# SERIES DE FOURIER

**Introducción**

En numerosos problemas de ingeniería aparecen funciones periódicas que se necesitan aproximar mediante sumas de las funciones trigonométricas seno y coseno, lo que conduce a las series de Fourier.

Las series de Fourier admiten más posibilidades de aplicación que las series de Taylor, ya que muchas funciones discontinuas se pueden desarrollar en serie de Fourier pero, por supuesto, no tienen representación en serie de Taylor. Recordemos que para que una función $f(x)$ admita serie de Taylor en el punto $x = a$ es condición necesaria que sea indefinidamente derivable en ese punto.

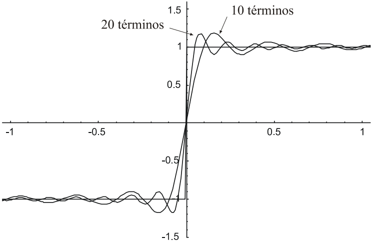



Figura: Serie de Fourier.

**Coeficientes de Fourier**

Vamos a suponer que una serie trigonométrica converge, por lo que su suma será una cierta función $f(x)$. Si suponemos que $f(x)$ es continua, se tiene[1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

Si la serie se puede integrar término a término (por ejemplo, si la convergencia es uniforme), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nxdx \right) \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

[1] En los puntos de discontinuidad veremos más adelante que no se cumple la igualdad.

# DEFINICIÓN DE SERIE DE FOURIER

Por otra parte, para $k \geq 1$, multiplicando (1) por $\cos kx$, e integrando, teniendo en cuenta las fórmulas de ortogonalidad, se obtiene

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx dx \right) \\
&= a_k \pi
\end{aligned}
$$

de donde

$$
a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx
$$

# DEFINICIÓN DE SERIE DE FOURIER

De igual modo, para $k \geq 1$, multiplicando (1) por $\operatorname{sen} kx$, e integrando, teniendo en cuenta las fórmulas de ortogonalidad, se obtiene

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx dx \right) \\
&= b_k \pi
\end{aligned}
$$

de donde

$$
b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx
$$

Los cálculos anteriores dan lugar al siguiente concepto:

**Coeficientes de Fourier. Serie de Fourier**

*Sea $f(x)$ una función periódica de periodo $2\pi$, real e integrable sobre $[-\pi, \pi]$. Se definen los coeficientes de Fourier de $f(x)$ por*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

*La serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

*se dice que es la serie de Fourier asociada a $f(x)$ o generada por $f(x)$ y se denota*[2]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

[2] El sentido de esta notación se comprenderá mejor cuando veamos la convergencia de las series de Fourier.

# CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

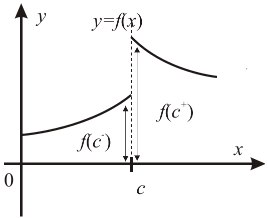
Antes de dar las condiciones de convergencia veamos una definición:

**Función monótona a trozos**

> *Una función $f(x)$ es monótona a trozos en el intervalo $[a, b]$ si dicho intervalo se puede dividir en un número finito de subintervalos $(a, x_1)$, $(x_1, x_2)$, ... , $(x_{n-1}, b)$ de tal modo que la función sea o bien monótona creciente, o bien monótona decreciente en cada uno de estos intervalos.*

Se ve fácilmente que si la función $f(x)$ es monótona a trozos y está acotada en el intervalo $[a, b]$, entonces únicamente puede tener puntos de discontinuidad de primera especie.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c^-), \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+)$$



**Condiciones suficientes de convergencia**

*Sea $f(x)$ una función periódica, de periodo $2\pi$, monótona a trozos y acotada en el intervalo $(-\pi, \pi)$ . Entonces la serie de Fourier, correspondiente a esta función, es convergente en todos los puntos y además la suma de dicha serie $S(x)$ es igual al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función. Si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función, la suma de la serie es*

$$S(x)\big|_{x=c} = \frac{f(c^-) + f(c^+)}{2}$$

*siendo $f(c^-) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$, y $f(c^+) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.*

La mayor parte de las funciones con las que nos encontramos en los problemas de física e ingeniería verifican las condiciones de este teorema y no tendremos dificultades en relación a la convergencia de las series de Fourier. Cuando una función verifique las condiciones del teorema diremos entonces que *admite desarrollo en serie de Fourier o que es representable en serie de Fourier*.

# PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

**Traslación del intervalo**

*Dada una función* $\psi(x)$, *periódica de periodo* $2\pi$, *se verifica*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx$$

*cualquiera que sea* $\lambda$.

Lo que nos dice esta propiedad es que la integral de una función periódica $\psi(x)$ en un intervalo cualquiera de longitud igual al periodo tiene siempre el mismo valor. La podemos ilustrar gráficamente de la siguiente forma: las áreas sombreadas en la figura son iguales.

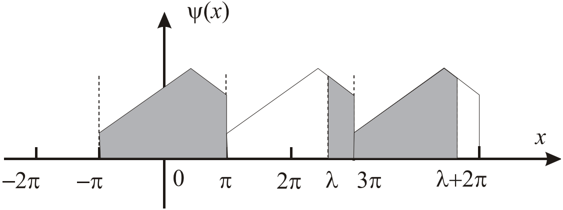



Figura: Traslación del intervalo.

