

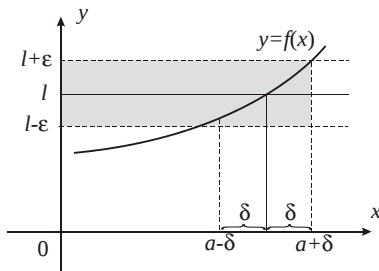
Definición de límite

► Definición de límite según Cauchy

Sea $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de A .

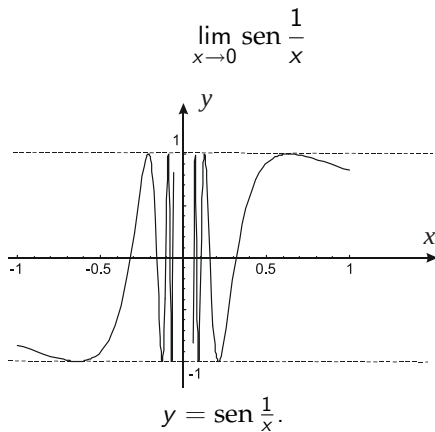
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in A, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$



No existencia de Límite

► Ejemplo:



Propiedades de los límites

► Propiedades de los límites de funciones

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$ se verifica:

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \pm v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \cdot v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u(x)}{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}; \quad (\text{si } \lim_{x \rightarrow a} v(x) \neq 0)$$

Límites de uso frecuente

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Límites laterales

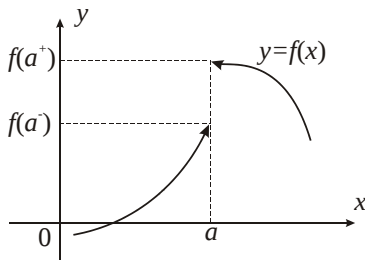
► Límites laterales

Límite por la derecha de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

$$l = f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

$$l = f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



► Límites laterales y existencia de límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Infinitésimos

► Infinitésimos

Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

► Propiedades de los Infinitésimos

- i) La suma y el producto de un número finito de infinitésimos cuando $x \rightarrow a$ es un nuevo infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.*
- ii) El producto de un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ por una función acotada cuando $x \rightarrow a$, es un nuevo infinitésimo cuando $x \rightarrow a$.*

Infinitésimos

► Comparación de Infinitésimos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \rightarrow a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f \text{ es de orden superior a } g, \text{ y se denota } f = o(g) \\ \infty & f \text{ es de orden inferior a } g, \text{ y se denota } g = o(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0, 1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se denota por } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

► Orden de un Infinitésimo

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \rightarrow a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = l$$

con $0 < |l| < \infty$ se dice que la función f es un infinitésimo de orden n respecto de $g(x)$.

Infinitésimos

► Principio de Sustitución

Si en una función sustituimos un factor o un divisor infinitésimo por otro equivalente, el valor del límite de la función no varía.

Es decir si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos cuando $x \rightarrow a$ y si $\alpha(x) \sim f(x)$ y $\beta(x) \sim g(x)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

Infinitésimos Equivalentes

$$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{tg} f(x)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$$

$$\log_a (1 + f(x)) \sim \log_a e \cdot f(x)$$

$$\ln (1 + f(x)) \sim f(x)$$

$$a^{f(x)} - 1 \sim \ln a \cdot f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$$

$$(1 + f(x))^p - 1 \sim pf(x); \quad p \in \mathbb{R}$$

Infinitos

► Infinitos

Se dice que la función $f(x)$ es un infinito cuando $x \rightarrow a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

► Comparación de infinitos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitos cuando $x \rightarrow a$. Se tienen los siguientes casos según el valor del límite del cociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & f \text{ es de orden superior a } g, \text{ y se denota } f = O(g) \\ 0 & f \text{ es de orden inferior a } g, \text{ y se denota } g = O(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0, 1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se escribe } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

Infinitos

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \sim a_n x^n$$

$$\ln(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \sim \ln x^n, \quad (a_n > 0)$$

Infinitos equivalentes.

$$\log_a x \ll x^k \ll a^x \ll x^{bx}$$

Jerarquía de infinitos.

Casos de indeterminación

$$\infty - \infty$$

$$\infty \cdot 0$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

Resolución de Indeterminaciones

- ▶ a) **Límites de la forma:** $0 \cdot \infty$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

- ▶ b) **Límites de la forma:** $\infty - \infty$

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

- ▶ c) **Límites de la forma** 1^∞ , ∞^0 y 0^0

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x)-1)}$$