CONCEPTOS GENERALES

Ecuación diferencial

Se llama ecuación diferencial a cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, respecto de una o más variables independientes.

Orden de una ecuación diferencial

Se denomina orden de una ecuación diferencial al de la derivada de orden más alto contenida en ella.

Ecuación diferencial ordinaria. Ecuación en derivadas parciales

Si en una ecuación diferencial sólo interviene una variable independiente, la ecuación diferencial se llama ordinaria y en caso contrario se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

$$\frac{dy}{dx} = 2y; \;\; \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} + 3y = \operatorname{sen} x; \;\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Las dos primeras son ecuaciones diferenciales ordinarias y la última en derivadas parciales. Los órdenes son, respectivamente uno, cuatro y dos.

Ecuación diferencial ordinaria

Se denomina ecuación diferencial ordinaria una ecuación del tipo

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

que liga la variable independiente x*, la función buscada* $y = y(x)$ *y las derivadas de ésta* $y'(x)$*,* $y''(x)$*, …,* $y^{(n)}(x)$ *.* F *es una función conocida.*

$y'' + 3y' + \cos y - \operatorname{sen} x = 0$	es una e.d.o. de segundo orden
$y' \log x = 0$	es una e.d.o. de primer orden
$2xy + e^{y'} + \operatorname{tg} y''' = 0$	es una e.d.o. de tercer orden
$y' = x + y^{100}$	es una e.d.o. de primer orden

Solución de una ecuación diferencial

Se denomina solución de una ecuación diferencial de n-ésimo orden en el intervalo (a, b) *a toda función* $y = \varphi(x)$ *que tiene en el intervalo citado derivadas de hasta n-ésimo orden inclusive y es tal que la sustitución de la función* $y = \varphi(x)$ *y de sus derivadas en la ecuación diferencial reduce ésta a una identidad, para cualquier valor de* x *en el intervalo* (a, b).

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. DEFINICIONES

Introducción

A partir de aquí, nos centramos ya en las ecuaciones de primer orden que, de acuerdo con las definiciones anteriores, serán de la forma

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

siendo F una función real de x, y e y'. Supondremos que y es la variable dependiente, x la variable independiente y que ambas son reales.

Soluciones de una ecuación diferencial de primer orden

> *Sea f una función real definida en un intervalo I y derivable en dicho intervalo. Se dice que f es una solución explícita en I de la ecuación $F\left(x, y, y'\right) = 0$, si al sustituir $y = f(x)$ en la ecuación diferencial, ésta se verifica, $\forall x \in I$. Es decir*
>
> $$F\left(x, f(x), f'(x)\right) = 0, \quad \forall x \in I$$

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. DEFINICIONES

Habrá algunos casos en los que no podremos obtener la solución en forma explícita $y = y(x)$ y tengamos que limitarnos a dar la solución como una relación del tipo $g(x, y) = 0$, diremos entonces que $g(x, y) = 0$ define una *solución en forma implícita* de la ecuación diferencial.

Ejemplo

La ecuación diferencial mas sencilla es la del tipo

$$y' = f(x)$$

donde $f(x)$ es una función conocida, continua en cierto intervalo (a, b); $y = y(x)$ es la función que buscamos. Ya ha aparecido una ecuación de este tipo en el tema del cálculo integral donde a partir de la función $f(x)$ se necesitaba hallar la primitiva de ésta $\mathcal{F}(x)$. Como se sabe, la función general que satisface la ecuación diferencial anterior tiene por expresión

$$y = \int f(x)dx = \mathcal{F}(x) + C$$

donde $\mathcal{F}(x)$ es una primitiva cualquiera para la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), y C es una constante arbitraria. De este modo, la función buscada $y = y(x)$ no es única.

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. DEFINICIONES

Del comentario anterior se desprende que una ecuación diferencial puede tener una infinidad de soluciones. Si de las infinitas soluciones queremos hallar una en concreto, deberemos prefijar cierta condición inicial $y(x_0) = y_0$. Geométricamente esto significa que se prefija un punto $M_0\,(x_0, y_0)$ por el cual ha de pasar la curva integral que estamos hallando.

