0.1. Ecuación del calor

Supongamos que situamos un alambre sobre el eje x, con $x = 0$ en el extremo izquierdo del alambre y $x = L$ en el extremo derecho. Si denotamos por u la temperatura del alambre, entonces u dependerá del tiempo t y de la posición x medida sobre el alambre. Tomaremos como hipótesis que el alambre es delgado y, por consiguiente, u será constante en una sección transversal del alambre, correspondiente a un valor fijo de x. También supondremos que el alambre se encuentra aislado, y así el calor no entra ni sale a través de la superficie del mismo.

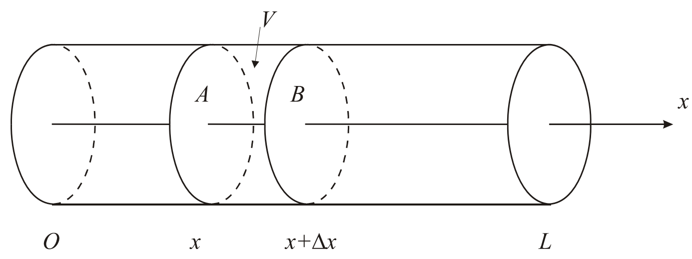

Figura 1: Ecuación del calor.

Con el fin de desarrollar un modelo para el flujo del calor a través del alambre delgado, consideremos un pequeño elemento de volumen V de alambre comprendido entre las dos secciones transversales planas A y B que son perpendiculares al eje de las x, con el plano A situado en x y el plano B en $x + \Delta x$ (veáse la figura 1).
La temperatura en el plano A en el instante t es $u(x,t)$ y en el plano B es $u(x + \Delta x, t)$. Consideraremos los siguientes principios de física que describen el flujo de calor.
- *Conducción de calor*: la razón de flujo de calor (cantidad de calor por unidad de tiempo que fluye a través de una unidad de área transversal en A) es proporcional a $\partial u/\partial x$, el gradiente de temperatura en A. La constante de proporcionalidad k se llama conductividad térmica del material.
- *Dirección del fujo de calor*: la dirección del flujo del calor siempre es desde los puntos de mayor temperatura hacia los puntos de menor temperatura.
- *Capacidad calorífica específica*: la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad Δu es $cm\Delta u$, donde la constante c es la capacidad calorífica específica del material.
Si suponemos que H es la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través de la superficie A durante un intervalo de tiempo Δt, entonces la fórmula de la conducción de calor es

$$H(x) = -ka\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

donde a es el área de la sección transversal del alambre. El signo menos viene del segundo principio: si $\partial u/\partial x$ es positiva, entonces el calor fluye de derecha a izquierda (del foco caliente al foco frío).
Del mismo modo, la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano

B durante un intervalo de tiempo Δt es

$$H(x+\Delta x) = -ka\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)$$

El cambio neto de calor ΔH en el volumen V es la cantidad que entra en el extremo A, menos la cantidad que sale por el extremo B. Esto es

$$\Delta H = H(x) - H(x+\Delta x) = ka\Delta t \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$$

Teniendo en cuenta el tercer principio, el cambio neto de calor está dado por $\Delta H = cm\Delta u$, donde Δu es el cambio de la temperatura y c es la capacidad calorífica específica. Si se supone que el cambio de temperatura en el volumen V es esencialmente igual al cambio de temperatura en x, esto es $\Delta u = u(x, t+\Delta t) - u(x,t)$, y que la masa del volumen V de alambre es $a\delta\Delta x$, donde δ es la densidad del alambre, a es el área de la sección transversal y x es la longitud, entonces tenemos que

$$\Delta H = c\delta a\Delta x\left[u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\right]$$

Igualando las expresiones del cambio de calor obtenemos

$$ka\Delta t \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] = c\delta a\Delta x\left[u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\right]$$

Si ahora dividimos ambos miembros por Δx y Δt y luego tomamos límites cuando Δx y Δt tienden a cero, obtenemos

