Derivada direccional

- **Definición**

  Sean una función $f : A \to \mathbb{R}$ *con* A *abierto de* $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *un punto de* A *y* $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *un vector no nulo de* $\mathbb{R}^n$. *El límite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2, ..., a_n + hv_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$$

  si existe, se denomina derivada de la función f *en el punto* a *según la dirección* v *y se denota por* $D_v f(a)$.
  Si $||v|| = 1$ *entonces* $D_v f(a)$ *se llama derivada direccional, según el vector, de la función* f *en el punto* a.

Nota: Como caso particular, si tomamos vectores de la base canónica, podemos dar de nuevo, la definición de derivada parcial.

Derivada direccional de z=f(x,y)

Si tenemos una función de dos variables $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$D_v f(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

es la derivada de f en el punto (a_1, a_2) en la dirección del vector $v = (v_1, v_2)$. Si

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

entonces se llama derivada direccional.

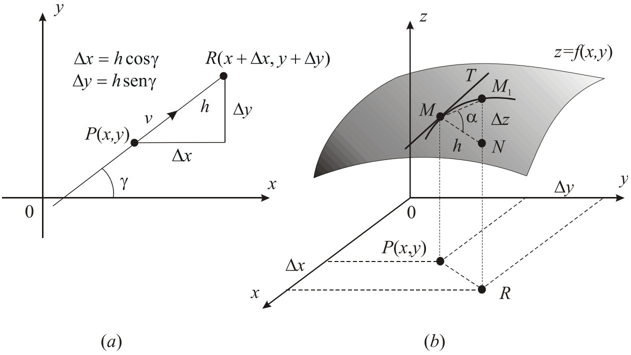
- **Proposición**

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y (x, y) punto de A. Sea $v = \cos\gamma i + \operatorname{sen}\gamma j$. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en (x, y), entonces existe la derivada direccional en cualquier dirección γ y se cumple

$$D_\gamma f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cos\gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}\gamma$$

Interpretación geométrica de la derivada direccional de z=f(x,y)

$$v = \cos\gamma i + \operatorname{sen}\gamma j$$



$$D_v(x,y) = tg\alpha$$

Gradiente de z=f(x,y)

- **Definición**

  Llamaremos gradiente de la función $z = f(x,y)$ *en el punto* (x,y) *al vector* $f'_x(x,y)i + f'_y(x,y)j$ *asociado al punto* (x,y). *Se representa*

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = f'_x(x,y)i + f'_y(x,y)j$$

- **Proposición**

  Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ *diferenciable en un punto* (x,y) *de* A, *la derivada direccional de* f *en el punto* (x,y) *en la dirección* γ *es igual al producto escalar del gradiente por el vector unitario* v *correspondiente a esta dirección* $e_\gamma = \cos\gamma i + \operatorname{sen}\gamma j$

$$D_\gamma f(x,y) = \nabla f\,(x,y) \cdot e_\gamma$$

Propiedades del gradiente de z=f(x,y)

- **Proposición**

  En cada punto (x, y) *el gradiente de la función* $f\,(x, y)$ *indica la dirección según la cual la derivada direccional es máxima.*

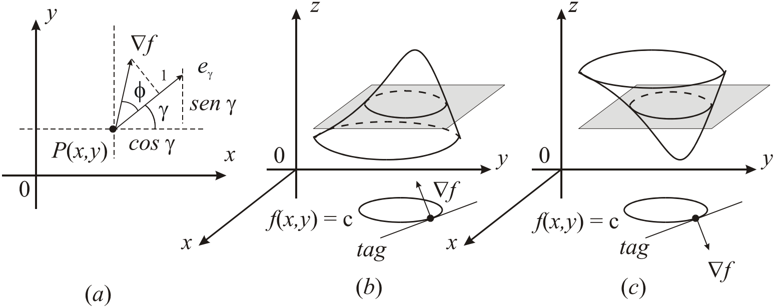
- **Proposición**

  En cada punto (x, y) *el vector* $\mathrm{grad} f(x, y)$ *va dirigido según la normal en ese punto a la curva de nivel de la superficie* $z = f(x, y)$.

- **Proposición**

  La derivada de la función $z = f(x, y)$ *según la dirección de la tangente a la línea de nivel es cero.*

Propiedades del gradiente de z=f(x,y)



Gradiente de z=f(x,y)

Podemos generalizar el concepto de gradiente a funciones de n variables.

- **Definición**

  Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Llamaremos gradiente de la función f en el punto $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ al vector

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_i}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)\right)$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Una función $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ de A en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable en a si y sólo si sus funciones componentes $f_1, f_2, ..., f_m$, como funciones de A en $\mathbb{R}$, son diferenciables en a, y en este caso $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene por componentes

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))$$

Podemos pues escribir

$$\begin{array}{cccc} \lambda : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & h & \rightarrow & \lambda(h) \\ & (h_1, h_2, ..., h_n) & \rightarrow & (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))(h) \end{array}$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

- **Matriz Jacobiana**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, .., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales respecto de cada variable en el punto a. La matriz $(m \times n)$

$$J\,f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & ... & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & ... & D_n f_2(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & ... & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

  se llama matriz jacobiana de f en el punto a.

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, .., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces la matriz de la aplicación lineal $df(a)$ es $J\,f(a)$:

$$\lambda(h) = df(a)(h) = J\,f(a) \cdot h$$

Derivada de la función compuesta

Sea

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & & (x,y,z) & & w(u,v) = (g \circ f)(u,v) \end{array}$$

Se cumple

$$dw(u,v) = d(g \circ f)(u,v) = dg(x,y,z) \circ df(u,v)$$

Por tanto se cumple que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \\ J(g \circ f)(a) &= J\,g(f(a)) \cdot J\,f(a) \end{aligned}$$

Derivada de la función compuesta

Regla de la cadena

Sean las funciones

$$\begin{cases} x = \phi_1(u,v) \\ y = \phi_2(u,v) \\ z = \phi_3(u,v) \end{cases}$$

diferenciables en (u,v) y sea g la función

$$w = g(x,y,z)$$

diferenciable en el punto (x,y,z) correspondiente a (u,v). Entonces se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & u \\ & & x & \begin{array}{c}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ & \nearrow & & & v \\ & & & & u \\ w & \rightarrow & y & \begin{array}{c}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ & \searrow & & & v \\ & & & & u \\ & & z & \begin{array}{c}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ & & & & v \end{array}$$