INTEGRALES. DEFINICIÓN

Integral de línea de una función compleja de variable compleja

Sea C la curva $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$

Definimos la integral de línea, o bien integral de contorno, de f sobre C como

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)dt$$

El integrando de esta integral es el producto de las dos funciones complejas

$$f\left[z(t)\right] = u\left[x(t), y(t)\right] + iv\left[x(t), y(t)\right] \quad \text{y} \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

De este modo

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \left(ux' - vy'\right) dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt$$

O bien

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Por lo que podríamos calcular la integral hallando las dos integrales de línea correspondientes.

Teorema de Cauchy-Goursat

Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Principio de independencia de la trayectoria

Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces el valor de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ no dependerá del contorno utilizado para ir de z_1 a z_2..

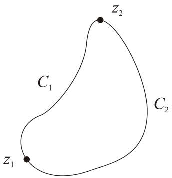

Figura: Independencia del camino.

En el cálculo real, el método básico de integración consiste en buscar una primitiva $F(x)$ para el integrando $f(x)$. Luego se evalúa $F(x)$ en los límites de integración

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} dF = F(x_2) - F(x_1)$$

¿Podrá aplicarse un procedimiento similar a las integrales de línea complejas?. Veremos que, con ciertas restricciones, la respuesta es sí.

Integración de derivadas de funciones analíticas

> *Sea $f(z)$ una función continua y sea $F(z)$ una función analítica en un dominio D, tal que $dF/dz = f(z)$ en D. Entonces, si z_1 y z_2 son puntos de D*
>
> $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$
>
> *donde la integración se puede efectuar a lo largo de cualquier contorno en D que vaya de z_1 a z_2.*

De este modo, si se satisfacen las condiciones del teorema, podemos usar las reglas de integración convencionales y por tanto las tablas de integrales usuales.

La Fórmula Integral de Cauchy

Sea f analítica sobre un contorno simple cerrado C con la orientación positiva y en su interior. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Si una función f es analítica sobre un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces los valores de f en puntos interiores a C quedan completamente determinados por los valores de f en C.

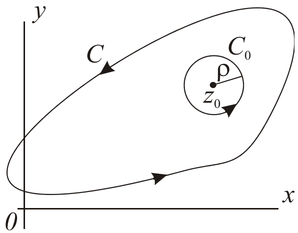

Figura: La Fórmula Integral de Cauchy.

Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy
Derivando sucesivamente la integral, de la fórmula de Cauchy, con respecto al parámetro z_0 obtenemos:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

$$f''(z_0) = \frac{1{,}2}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3} = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}$$

$$f'''(z_0) = \frac{1{,}2{,}3}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^4} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^4}$$

$$\circ \circ \circ$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$