Extremos Relativos. Definiciones

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$.

- **Máximo relativo**

  Se dice que f alcanza un máximo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a,r)$, tal que $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a,r)$. Si se verifica que $f(x) < f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a,r) - \{a\})$ se dice que el máximo es estricto.

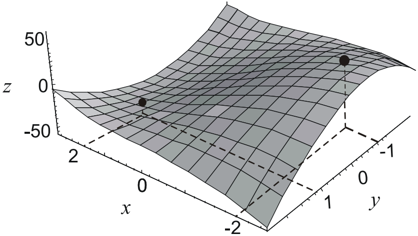
- **Mínimo relativo**

  Se dice que f alcanza un mínimo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a,r)$, tal que $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a,r)$. Si se verifica que $f(x) > f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a,r) - \{a\})$ se dice que el mínimo es estricto.

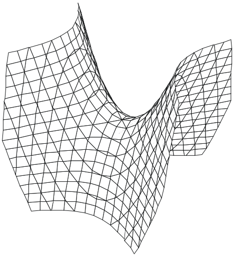
- **Punto de Silla**

  Se dice que f alcanza un punto de silla (o ensilladura) en $a \in A$ si para toda bola $B(a,r)$, se tienen puntos $x \in A \cap B(a,r)$ con $f(x) \geq f(a)$ y $f(x) \leq f(a)$.

Extremos Relativos. Definiciones



Extremos de
$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.



Punto de silla: $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ es un punto de extremo relativo de f y existen las derivadas parciales $D_i f(a)$, $i = 1, ..., n$ entonces

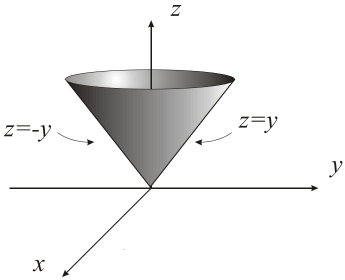
  $$D_i f(a) = 0; \quad i = 1, ..., n$$

- **Punto crítico**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$ con derivadas parciales en un punto $a \in A$. Si $D_i f(a) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$, se dice que a es un punto crítico de f.

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

- Igual que ocurría en funciones de una variable, una función de varias variables puede tener extremos en puntos donde no es derivable.



Cono $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

El origen es un mínimo, pero en él no existen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

- Para simplificar nuestro estudio en lo sucesivo nos limitaremos a estudiar y a buscar extremos en los puntos donde existen dichas derivadas parciales.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- **Forma cuadrática**

  Una forma cuadrática

  $$F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

  (con $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, 2, ..., n$) se denomina:
  - definida positiva si $F(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0.
  - definida negativa si $F(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de 0.
  - indefinida si toma tanto valores positivos como negativos.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$*. Supongamos que f tiene derivadas continuas de segundo orden en A y que* $x_0 \in A$ *es un punto crítico de f. Si la forma cuadrática, diferencial segunda de f en el punto* x_0 *:*

$$F(h) = F(h_1, h_2, ..., h_n) =$$

$$= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}) = d^2 f(x_0)$$

- es definida positiva entonces x_0 *es un mínimo estricto.*
- es definida negativa entonces x_0 *es un máximo estricto.*
- es indefinida entonces en el punto x_0 *no hay extremo (es un punto de silla).*

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- Se denomina *H matriz Hessiana* a la matriz siguiente

$$H = (D_{ij}f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}; \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- Denotaremos como Δ_k, $k = 1, 2, ..., n$ los *menores principales* de dicha matriz.

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}; \ \ldots \ \Delta_k = (D_{ij}f), 1 \leq i, j \leq k$$

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- **Proposición (criterio de Sylvester)**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $x_0 \in A$ es un punto crítico de f, y sean Δ_k los menores principales en x_0.
  a) Si $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, ..., n$ entonces en x_0 se alcanza un mínimo estricto de f.
  b) Si $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, ..., n$ entonces en x_0 se alcanza un máximo estricto de f.
  c) Si $\Delta_n \neq 0$ y no se cumple ni a) ni b) entonces en x_0 hay un punto de silla de f.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

En el caso particular de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, llamaremos determinante *Hessiano* a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y $(x_0, y_0) \in A$ un punto crítico de f. Entonces:
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 > 0$, (x_0, y_0) es un punto de extremo estricto, (máximo estricto, si en este punto $f''_{xx} < 0$ y mínimo estricto, si $f''_{xx} > 0$).
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 < 0$ entonces hay un punto de silla (no hay extremo) en (x_0, y_0).
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 = 0$ el criterio no decide.

Extremos Absolutos

- Recordemos que en el caso de una función de una variable $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ se estudiaban los extremos relativos en el abierto (a, b) y luego se estudiaba la función en la frontera, es decir en los puntos a y b. En realidad tan sólo se buscaban los puntos críticos en el abierto (a, b) (sin discutirlos).
- Para funciones de varias variables se trata de la misma idea, con los lógicos cambios de dimensión.