PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

Introducción

En primer lugar analizamos la forma autoadjunta de una ecuación lineal homogénea de segundo orden. Dada la ecuación

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$$

donde las $a_i(x)$ son continuas en $[a,b]$ y $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$, obtenemos

$$e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} y'\right] + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} y = 0$$

Si llamamos $p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$ y $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$, la ecuación queda

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + q(x)\,y = 0$$

Esta es la *forma autoadjunta* de la ecuación diferencial lineal de 2^o orden.

PROBLEMA HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Problema homogéneo de contorno de Sturm-Liouville

El problema homogéneo de contorno de Sturm-Liouville consiste en
1.- La ecuación lineal homogénea de segundo orden, expresada en forma autoadjunta

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0, \;\; a \leq x \leq b$$

en donde p *es derivable con continuidad en* $[a, b]$, q *y* r *son continuas en* $[a, b]$, λ *es un parámetro real y* $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.
2.- Dos condiciones de contorno de la forma

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

en donde se cumple que $|a_1| + |a_2| > 0$ *y* $|b_1| + |b_2| > 0$.

A lo largo del tema supondremos que se cumplen todas las hipótesis del problema.

PROBLEMA HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Valores propios

Se llaman valores propios, valores característicos, o autovalores, a los valores reales de λ para los que el problema de contorno de Sturm-Liouville posee alguna solución distinta de la trivial en $[a, b]$.

Funciones propias

Si λ_1 es un valor propio del problema de Sturm-Liouville, por lo cual existirá al menos una solución distinta de la trivial de

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\, y'\right] + \left[q(x) + \lambda_1 r(x)\right] y = 0, \; a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

entonces de cualquier solución no trivial de este problema decimos que es una función propia, función característica, o autofunción, asociada al valor propio λ_1.

Ejemplo

Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ 0 \le x \le \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solución:

Denotamos por D al operador derivada, por lo que podemos expresar la ecuación diferencial en la forma

$$\left(D^2 + \lambda\right) y = 0$$

con lo que las soluciones dependerán de las raíces del polinomio característico $D^2 + \lambda$ y tendremos que estudiar los tres casos siguientes.

1) Caso $\lambda = 0$.
En este caso la solución general de la ecuación será

$$y = c_1 + c_2 x$$

por lo que, imponiendo las condiciones de contorno, obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \pi = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, existe únicamente la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ no es un valor propio.

2) Caso $\lambda < 0$.
En este segundo caso, hacemos $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, por lo que las raíces de $D^2 + \lambda$ son $\pm\alpha$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Si ahora imponemos las condiciones de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = 0 \end{array} \right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi} & e^{-\alpha\pi} \end{vmatrix} = e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}$$

por lo que, el determinante es distinto de cero (solamente sería cero si $-\alpha\pi = \alpha\pi \Longrightarrow \alpha = 0$); por tanto, existe únicamente la solución trivial, por lo que no hay valores propios para $\lambda < 0$.

PROBLEMA HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

3) Caso $\lambda > 0$.
En este tercer caso, podemos hacer $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, con lo que las raíces de $D^2 + \lambda$ son $\pm\alpha i$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$$

Si imponemos la condiciones de contorno, nos queda que

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen} \alpha\pi = 0 \end{array} \right.$$

Ahora, para que existan soluciones no triviales, debe cumplirse que $\operatorname{sen} \alpha\pi = 0$, por lo que $\alpha = n \in \mathbb{N}$ y los valores propios son $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$
Suponiendo que $\lambda_n = n^2$, vemos que son soluciones todas las de la forma $y = c_1 \cos nx + c_2 \operatorname{sen} nx$, con $c_1 = 0$, por tanto las funciones propias asociadas a

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

son

$$y_n = k_n \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Problema no homogéneo de contorno

A continuación, vamos a estudiar el problema de contorno en el que la ecuación diferencial es no homogénea, por lo que ahora tendremos

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = f(x)\,,\ a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

en donde suponemos que las hipótesis son las mismas que las del problema homogéneo y que la función f es continua en el intervalo $[a, b]$.

Comencemos estudiando la existencia de solución para tal problema.

