boxdot$

Ejemplo 9

Sea $y(t)$ el número de miembros de una población en un momento de tiempo t. Al suponer que la velocidad de variación de la población es proporcional a la cantidad de la problación, llegamos a la ecuación

$$dy/dt = ky$$

Pongamos $k = m - n$, donde m es el coeficiente de la velocidad relativa de natalidad, y n, el coeficiente de la velocidad relativa de extinción; entonces $k > 0$ para $m > n$ y $k < 0$ para $m < n$.
Si en el instante $t = 0$ la población es igual a y_0, la ecuación nos conduce a la ley exponencial de variación de la población

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

cuaando $k < 0$, $y(t) \to 0$ para $t \to +\infty$; cuando $k > 0$, $y(t) \to +\infty$ para $t \to +\infty$.
La suposición de que las magnitudes m y n son constantes no es cierta para poblaciones grandes. En efecto, el gran número de miembros de una población lleva a la disminución de los recursos correspondientes, lo que decrece la velocidad de natalidad y aumenta la velocidad de extinción. Esto puede ser expresado mediante las leyes más simples

$$m = b_1 - b_2 y, \quad n = b_3 + b_4 y$$

donde b_i son constantes positivas ($i = 1, 2, 3, 4$); entonces

$$k = m - n = b_1 - b_3 - (b_2 + b_4)\, y = (b_2 + b_4)\left((b_1 - b_3)\,/\,(b_2 + b_4) - y\right) = \alpha\,(A - y)$$

donde $\alpha = b_2 + b_4, A = (b_1 - b_3)\,/\,(b_2 + b_4)\,.$
La ecuación de la dinámica de la población en este modelo tiene por expresión

$$dy/dt = \alpha(A - y)y$$

Esta es la llamada ecuación logística que es fundamental en demografía y en la teoría matemática de la ecología. Se utiliza en la teoría matemática de propagación de rumores, enfermedades y en otros problemas de fisiología y sociología. Al separar las variables en la última ecuación, obtenemos

$$\frac{dy}{(A - y)y} = \alpha dt, \quad \text{de donde } \; y = \frac{ACe^{A\alpha t}}{1 + Ce^{A\alpha t}}$$

Considerando que $y(0) = y_0$, hallaremos la ecuación de la curva logística

$$y(t) = A/\left(1 + (A/y_0 - 1)\, e^{-A\alpha t}\right)$$

Cuando $\alpha > 0$ y $A > 0$, obtenemos $y(t) \to A$ para $t \to +\infty$. La curva logística contiene dos parámetros, A y α; para determinarlos se debe disponer de dos valores adicionales de $y(t)$ para algunos t_1 y t_2. $\boxdot$

Ejemplo 10

Un punto material de masa 1 gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10$ segundos la velocidad era igual a 50 cm/s y la fuerza igual a 4 dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?.
Solución:
En este caso la ley de Newton dice que

$$m\frac{dv}{dt} = K\frac{t}{v}$$

Las condiciones en el instante $t = 10$ segundos indican que $v = 50$ cm/s y la fuerza $m\frac{dv}{dt} = 4$ dinas. Entonces $4 = K\frac{10}{50}$, con lo que $K = 20$. Luego, teniendo en cuenta que $m = 1$, queda que la ecuación diferencial que rige el movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v}$$

que es una ecuación de variables separables, con solución general

$$v = \sqrt{C + 20t^2}$$

Como $v(10) = 50$, debe ser $50 = \sqrt{C + 2000}$ y por tanto $C = 500$.
Al cabo de un minuto ($t = 60$) la velocidad será

$$v = \sqrt{500 + 20 \cdot 60^2} \simeq 269,26 \text{ cm/s}$$

Nota. La constante K de proporcionalidad que aparece en la ley de Newton se mide en $g.cm^2/s^4$. $\boxdot$

Ejemplo 11

Un día empezó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora.
La máquina limpió 2 km. hasta las 2 de la tarde y 1 km. más hasta las 4 de la tarde. ¿A qué hora comenzó a nevar?.
Solución:
Hemos de suponer que la velocidad de la máquina es inversamente proporcional a la altura de la nieve, mientras que ésta es directamente proporcional al tiempo que ha transcurrido desde que comenzó a nevar.

