0.1. SISTEMAS DE ECUACIONES

0.1.1. Conceptos previos

Al comienzo del tema definimos los sistemas de ecuaciones diferenciales en general. En esta sección vamos a ver el caso particular en el que el sistema de ecuaciones diferenciales es lineal, que es el caso más común en los problemas de Ingeniería.

Definición 1 ***Sistema lineal***

Un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales y n funciones incógnitas $y_1(x), \cdots y_n(x)$ es de la forma

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + F_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)y_n(x) + F_2(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + F_n(x) \end{array} \right. \tag{1}$$

Definición 2 ***Solución de un sistema lineal***

Supongamos que $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots, f_n(x)$ son funciones derivables en un cierto intervalo I. Diremos que dichas funciones son solución en I de (1) si se verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1'(x) = a_{11}(x)f_1(x) + a_{12}(x)f_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)f_n(x) + F_1(x) \\ f_2'(x) = a_{21}(x)f_1(x) + a_{22}(x)f_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)f_n(x) + F_2(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) = a_{n1}(x)f_1(x) + a_{n2}(x)f_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)f_n(x) + F_n(x) \end{array} \right. \quad \forall x \in I$$

Vamos a definir el problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, de la misma forma que lo hicimos para una sola ecuación diferencial.

Definición 3 ***Problema de valores iniciales***

Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales (1) y dado un punto $x_0 \in I$ y n números reales $y_{1_0}, y_{2_0}, \cdots, y_{n_0}$, llamaremos problema de valores iniciales, al cálculo de n funciones $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots, f_n(x)$, definidas en I, que verifiquen el sistema (1) y cumplan las condiciones

$$f_1(x_0) = y_{1_0}, \; f_2(x_0) = y_{2_0}, \cdots, f_n(x_0) = y_{n_0} \tag{2}$$

A dichas condiciones se les denomina *condiciones iniciales.*
Por comodidad en la notación, vamos a ver cómo podemos expresar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en *forma vectorial* o con *notación vectorial*.

Con esta notación

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$\overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} y_{1_0} \\ y_{2_0} \\ \vdots \\ y_{n_0} \end{pmatrix}$$

$$\overline{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}$$

El sistema lineal de ecuaciones diferenciales, lo podemos expresar como

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x)$$

El problema de valores iniciales consiste en, dados $x_0 \in I$ e $\overline{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$, hallar $\overline{Y}(x)$ que verifique

$$\begin{cases} \overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x) \\ \overline{Y}(x_0) = \overline{Y}_0 \end{cases}$$

Vamos a exponer un teorema que nos permite asegurar la existencia y unicidad de solución, en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 1 ***Teorema de existencia y unicidad***

> *Supongamos que son continuas en el intervalo I, las funciones $a_{ij}(x)$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, y las funciones $F_i(x)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$.*
>
> *Entonces, para todo $x_0 \in I$, y para todo $\overline{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una y sólo una solución en I, del problema de valores iniciales*
>
> $$\begin{cases} \overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x) \\ \overline{Y}(x_0) = \overline{Y}_0 \end{cases}$$

Pasamos a estudiar los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales cuando el término independiente es nulo.

0.1.2. Sistemas lineales homogéneos

Llamaremos sistemas lineales homogéneos, aquellos en los que se cumple que las funciones $F_i(x) = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, o lo que es lo mismo

$$\overline{F}(x) = \overline{0}$$

por lo que serán de la forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) \end{cases}$$

En notación vectorial

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

Para resolver los sistemas lineales homogéneos necesitamos el concepto de dependencia lineal de funciones $\overline{f}(x) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que recordamos brevemente.

Definición 4

Dadas las funciones $\overline{f}_1(x)$, $\overline{f}_2(x)$, $\cdots, \overline{f}_m(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$, *decimos que son linealmente dependientes en* I*, si existen números reales* α_1, α_2, $\cdots$, α_m*, no todos nulos tales que*

$$\alpha_1\overline{f}_1(x) + \alpha_2\overline{f}_2(x), \ \cdots, \alpha_m\overline{f}_m(x) = \overline{0}, \ \forall x \in I$$

En caso contrario se dice que las funciones son linealmente independientes en I.

Una vez que hemos recordado el concepto de dependencia lineal en el espacio vectorial de las funciones, veamos cómo podemos hallar las soluciones de un sistema lineal homogéneo.

Definición 5 ***Sistema fundamental de soluciones***

Dado el sistema lineal homogéneo (3)*, decimos que el conjunto de soluciones de dicho sistema*

$$\{\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x)\}$$

es un sistema fundamental de soluciones en I *si las funciones*

$$\overline{Y}_1(x), \ \overline{Y}_2(x), \ \cdots, \overline{Y}_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ I \subset \mathbb{R}$$

son linealmente independientes en el intervalo I.

A continuación exponemos un teorema, através del cual definimos los conceptos de solución general y solución particular de un sistema lineal homogéneo.

Teorema 2

Cualquier solución del sistema (3), *en el intervalo* I, *la podemos expresar como combinación lineal de* $\overline{Y}_1(x)$, $\overline{Y}_2(x)$, $\cdots, \overline{Y}_n(x)$, *siendo*

$$\{\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x)\}$$

un sistema fundamental de soluciones, *en el intervalo* I, *de* (3), *por lo que a la expresión*

$$\overline{Y}(x) = C_1\overline{Y}_1(x) + C_2\overline{Y}_2(x) + \ \cdots + C_n\overline{Y}_n(x)$$

con C_1, C_2, $\cdots, C_n$, *constantes arbitrarias, le llamaremos solución general.*

A cada una de las soluciones que obtenemos a partir de la solución general, dando valores concretos a las constantes arbitrarias le llamaremos *solución particular*.
Acabamos de ver que para hallar la solución general del sistema lineal homogéneo (3) tendremos que hallar n soluciones y comprobar que son linealmente independientes, es decir comprobar que forman un sistema fundamental de soluciones.
Por ello vamos a estudiar a continuación algunos conceptos y teoremas que nos permitirán comprobar la independencia lineal.

