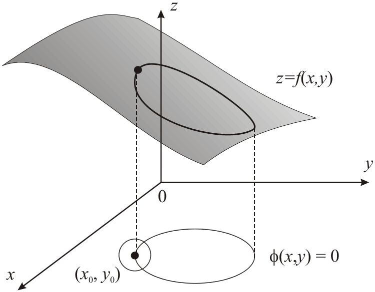
Extremos Condicionados

En primer lugar estudiaremos el problema de determinar extremos condicionados de una función de dos variables, ligadas por una condición.
Sea la función $z = f(x, y)$ con x e y ligadas por la condición $\phi(x, y) = 0$.



- **Extremo condicionado**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, X el subconjunto de A tal que $X = \{(x, y) \in A \;/\; \phi\,(x, y) = 0\}$ y $(x_0, y_0) \in X$. El punto (x_0, y_0) se llama punto de extremo condicionado de la función $f(x, y)$ respecto de la ecuación $\phi(x, y) = 0$ siempre que sea un punto de extremo ordinario de esta función al considerarse ésta sólo en el conjunto X.

Extremos Condicionados

Dos métodos clásicos que resuelven extremos condicionados:
- **Eliminación de la condición**

Este método, en ocasiones, debe manejarse con precaución, como veremos en los ejemplos.
- **Método de los Multiplicadores de Lagrange (MML)**

Se basa en formar la función auxiliar (*función de Lagrange* o *Lagrangiana*)

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

Veremos que los extremos condicionados de $f(x, y)$ se pueden encontrar entre los puntos críticos de $F(x, y)$.

Extremos Condicionados (MML)

- **Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias**

  Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y), \phi(x,y) : A \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales continuas en A y $X = \{(x,y) \in A \ / \ \phi(x,y) = 0\}$. Si (x_0, y_0) es un punto de extremo condicionado de $f(x,y)$ sobre X y el rango de la matriz

  $$\begin{pmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

  es 1, entonces existe un número real λ tal que (x_0, y_0) es un punto crítico de la función

  $$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

Nota. Esta proposición nos da condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremos condicionados. Ademas que el rango de la matriz sea 1 equivale a que no se anulen simultáneamente las dos derivadas parciales de ϕ.

Extremos Condicionados (MML)

- **Teorema de Lagrange. Condiciones suficientes**

  Si la diferencial segunda de $F(x, y)$ *en el punto* (x_0, y_0) *es una forma cuadrática definida positiva (respectivamente definida negativa) de las variables* dx, dy*, a condición de que estas satisfagan*

  $$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

  entonces (x_0, y_0) *es un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado de* f *sobre* X*. Si la forma cuadrática es indefinida, no existe máximo ni mínimo.*

Extremos Condicionados (MML)

- Es decir, la discusión de los puntos críticos se realiza analizando la forma cuadrática, función de (dx, dy)

$$d^2F = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

estando ligadas las diferenciales (dx, dy) por la relación

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0$$

que se obtiene diferenciando la condición.

- En la práctica, el estudio del carácter del eventual extremo suele deducirse de la naturaleza física o geométrica del problema a resolver. La razón de esto es que la discusión del signo de d^2F no es, en general, un problema sencillo.

Extremos Condicionados (MML). Generalización

- **Definición**

  Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$; f_0: $G \to \mathbb{R}$; X subconjunto de G tal que

  $$X = \{x \in G \ / \ f_i(x) = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m\}$$

  y $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}) \in X$. El punto x_0 se dirá punto de extremo condicionado de la función f_0 respecto de las ecuaciones $f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ si es un punto de extremo ordinario de esta función, al considerarse ésta sólo en el conjunto X.

Extremos Condicionados (MML). Generalización

- **Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias**

Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f_i : G \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 0, 1, 2, ..., m$ funciones con derivadas parciales continuas en G y

$$X = \{x \in G \ / \ f_i(x) = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m\}, (m < n)$$

Si $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0})$ es un punto de extremo condicionado de f_0 sobre X y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

es m, entonces existen m números reales $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ tales que x_0 es un punto crítico de la función

$$F = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_m f_m$$

Extremos Condicionados (MML). Generalización

- **Teorema de Lagrange. Condiciones suficientes**

  Si la diferencial segunda de $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ en el punto x_0 es una forma cuadrática definida positiva (respectivamente definida negativa) de las variables $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, a condición de que estas satisfacen el sistema

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_n} dx_n = 0; \; i = 1, 2, ..., m$$

  entonces x_0 es un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado de f_0 sobre X. Si la forma cuadrática es indefinida, no existe máximo ni mínimo.