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = c\delta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

o bien

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

siendo la constante positiva $\beta = k/\delta c$ la *difusividad* del material. La ecuación (1) se llama *ecuación del flujo de calor unidimensional.*

La ecuación (1) determina el flujo de calor en el alambre. Pero además tenemos otras dos restricciones en el problema original. En primer lugar, consideramos que los extremos del alambre se mantienen a temperatura constante, por ejemplo a 0 ^{o}C. Así que se verifica

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{2}$$

para todo t. Estas se llaman *condiciones de frontera.* En segundo lugar, suponemos que la distribución de temperatura inicial es $f(x)$. Es decir, se debe cumplir que

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L \tag{3}$$

A la ecuación (3) se le denomina *condición inicial* en u.

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) se tiene el siguiente modelo matemático de flujo de calor en un alambre cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante de 0 ^{o}C

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Este modelo es otro ejemplo de un *problema de valores inicial y de frontera.*

0.1.0.1. Método de separación de variables

Para resolver este problema por el método de separación de variables, se empieza por suponer que la ecuación (1) tiene una solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

donde X es una función que depende únicamente de x y T es una función que depende únicamente de t. Para determinar X y T, en primer lugar se calculan las derivadas parciales de la función u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\,T'(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t)$$

Sustituyendo estas expresiones en (1) obtenemos

$$X(x)\,T'(t) = \beta X''(x)\,T(t)$$

y, separando las variables, la ecuación se convierte en

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{4}$$

Vemos ahora que las funciones del primer miembro de (4) dependen únicamente de t, mientras que las del segundo miembro dependen únicamente de x. Puesto que x y t son variables independientes entre sí, el primer y el segundo miembro de (4) deben ser iguales a algún parámetro real λ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \lambda$$

lo cual también podemos expresar en la forma

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{y} \quad T'(t) - \beta\lambda T(t) = 0$$

En consecuencia para soluciones separables, se ha reducido el problema de resolver la ecuación en derivadas parciales a resolver las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que acabamos de obtener.
Antes de continuar, consideremos las condiciones de frontera dadas en (2). Puesto que $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, estas condiciones son

$$X(0)\,T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X(L)\,T(t) = 0, \quad t > 0$$

Si fuera $T(t) = 0$ para todo $t > 0$, implicaría que $u(x,t) \equiv 0$, que sería la solución trivial, por lo que se tendrá que verificar

$$X(0) = X(L) = 0$$

Ignorando la solución trivial, se combinan las condiciones de frontera con la ecuación diferencial en X y se obtiene el problema se Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Para calcular las funciones propias estudiaremos los distintos casos para los posibles valores de λ.
1) Caso $\lambda > 0$.
En este caso, las raíces de la ecuación característica son $\pm\alpha$, siendo $\lambda = \alpha^2,\ \alpha > 0$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(L) = C_1 e^{\alpha L} + C_2 e^{-\alpha L} = 0 \end{cases}$$

vemos que $C_2 = -C_1$. Por tanto se verifica que

$$C_1(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) = 0 \Longrightarrow C_1\left(e^{2\alpha L} - 1\right) = 0$$

Como se ha supuesto $\lambda > 0$, resulta que $\left(e^{2\alpha L} - 1\right) > 0$. Por lo tanto C_1 y, en consecuencia, C_2, son iguales a cero. Por tanto, no existe solución distinta de la trivial para $\lambda > 0$.
2) Caso $\lambda = 0$.
Aquí $r = 0$ es una raíz doble de la ecuación característica, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Las condiciones de frontera originan las ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 L = 0 \end{cases}$$

las cuales implican que $C_1 = C_2 = 0$. Consecuentemente, para $\lambda = 0$, no existe solución no trivial.
3) Caso $\lambda < 0$.
En este caso, las raíces de la ecuación característica son $\pm\alpha$, siendo $\lambda = -\alpha^2, \alpha > 0$. Por tanto, la solución general es

$$X(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \operatorname{sen}\alpha x$$