Definición 6 ***Wronskiano***

Dadas las funciones $\overline{f}_1(x)$, $\overline{f}_2(x)$, $\cdots, \overline{f}_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, *de la forma*

$$\overline{f}_1(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) \\ f_{21}(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x) \end{pmatrix}; \ \overline{f}_2(x) = \begin{pmatrix} f_{12}(x) \\ f_{22}(x) \\ \vdots \\ f_{n2}(x) \end{pmatrix}; \ \cdots ; \overline{f}_n(x) = \begin{pmatrix} f_{1n}(x) \\ f_{2n}(x) \\ \vdots \\ f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

se llama wronskiano de dichas funciones a la función $W : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Teorema 3

Sean las funciones $\overline{Y}_1(x)$, $\overline{Y}_2(x)$, $\cdots, \overline{Y}_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$. *Supongamos que estas funciones son soluciones, en* I, *de*

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

Entonces dichas funciones son linealmente dependientes en I, *si y sólo si se verifica que*

$$W(x) = 0, \ \forall x \in I$$

Corolario 1 ***Caracterización de las soluciones linealmente independientes***

Las soluciones $\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ *del sistema*

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

son linealmente independientes en I*, si existe* $x \in I$ *tal que* $W(x) \neq 0$.

Vamos a enunciar un teorema que nos permitirá ampliar el teorema anterior, facilitándonos el estudio de la independencia lineal de las soluciones.

Teorema 4 ***Fórmula de Liouville***

Sean $\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ *soluciones en* I *de*

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

Denotemos por $W(x)$ *al wronskiano de dichas funciones y sea* $x_0 \in I$*. Entonces*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} Tr[A(t)]dt}, \quad \forall x \in I$$

siendo

$$Tr\,[A(t)] = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$$

es decir la traza de la matriz A.

A la vista de esta fórmula es inmediato deducir el siguiente corolario.

Corolario 2

O bien $W(x) = 0$ *para todo* $x \in I$*, o bien* $W(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 5 ***Caracterización de las soluciones linealmente independientes***

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones

$$\left\{\overline{Y}_1(x),\ \overline{Y}_2(x),\ \cdots, \overline{Y}_n(x)\right\}$$

del sistema

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

sean linealmente independientes en el intervalo I *es que* $W(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.

Pasamos a continuación a estudiar los sistemas homogéneos de coeficientes constantes.

0.1.3. Sistemas lineales homogéneos de coeficientes constantes

Estos sistemas de ecuaciones diferenciales son de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) \end{array}\right. \tag{4}$$

en donde los coeficientes son constantes, es decir $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$.
Podemos expresarlo en forma vectorial como

$$\overline{Y}'(x) = A \cdot \overline{Y}(x)$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz cuyos términos son números reales. Para hallar la solución, deben distinguirse dos casos, dependiendo que la matriz sea diagonalizable o no lo sea. En este libro estudiaremos sólo el caso en el que A es diagonalizable. Remitimos al lector a textos especializados en ecuaciones diferenciales para el estudio del segundo caso.

0.1.3.1. Matriz A diagonalizable

Cuando la matriz es diagonalizable la solución depende de cómo sean los valores propios.
Valores propios reales

Teorema 6 ***Valores propios reales***

> *Supongamos que tenemos n vectores propios $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\cdots, \overline{V}_n$, de la matriz A, linealmente independientes, asociados a los valores propios reales λ_1, λ_2, $\cdots, \lambda_n$. Entonces*
>
> $$\left\{e^{\lambda_1 x}\overline{V}_1,\ e^{\lambda_2 x}\overline{V}_2,\ \cdots, e^{\lambda_n x}\overline{V}_n\right\}$$
>
> *es un sistema fundamental de soluciones del sistema $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, y por tanto la solución general será*
>
> $$\overline{Y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\overline{V}_1 + C_2\ e^{\lambda_2 x}\overline{V}_2 + \ \cdots + C_n e^{\lambda_n x}\overline{V}_n$$

Demostración:
Vamos a ver que cada $e^{\lambda_i x}\overline{V}_i$ es solución de

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$$

Sabemos que debido a que $\overline{V}_i$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ_i, se verifica que

$$A \cdot \overline{V}_i = \lambda_i \overline{V}_i$$

por lo tanto

$$\left(e^{\lambda_i x}\overline{V}_i\right)' = e^{\lambda_i x}\lambda_i \overline{V}_i = e^{\lambda_i x}\left(A \cdot \overline{V}_i\right) = A\left(e^{\lambda_i x}\overline{V}_i\right)$$

es decir que en efecto $e^{\lambda_i x}\overline{V}_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, son soluciones del sistema (4).
Además de ser soluciones veamos que

$$\left\{e^{\lambda_1 x}\overline{V}_1,\ e^{\lambda_2 x}\overline{V}_2,\ \cdots, e^{\lambda_n x}\overline{V}_n\right\}$$

son linealmente independientes. En efecto, el wronskiano $W(x)$ de estas funciones en $x = 0$ coincide con el determinante de la matriz cuyas columnas serían los vectores $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \cdots, \overline{V}_n$ y dicho determinante es distinto de cero, por ser los vectores linealmente independientes, es decir $W(0) \neq 0$, por lo que

$$\left\{e^{\lambda_1 x}\overline{V}_1,\ e^{\lambda_2 x}\overline{V}_2,\ \cdots, e^{\lambda_n x}\overline{V}_n\right\}$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones del sistema $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, que es lo que queríamos demostrar. ¶

Ejemplo 1

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$$

Solución:
Como vimos anteriormente el sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$$

En primer lugar hallamos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)+(2)+(3)}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda+1)(-4-\lambda)^2 = -(\lambda+1)(\lambda+4)^2$$

Por lo que los valores propios serán $\lambda = -1$ (Simple) y $\lambda = -4$ (doble). A continuación calculamos los vectores propios asociados.

Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = -1$ son

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \overline{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \\ -3x_1 + 3x_2 &= 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = x_3\end{aligned}$$

Por tanto una base de vectores propios para este subespacio es

$$\overline{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = -4$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Por tanto como base de vectores propios para este subespacio, podemos escoger

$$\overline{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \overline{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una vez que hemos hallado los vectores propios, sabemos que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que la solución general es

$$\overline{Y}(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{-4x} \\ y_2(x) = C_1 e^{-x} - C_2 e^{-4x} \\ y_3(x) = C_1 e^{-x} - C_3 e^{-4x} \end{array} \right.$$

Nota. Obsérvese que aunque tenemos dos valores propios iguales, debido a que hay tres vectores propios linealmente independientes la matriz es diagonalizable. $\boxdot$

Ejemplo 2

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = 3y_1 + 3y_2 - y_3 \end{array} \right.$$

Solución:
Como vimos anteriormente el sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} ; \ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$$

En primer lugar hallamos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)-(2)}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2+\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Por lo que los valores propios serán $\lambda = 1$ (simple) y $\lambda = 2$ (doble). A continuación calculamos los vectores propios asociados.
Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ son

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 3x_2 \end{cases}$$

Por tanto una base de vectores propios para este subespacio es

$$\overline{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 2$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Por tanto como base de vectores propios para este subespacio, podemos escoger

$$\overline{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \overline{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez que hemos hallado los vectores propios, sabemos que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \ e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que la solución general es

$$\overline{Y}(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la siguiente forma

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} \\ y_2(x) = C_1e^x + C_3e^{2x} \\ y_1(x) = 3C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{2x} \end{array}\right.$$

$\boxdot$

Valores propios complejos
Vamos a comprobar que cuando la matriz A posee valores propios complejos, si $\lambda = a+bi$ es un valor propio complejo asociado al vector propio $\overline{V} = \overline{R} + \overline{S}i$, entonces $\lambda^* = a - bi$, es un valor propio asociado a $\overline{V}^* = \overline{R} - \overline{S}i$.
En efecto si λ es valor propio de la matriz A asociado al vector propio $\overline{V}$, se verifica que

$$A \cdot \overline{V} = \lambda\overline{V} \Longrightarrow A \cdot \left(\overline{R} + \overline{S}i\right) = \lambda \left(\overline{R} + \overline{S}i\right)$$

Si ahora tomamos conjugados en los dos miembros de la igualdad anterior y tenemos encuenta que A es una matriz real, se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} \left(A \cdot \left(\overline{R} + \overline{S}i\right)\right)^* & = & \left(\lambda \left(\overline{R} + \overline{S}i\right)\right)^* \Longrightarrow A \cdot \left(\overline{R} + \overline{S}i\right)^* = \lambda^*(\overline{R} + \overline{S}i)^* \\ & \Longrightarrow & A \cdot \left(\overline{R} - \overline{S}i\right) = (a - bi) \left(\overline{R} - \overline{S}i\right) \end{array}$$

Por lo que en efecto $\lambda^* = a - bi$ es valor propio asociado al valor propio $\overline{V}^* = \overline{R} - \overline{S}i$.
Por este motivo en el sistema fundamental de soluciones aparecerán las soluciones

$$\begin{array}{rcl} \overline{Y}_1(x) & = & e^{(a+bi)x}\overline{V} = e^{(a+bi)x} \left(\overline{R} + \overline{S}i\right) \\ \overline{Y}_2(x) & = & e^{(a-bi)x}\overline{V} = e^{(a-bi)x} \left(\overline{R} - \overline{S}i\right) \end{array}$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler estas soluciones las podemos expresar de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} \overline{Y}_1(x) & = & e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) \left(\overline{R} + \overline{S}i\right) \\ & = & \left[e^{ax} \cos bx\overline{R} - e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{S}\right] + i \left[e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{R} + e^{ax} \cos bx\overline{S}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{Y}_2(x) & = & e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx) \left(\overline{R} - \overline{S}i\right) \\ & = & \left[e^{ax} \cos bx\overline{R} - e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{S}\right] - i \left[e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{R} + e^{ax} \cos bx\overline{S}\right] \end{array}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{rcl} e^{ax} \cos bx\overline{R} - e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{S} & = & \operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] \\ e^{ax} \operatorname{sen} bx\overline{R} + e^{ax} \cos bx\overline{S} & = & \operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right] \end{array}$$

se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \overline{Y}_1(x) & = & \operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + i \operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right] \\ \overline{Y}_2(x) & = & \operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] - i \operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right] \end{array}$$

por lo que en la solución general aparecerían los sumandos

$$\begin{aligned}\overline{Y}(x) &= \cdots + K_1\overline{Y}_1(x) + K_2\overline{Y}_2(x) + \cdots \\ &= \cdots + K_1\left(\operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + i\operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right]\right) + K_2\left(\operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] - i\operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right]\right) + \cdots \\ &= \cdots + (K_1+K_2)\operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + (K_1-K_2)i\operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + \cdots\end{aligned}$$

Renombramos las constantes arbitrarias de la siguiente forma $K_1 + K_2 = C_1$ y $(K_1 - K_2)i = C_2$, con lo que la solución general será de la forma

$$\begin{aligned}\overline{Y}(x) &= \cdots + C_1\operatorname{Re}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + C_2\operatorname{Im}\left[\overline{Y}_1(x)\right] + \cdots \\ &= \cdots + C_1\operatorname{Re}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right] + C_2\operatorname{Im}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right] + \cdots\end{aligned}$$

Por tanto si al hallar los valores propios de la matriz diagonalizable A, tenemos valores propios complejos, la forma de hallar el sistema fundamental de soluciones lo podemos resumir de la siguiente forma.