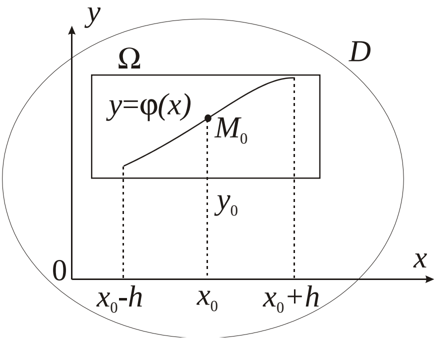

Figura: Problema de Valores Iniciales o Problema de Cauchy.

Teorema de existencia y unicidad del Problema de Cauchy

Sea la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

y supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en cierto dominio D en el plano xOy. Si existe un entorno Ω del punto $M_0(x_0, y_0) \in D$, en el que se cumple que la función $f(x, y)$ es continua y tiene derivada parcial acotada $\partial f / \partial y$ entonces existe una única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1), definida en un cierto intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ del eje Ox, que toma el valor y_0 cuando $x = x_0$.

Geométricamente esto significa que por el punto $M_0(x_0, y_0)$ pasa una, y sólo una, curva integral de la ecuación (1).
El teorema es de carácter local, es decir garantiza la existencia de la única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1) solamente en un entorno suficientemente pequeño del punto x_0.

Solución general

Llamaremos solución general de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$*, en cierto dominio* Ω*, en el que se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, a una familia de funciones* $y = \varphi(x, C)$ *dependientes de* x *y de una constante arbitraria* C *(parámetro), tal que:*
1) para cualquier valor real de la constante C *la función* $y = \varphi(x, C)$ *es solución de la ecuación diferencial*

$$\varphi_x'(x, C) \equiv f(x, \varphi(x, C))\,; \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

2) cualquiera que sea la condición incial $y|_{x=x_0} = y_0$*, se puede elegir un valor* C_0 *de la constante* C *tal que la solución* $y = \varphi(x, C_0)$ *satisface la condición inicial*

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0$$

Se supone que $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Solución Particular

> *Llamaremos soluciones particulares de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ a las soluciones que se obtienen de la solución general dando valores concretos a la constante arbitraria C. Por tanto, la solución general de la citada ecuación diferencial puede ser definida como el conjunto de las infinitas soluciones particulares de la ecuación.*

En el proceso de integración de una ecuación diferencial llegamos con frecuencia a la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

la cual prefija la solución general de la ecuación en forma implícita.
La ecuación anterior suele recibir el nombre de *integral general* de la ecuación diferencial (1).
La ecuación $\Phi(x, y, C_0) = 0$, donde C_0 es cierto valor concreto de la constante C, se llama *integral particular*.

Solución Singular

> *Una solución $y = \psi(x)$ de la ecuación diferencial (1) se llama singular, si en cada uno de sus puntos se perturba la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0) pasa, además de la solución citada, también otra solución de la ecuación (1) que no coincide con $y = \psi(x)$ en un entorno tan pequeño como se quiera del punto (x_0, y_0).*

La gráfica de la solución singular se denomina *curva integral singular* de la ecuación. Geométricamente dicha gráfica representa la envolvente de un haz de curvas integrales de la ecuación diferencial definidas por su integral general. (Recordemos que se llama envolvente de un haz de curvas $\Phi(x, y, C) = 0$ a una curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva del haz).
Por consiguiente, para que la ecuación (1) tenga solución singular, es necesario, que no se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Ecuaciones lineales
Llamaremos ecuaciones diferenciales lineales a aquellas de la forma

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Se puede demostrar que este tipo de ecuaciones siempre admiten como factor integrante $e^{\int f(x)dx}$. En primer lugar multiplicamos por el factor integrante

$$e^{\int f(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int f(x)dx}f(x)y = e^{\int f(x)dx}g(x)$$

véase que el primer miembro lo podemos poner como la derivada de un producto, por lo que se cumple

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx}y\right) = e^{\int f(x)dx}g(x)$$

Si ahora integramos los dos miembros de la igualdad anterior

$$e^{\int f(x)dx}y = \int e^{\int f(x)dx}g(x)dx + C$$

Por lo tanto la solución general es $y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx}g(x)dx + C\right)$