Definiciones

- **El espacio $\mathbb{R}^n$**

Sabemos que un punto en la recta real viene representado por un número real x, que un punto en el plano lo representamos por un par ordenado de números reales (x_1, x_2) y que un punto en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales (x_1, x_2, x_3). De la misma forma definiremos un punto en $\mathbb{R}^n$ como:

- **Punto**

  Llamaremos punto n-dimensional a un conjunto ordenado de n números reales $x_1, x_2, ..., x_n$ *que denotaremos por*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Al conjunto de todos los puntos n-dimensionales se le denominará *espacio n-dimensional* y se denotará por $\mathbb{R}^n$.

Definiciones

- **Norma**

  Llamaremos norma en $\mathbb{R}^n$ *a toda aplicación de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *que denotamos por*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|x\| \end{array}$$

  verificando, con $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}$:

$$a)\ \|x\| \geq 0; \qquad b)\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$c)\ \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|\,; \quad d)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En la mayoría de los casos y si no se expresa lo contrario, supondremos que trabajamos con la *norma euclídea*

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2} \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x \cdot x$$

Definiciones

- **Distancia**

  Para cada par de puntos x, y *de* $\mathbb{R}^n$ *se define como distancia entre ellos, al número real*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Fácilmente se pueden comprobar las siguientes propiedades con x, y, $z \in \mathbb{R}^n$.

$$a)\ d(x,y) \geq 0; \qquad b)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$c)\ d(x,y) = d(y,x); \quad d)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Definiciones

- **Bola**

  Dado un punto a perteneciente a $\mathbb{R}^n$ *y un número real positivo* r *se denomina bola abierta de centro* a *y radio* r*, y se denota por* $B(a,r)$ *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x-a\| < r\}$$

  Se denomina bola cerrada de centro a *y radio* r*, y se denota por* $\overline{B}(a,r)$ *al conjunto*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x-a\| \leq r\}$$

Así, en $\mathbb{R}$, $B(a,r)$ será el intervalo de centro a y radio r $(a-r, a+r)$.

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \, |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \, a-r < x < a+r\} \end{aligned}$$

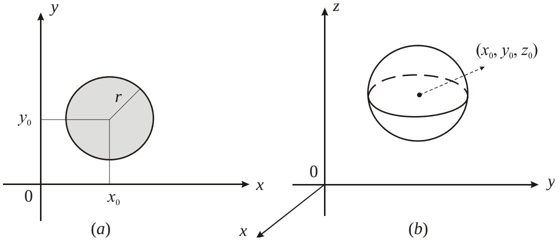
Definiciones

En $\mathbb{R}^2$, $B(a,r)$ será el círculo de centro (a_1, a_2) y radio r.

$$
\begin{aligned}
B(a,r) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < r\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\right\}
\end{aligned}
$$

En $\mathbb{R}^3$, $B(a,r)$ será la esfera de centro (a_1, a_2, a_3) y radio r.

$$
\begin{aligned}
B(a,r) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ \|(x,y,z) - (a_1,a_2,a_3)\| < r\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 < r^2\right\}
\end{aligned}
$$



Definiciones

- **Entorno**

  Entorno esférico de un punto $x \in \mathbb{R}^n$, es cualquier bola abierta $B(x, r)$ de centro x.

A los entornos esféricos los denominaremos simplemente entornos y al entorno de x, lo designaremos por $U(x)$ sin hacer referencia al radio de la bola, si no es necesario por algún motivo.

- **Entorno reducido**

  Sea r un número real cualquiera. Se denomina entorno reducido de x al conjunto

$$U^*(x) = B(x, r) - \{x\}$$

Definiciones

- **Conjunto abierto**

  Un conjunto A es abierto si y sólo si para todo x perteneciente a A, existe un entorno $U(x)$ contenido en A.
  No sería abierto si existiese en él algún x para el cual no existe $U(x)$ tal que $U(x) \subset A$.

- **Conjunto cerrado**

  Se dice que un subconjunto A es cerrado cuando su complementario $\mathbb{R}^n - A$ es abierto.

Nota: Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

- **Conjunto acotado**

  Se dice que un subconjunto A es acotado cuando está contenido en una bola de radio finito.

Definiciones

- **Conjunto compacto**

  Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

- **Punto de acumulación**

  Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando todo entorno reducido, $U^*(x)$ contiene puntos de A, es decir, se verifica que $U^*(x) \cap A \neq \emptyset$.

- **Teorema de Bolzano-Weierstrass**

  Todo conjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definiciones

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} X \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & y = f(x) \end{array}$$

A estas funciones se las conoce como funciones reales de n variables o *campos escalares*.

