0.1. APLICACIONES DE LAS EDOs DE ORDEN 2

En esta sección presentamos una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones diferenciales de orden superior: el estudio de las vibraciones y los circuitos eléctricos.

0.1.0.1. Aplicación al estudio de vibraciones

La ecuación diferencial que rige el mecanismo masa-resorte de la figura 1 es

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, m la masa, μ el coeficiente de amortiguamiento viscoso, k la constante elástica del resorte y $f(t)$ la fuerza exterior. Hallar el desplazamiento, vibración, para los distintos valores de μ, k y f. Resolveremos este problema utilizando la nomenclatura habitual en el estudio de las

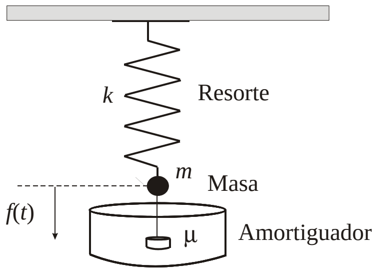

Figura 1: Sistema masa-resorte.

vibraciones. Si la ecuación diferencial es homogénea, $f(t)=0$, se trata de vibraciones libres y vibraciones forzadas si $f(t)\neq 0$ (ecuación completa).

a) Caso homogéneo. Vibraciones libres.

Distinguiremos dos casos:

- $\mu=0$, denominado vibraciones libres sin amortiguamiento, y
- $\mu\neq 0$, denominado vibraciones libres amortiguadas.

i) Vibraciones libres sin amortiguamiento.

La ecuación a resolver es

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

Como el polinomio característico es $p(\lambda)=m\lambda^2+k$, sus raíces son $\lambda_1=\sqrt{\frac{k}{m}}i, \lambda_2=-\sqrt{\frac{k}{m}}i$, y por tanto la solución general es

$$x(t)=A\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Siendo φ un ángulo tal que $\cos\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\operatorname{sen}\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ se tiene que

$$x(t)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t+\operatorname{sen}\varphi\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=\sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)$$

Se trata de un movimiento vibratorio.**ii) Vibraciones libres amortiguadas.**

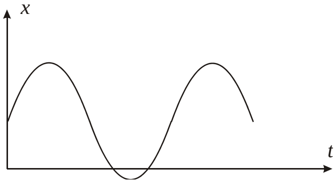

Figura 2: Vibraciones libres sin amortiguamiento.

La ecuación a resolver es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + \mu\lambda + k$$

Las raíces del polinomio característico dependerán del signo de $\mu^2 - 4mk$.
Caso 1) $\mu^2 - 4mk < 0$. Los valores de μ que verifican la desigualdad anterior se denominan de *amortiguamiento subcrítico* y el movimiento se llama *subamortiguado* porque no hay suficiente amortiguación (μ es muy pequeña) para prevenir que el sistema oscile. El polinomio $p(\lambda)$ tiene dos raíces complejas conjugadas

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

y por tanto la solución general es

$$x(t) = e^{\frac{-\mu}{2m}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t + B\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t\right)$$

Caso 2) $\mu^2 - 4mk = 0$. El valor de μ que verifica la ecuación anterior es $\mu_c = 2\sqrt{km}$,

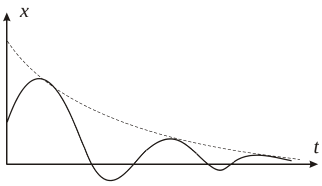

Figura 3: Movimiento subamortiguado.

denominado *amortiguamiento crítico*. El polinomio característico tiene la raíz $\lambda_1 = \frac{-\mu_c}{2m}$ doble y por tanto la solución general es

$$x(t) = (A + Bt)e^{\frac{-\mu_c}{2m}}$$

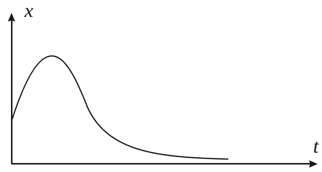

Figura 4: Movimiento críticamente amortiguado.

El movimiento se llama *críticamente amortiguado* ya que si μ disminuyera de valor se presentaría oscilación.**Caso 3)** $\mu^2 - 4mk > 0$. En este caso el polinomio $p(\lambda)$ tiene dos raíces λ_1, λ_2 reales y distintas

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$$

y por tanto $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. La solución general es

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

La masa "regresa" a su posición normal de equilibrio, correspondiente a $x(t) = 0$ ya que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Los valores de μ, tales que $\mu^2 - 4mk > 0$, son de *sobreamortiguamiento* y el movimiento se llama *sobreamortiguado* y es un movimiento no oscilatorio.Se denomina *factor de*

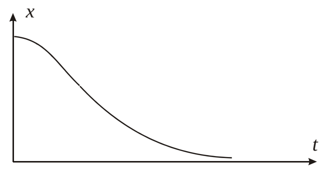

Figura 5: Movimiento sobreamortiguado.

amortiguamiento a

$$\xi = \frac{\mu}{\mu_c}$$

Dicho valor será mayor que 1 en el sobreamortiguamiento, 1 en el amortiguamiento crítico y menor que 1 en el amortiguamiento subcrítico.

b) Caso no homogéneo. Vibraciones forzadas.