En esta ocasión las condiciones de frontera $X(0) = X(L) = 0$ dan lugar al sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos\alpha L + C_2 \operatorname{sen}\alpha L = 0 \end{cases}$$

Puesto que $C_1 = 0$, el sistema se reduce a resolver $C_2 \operatorname{sen}\alpha L = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\alpha L = 0$ ó $C_2 = 0$. Ahora bien, $\operatorname{sen}\alpha L = 0$ solamente si $\alpha L = n\pi$, donde n es un entero positivo. Por consiguiente, tiene una solución no trivial ($C_2 \neq 0$) cuando $\alpha L = n\pi$ o $\lambda = -(n\pi/L)^2,\ n = 1, 2, 3, ...$
Además las soluciones no triviales (funciones propias) X, correspondientes al valor propio $\lambda = -(n\pi/L)^2$, están dadas por

$$X_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los valores a_n son constantes arbitrarias distintas de cero.
Habiendo obtenido que $\lambda = -\left(n\pi/L\right)^2$ para algún entero positivo n, consideremos ahora la segunda ecuación con $\lambda = -\left(n\pi/L\right)^2$

$$T'\left(t\right) + \beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\left(t\right) = 0$$

Para cada $n = 1, 2, 3, ...$, la solución general de la ecuación lineal de primer orden es

$$T_n\left(t\right) = b_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Para cada $n = 1, 2, 3, ...$ se obtiene la función

$$u_n\left(x,t\right) = X_n\left(x\right) T_n\left(t\right) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) b_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

y, agrupando las constantes,

$$u_n\left(x,t\right) = c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De la misma forma que hicimos en la ecuación de onda, constuimos a partir de las u_n, una nueva función u como la serie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Longrightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Las constantes c_n las determinamos utilizando la condición inicial. Esto da lugar a

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right), \quad 0 < x < L$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f\left(x\right), \quad 0 < x < L$$

Por tanto, debemos desarrollar $f\left(x\right)$ en serie de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, en el intervalo $0 < x < L$, de donde podremos obtener los coeficientes buscados y resolver nuestro problema.

Ejemplo 1

Resolver, por el método de separación de variables, el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 100 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución:
Si mantenemos la notación, $\beta = 1, L = \pi$ y $f(x) = 100$, la solución del problema es de la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

Ahora imponemos la condición inicial $u(x,0)=100,\ 0<x<\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx = f(x), \quad f(x)=100, \quad 0<x<\pi$$

Por consiguiente, para determinar los coeficientes c_n habrá que desarrollar en el intervalo $[0,\pi]$ la función $f(x)$ en serie senoidal

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

siendo

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100 \operatorname{sen} nx dx = -\left[\frac{200}{n\pi}\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{200}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$\begin{cases} b_{2n}=0 \\ b_{2n-1}=\frac{400}{(2n-1)\pi} \end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{(2n-1)\pi}\operatorname{sen}(2n-1)x, \quad \forall x\in[0,\pi]$$

Vemos, al identificar los desarrollos, que $c_n=b_n$ y, por tanto, la solución es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{(2n-1)\pi}e^{-(2n-1)^2 t}\operatorname{sen}(2n-1)x$$

$\boxdot$

Ejemplo 2

Resolver, por el método de separación de variables, el problema

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=3\operatorname{sen}2x-6\operatorname{sen}5x & 0<x<\pi \end{cases}$$

Solución:
De la misma forma que en el ejemplo anterior: $\beta=7,\ L=\pi$, por lo que la solución será

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-7n^2 t}\operatorname{sen} nx$$

Imponiendo la condición inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx,\ 0<x<\pi$

$3\operatorname{sen}2x-6\operatorname{sen}5x=c_1\operatorname{sen}x+c_2\operatorname{sen}2x+c_3\operatorname{sen}3x+c_4\operatorname{sen}4x+c_5\operatorname{sen}5x+c_6\operatorname{sen}6x+...$