Teorema 7 ***Valores propios complejos***

Si tenemos los valores propios complejos $\lambda = a \pm bi$, hallamos únicamente el vector propio $\overline{V}$, correspondiente al valor propio $a + bi$. Entonces en el sistema fundamental de soluciones del sistema

$$\overline{Y}'(x) = A(x)\cdot\overline{Y}(x)$$

aparecerán las funciones reales $\operatorname{Re}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right]$ y $\operatorname{Im}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right]$, es decir será de la forma

$$\left\{\cdots,\operatorname{Re}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right],\operatorname{Im}\left[e^{(a+bi)x}\overline{V}\right],\cdots\right\}$$

Ejemplo 3

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 4y_2 \end{array}\right.$$

Solución:
Como vimos anteriormente el sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x)\cdot\overline{Y}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};\ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

En primer lugar hallamos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$$

Por lo que los valores propios serán $\lambda = -1 + i$ y $\lambda = -1 - i$. A continuación calculamos el vector propio asociado a $a + bi = -1 + i$.

Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = -1 + i$ son

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (3-i)\,x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-3-i)\,x_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$(3-i)\,x_1 = 5x_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{3-i}{5} x_1$$

Si escogemos $x_1 = 5$, el vector propio asociado es

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$e^{(a+bi)x}\overline{V} = e^{(-1+i)x} \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} = e^{-x}(\cos x + i \operatorname{sen} x) \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i \right] =$$

$$= \left[e^{-x} \cos x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-x} \operatorname{sen} x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + i \left[e^{-x} \operatorname{sen} x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-x} \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

De aquí obtenemos

$$\operatorname{Re}\left[e^{(-1+i)x}\overline{V} \right] = e^{-x} \cos x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-x} \operatorname{sen} x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{-x} \cos x \\ 3e^{-x} \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\left[e^{(-1+i)x}\overline{V} \right] = e^{-x} \operatorname{sen} x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-x} \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{-x} \operatorname{sen} x \\ 3e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x \end{pmatrix}$$

Por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5e^{-x} \cos x \\ 3e^{-x} \cos x + e^{-x} senx \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5e^{-x} senx \\ 3e^{-x} senx - e^{-x} \cos x \end{pmatrix} \right\}$$

La solución general es

$$\overline{Y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5e^{-x} \cos x \\ 3e^{-x} \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5e^{-x} \operatorname{sen} x \\ 3e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = 5C_1 e^{-x} \cos x + 5C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x \\ y_2(x) = C_1 \left(3e^{-x} \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x \right) + C_2 \left(3e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos \right) x \end{array} \right.$$

$\boxdot$

Ejemplo 4

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{array} \right.$$

Solución:

El sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

En primer lugar hallamos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2 + 4$$

Por lo que los valores propios serán

$$\lambda = 2 + 2i \ \text{ y } \ \lambda = 2 - 2i$$

A continuación calculamos el vector propio asociado a $a + bi = 2 + 2i$. Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 2 + 2i$ son

$$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2ix_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 - 2ix_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x_1 = -2ix_2$$

Si escogemos $x_2 = 1$, el vector propio asociado es

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$e^{(a+bi)x}\overline{V} = e^{(2+2i)x} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2x}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} i \right] =$$

$$= \left[e^{2x} \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2x} \operatorname{sen} 2x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + i \left[e^{2x} \operatorname{sen} 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2x} \cos 2x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De aquí obtenemos

$$\operatorname{Re}\left[e^{(2+2i)x}\overline{V} \right] = e^{2x} \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2x} \operatorname{sen} 2x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \operatorname{sen} 2x \\ e^{2x} \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\left[e^{(2+2i)x}\overline{V} \right] = e^{2x} \operatorname{sen} 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2x} \cos 2x \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2x} \cos 2x \\ e^{2x} \operatorname{sen} 2x \end{pmatrix}$$

Por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2e^{2x} \operatorname{sen} 2x \\ e^{2x} \cos 2x \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -2e^{2x} \cos 2x \\ e^{2x} \operatorname{sen} 2x \end{pmatrix} \right\}$$

La solución general es

$$\overline{Y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{2x} \operatorname{sen} 2x \\ e^{2x} \cos 2x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2e^{2x} \cos 2x \\ e^{2x} \operatorname{sen} 2x \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la forma siguiente

$$\begin{cases} y_1(x) = 2C_1e^{2x}\operatorname{sen}2x - 2C_2e^{2x}\cos 2x \\ y_2(x) = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\operatorname{sen}2x \end{cases}$$

$\boxdot$

Finalizamos esta sección indicando que el caso en el que la matriz A no es diagonalizable, que debe resolverse apoyándose en la triangularización de matrices, no lo abordaremos en este libro. El alumno interesado deberá acudir a textos más especializados sobre ecuaciones diferenciales.

Ejercicio 1 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_2' = y_2 + y_3 \\ y_3' = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1\left(2e^x\cos x + e^x\operatorname{sen}x\right) + C_2\left(2e^x\operatorname{sen}x - e^x\cos x\right) + C_3e^x \\ y_2(x) = -C_1e^x\operatorname{sen}x + C_2e^x\cos x \\ y_3(x) = -C_1e^x\cos x - C_2e^x\operatorname{sen}x \end{cases}$$

Ejercicio 2 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -3y_1 - y_2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^{-x}\cos 3x + C_2e^{-x}\operatorname{sen}3x \\ y_2(x) = -C_1e^{-x}\operatorname{sen}3x + C_2e^{-x}\cos 3x \end{cases}$$

Ejercicio 3 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \\ y_2(x) = C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x} \\ y_3(x) = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x} \end{cases}$$

Ejercicio 4 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^x + (A-B)\cos x - (A+B)\operatorname{sen}x \\ y_2(x) = B\cos x + A\operatorname{sen}x \\ y_3(x) = C_1e^x + 2A\cos x - 2B\operatorname{sen}x \end{cases}$$

0.1.4. Sistemas lineales no homogéneos

Volvamos a considerar los sistemas no homogéneos, es decir aquellos de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + F_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)y_n(x) + F_2(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + F_n(x) \end{array}\right. \tag{1}$$

Recordemos que con la notación

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \\ \overline{Y}(x) & = & \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}; \ \overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} y_{1_0} \\ y_{2_0} \\ \vdots \\ y_{n_0} \end{pmatrix} \end{array}$$

el sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo, lo podemos expresar como

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x)$$

Veamos un teorema que nos permitirá hallar la solución general del sistema no homogéneo, habiendo hallado previamente la solución del sistema homogéneo asociado.

