Definición de la integral de Riemann

Sea $y = f(x)$ *una función acotada en un intervalo* $[a, b]$.

- **Partición**

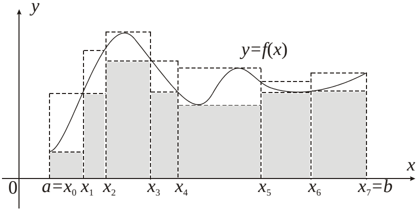
  Se llama partición del intervalo cerrado $[a, b]$ *a todo conjunto finito*

  $$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ / \ a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

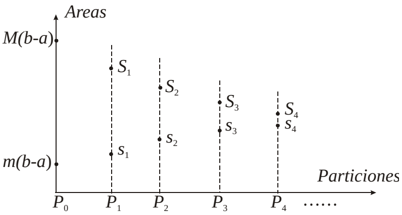
Supongamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Efectuamos una partición P_1 en n intervalos parciales. Sea m_i el ínfimo de f y M_i el supremo de f en cada intervalo. Se denominan *suma inferior* y *suma superior* correspondiente a la partición P_1 a:

$$\begin{aligned} s_1(P_1) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ S_1(P_1) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \end{aligned}$$

Definición de la integral de Riemann



Suma inferior y suma superior.



Sucesión de sumas.

Repetimos indefinidamente este proceso con particiones $P_3, P_4, \ldots$ cada vez más finas.

Definición de la integral de Riemann

- **Función integrable en el sentido de Riemann**

  Cuando
  $$\lim_{m\to\infty} s_m = s = \lim_{m\to\infty} S_m = S$$
  se dice que la función $y = f(x)$ *es integrable (en el sentido Riemann) en el intervalo* $[a, b]$.

A dicho valor común $s = S$ se le denomina *integral definida* según Riemann y se le representa por
$$\int_a^b f(x)dx$$

Definición de la integral de Riemann

- Otra forma de imponer la condición de integrabilidad. Consideremos una partición P_1 en n intervalos parciales. Tomemos en cada subintervalo un punto intermedio $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y formemos la denominada *suma de Riemann*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

  Repitiendo de nuevo este proceso con particiones cada vez más finas, de forma que n tienda hacia ∞, la integrabilidad de la función se basa en la existencia de límite de la sucesión de sumas de Riemann.

Definición de la integral de Riemann

- **Función integrable en el sentido de Riemann**

  La función $y = f(x)$, acotada en el intervalo $[a, b]$, es integrable (en el sentido Riemann) en dicho intervalo cuando, para cualquier sucesión de particiones con $n \to \infty$ y cualesquiera que sean los puntos c_i elegidos, existe un mismo límite para la sucesión de sumas de Riemann. Este límite es la integral definida.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$