De esta forma, hallamos los coeficientes $c_2=3$, $c_5=-6$ y $c_n=0$ para $n\neq 2$ y $n\neq 5$.
Por tanto, la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_2 e^{-7\cdot 2^2 t}\operatorname{sen}2x + c_5 e^{-7\cdot 5^2 t}\operatorname{sen}5x \\ u(x,t) &= 3e^{-28t}\operatorname{sen}2x-6e^{-175t}\operatorname{sen}5x \end{aligned}$$

$\boxdot$

Ejemplo 3

Consideramos una varilla metálica aislada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0 ^oC, y tomamos como eje de referencia OX, el eje de la varilla con origen O en un extremo de la misma. Denotamos por $T(x,t)$ la temperatura en el instante t del punto de la varilla que tiene abscisa x. Se supone que la ecuación diferencial de la variación de temperaturas es $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$. Si la temperatura inicial es $T(x,0) = f(x)$, hallar T, por el método de separación de variables, con $f(x) = 100 \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

Solución:

El problema a resolver es la ecuación de calor con las condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t} & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ T(0,t) = 0, \ T(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ T(x,0) = 100 \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Si mantenemos la notación, $\beta = 1, L = \pi$ y $f(x) = 100 \operatorname{sen} x$, y la solución del problema es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

Ahora imponemos la condición inicial $T(x,0) = 100 \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx = 100 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$$

Por consiguiente, en este caso para determinar los coeficientes c_n no hay que desarrollar $f(x)$, sino simplemente identificar

$$c_1 = 100; \quad c_n = 0, \quad \forall n \neq 1$$

Por tanto, la solución reduce la serie al primer término que es

$$T(x,t) = 100 e^{-t} \operatorname{sen} x$$

En la figura 2 vemos la distribución de temperatura en la varilla, $T(x,t)$, para diferentes valores de t, que van desde $t = 0{,}01$ hasta $t = 1$.

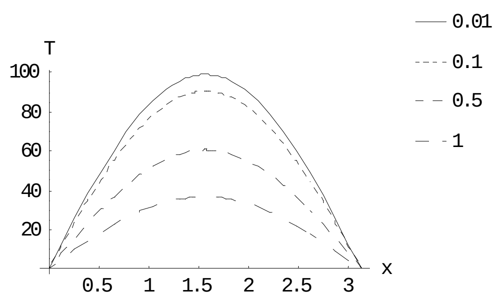

Figura 2: Distribución de temperatura en la varilla.

$\boxdot$

0.2. Ecuación de Laplace

Supongamos que tenemos una partícula A de masa M, fija en un punto P_0, y una partícula B de masa m que puede tomar varias posiciones P en el espacio. Entonces, la partícula A atrae a la B.

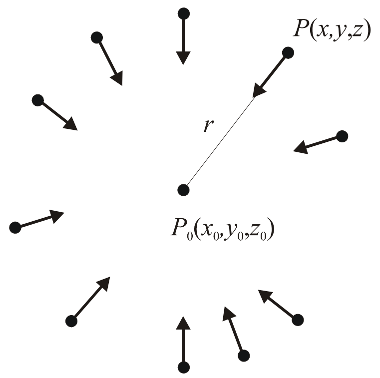

Figura 3: Campo gravitacional.

Como ya sabemos, de acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza gravitacional $\overline{F}$ correspondiente está dirigida de P hacia P_0 y su módulo es proporcional a $\frac{1}{r^2}$, donde r es la distancia entre P y P_0, es decir

$$\left|\overline{F}\right| = \frac{c}{r^2}$$

en donde $c = G \cdot M \cdot m$ y G es la constante gravitacional $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8} cm^3/g \cdot s^2$. Observamos que

$$\overline{r} = (x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$\overline{F} = \left|\overline{F}\right| \left(-\frac{\overline{r}}{r}\right) = -c\frac{\overline{r}}{r^3} = -c\frac{x - x_0}{r^3}\overline{i} - c\frac{y - y_0}{r^3}\overline{j} - c\frac{z - z_0}{r^3}\overline{k}$$