Teorema 8

Dado el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x) \tag{2}$$

suponiendo que $\overline{Y}_p(x)$ *es una solución particular del mismo y que*

$$\left\{\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x)\right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x)$, *entonces se verifica que la solución general del sistema lineal no homogéneo* (2) *es*

$$\overline{Y}(x) = C_1\overline{Y}_1(x) + C_2\overline{Y}_2(x) + \cdots + C_n\overline{Y}_n(x) + \overline{Y}_p(x)$$

Demostración:
Vamos a demostrar que en efecto la solución general del sistema lineal no homogéneo es igual a la solución general del sistema homogéneo asociado más una solución particular del no homogéneo. Para ello en el sistema (2) realizemos el cambio de variable siguiente

$$\overline{Y}(x) = \overline{Z}(x) + \overline{Y}_p(x)$$

Efectuando el cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\overline{Z}(x)+\overline{Y}_p(x)\right)' &= A(x)\cdot\left(\overline{Z}(x)+\overline{Y}_p(x)\right)+\overline{F}(x)\\ \overline{Z}'(x)+\overline{Y}'_p(x) &= A(x)\cdot\overline{Z}(x)+A(x)\cdot\overline{Y}_p(x)+\overline{F}(x)\end{aligned}$$

Debido a que $\overline{Y}_p(x)$ es solución particular de (2) se verifica

$$\overline{Y}'_p(x)=A(x)\cdot\overline{Y}_p(x)+\overline{F}(x)$$

y por tanto

$$\overline{Z}'(x)=A(x)\cdot\overline{Z}(x)$$

que es el sistema lineal homogéneo asociado, cambiando la variable $\overline{Y}(x)$ por $\overline{Z}(x)$.
Debido a que $\left\{\overline{Y}_1(x),\overline{Y}_2(x),\cdots,\overline{Y}_n(x)\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de este sistema lineal homogéneo, su solución general es

$$\overline{Z}(x)=C_1\overline{Y}_1(x)+C_2\overline{Y}_2(x)+\cdots+C_n\overline{Y}_n(x)$$

Por último si deshacemos el cambio de variable obtenemos

$$\overline{Y}(x)=\overline{Z}(x)+\overline{Y}_p(x)=\overline{Y}(x)=C_1\overline{Y}_1(x)+C_2\overline{Y}_2(x)+\cdots+C_n\overline{Y}_n(x)+\overline{Y}_p(x)$$

que es lo que queríamos demostrar. ¶
Por tanto para hallar la solución general de un sistema lineal no homogéneo necesitamos hallar, en primer lugar, la solución general del sistema homogéneo asociado y posteriormente una solución particular del no homogéneo, a continuación vamos a ver un método que nos permitirá hallar esta solución particular.

Teorema 9 ***Método de variación de las constantes***

Dado el sistema lineal de ecuaciones diferenciales $\overline{Y}'(x)=A(x)\cdot\overline{Y}(x)+\overline{F}(x)$ *y suponiendo que*

$$\left\{\overline{Y}_1(x),\overline{Y}_2(x),\cdots,\overline{Y}_n(x)\right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado $\overline{Y}'(x)=A(x)\cdot\overline{Y}(x)$, *entonces se verifica que*

$$\overline{Y}_p(x)=C_1(x)\overline{Y}_1(x)+C_2(x)\overline{Y}_2(x)+\cdots+C_n(x)\overline{Y}_n(x) \qquad (1)$$

es solución particular del sistema no homogéneo si las funciones $C_i(x)$, $\forall i=1,2,\cdots,n$ *verifican*

$$C'_1(x)\overline{Y}_1(x)+C'_2(x)\overline{Y}_2(x)+\cdots+C'_n(x)\overline{Y}_n(x)=\overline{F}(x) \qquad (2)$$

Demostración:
Para demostrarlo hallamos en primer lugar $\overline{Y}'_p(x)$

$$\begin{aligned}\overline{Y}'_p(x)=C_1(x)\overline{Y}'_1(x)+C_2(x)\overline{Y}'_2(x)+\cdots+C_n(x)\overline{Y}'_n(x)+\\ +C'_1(x)\overline{Y}_1(x)+C'_2(x)\overline{Y}_2(x)+\cdots+C'_n(x)\overline{Y}_n(x)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis del teorema, se verifica

$$\begin{aligned}\overline{Y}_p'(x) &= C_1(x)A(x)\cdot\overline{Y}_1(x) + C_2(x)A(x)\cdot\overline{Y}_2(x) + \cdots + C_n(x)A(x)\cdot\overrightarrow{Y_n}(x) + \overline{F}(x)\\ &= A(x)\cdot\big(C_1(x)\overline{Y}_1(x) + C_2(x)\overline{Y}_2(x) + \cdots + C_n(x)\overline{Y}_n(x)\big) + \overline{F}(x)\\ &= A(x)\cdot\overline{Y}_p(x) + \overline{F}(x)\end{aligned}$$

que es lo queríamos demostrar. ¶

Para aplicar el método de variación de las constantes, en primer lugar hallamos un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\{\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x)\}$$

y posteriormente planteamos el sistema (2) de n ecuaciones con n incógnitas, en el que las incógnitas son las funciones $C_i'(x)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Una vez halladas dichas incógnitas, integrando, hallamos $C_i(x)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Por último sustituyendo en (1) obtenemos la solución particular.

Obsérvese que (2) es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas compatible y determinado, debido a que el determinante de los coeficientes es el wronskiano de

$$\{\overline{Y}_1(x), \overline{Y}_2(x), \cdots, \overline{Y}_n(x)\}$$

y por tanto distinto de cero por ser un sistema fundamental de soluciones de un sistema lineal homogéneo.

