Integrales Impropias

- **Definición**

  Se dice que la integral

  $$\int_a^b f(x)\,dx$$

  es una integral impropia, si el intervalo de integración $[a, b]$ *es infinito, o bien cuando la función subintegral* $f(x)$ *no está acotada en algún o algunos puntos de dicho intervalo.*

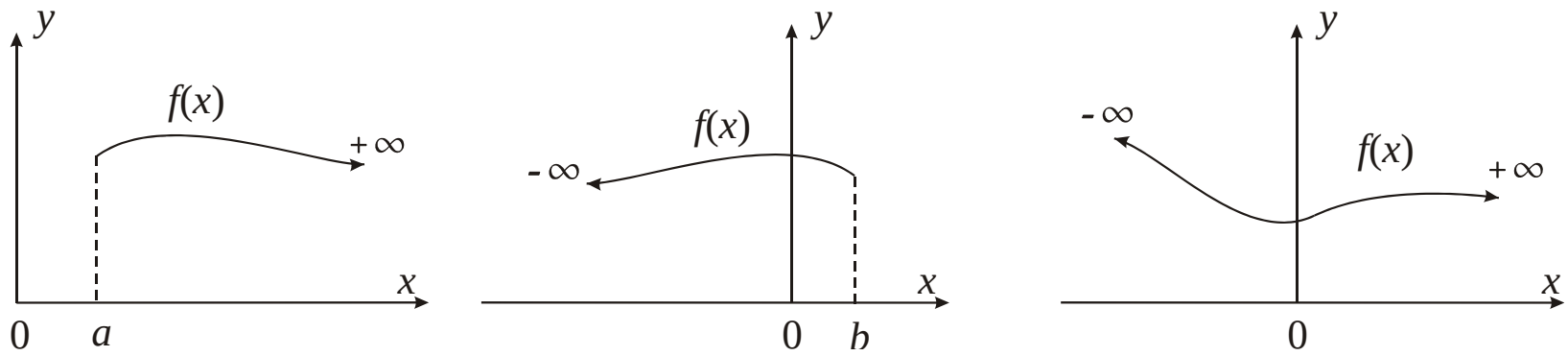
Integrales Impropias de Primera especie

- **Definición**

  Dada una integral impropia, diremos que es de primera especie si tiene infinito en su intervalo de integración y la función subintegral $f(x)$ está acotada en dicho intervalo. Por consiguiente

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

  son las tres formas en que pueden presentarse estas integrales.



Integrales Impropias de Primera especie

- **Definición**

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^{M} f(x)dx \\
I &= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^{b} f(x)dx \\
I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx \\
&= \lim_{N\to-\infty}\int_N^{c} f(x)dx + \lim_{M\to+\infty}\int_c^{M} f(x)dx
\end{aligned}
$$

La integral I es:
$$
\begin{cases}
\textit{Convergente, si existe el límite y éste es finito} \\
\textit{Divergente, cuando el límite es infinito} \\
\textit{Oscilante, si no existe dicho límite}
\end{cases}
$$

Primera especie. Criterio de Convergencia

Sea la integral impropia de primera especie

$$I = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

con $f(x)$ acotada y no negativa en $[a, \infty)$.

Proposition

- **Criterio del Límite**

  Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \begin{cases} K \text{ finito (puede ser } 0) & \text{con } \lambda > 1 \Longrightarrow I \text{ es convergente} \\ K \neq 0 \text{ (puede ser } \infty) & \text{con } \lambda \leq 1 \Longrightarrow I \text{ es divergente} \end{cases}$$