Esta función vectorial describe la fuerza gravitacional que actúa sobre B. Vamos a comprobar que $\overline{F}$ es el gradiente de la función f dada por

$$f\,(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{c}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{c\,(x-x_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{c\,(y-y_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{c\,(z-z_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{c\,(x-x_0)}{r^3};\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{c\,(y-y_0)}{r^3};\quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{c\,(z-z_0)}{r^3}$$

Y en efecto

$$\overline{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k} \Longrightarrow \overline{F} = \overline{\nabla} f$$

Si hallamos ahora las derivadas parciales siguientes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{c}{r^3} + \frac{3c\,(x-x_0)^2}{r^5};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{c}{r^3} + \frac{3c\,(y-y_0)^2}{r^5};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{c}{r^3} + \frac{3c\,(z-z_0)^2}{r^5}$$

vemos que se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{3c}{r^3} + \frac{3c\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]}{r^5} = -\frac{3c}{r^3} + \frac{3c}{r^3} = 0$$

Y obtenemos la llamada *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Otro interesante problema físico que nos lleva a la ecuación de Laplace, es el siguiente. Consideremos una lámina rectangular de material conductor de calor de espesor uniforme. Sea $\{(x,y)\,/\,0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ una cara de la lámina. Suponemos que las caras de la lámina están aisladas y que el calor puede entrar y salir sólo por los bordes.

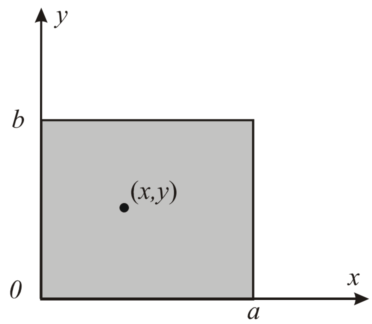

Figura 4: Lámina rectangular.

Suponemos que el flujo de calor en cada punto del interior de la lámina en la dirección perpendicular al plano xy es idéntico. Si llamamos $u(x,y)$ a la temperatura en el punto (x,y), se puede demostrar que en estado estacionario se cumple la ecuación de Laplace (en dos dimensiones)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

y las condiciones de contorno variarán en cada problema concreto que se nos plantee. Por ejemplo, vamos a resolver la ecuación de Laplace con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0 & 0\le y\le b;\ a>0 \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=f(x) & 0\le x\le a;\ b>0 \end{cases}$$

0.2.0.2. Método de separación de variables

De la misma forma que en los ejemplos anteriores, buscamos la solución de la forma

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

Derivando $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Y(y)\,X''(x)$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=XY''(y)$ y sustituyendo en la ecuación de Laplace

$$YX''+XY''=0\Longrightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$$

El primer miembro de esta ecuación es función únicamente de x y el segundo miembro es función únicamente de y. Por tanto los dos miembros de la igualdad han de ser iguales a un parámetro real λ. Obtenemos entonces las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ Y''+\lambda Y=0 \end{cases}$$

Consideramos las condiciones de contorno $u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,\ 0\le y\le b$, y tenemos

$$X(0)\,Y(y)=0,\quad X(a)\,Y(y)=0,\quad 0\le y\le b$$

Despreciando la solución trivial, se tiene que cumplir

$$X(0)=0,\quad X(a)=0$$

Así que la solución $X(x)$ ha de ser una solución no trivial del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=0;\ X(a)=0 \end{cases}$$

Vamos a estudiar ahora los valores de λ que producen soluciones no triviales.
1) Caso $\lambda=0$.
La solución general es $X=c_1+c_2x$ e imponiendo las condiciones de frontera

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(a)=0 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} c_1+c_2 0=0 \\ c_1+c_2 a=0 \end{cases}\Longrightarrow c_1=c_2=0$$

Por tanto, $\lambda = 0$ no es valor propio.
2) Caso $\lambda > 0$.
Podemos escribir $\lambda = \alpha^2,\ \alpha > 0$. La solución general es $X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$ e imponiendo las condiciones de frontera

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 e^{\alpha 0} + c_2 e^{-\alpha 0} = 0 \\ c_1 e^{\alpha a} + c_2 e^{-\alpha a} = 0 \end{array} \right.$$