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{c_1}{h} \\ h = c_2 t \end{array}\right\} \Longrightarrow v = \frac{c_1}{c_2 t} = \frac{K}{t}$$

La ecuación diferencial que rige el comportamiento es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{K}{t}$$

donde $s(t)$ es el espacio recorrido por la máquina después del tiempo t. Integrando dicha ecuación diferencial

$$s = \int \frac{K}{t} dt = K \ln t + A$$

Sea x el tiempo (en horas) que lleva nevando hasta las 12 es decir, $12 - x$ es la hora que comenzó a nevar (por tanto $s(x) = 0$). Las condiciones del enunciado se traducen en las ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = K \ln x + A \\ 2 = K \ln(x+2) + A \\ 3 = K \ln(x+4) + A \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene

$$\begin{array}{l} 2 = K\left(\ln(x+2) - \ln x\right) = K \ln \frac{x+2}{x} \\ 3 = K\left(\ln(x+4) - \ln x\right) = K \ln \frac{x+4}{x} \end{array}$$

Dividiendo las expresiones anteriores se tiene

$$\frac{2}{3} = \frac{\ln \frac{x+2}{x}}{\ln \frac{x+4}{x}}$$

es decir

$$\frac{(x+4)^2}{x^2} = \frac{(x+2)^2}{x^3}$$

Todo se reduce por tanto a obtener la única raíz positiva de la ecuación

$$2x^2 + 4x - 8 = 0$$

La raíz positiva de esta ecuación es $x = -1 + \sqrt{5}$. Es decir, empezó a nevar aproximadamente sobre las 10 horas y 46 minutos. $\boxdot$

Ejemplo 12

Un tanque de 400 *litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de* 150 *litros de agua y* 25 *g de sal. Una solución salina de* 2 *g/l de sal entra en el tamque a* 10 *litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a* 5 *l/min.*
¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosarse?.
Solución:
Si $Q(t)$ es la cantidad de sal que existe en el instante t, la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{30+t} = 20$$

que es una ecuación lineal. La solución general de la ecuación es

$$Q = 10(30+t) + \frac{K}{30+t}$$

Imponiendo la condición inicial $Q(0) = 25$ se obtiene $K = -8250$. Luego la solución es

$$Q(t) = 10(30 + t) - \frac{8250}{30 + t}$$

Como la capacidad del tanque es de 400 litros, empezará a rebosar en el instante t en el que $400 = 150 + 5t$, es decir a los 50 minutos. La cantidad de sal será entonces

$$Q(50) = 10(30 + 50) - \frac{8250}{30 + 50} = 800 - 103,125 = 696,875 \text{ g.}$$

$\boxdot$

Ejercicio 4 *Consideremos un circuito eléctrico RL. Supongamos que en el circuito la resistencia es de* 12Ω *y la inductancia es de* $4H$*. Si la batería proporciona un voltaje constante de* $60V$ *y el interruptor se cierra cuando* $t = 0$ *de manera que la corriente empieza con el valor* $I(0) = 0$*, calcular: a)* $I(t)$*. b) La corriente al cabo de* 1 *segundo. c) El valor límite de la corriente.*

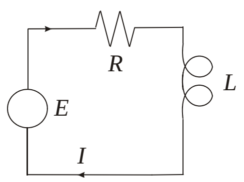

Figura 4: Circuito RL.

Solución: a) $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$. b) $I(1) \simeq 4,75A$. c) $5A$.

Ejercicio 5 *Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de* m_0 *gramos. Al ser observado después de* 24 *horas, ha experimentado una reducción de masa del* 10 %*. a) Encuentrar una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. b) Calcular el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original (esto es, su vida media).*

Solución: a) $m(t) = m_0 e^{-0,00439t}$. b) $158h$.

Ejercicio 6 *La población* $P(t)$ *de un suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por* $\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P)$; $P(0) = 5000$*, en donde* t *se mide en meses. a) ¿Cuál es el valor límite de la población? b) ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?*

Solución: a) 10^6. b) 4,41 años.

Ejercicio 7 *Un reactor transforma plutonio* 239 *en uranio* 238 *que es relativamente estable para uso industrial. Después de* 15 *años se determina que el* 0,0043 *por ciento de la cantidad inicial* A_0 *de plutonio se ha desintegrado. Determinar la semivida de este isótopo (el tiempo necesario para que la cantidad inicial de átomos se reduzca a la mitad) si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.*

Solución: 241790 años.