Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

- **Polinomio de Taylor**

  Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta orden n en un punto $x = a$. Entonces existe un polinomio $P_n(x)$, y sólo uno, de grado $\leq n$ que satisface

  $$P_n(a) = f(a); P_n'(a) = f'(a); P_n''(a) = f''(a); ...; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

  y es el polinomio de Taylor

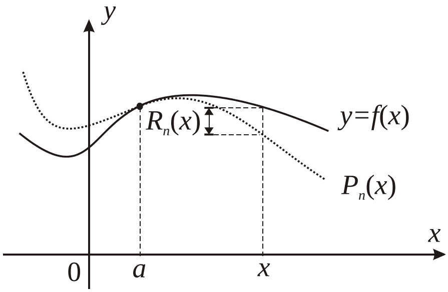
  $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  $$P_n(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$



Fórmula de Taylor

- **Teorema de Taylor**

  Si las funciones $f, f', f'', ..., f^{(n+1)}$ están definidas en $[a, x]$, existe $t \in (a, x)$ tal que el resto de Taylor de orden n de f en a viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta es la llamada *fórmula de Taylor con el resto en la forma de Lagrange.*