Ejemplo 5

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 1 - e^{2x} \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 1 - e^{2x} \end{array}\right.$$

Solución:

El sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x)\cdot\overline{Y}(x) + \overline{F}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};\ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix};\ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - e^{2x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$$

En primer lugar resolvemos el sistema homogéneo asociado y para ello hallamos el polinomio característico de A.

$$\begin{aligned}|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)-(2)}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}\\ &= -\lambda\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} == -\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}\\ &= -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)\end{aligned}$$

Por lo que los valores propios serán $\lambda = 2$ (simple) y $\lambda = 0$ (doble). A continuación calculamos los vectores propios asociados.
Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ son

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Por tanto como base de vectores propios para este subespacio, podemos escoger

$$\overline{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \overline{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 2$ son

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ x_1 = x_2 \end{array} \right.$$

Por tanto una base de vectores propios para este subespacio es

$$\overline{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez que hemos hallado los vectores propios, sabemos que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ \overline{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{Y}_3(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculemos ahora una solución particular del sistema no homogéneo por el método de variación de las constantes.
Buscamos la solución particular de la forma

$$\overline{Y}_p(x) = C_1(x)\overline{Y}_1(x) + C_2(x)\overline{Y}_2(x) + C_3(x)\overline{Y}_3(x)$$

teniendo que verificarse el sistema de ecuaciones

$$C_1'(x)\overline{Y}_1(x) + C_2'(x)\overline{Y}_2(x) + C_3'(x)\overline{Y}_3(x) = \overline{F}(x)$$

Sustituyendo los valores obtenidos la solución particular es de la forma

$$\overline{Y}_p(x) = C_1(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3(x)e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A continuación planteamos el sistema de ecuaciones

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3'(x)e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - e^{2x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2'(x) + C_3'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) + C_3'(x)e^{2x} = 1 - e^{2x} \\ C_1'(x) + C_3'(x)e^{2x} = 1 - e^{2x} \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$1 - e^{2x} + C_2'(x) = 1 - e^{2x} \Longrightarrow C_2'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_3'(x) = 0 \\ C_1'(x) = 1 - e^{2x} \end{cases}$$

Integrando hallamos $C_2(x) = C_3(x) = 0$ y $C_1(x) = x - \frac{e^{2x}}{2}$. Sustituyendo estos valores obtenemos la solución particular

$$\overline{Y}_p(x) = \left(x - \frac{e^{2x}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(x - \frac{e^{2x}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución general es

$$\overline{Y}(x) = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(x - \frac{e^{2x}}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la siguiente forma

$$\begin{cases} y_1(x) = C_2 + C_3e^{2x} \\ y_2(x) = C_1 + C_2 + C_3e^{2x} + x - \frac{e^{2x}}{2} \\ y_3(x) = C_1 + C_3e^{2x} + x - \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$\boxdot$

Ejemplo 6

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 - y_2 + y_3 + x \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 + x \end{cases}$$

Solución:
El sistema lo podemos expresar como $\overline{Y}'(x) = A(x) \cdot \overline{Y}(x) + \overline{F}(x)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix};\ \overline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix};\ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

En primer lugar resovemos el sistema homogéneo asociado y para ello hallamos el polinomio característico de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$$

Por lo que los valores propios serán $\lambda = -2$ (simple) y $\lambda = 0$ (doble). A continuación calculamos los vectores propios asociados.
Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = 0$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Por tanto como base de vectores propios para este subespacio, podemos escoger

$$\overline{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \overline{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del subespacio propio asociado a $\lambda = -2$ son

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} x_3 = -2x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Por tanto una base de vectores propios para este subespacio es

$$\overline{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una vez que hemos hallado los vectores propios, sabemos que un sistema fundamental de soluciones es

$$\left\{ \overline{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{Y}_3(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculemos ahora una solución particular del sistema no homogéneo por el método de variación de las constantes. Buscamos la solución particular de la forma

$$\overline{Y}_p(x) = C_1(x)\overline{Y}_1(x) + C_2(x)\overline{Y}_2(x) + C_3(x)\overline{Y}_3(x)$$

teniendo que verificarse el sistema de ecuaciones

$$C_1'(x)\overline{Y}_1(x) + C_2'(x)\overline{Y}_2(x) + C_3'(x)\overline{Y}_3(x) = \overline{F}(x)$$

Sustituyendo los valores obtenidos la solución paticular es de la forma

$$\overline{Y}_p(x) = C_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3(x)e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A continuación planteamos el sistema de ecuaciones

$$C_1'(x)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2'(x)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_3'(x)e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\\x\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}C_1'(x)+C_3'(x)e^{-2x}=0\\C_2'(x)-C_3'(x)e^{-2x}=x\\C_1'(x)+C_2'(x)+2C_3'(x)e^{-2x}=x\end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$C_1'(x)+C_2'(x)e^{-2x}=x\Longrightarrow C_3'(x)=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}C_1'(x)=0\\C_2'(x)=x\end{array}\right.$$

Integrando hallamos $C_1(x)=C_3(x)=0$ y $C_2(x)=\frac{x^2}{2}$. Sustituyendo estos valores obtenemos la solución particular

$$\overline{Y}_p(x)=0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+0e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por lo que la solución general es

$$\overline{Y}(x)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Si desarrollamos los vectores, podemos expresar la solución general de la siguiente forma

$$\left\{\begin{array}{l}y_1(x)=C_1+C_3e^{-2x}\\y_2(x)=C_2-C_3e^{-2x}+\frac{x^2}{2}\\y_3(x)=C_1+C_2+2C_3e^{-2x}+\frac{x^2}{2}\end{array}\right.$$

$\boxdot$

Ejercicio 5 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{\begin{array}{l}y_1'=2y_1-5y_2+2\operatorname{sen}x+\cos x\\y_2'=y_1-2y_2+\operatorname{sen}x\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}y_1(x)=C_1(2\cos x-\operatorname{sen}x)+(C_2+x)(2\operatorname{sen}x+\cos x)\\y_2(x)=C_1\cos x+(C_2+x)\operatorname{sen}x\end{array}\right.$$

Ejercicio 6 *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{\begin{array}{l}y_1'=y_1+2y_2\\y_2'=-2y_1+y_2+2e^x\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}y_1(x)=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\operatorname{sen}2x+e^x\\y_2(x)=-C_1e^x\operatorname{sen}2x+C_2e^x\cos 2x\end{array}\right.$$

