INTRODUCCIÓN

- Cuando planteamos el problema de hallar *una* solución de una **ecuación en derivadas parciales** de segundo orden, que, además de verificar la ecuación, satisfaga ciertas condiciones suplementarias, no suele ser un método eficaz el calcular la solución general de la ecuación y después imponer las condiciones suplementarias.

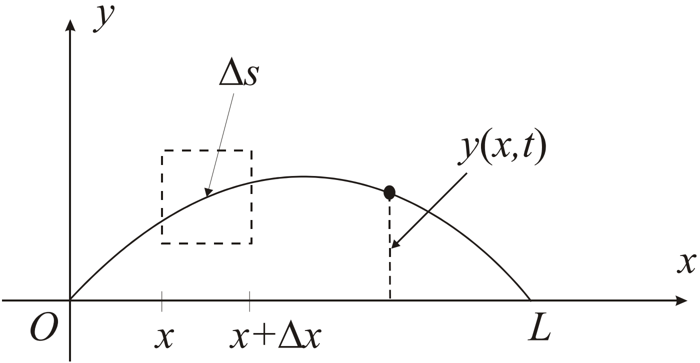
- En primer lugar, porque puede ser imposible hallar la solución general de la ecuación y, en segundo lugar, porque aún en el caso de que se pueda hallar dicha solución, el determinar las funciones arbitrarias que aparecen en la solución general suele ser costoso y, a menudo, imposible.

- Para este tipo de problemas, el método más utilizado es el **método de separación de variables** que vamos a estudiar a continuación.

- Vamos a hacer una introducción a este método a través de problemas físicos, como es **el problema de la cuerda vibrante**, que es el primero de los que vamos a estudiar.

EDP. ECUACIÓN DE ONDA

- En el plano OXY se sitúa una cuerda elástica tensa con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(L,0)$. Suponemos que cada punto de la cuerda, de abscisa x con $0 < x < L$, se desplaza verticalmente al eje OX a una altura $f(x)$ y que, desde esa posición, en el instante $t = 0$, se abandona la cuerda, con una velocidad inicial en cada punto x, del intervalo $0 < x < L$, dada por una función conocida $g(x)$.



EDP. ECUACIÓN DE ONDA

- Es evidente que, a partir de ese instante $t = 0$, la cuerda inicia un movimiento vibratorio y que si denotamos por y el desplazamiento, en la dirección OY, de cada punto de la cuerda, entonces y será una función que dependerá de x (es decir, del punto de la cuerda) y de t (el instante de tiempo en el que estemos). Pues bien, trataremos de determinar dicho desplazamiento $y(x, t)$.

- Se demuestra que $y(x, t)$ verifica la llamada **ecuación de ondas unidimensional**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Supongamos que se verifican además las siguientes condiciones suplementarias:

EDP. ECUACIÓN DE ONDA

- En primer lugar, las *condiciones iniciales:*

$$y\left(x,0\right)=f\left(x\right),\quad 0<x<L$$

que indica la posición de la cuerda en el instante $t=0$.

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left(x,0\right)=g\left(x\right),\quad 0<x<L$$

que indica la velocidad inicial de cada punto de la cuerda.

- En segundo lugar, condiciones relativas a los extremos de la cuerda, también denominadas *condiciones de contorno:*

$$y\left(0,t\right)=y\left(L,t\right)=0, t\geq 0$$

que indican que la cuerda está fija en los extremos.

EDP. ECUACIÓN DE ONDA

Así pues, el problema a resolver está formado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \geq 0,\ 0 < x < L \\ y(0,t) = y(L,t) = 0 & t \geq 0 \\ y(x,0) = f(x)\,; \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Vamos a ver cómo se resuelve dicho problema por el **método de separación de variables**.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Para resolver este problema por el método de separación de variables, se empieza por suponer que la ecuación tiene una solución de la forma

$$y\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)$$

donde X es una función que depende únicamente de x y T es una función que depende únicamente de t. Por tanto

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X\left(x\right)T''\left(t\right); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=X''\left(x\right)T\left(t\right)$$

Imponiendo ahora que se verifique la ecuación, resulta

$$XT''=c^2X''T$$

A continuación separamos las variables, obteniendo

$$\frac{T''}{T}=c^2\frac{X''}{X}$$

Las funciones del primer miembro dependen únicamente de t, mientras que las del segundo miembro dependen únicamente de x.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Hemos obtenido una expresión en la cual, el primer miembro depende exclusivamente de t y el segundo miembro depende exclusivamente de x.

Luego para que se cumpla la igualdad, la única posibilidad es que ambos miembros sean igual a un parámetro λ, independiente tanto de t como de x.

Llegamos así a **dos ecuaciones diferenciales ordinarias** que deben satisfacer las funciones X y T :

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \lambda \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T'' - \lambda T = 0 \\ X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0 \end{array} \right.$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Ahora consideremos las **condiciones de frontera o de contorno.**
Como $y(x,t) = X(x)\,T(t)$, la condición de contorno

$$y(0,t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

se transforma en

$$X(0)\,T(t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

de lo que deducimos que $X(0) = 0$, pues si fuera $T(t) = 0,\ \forall t \geq 0$, al sustituir en $y(x,t)$ llegaríamos a la solución trivial $y(x,t) \equiv 0$, que podemos despreciar, pues estamos suponiendo que, efectivamente, la cuerda se mueve.
De la misma forma, la condición de contorno

$$y(L,t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

se transforma en $X(L) = 0$, con lo que llegamos a que X ha de satisfacer el siguiente **problema de Sturm-Liouville:**

$$\begin{cases} X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Este **problema de Sturm-Liouville l**o resolvemos de la forma siguiente.