Proposición

Si λ no es valor propio del problema de contorno homogéneo, entonces el problema no homogéneo tiene solución única.

Resolución del problema no homógeneo

Vamos a ver ahora un método, basado en las series de Fourier, para calcular la solución del problema no homogéneo.

Denotamos L el operador lineal

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\, y'\right] + q(x)\, y$$

con lo que el problema a resolver es de la forma

$$\begin{cases} L(y) + \lambda r(x)\, y = f(x), \; a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Suponemos conocidos los valores propios λ_n del problema homogéneo asociado, así como las correspondientes funciones propias ϕ_n, y vamos a intentar el cálculo de la solución del problema no homogéneo por medio de

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

hallando las constantes A_n de forma que la serie anterior sea solución del problema planteado.

PROBLEMA NO HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término, al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n L\left(\phi_n\left(x\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n r\left(x\right)\phi_n\left(x\right) = f\left(x\right), \quad a \leq x \leq b$$

Y como $\phi_n\left(x\right)$ es función propia correspondiente al valor propio λ_n del problema homogéneo, se tiene

$$L\left(\phi_n\left(x\right)\right) + \lambda_n r\left(x\right)\phi_n\left(x\right) = 0 \Longrightarrow L\left(\phi_n\left(x\right)\right) = -\lambda_n r\left(x\right)\phi_n\left(x\right)$$

Por ello

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n r\left(x\right)\phi_n\left(x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n r\left(x\right)\phi_n\left(x\right) = f\left(x\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda - \lambda_n\right) A_n \phi_n\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{r\left(x\right)}, \quad a \leq x \leq b$$

Y como $\frac{f(x)}{r(x)}$ es una función bien definida $(r(x) > 0)$, podremos calcular (en ciertos casos) un desarrollo de la forma

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b$$

Con lo que, llegaríamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) A_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b$$
$$A_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}$$

y obtenemos, suponiendo $\lambda \neq \lambda_n$, los coeficientes A_n que buscábamos y, por tanto, la que llamaremos *solución formal*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \phi_n(x)$$

Ejemplo
Hallar una solución formal del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 1, \ 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

(Suponemos que λ no es valor propio del problema homogéneo asociado).
Solución:
Anteriormente, resolvimos el problema homogéneo asociado y obtuvimos como valores propios, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y, como funciones propias asociadas, $y_n = k_n \operatorname{sen} nx$.
Así pues, debemos hallar la solución del problema no homogéneo por medio de

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx$$

PROBLEMA NO HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial (suponiendo que la serie se puede derivar término a término), tenemos en $0 \le x \le \pi$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n \operatorname{sen} nx + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx = 1$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\lambda - n^2\right) \operatorname{sen} nx$$

Por tanto, debemos desarrollar $f(x) = 1$, $0 \le x \le \pi$ en serie de senos. Para lo cual, construimos $F(x)$ como la extensión impar de $f(x)$ a $[-\pi, \pi]$, es decir

$$F(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

PROBLEMA NO HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Si suponemos $F(x)$ extendida periódicamente a $\mathbb{R}$, es evidente que $F(x)$ es monótona a trozos y acotada en $[-\pi, \pi]$ (y además continua), con lo que se cumple que

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{con } b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx \end{aligned}$$

Si particularizamos a $[0, \pi]$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Por tanto, los coeficientes B_n que necesitamos hallar tienen que cumplir

$$B_n\left(\lambda - n^2\right) = b_n \Longrightarrow B_n = \frac{b_n}{\lambda - n^2}$$

PROBLEMA NO HOMOGÉNEO DE STURM-LIOUVILLE

Resolviendo las integrales que intervienen en b_n, obtenemos

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)|_0^{\pi}}{n} = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n} = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos(n\pi))}{n}$$

Por lo que:

$$\begin{cases} \text{Si n es par} & b_n = 0 \\ \text{Si n es impar} & b_n = \frac{4}{\pi n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_{2n} = 0 \\ B_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)[\lambda-(2n-1)]} \end{cases}$$

Por lo que la solución buscada es

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)[\lambda-(2n-1)]} \operatorname{sen}(2n-1)x$$