Vamos a ver que el determinante de los coeficientes es distinto de cero

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ e^{\alpha a} & e^{-\alpha a} \end{array} \right| = e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} \neq 0$$

pues $e^{\alpha a} = e^{-\alpha a}$ sólo para $\alpha = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\lambda > 0$ no es valor propio.
3) Caso $\lambda < 0$.
Podemos escribir $\lambda = -\alpha^2,\ \alpha > 0$. La solución general es $X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ e imponiendo las condiciones de frontera

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen} \alpha a = 0 \end{array} \right.$$

Los valores que hacen $\operatorname{sen} \alpha a = 0$ son $\alpha a = n\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$. Por tanto, los valores propios son $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ y las funciones propias son

$$X_n = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Estudiamos ahora la ecuación en la variable Y. Puesto que $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$, se deberá cumplir

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$Y = c_1 e^{\frac{n\pi}{a} y} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{a} y}$$

Si tenemos ahora en cuenta la tercera condición de contorno

$$u(x, 0) = 0,\ \forall x \in [0, a] \Longrightarrow X(x) Y(0) = 0 \Longrightarrow Y(0) = 0 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = -c_1$$

Es decir que la solución será

$$Y = c_1 e^{\frac{n\pi}{a} y} - c_1 e^{-\frac{n\pi}{a} y}$$

Por tanto, obtenemos como soluciones

$$Y_n = K_n \left(e^{\frac{n\pi}{a} y} - e^{-\frac{n\pi}{a} y} \right) = 2K_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

Así que para cada $n \in N$ obtenemos las soluciones

$$u_n = X_n Y_n = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} 2K_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

englobando las constantes multiplicativas c_n y K_n en la constante única A_n.
Cada una de las soluciones satisface tanto la ecuación en derivadas parciales como las tres primeras condiciones de contorno para todos los valores de la constante A_n. Hemos de aplicar ahora la condición de contorno no homogénea. Para que se cumpla, formamos la serie

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

Suponiendo la convergencia apropiada, la suma de la serie es también solución de la ecuación diferencial.
Aplicando la cuarta condición de contorno, obtenemos

$$u(x,b) = f(x)\,;\ 0 \le x \le a \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = f(x)\,,\ 0 \le x \le a$$

Si hacemos $B_n = A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} = f(x)\,,\ 0 \le x \le a$$

Por consiguiente, los coeficientes B_n son los coeficientes de la serie de Fourier senoidal de $f(x)$ en $[0,a]$. Dichos coeficientes son

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

Por tanto

$$A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = B_n \Rightarrow A_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

y, por último, la solución formal es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

Ejemplo 4

Hallar la temperatura $u(x,y)$, en estado estacionario, en una lámina cuadrada de caras aisladas que, en el plano OXY, está delimitada por las rectas $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = L$. Supongamos que el borde superior de la lámina se mantiene a temperatura $u(x,L) = f(x)$, mientras que los demás bordes de mantienen a 0 ^oC, en los siguientes casos:
a) $f(x) = 100$, $\ 0 \le x \le L$.
b) $f(x) = x(L - x)$, $\ 0 \le x \le L$.
Solución:
Teniendo en cuenta lo visto anteriormente, planteamos el mismo problema, o sea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \\ u(0,y) = 0,\ u(L,y) = 0 & 0 \le y \le L \\ u(x,0) = 0,\ u(x,L) = f(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$$

Es decir, que la solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L}$$

en donde

$$A_n = \frac{2}{L \operatorname{sh}[n\pi]} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

a) En el primer caso la condición de contorno no homogénea es $f(x) = 100, \ \ 0 \leq x \leq L$. Para calcular A_n resolvemos primero la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^L 100 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= 100 \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \right]_0^L = \frac{L100}{n\pi} (-\cos n\pi + 1) \\
&= \frac{L100}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} + 1 \right] = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ \frac{200L}{n\pi} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$A_{2n} = 0; \ A_{2n-1} = \frac{2}{L \operatorname{sh}[(2n-1)\pi]} \frac{200L}{(2n-1)\pi} = \frac{400}{(2n-1)\pi \operatorname{sh}[(2n-1)\pi]}$$