- Haremos especial énfasis en las funciones

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ con } X \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$z = f(x, y)$$

Definiciones

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
Esta función vectorial f, equivale a m funciones reales de n variables también reales.

$$y = f(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array} \right.$$

- **Dominio natural de definición**

  Sea una función $y = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, e $y \in \mathbb{R}$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ para los cuales está definida la función $y = f(x)$ se llama dominio natural de definición de la función y se suele representar por X.

Definiciones

- **Gráfica de una función**

  Sea $f : X \to \mathbb{R}$ *con* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*. Definamos la gráfica de* f *como el subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *que consta de los puntos* $(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$ *con* $(x_1, ..., x_n)$ *en* X*. Simbólicamente*

  $$\text{gráfica de } f = \left\{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, ..., x_n) \in X\right\}$$

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva, mientras que para $n = 2$ es una superficie. Para acercarnos a la forma de esta gráfica introducimos la idea de *conjunto de nivel*.

- **Conjunto de nivel**

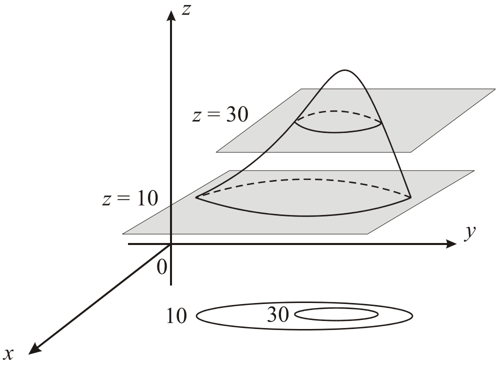
  Sea $f : X \to \mathbb{R}$*, con* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $c \in \mathbb{R}$*. El conjunto de nivel de valor* c *está definido como aquellos puntos* $x \in X$ *para los que* $f(x) = c$*. Simbólicamente*

  $$\{x \in X / f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Gráficas

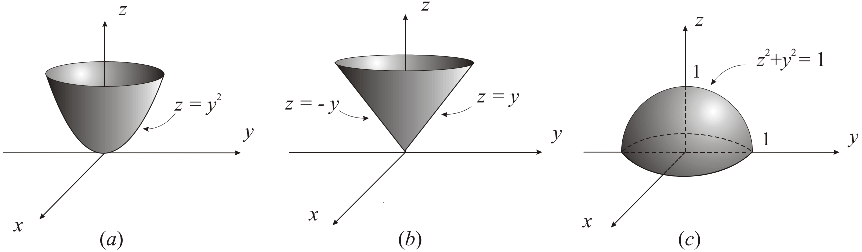
Si $n = 2$ nos referimos a una *curva de nivel* (de valor c) y si $n = 3$ nos referimos a una *superficie de nivel*.

En el caso particular de una función $z = f(x, y)$, podemos intuir el aspecto de la gráfica elevando mentalmente cada curva de nivel a la altura c, de la misma forma que lo hacemos ante un mapa topográfico para intuir el relieve de un paisaje.



Gráficas

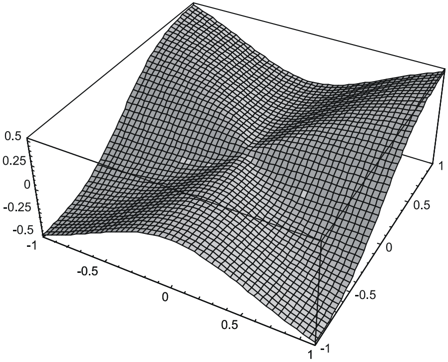
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones usuales $z = f(x, y)$ y que pueden deducirse fácilmente con el método de las curvas de nivel, completando el estudio con algún corte con planos verticales.



(a) Paraboloide: $z = x^2 + y^2$ (b) Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) Semiesfera: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Gráficas

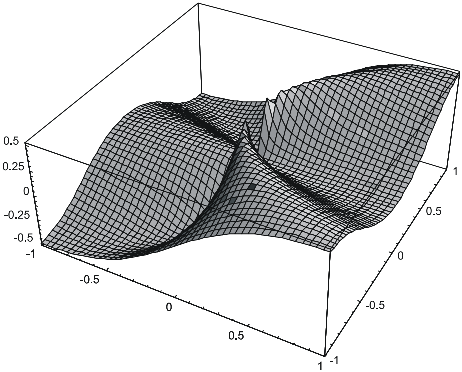
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Gráficas

Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.