0.1.5. Sistemas de Cramer

Vamos a ver a continuación un método muy sencillo, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales que consiste en utilizar el operador derivada, que ya utilizamos anteriormente,

$$D = \frac{d}{dx}$$

Supongamos que tenemos que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, que expresado a través del operador D, es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}(D)y_1 + a_{12}(D)y_2 + \cdots + a_{1n}(D)y_n = F_1(x) \\ a_{21}(D)y_1 + a_{22}(D)y_2 + \cdots + a_{2n}(D)y_n = F_2(x) \\ \cdots \\ a_{n1}(D)y_1 + a_{n2}(D)y_2 + \cdots + a_{nn}(D)y_n = F_n(x) \end{cases}$$

en donde los coeficientes $a_{ij}(D)$ son polinomios, en el operador $D = \frac{d}{dx}$, de coeficientes reales. Se puede demostrar que el número de constantes independientes que deben intervenir en la solución general del sistema es "m", siendo m el grado del polinomio:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) & \cdots & a_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(D) & a_{n2}(D) & \cdots & a_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

El método de resolución consiste en despejar las incógnitas $y_1, y_2, \cdots, y_n$ por el método de Cramer, de la forma que veremos en los ejemplos, que exponemos a continuación. Si al hallar las incógnitas aparecen más de m constantes arbitrarias, habrá que hallar la relación entre ellas, para reducirlas a m.

Ejemplo 7

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' + y_2' + 3y_1 + 2y_2 = 4x^2 \\ y_1'' + y_2'' + y_1 = 4 \end{cases}$$

Solución:
Denotando $D = \frac{d}{dx}$, podemos escribir las anteriores ecuaciones como

$$\begin{cases} (D+3)y_1 + (D+2)y_2 = 4x^2 \\ (D^2+1)y_1 + D^2 y_2 = 4 \end{cases}$$

con lo cual, para hallar la solución del sistema aplicamos la regla de Cramer para calcular y_1 es decir:

$$y_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta}$$

y para no dividir por el operador D la escribimos como:

$$\Delta \cdot y_1 = \Delta y_1$$

Utilizamos el mismo procedimiento para calcular y_2

$$\begin{vmatrix} D+3 & D+2 \\ D^2+1 & D^2 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} 4x^2 & D+2 \\ 4 & D^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D+3 & D+2 \\ D^2+1 & D^2 \end{vmatrix} y_2 = \begin{vmatrix} D+3 & 4x^2 \\ D^2+1 & 4 \end{vmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} (D^2 - D - 2)y_1 = D^2(4x^2) - (D+2)(4) \\ (D^2 - D - 2)y_2 = (D+3)(4) - (D^2+1)(4x^2) \end{cases}$$

con lo que, haciendo operaciones resulta

$$\begin{cases} (D-2)(D+1)y_1 = 0 \\ (D-2)(D+1)y_2 = 4 - 4x^2 \end{cases}$$

La solución general de la primera ecuación diferencial es

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

mientras que la de la segunda es

$$y_2 = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} + y_p(x)$$

siendo $y_p(x)$ una solución particular de $(D^2 - D - 2)y_2 = 4 - 4x^2$, que vamos a calcular por el método de los coeficientes indeterminados. Así, sustituimos

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

en la ecuación diferencial, resultando

$$2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 4 - 4x^2$$

de lo que deducimos $-2A = -4, -2A - 2B = 0, 2A - B - 2C = 4$, con lo cual

$$A = 2, B = -A = -2, C = \frac{1}{2}(2A - B - 4) = 1 \Longrightarrow u_p = 2x^2 - 2x + 1$$

y la solución del sistema debe ser de la forma

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \\ y_2 = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} + 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que el determinante del sistema, $D^2 - D - 2$, es un polinomio en D de grado dos, en la solución general del mismo sólo deben aparecer dos constantes arbitrarias. Para encontrar la relación entre las constantes obtenidas, impondremos que las funciones y_1 e y_2 calculadas verifiquen, efectivamente, el sistema. Si sustituimos en la primera de las ecuaciones, obtendremos

$$5c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{-x} + 4k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} + 4x^2 = 4x^2$$

de donde hallamos

$$5c_1 + 4k_1 = 0, 2c_2 + k_2 = 0 \Longrightarrow k_1 = -\frac{5}{4}c_1, k_2 = -2c_2$$

y concluimos que la solución del sistema es

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \\ y_2 = -\frac{5}{4}c_1e^{2x} - 2c_2e^{-x} + 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$\boxdot$

Ejemplo 8

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y = -36t \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y = -2e^t \end{array}\right\}$$

Obtener la solución tal que: $x = 0, y = 1$ *para* $t = 0$.

Solución:

Denotaremos $D = \frac{d}{dt}$ con lo cual obtenemos el sistema algebraico

$$\left.\begin{array}{l} Dx - 4x - y = -36t \\ Dy + 2x - y = -2e^t \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (D-4)x - y = -36t \\ 2x + (D-1)y == -2e^t \end{array}\right\}$$

Aplicamos la regla de Cramer para calcular x, esto es,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

y para no dividir por el operador D la escribimos como:

$$\Delta \cdot x = \Delta x$$

$$\begin{vmatrix} D-4 & -1 \\ 2 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -36t & -1 \\ -2e^t & D-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (D^2 - 5D + 6)x &= (D-1)(-36t) - 2e^t \\ x'' - 5x' + 6x &= -36 + 36t - 2e^t \end{aligned}$$

Hemos reducido el sistema a una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Como el determinante del sistema es un polinomio de grado dos, en la solución general del mismo sólo deben aparecer dos constantes arbitrarias. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea asociada

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

La ecuación característica $k^2 - 5k + 6 = 0$ tiene por raíces $k = 2$ y $k = 3$, luego

$$x_h = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación completa. Como el segundo miembro es $f(t) = -36 + 36t - 2e^t$, descomponemos en

