Derivadas parciales de z=f(x,y)

- **Definición**

Sean f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de A. Diremos que f es derivable respecto a x en el punto (x_0, y_0) si existe el límite siguiente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Este límite se llama *derivada parcial respecto a x de f en* (x_0, y_0). La representaremos en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,; \quad f'_x(x_0, y_0)\,; \quad D_1 f(x_0, y_0)$$

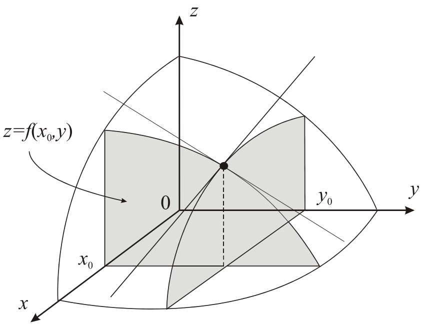
- **Definición**

De forma analóga se define la derivada parcial de f respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Derivadas parciales de z=f(x,y)

La representación gráfica de una función $z = f(x, y)$ es una superficie del espacio tridimensional. Si asignamos a y un valor fijo, $y = y_0$, la función de la variable x, $z = f(x, y_0)$, vendrá representada por la intersección del plano $y = y_0$ con dicha superficie. La derivada de esta función en el punto $x = x_0$ será precisamente $f'_x(x_0, y_0)$, y representará la pendiente de la tangente a la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto $x = x_0$. El mismo razonamiento nos servirá para interpretar $f'_y(x_0, y_0)$.



Derivadas parciales

Podemos generalizar el concepto de derivada parcial a funciones de n variables.

- **Definición**

  Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$; se dice que f es derivable respecto x_i en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_i, ..., a_n)$ si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}$$

Este límite lo denotaremos en las formas siguientes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n); \quad f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Diferencial de z=f(x,y)

Al formar las derivadas parciales anteriores f'_x y f'_y los incrementos en las variables x e y se consideraron separadamente; vamos a considerar ahora el efecto de incrementar x e y simultáneamente

$$\Delta z = f\left(x+h, y+k\right) - f\left(x, y\right)$$

- **Diferenciabilidad**

  Sea f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\left(a_1, a_2\right)$ y $\left(a_1 + h, a_2 + k\right)$ dos puntos de A. Se dice que f es diferenciable en el punto $\left(a_1, a_2\right)$ cuando el incremento de f se puede expresar como (con a y b números reales)

$$\Delta z = ah + bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

La función lineal $ah + bk$ se denomina *diferencial* de f en $\left(a_1, a_2\right)$ y se representa por

$$df\left(a_1, a_2\right)(h, k) = ah + bk$$

Diferencial de z=f(x,y)

- **Condición necesaria de diferenciabilidad**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. Si la función f es diferenciable en (a_1, a_2), entonces es continua en este punto.

- **Condición necesaria de diferenciabilidad**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $(a_1, a_2) \in A$ y $df = ah + bk$, entonces existen las derivadas parciales de f en el punto (a_1, a_2) y

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2); \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Diferencial de z=f(x,y)

- **Condición suficiente de diferenciabilidad**

  Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(a_1, a_2) \in A$. Si existen las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (a_1, a_2) y al menos una de ellas es continua en dicho punto, $f(x, y)$ es diferenciable en (a_1, a_2).

- **Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad**

  Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. La función f es diferenciable en (a_1, a_2) si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - f'_x(a_1, a_2)h - f'_y(a_1, a_2)k \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Diferencial de z=f(x,y) como aplicación lineal

- **Diferenciabilidad**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. Se dice que f es diferenciable en (a_1, a_2) si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

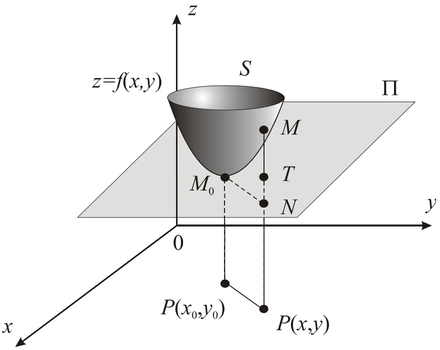
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - \lambda(h, k)|}{||(h, k)||} = 0$$

Se cumple que esta aplicación lineal es única y que por lo tanto, es la diferencial de f definida anteriormente

$$df(a_1, a_2) = \lambda(h, k) = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y} k$$

Nota: Análogamente se definiría la diferencial en un punto para *campos escalares.*

Interpretación geométrica de la diferencial de z=f(x,y)



El valor de la diferencial de una función en un punto (x_0, y_0) es numéricamente igual al incremento de la coordenada z del plano tangente en dicho punto: $|NT|$.

Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados

Del incremento de la función obtenemos

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x,y) \Longrightarrow f(x+h, y+k) = f(x,y) + \Delta z$$

Aproximando el incremento de la función por su diferencial

$$|MN| = \Delta z \simeq |NT| = dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k$$

podemos escribir la fórmula aproximada

$$f(x+h, y+k) \simeq f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k$$

en la que el error cometido es un infinitésimo de orden superior a $\sqrt{h^2 + k^2}$.