Por tanto, la solución es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{(2n-1)\pi \operatorname{sh}(2n-1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L} \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{L}$$

b) En este caso la condición de contorno no homogénea es $f(x) = x(L-x), \ 0 \leq x \leq L$. Para calcular A_n resolvemos primero la integral

$$I = \int_0^L x(L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Integrando por partes con

$$\left\{ \begin{array}{c} u = Lx - x^2 \Longrightarrow du = (L-2x)\,dx \\ dv = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \Longrightarrow v = \frac{-\cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \end{array} \right\}$$

$$I = \left(\frac{-L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} x(L-x) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L (L-2x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Volviendo a integrar por partes con

$$\left\{ \begin{array}{c} u = L - 2x \Longrightarrow du = -2dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Longrightarrow v = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \end{array} \right\}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \left[\left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 (L-2x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{2L^2}{n^2\pi^2} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \left[\frac{2L^2}{n^2\pi^2} \frac{-\cos \frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \right]_0^L = \frac{2L^3}{n^3\pi^3} (-\cos n\pi + 1) = \frac{2L^3}{n^3\pi^3} \left((-1)^{n+1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Si } n \text{ es par } \Rightarrow \int_0^L x\,(L-x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \Rightarrow A_{2n} = 0$$

$$\text{Si } n \text{ es impar } \Rightarrow \int_0^L x\,(L-x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{4L^3}{n^3\pi^3} \Rightarrow A_{2n-1} = \frac{8L^2}{\text{sh}\,[(2n-1)\,\pi]\,\pi^3\,(2n-1)^3}$$

Por tanto, la solución es

$$u\,(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8L^2}{\text{sh}\,[(2n-1)\,\pi]\,\pi^3\,(2n-1)^3}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\,\pi x}{L}\,\text{sh}\,\frac{(2n-1)\pi y}{L}$$

En la figura 5 vemos la distribución de temperaturas $u\,(x,y)$ con la condición de contorno $f\,(x) = x\,(L-x)\,,\ 0 \leq x \leq L$, y $L = 10$.

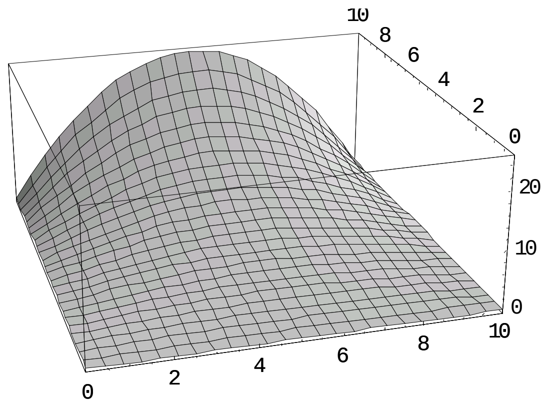

Figura 5: Distribución de temperaturas $u\,(x,y)$.

Y en la figura 6, las curvas de nivel correspondientes a $u\,(x,y)$.

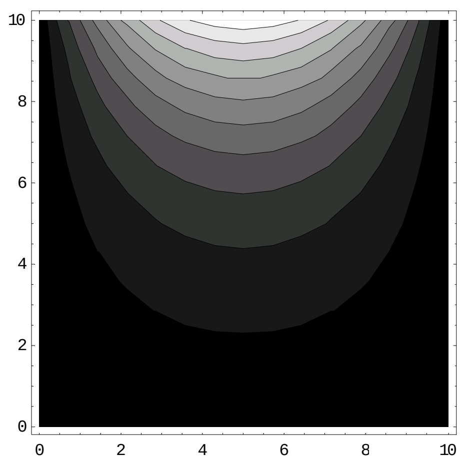

Figura 6: Curvas de nivel.

$\boxdot$