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Para $f_1(t) = 36t - 36$ ensayamos $x = t^\lambda P(t) = (At + B)$.Tenemos $x = At + B$, $x' = A$, $x'' = 0$. De donde

$$\begin{gathered} 0 - 5A + 6(At + B) = 36t - 36 \\ 6A = 36 \to A = 6 \\ -5A + 6B = -36 \to B = -1 \\ x_{p1} = 6t - 1 \end{gathered}$$

De igual modo para $f_2(t) = -2e^t$ ensayamos $x = t^\lambda \cdot e^t \cdot P(t) = Ae^t$. Tenemos $x = Ae^t$, $x' = Ae^t$, $x'' = Ae^t$. De donde

$$\begin{gathered} Ae^t - 5Ae^t + 6Ae^t = -2e^t \\ 2A = -2 \to A = -1 \\ x_{p2} = -e^t \end{gathered}$$

Es decir la solución particular buscada es

$$x_p = x_{p1} + x_{p2} = 6t - 1 - e^t$$

Luego

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 6t - 1 - e^t$$

Si sustituimos en la primera ecuación

$$y = \frac{dx}{dt} - 4x + 36t$$

$$y = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} + 6 - e^t - 4\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + 6t - 1 - e^t\right) + 36t$$

$$y(t) = -2c_1 e^{2t} - c_2 e^{3t} + 3e^t + 12t + 10$$

Así obtenemos $y(t)$ en función de las mismas constantes arbitrarias c_1 y c_2.
En cuanto a la solución particular:

$$\text{para } t = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = 0; & 0 = c_1 + c_2 - 2 \\ y = 1; & 1 = -2c_1 - c_2 + 13 \end{array} \right\}$$

$$1 = -c_1 + 11 \to \quad c_1 = 10 : \quad c_2 = -8$$

$\boxdot$

Ejemplo 9

Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_2' - 2y_1 - 4y_2 = e^x \\ y_1' + y_2' - y_2 = e^{4x} \end{array} \right.$$

Solución:

Denotando $D = \frac{d}{dx}$, podemos escribir las anteriores ecuaciones como

$$\begin{cases} (D-2)y_1 + (D-4)y_2 = e^x \\ Dy_1 + (D-1)y_2 = e^{4x} \end{cases}$$

y hallamos la solución del sistema aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{vmatrix} D-2 & D-4 \\ D & D-1 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} e^x & D-4 \\ e^{4x} & D-1 \end{vmatrix}$$

es decir

$$(D+2)y_1 = (D-1)\, e^x - (D-4)\, e^{4x}$$

con lo que, haciendo operaciones resulta

$$(D+2)y_1 = 0$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$y_1 = ce^{-2x}$$

Para calcular y_2 operamos en el sistema de la siguiente forma

$$\begin{cases} y_1' + y_2' - 2y_1 - 4y_2 = e^x \\ y_1' + y_2' - y_2 = e^{4x} \end{cases} \Longrightarrow y_2 - 2y_1 - 4y_2 = e^x - e^{4x} \Longrightarrow y_2 = \frac{1}{3}\left(e^{4x} - e^x - 2y_1\right)$$

Por tanto la solución general del sistema es

$$\begin{cases} y_1 = ce^{-2x} \\ y_2 = \frac{1}{3}\left(e^{4x} - e^x - 2ce^{-2x}\right) \end{cases}$$

$\boxdot$

Ejemplo 10

Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} 2y_1' - 2y_2' - 3y_1 = x \\ 2y_1' + 2y_2' + 3y_1 + 8y_2 = 2 \end{cases}$$

Solución:
Denotando $D = \frac{d}{dx}$, podemos escribir las anteriores ecuaciones como

$$\begin{cases} (2D-3)y_1 - 2Dy_2 = x \\ (2D+3)y_1 + (2D+8)y_2 = 2 \end{cases}$$

y hallamos la solución del sistema aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{vmatrix} 2D-3 & -2D \\ 2D+3 & 2D+8 \end{vmatrix} y_1 = \begin{vmatrix} x & -2D \\ 2 & 2D+8 \end{vmatrix}$$

es decir

$$8(D^2 + 2D - 3)y_1 = (2D+8)\, x + 2D\,(2) = 2 + 8x$$

con lo que, haciendo operaciones resulta

$$(D^2 + 2D - 3)y_1 = x + \frac{1}{4}$$

La solución general de esta ecuación diferencial lineal de segundo orden es

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{x}{3} - \frac{11}{36}$$

Para calcular y_2 operamos en el sistema de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_1' - 2y_2' - 3y_1 = x \\ 2y_1' + 2y_2' + 3y_1 + 8y_2 = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow 4y_1' + 8y_2 = x + 2 \Longrightarrow y_2 = \frac{1}{8}\left(x + 2 - 4y_1'\right)$$

Por tanto la solución general del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{r} y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{x}{3} - \frac{11}{36} \\ y_2 = -\frac{1}{2} c_1 e^x + \frac{3}{2} c_2 e^{-3x} + \frac{x}{8} + \frac{5}{12} \end{array} \right.$$

$\boxdot$

Ejercicio 7 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'' - y_2' = x + 1 \\ y_1' + y_2' - 3y_1 + y_2 = 2x - 1 \end{array} \right.$$

Solución: $y_1 = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{9}x;\; y_2 = 3c_1 + c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} + \frac{17}{9} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x.$

Ejercicio 8 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_1' + y_2' + y_1 = 3x^2 \\ y_1' + y_2' - y_1 - y_2 = 3x^2 - x^3 \end{array} \right.$$

Solución: $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x};\; y_2 = -3c_1 e^x - c_2 e^{-x} + x^3.$

Ejercicio 9 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) - x(t) + y''(t) + y(t) = 0 \\ x'(t) + 2x(t) + y'(t) + 2y(t) = 0 \end{array} \right.$$

Solución: $x = Ae^{-2t};\; y = -\frac{3}{5}Ae^{-2t}.$

Ejercicio 10 *Resolver mediante el método de Cramer el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) + x(t) + y'(t) = -5e^{2t} \\ x''(t) - x(t) + y''(t) = -13e^{2t} \end{array} \right.$$

Solución: $x = Be^{-t} + e^{2t};\; y = A - 4e^{2t}.$