CEROS

Cero aislado

Si $f(z_0) = 0$ se dice que z_0 es un cero aislado de $f(z)$ si existe un entorno abierto de z_0 en todo punto del cual $f(z) \neq 0$.

Así pues, $f(z) = (z-1)(z-3)$ tiene un cero aislado en $z = 1$ pues todo entorno abierto con centro en $z = 1$ y radio inferior a 2 constituye un dominio en el que $f(z) \neq 0$. Otro cero aislado de esta función es el punto $z = 3$.

Orden de un cero

Sea m un entero ≥ 1. Si $f(z)$ es analítica e igual a cero en z_0 y si en todo punto de un entorno de z_0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^m$, con $a_0 = a_1 = a_2 \cdots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$,, decimos que la función tiene un cero de orden m en z_0.

Aislamiento de ceros

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0 y $f(z_0) = 0$. Entonces, o bien existe un entorno de z_0 en el que $f(z) = 0$ únicamente en z_0, o bien existe un entorno de z_0 en el que $f(z) = 0$ en todo punto del entorno.

Residuo

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y en todo punto del interior de C, salvo z_0. Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0 que se denota por $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0]$, *está definido por*

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} f(z)dz$$

Residuo y serie de Laurent

El residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente b_1 de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por $0 < |z - z_0| < R_1$.

Teorema de los residuos
Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y su interior salvo en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el interior de C. Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los residuos de f en tales singularidades, entonces:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i\left(b_1 + b_2 + \ldots b_n\right)$$

En esta sección estudiaremos algunos conceptos preliminares que nos permitirán determinar el residuo sin necesidad de obtener el desarrollo de Laurent.
Hemos visto que si una función f tiene una singularidad aislada en z_0 entonces f admite un desarrollo de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots$$

en un dominio $0 < |z - z_0| < R_1$, con centro en tal punto.

Parte principal

La parte de la serie formada por las potencias negativas de $z - z_0$ se denominan parte principal de f en z_0.

Usaremos ahora este concepto para clasificar los tres tipos de singularidades aisladas posibles.

Tipos de singularidades aisladas:

1) Polo
2) Singularidad esencial
3) Singularidad evitable

1) Polo

Si la parte principal de f en z_0 tiene al menos un término no nulo pero el número de tales términos es finito, el desarrollo de Laurent toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$
$$(0 < |z - z_0| < R_1)$$

y existirá un entero positivo m tal que $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. En este caso la singularidad aislada z_0 se denomina *polo de orden m*.

2) Singularidad esencial

Cuando la parte principal de f en z_0 tiene un número infinito de términos no nulos, el punto se denomina singularidad esencial.

3) Singularidad evitable

Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en una singularidad aislada z_0 son cero, el punto z_0 se denomina singularidad evitable de f.

Determinación del residuo

1) *Si* f es *analítica en* $0 < |z - z_0| \leq R$ *entonces tiene en* z_0 *un polo de orden* m *si* $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = w_0 \neq 0$, $w_0 \in \mathbb{C}$.

Además su residuo b_1 *viene dado por*

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \phi^{(m-1)}(z)$$

siendo $\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$.

2) Cuando una función $f(z)$ tiene una *singularidad esencial* en z_0, la única manera en que podemos determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado.

3) Cuando una función $f(z)$ tiene una *singularidad evitable* en z_0 el residuo es cero.