Para calcular las funciones propias estudiaremos los distintos casos para los posibles valores de λ.

1) Caso $\lambda = 0$.
La solución general de la ecuación $X'' = 0$ es

$$X = C_1 + C_2 x$$

y, al imponer las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$, obtenemos

$$C_1 = C_2 = 0$$

por lo que en este caso sólo existe la solución trivial.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

2) Caso $\lambda > 0$. Podemos suponer $\lambda = \alpha^2$, con $\alpha > 0$.
En este caso la ecuación diferencial

$$X'' - \frac{\alpha^2}{c^2} X = 0$$

tiene por raíces de la ecuación característica

$$\pm \frac{\alpha}{c}$$

La solución general de esta ecuación es

$$X = C_1 e^{\frac{\alpha}{c} x} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{c} x}$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$X(0) = X(L) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{\alpha}{c} L} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{c} L} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, no existe solución distinta de la trivial para $\lambda > 0$.

3) Caso $\lambda < 0$. Podemos suponer $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha > 0$.
En este caso la ecuación diferencial

$$X'' + \frac{\alpha^2}{c^2} X = 0$$

tiene por raíces de la ecuación característica

$$\pm \frac{\alpha}{c} i$$

La solución general de esta ecuación es

$$X = C_1 \cos \frac{\alpha}{c} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} x$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$X(0) = X(L) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} L = 0 \end{cases}$$

Para obtener soluciones no triviales, exigimos que

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} L = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{c} L = n\pi$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Con lo que vemos que los únicos valores de α que nos interesan son

$$\alpha_n = \frac{n\pi c}{L}, \; n = 1, 2, ...$$

- Por tanto, los llamados **valores propios** del problema de contorno de Sturm-Lioiuville son:

$$\lambda_n = -\alpha_n^2 = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2}$$

- Y las llamadas **funciones propias** del problema de contorno de Sturm-Lioiuville son:

$$X_n = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Volvamos ahora a la ecuación diferencial que tiene que verificar T

$$T'' - \lambda T = 0$$

y vamos a resolverla, pero solamente para los valores λ_n que nos interesan, con lo que obtenemos la ecuación

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} T = 0$$

cuyas soluciones son

$$T_n = A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

De esta forma, si sustituimos en

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

obtenemos una sucesión de funciones

$$y_n = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t \right), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

o bien, agrupando las constantes

$$y_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t \right), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

- De momento, hemos hallado una sucesión de funciones y_n, $n \in N$, que verifican la ecuación en derivadas parciales que tenemos que resolver y las condiciones de contorno.

- Por tanto, ahora debemos lograr que se satisfagan también las dos **condiciones iniciales**.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

En general, no es posible encontrar una función de la sucesión de las y_n que verifique dichas condiciones.

Por ello, lo que vamos a hacer es construir, a partir de las y_n, una nueva función $y(x,t)$ mediante la serie:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Longrightarrow y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

Supondremos que en dicha serie se puede derivar término a término.

- De esta forma, si conseguimos hallar A_n y B_n de forma que $y(x,t)$ verifique las condiciones iniciales, habremos obtenido lo que se llama una **solución formal** del problema propuesto.

APLICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER

Ahora bien, como

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(-A_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

las condiciones iniciales se transforman en

$$\begin{aligned} y(x,0) &= f(x),\ 0 < x < L \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = f(x),\ 0 < x < L \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) &= g(x),\ 0 < x < L \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = g(x),\ 0 < x < L \end{aligned}$$

- Por tanto, deberemos **desarrollar** $f(x)$ y $g(x)$ **en serie de Fourier de**

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

en el intervalo $0 < x < L$, (**desarrollo de medio rango**) para identificar los coeficientes buscados y así queda resuelto el problema planteado.

EJEMPLO

Resolver, por el método de separación de variables, el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \geq 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ y(x,0) = \operatorname{sen}^2 x,\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución:
Manteniendo la notación anterior tenemos $c = \frac{2}{3}$ y $L = \pi$, con lo que la solución del problema es de la forma

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \left(A_n \cos \frac{2nt}{3} + B_n \operatorname{sen} \frac{2nt}{3} \right)$$

EJEMPLO

Al imponer las condiciones iniciales, resulta

$$\begin{aligned} y\,(x,0) &= \operatorname{sen}^2 x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}^2 x,\ 0 < x < \pi \\ \frac{\partial y}{\partial t}\,(x,0) &= \operatorname{sen} x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3} B_n \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} x,\ 0 < x < \pi \end{aligned}$$

De la segunda condición, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} B_1 &= 1 \Longrightarrow B_1 = \frac{3}{2} \\ B_n &= 0,\ \forall n > 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO

Para calcular los coeficientes A_n, debemos desarrollar la función

$$\operatorname{sen}^2 x,\ 0 < x < \pi$$

en serie de $\operatorname{sen} nx$.

Sin más que operar se obtiene que A_n

$$A_n = \frac{-4\left[1-(-1)^n\right]}{\pi n\,(n+2)\,(n-2)} \Longrightarrow \begin{cases} A_{2n} = 0 \\ A_{2n-1} = -\frac{8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n-3)} \end{cases}$$

EJEMPLO

Teniendo en cuenta los coeficientes A_n y B_n que hemos obtenido, la solución es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \left(A_n \cos \frac{2nt}{3} + B_n \operatorname{sen} \frac{2nt}{3} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \operatorname{sen} (2n-1)\, x \cos \frac{2\,(2n-1)\, t}{3} + B_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2t}{3} \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2t}{3} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2n-1)\, x}{(2n-1)\,(2n+1)\,(2n-3)} \cos \frac{2\,(2n-1)\, t}{3}$$