Límite de una función en un punto

- **Límite**

  Sea una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *con* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *y* a *un punto de acumulación de* X. *Se dice que* $l \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función en el punto* a, *y se escribe*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{tal que}$$

$$\textit{para cada } x \in (B(a, \delta) - \{a\}) \cap X \Longrightarrow |\ f(x) - l\ | < \varepsilon$$

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *a punto de acumulación de* X *y* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *una función de* X *en* $\mathbb{R}^m$.

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l = (l_1, l_2, .., l_m) \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} f_i(x) = l_i, \ \ i = 1, 2, ..., m$$

Límite de una función en un punto

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, a punto de acumulación de X y f y g funciones de X en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1, \lim_{x \to a} g(x) = l_2 \;\; y \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

  se verifican las siguientes propiedades

$$a) \; \lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x)$$

$$b) \; \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$c) \; \lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2} \;\; (si \;\; l_2 \neq 0)$$

$$d) \; \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$$

Límite de una función en un punto

- **Límites relativos a un conjunto (según una trayectoria)**

  Dados una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *un subconjunto* $S \subseteq X$, *y* a *punto de acumulación de* S, *se dice que* $l \in \mathbb{R}$ *es el límite de* f *relativo al conjunto* S *(o sobre* S*) en el punto* a *y se escribe*

  $$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ \text{para cada } x &\in (X \cap S) \wedge (0 < \|x - a\| < \delta) \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon \end{aligned}$$

- **Proposición**

  Si existe el límite de $f(x)$ *en el punto* a *y es* l *entonces también existe el límite de* f *relativo a cualquier subconjunto* S *de* X *en el punto* a *y coincide con* l.

Límite de una función en un punto

Este resultado permite probar en algunos casos la no existencia del límite. Si para dos subconjuntos B, C de X se verifica

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in C}} f(x)$$

o bien no existe alguno de estos límites, entonces puede asegurarse que no existe

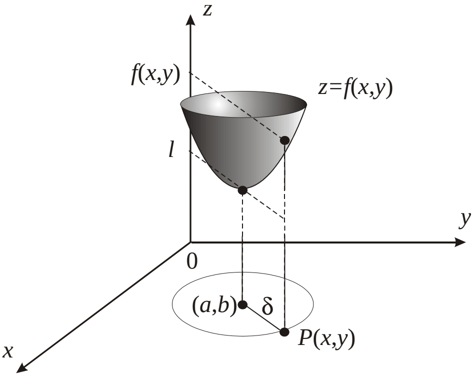
$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

tal que para cada (x, y) que verifique

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$



Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Supongamos que existe el límite doble

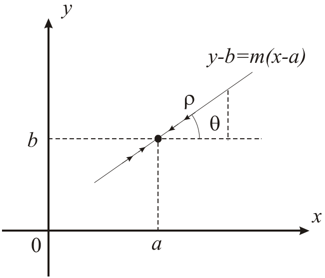
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

éste debe coincidir con el límite obtenido al imponer a los puntos (x, y) que pertenezcan a una determinada trayectoria que finalice en el punto (a, b), como vimos anteriormente. El recíproco no es cierto. Es decir, el que exista el límite según una determinada trayectoria, no significa que exista el límite doble.

De todas las trayectorias, las más sencillas son las rectas, que admiten dos tratamientos:

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Límites radiales.



Siendo $X_m = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = b + m(x-a)\right\}$, los límites radiales son los límites de $f(x, y)$ relativos al subconjunto X_m

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in X_m}} = \lim_{x\to a} f\left[x, b + m(x-a)\right]$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Límites direccionales.
Los límites direccionales, son los radiales utilizando coordenadas polares

$$\lim_{\substack{(x.y)\to(a,b)\\(x,y)\in X_m}} = \lim_{\rho\to 0} f\left(a+\rho\cos\theta, b+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Se ve fácilmente que si los límites radiales dependen de la pendiente m o los límites direccionales dependen del ángulo θ, entonces el límite doble no existe.

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Para evitarnos el cálculo del límite mediante la definición, también utilizaremos el siguiente concepto.

- **Límites reiterados**

Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* (a, b) *un punto interior de* X*. Llamaremos*

$$f_1(x) = \lim_{y \to b} f(x, y); \quad f_2(y) = \lim_{x \to a} f(x, y)$$

Se llaman límites reiterados a los límites

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[\lim\limits_{y \to b} f(x, y) \right] \\ \lim\limits_{y \to b} f_2(y) = \lim\limits_{y \to b} \left[\lim\limits_{x \to a} f(x, y) \right] \end{array} \right\}$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

- **Relación entre los límites reiterados y el límite de la función**

  - Si existen los límites reiterados, pero son distintos, entonces no existe el límite doble.
  - Puede existir el límite doble y no existir alguno (o ninguno) de los límites reiterados.
  - Si existe uno de los límites reiterados, el límite doble, en caso de existir, coincidirá con él.

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Lo expuesto hasta ahora sólo nos sirve para afirmar que, o bien no existe el límite doble, o bien, si existe, su valor debe de ser l. Por eso enunciaremos un criterio que nos permita asegurar, si el candidato al límite sugerido por los métodos anteriores es realmente el límite doble.

- **Criterio de la función mayorante**

  Dada una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$$

  es que exista una función $F(\rho)$, en todo el campo de variación de θ que recorra X, tal que

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - l| \leq F(\rho) \quad y \quad \lim_{\rho\to 0^+} F(\rho) = 0$$

Continuidad

- **Definición**

  Sea una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in X$ punto de acumulación de X. Se dice que f es continua en a, si y sólo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En el caso concreto de una función de dos variables $z = f(x, y)$, se dice continua en un punto (a, b) si y solo si

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \exists f(a, b) \\
&2) \quad \exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \\
&3) \quad f(a, b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)
\end{aligned}
$$

Continuidad

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *una función* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *y* a *un punto de* X. *Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea continua en* a *es que cada una de las funciones componentes* f_i *sea continua en* a.

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ *y* f, g *dos funciones de* X *en* $\mathbb{R}$, *continuas en* a. *Se verifican las siguientes propiedades:*
  a) $\alpha f + \beta g$ *es continua en* $a(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
  b) $f \cdot g$ *es continua en* a.
  c) si $g(a) \neq 0$, *entonces* f/g *es continua en* a.

Continuidad en un conjunto

Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es continua en X, cuando es continua en cada punto $x \in X$. Se verifica la siguiente propiedad.

- **Teorema de Weierstrass**

  Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un mínimo y un máximo en X, es decir existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo x de X.