La ecuación a resolver es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

La solución de la ecuación será la suma de la solución general de la ecuación homogénea, analizada anteriormente, y una solución particular de la ecuación completa que dependerá de la función $f(t)$.

Normalmente $f(t)$ es una fuerza de tipo periódico $f(t) = \operatorname{sen} wt$. Si nos encontramos en esta situación la solución particular de la completa será del tipo

$$A \operatorname{sen} wt + B \cos wt$$

es decir, es una solución de carácter periódico, salvo en el caso que $\operatorname{sen} wt$ pudiese ser una posible solución de la ecuación homogénea, lo que sólo sucede en las vibraciones libres sin amortiguamiento, $\mu = 0$, cuando

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = w$$

Esta frecuencia, denominada de *resonancia*, da lugar a un caso "peligroso" ya que la solución particular de la ecuación completa es

$$x_p(t) = At \operatorname{sen} wt + Bt \cos wt$$

y la función $x_p(t)$ no está acotada.

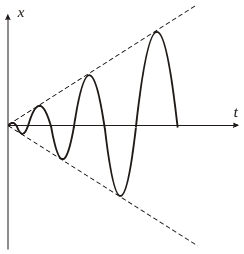

Figura 6: Sistema en resonancia.

Ejercicio 1 *En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo, de constante elástica $k = 100$, se fija un cuerpo de 4 Kilogramos de masa. En el instante $t = 0$, se lleva el cuerpo 20 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de 1 metro por segundo dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no actúan fuerzas exteriores, calcular el desplazamiento en función del tiempo, calculando la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.*

Solución: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4})$ (mov. armónico simple).

Ejercicio 2 *Estúdiese el movimiento del cuerpo del problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el cuerpo una fuerza que (en Newtons) viene expresada como función del tiempo por $8\cos 5t$.*

Solución: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t$ (resonancia).

Ejercicio 3 *Del extremo inferior de un muelle fijado al techo, de constante elástica $k = 320$, se suspende un objeto de 16 Kilogramos de masa. A continuación, se lleva el objeto 20 centímetros por debajo de la posición de equilibrio y se le abandona en esa* *posición con una velocidad de* $1,2$ *metros por segundo dirigida hacia arriba. Estúdiese el desplazamiento del objeto, suponiendo que no existen fuerzas exteriores y que el medio opone una resistencia al movimiento que numéricamente (en newtons) vale* $64v$*, siendo* v *la velocidad (en metros por segundo).*

Solución: $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{5}\cos 4t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 4t) = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{-2t}\cos(4t + \frac{\pi}{4})$ (mov. subamortiguado).

Ejercicio 4 *Resuélvase el problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el sistema una fuerza variable dada como función del tiempo (en Newtons) por* $32\cos 2t$*.*

Solución: $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{10}\cos 4t - \frac{11}{40}\operatorname{sen} 4t) + \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t$ (rég. transitorio y rég. estacionario).

0.1.0.2. Aplicación al estudio de circuitos eléctricos

La ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes aparece en multitud de fenómenos. Así la ecuación que rige un circuito RLC (veáse el ejemplo **??**) es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

El símil entre un sistema mecánico y un circuito RLC es total. La masa m es equivalente al

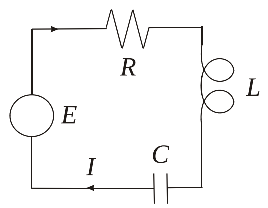

Figura 7: Circuito eléctrico.

coeficiente de autoinducción L, el coeficiente de amortiguamiento viscoso μ juega análogo papel que la resistencia R, la constante elástica del resorte k se convierte en $\frac{1}{C}$ (C es la capacidad del condensador), el desplazamiento $x(t)$ debe ser sustituido por la carga $Q(t)$ y la fuerza exterior $f(t)$ por la fuerza electromotriz $E(t)$.
Se invita al lector a interpretar físicamente las soluciones del circuito RLC.

Ejercicio 5 *Un circuito RLC de corriente alterna está formado por los siguientes elementos: una resistencia de 4* Ω*, un capacitor de* 4 *mF, un inductor de* 25 *mH y un fuente de voltaje* $V = 110\cos 60t$ *V. Determinar la carga* $Q(t)$ *en todo tiempo, si inicialmente la carga sobre el capacitor es cero y no fluye corriente por el circuito.*

Solución: $Q(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t - \frac{11}{52}e^{-80t}\cos 60t - \frac{187}{312}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t$.

Ejercicio 6 *Un circuito RLC está formado por un resistor* $R = 12\ \Omega$*, un capacitor* $C = 0{,}1$ *F y un inductor* $L = 2$ *H. Se conecta una fuente de voltaje que suministra* $20\cos 5t$ *V. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga en todo tiempo* t*.*

Solución: $Q(t) = -\frac{2}{13}\cos 5t + \frac{3}{13}\operatorname{sen} 5t - \frac{5}{52}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t}$.