De esta propiedad se deduce fácilmente que, en las fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier, podemos sustituir el intervalo de integración $(-\pi, \pi)$ por otro $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, siendo $\lambda$ un número real cualquiera. Por tanto podemos poner

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx\,dx \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

siendo $\lambda$ el valor real que más nos convenga.
Para deducir estas fórmulas hemos tenido en cuenta que si la función $f(x)$ es periódica de periodo $2\pi$, las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)\,\mathrm{sen}\, nx$ son también funciones periódicas de periodo $2\pi$.

**Series senoidal y cosenoidal**
Supongamos que $f(x)$ es una función par, desarrollable en serie de Fourier. Entonces aplicando las propiedades de las funciones pares e impares, los coeficientes de Fourier de $f(x)$ serán

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nxdx = 0 \end{aligned}$$

con lo cual, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ se reduce a una serie de cosenos de la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

# PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Si la función $f(x)$ es impar, de nuevo usando el mismo razonamiento, se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nxdx \end{aligned}$$

y la serie de Fourier asociada se reducirá a una serie de senos de la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\, nx$$

**Funciones de periodo arbitrario**
Sea $f(x)$ una función de periodo $2l$. Efectuemos el cambio de variable:

$$x = \frac{l}{\pi} t$$

Ahora, la función $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ es una función periódica, de periodo $2\pi$ en la variable $t$. En efecto

$$f(x + 2l) = f(x)$$

$$f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi} t + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$$

Ahora desarrollamos esta función en serie de Fourier en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) dt, \;\; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \cos nt dt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \operatorname{sen} nt dt$$

# PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Ahora deshacemos el cambio de variable y volvemos a la variable original $x$

$$x = \frac{l}{\pi} t \ , \qquad t = x \frac{\pi}{l} \ , \qquad dt = \frac{\pi}{l} dx$$

Entonces tendremos que los coeficientes de Fourier serán

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n \tfrac{\pi}{l} x dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} n \tfrac{\pi}{l} x dx \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La fórmula (1) la podemos expresar de la siguiente forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \right) \tag{3}$$

donde los coeficientes $a_0$, $a_n$, $b_n$, se calculan según las fórmulas (2). Esta es la serie de Fourier de una función periódica de periodo $2l$.

**Funciones no periódicas.**
Supongamos que tenemos definida en un cierto intervalo $[a, b]$ una función $f(x)$ acotada y monótona a trozos. Vamos a ver que aunque $f(x)$ no es periódica, también la podemos representar por una serie de Fourier.

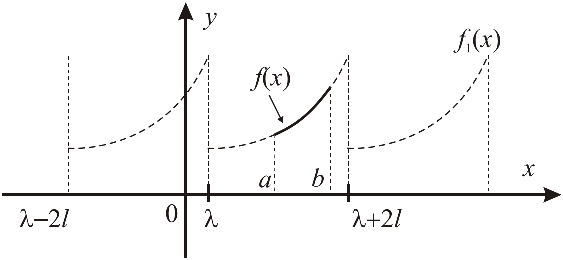



Figura: Desarrollo de una función no periódica.

Para ello, definiremos una *función auxiliar* arbitraria, periódica, monótona a trozos y acotada, $f_1(x)$, de periodo $2l \geq |b-a|$, de tal forma que coincida con la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. De alguna forma hemos prolongado la definición de la función $f(x)$, consiguiendo una función periódica.

**Desarrollos de medio rango**

En muchos problemas de ingeniería se necesita hallar el desarrollo en serie de Fourier para funciones $f(x)$ que únicamente están definidas en el intervalo $0 \leq x \leq l$ y sobre este intervalo se desea representar $f(x)$ mediante una serie de Fourier. Esto lo podemos hacer de distintas formas según construyamos la función auxiliar $f_1(x)$. En este sentido, es fundamental cómo definamos la función en el intervalo $-l < x < 0$. Por brevedad, sólo estudiaremos los tres casos más importantes.

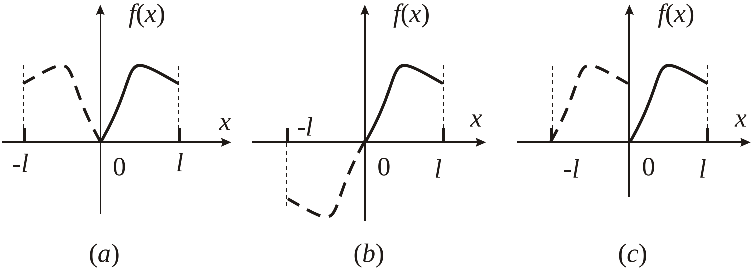



Figura: (a) Extensión par. (b) Extensión impar. (c) Repetición.

# DESARROLLOS DE MEDIO RANGO

a) Será una *serie cosenoidal* de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad (0 \leq x \leq l)$$

y los coeficientes tendrán la forma

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \qquad n = 1, 2, \ \ldots$$

b) Será una *serie senoidal* de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \qquad (0 \leq x \leq l)$$

y los coeficientes tendrán la forma

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x dx, \qquad n = 1, 2, \ \ldots$$

c) No será ni *serie senoidal*, ni co*senoidal* y ya vimos cómo hallaríamos su desarrollo.