Introducción.

Anteriormente se ha aprendido como determinar las tensiones y corrientes en un circuito alimentado con una fuente senoidal de frecuencia constante. Si dejamos que la amplitud de la fuente senoidal permanezca constante y variamos su frecuencia, obtenemos la respuesta en frecuencia del circuito.

Respuesta en frecuencia.

La respuesta en frecuencia de un circuito es la variación de su comportamiento al cambiar la frecuencia de la señal. Una determinada corriente o tensión puede ser la respuesta.

Estas respuestas de los circuitos en estado permanente senoidal son de importancia en muchas aplicaciones, en especial en los sistemas de comunicación y control. Una aplicación son los filtros eléctricos, que bloquean o eliminan señales con frecuencias indeseables y dejar pasar señales con las frecuencias deseadas. Los filtros se utilizan en sistemas de radio, TV, telefónicos, sistemas de potencia,...

La función de transferencia H(w) de un circuito es la razón dependiente de la frecuencia de una salida fasorial $\underline{Y}(w)$ (una tensión o una corriente de elemento) y una entrada fasorial $\underline{X}(w)$ (tensión o corriente de la fuente).

$$\underline{H}(w) = \frac{\underline{Y}(w)}{\underline{X}(w)} = H(w)\angle\phi \qquad (4.1)$$

Para obtener la función de transferencia, obtenemos primero el equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito sustituyendo las resistencias, inductancias y condensadores por sus impedancias R, jwL, $\frac{1}{jwC}$.

Obtenemos la respuesta en frecuencia del circuito representando el módulo H(w) y la fase ϕ conforme varía la pulsación ($w = 2\pi f$).

Introducción. Resonancia en circuitos eléctricos.

La característica más predominante de la respuesta en frecuencia de un circuito quizás sea el pico pronunciado (o el pico resonante) que se representa por su amplitud característica. El concepto de resonancia se aplica en varias áreas de la ciencia y de la ingeniería. Teniendo en cuenta la definición de función de transferencia, cuando el denominador de ésta X(w) tiene dos raíces complejas conjugadas, ocurre la resonancia. Ésta es la causa de que la energía almacenada oscile de una forma a otra. Constituye el fenómeno que permite la discriminación de frecuencia en las redes de comunicaciones. La resonancia se presenta en cualquier circuito que tiene al menos una inductancia y un condensador.

Los circuitos resonantes resultan útiles para construir filtros, pues sus funciones de transferencia pueden ser altamente selectivas en frecuencias. Se utilizan en muchas aplicaciones, como las de seleccionar las emisoras en los receptores de radio y televisión. Se deben tener en cuenta, las posibles sobretensiones que aparecen en los sistemas de potencia, debido a la existencia de circuitos resonantes.

La resonancia ocurre cuando en un dipolo, la tensión soportada y la corriente absorbidas (ambas senoidales) están en fase.

Resonancia serie.

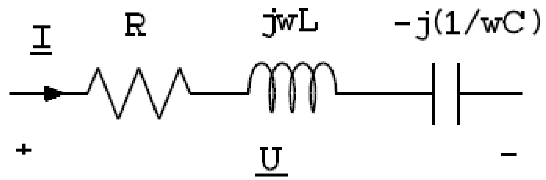

Figura 4.1: Circuito resonante serie

Si consideramos un circuito RLC serie (figura 4.1), la impedancia de entrada (impedancia de thevenin) en el dominio de la frecuencia es

$$\underline{Z}(w) = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jwL + \frac{1}{jwC} = R + j(wL - \frac{1}{wC}) \tag{4.14}$$

La resonancia es una condición en un circuito RLC en el cual las reactancias inductiva y capacitiva son de igual magnitud, por lo cual dan lugar a una impedancia puramente resistiva.

Por lo tanto haciendo que la parte imaginaria de la impedancia de entrada sea nula (ecuación 4.14), tendremos que:

$$Im(\underline{Z}(w)) = wL - \frac{1}{wC} = 0 \tag{4.15}$$

El valor de w que satisface esta condición recibe el nombre de pulsación de resonancia, de forma que

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{4.16}$$

Nótese que en resonancia:

1. La impedancia es puramente resistiva, por lo que $\underline{Z} = R$. En otras palabras, la combinación LC actúa como un cortocircuito, y toda la tensión de la entrada cae en la resistencia $\underline{U}_R = \underline{U}$.

2. La tensión en la entrada y la corriente se encuentran en fase, de modo que el factor de potencia es unitario.

3. La corriente absorbida es máxima en la condición de resonancia.

4. La tensión que soportan la inductancia y el condensador (que tienen un desfase de 180º) pueden ser mucho mayores que la tensión de la fuente, en la condición de resonancia.

$$\underline{U}_{Lwo} = jw_oL\frac{\underline{U}}{R} = jQ_o\underline{U} = -\underline{U}_{Cwo} \tag{4.17}$$

A $Q_o$se le denomina factor de sobretensión o factor de calida.

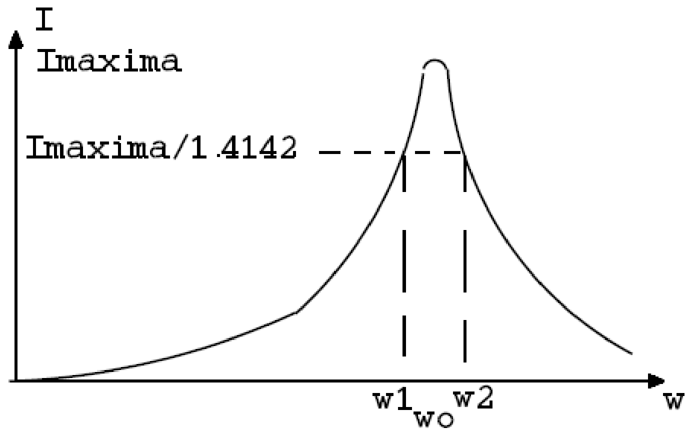

Figura 4.2: Respuesta en frecuencia circuito serie

La respuesta en frecuencia (la corriente absorbida por el circuito) es (figura 4.2):

$$|\underline{I}| = I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \tag{4.18}$$

La potencia activa disipada en el circuito tiene por valor:

$$P = RI^2 \tag{4.19}$$

En condición de resonancia, la corriente es máxima, y la potencia activa disipada es también máxima, por lo que:

$$P(w_0) = RI^2_{w_0} = \frac{U^2}{R} \tag{4.20}$$

En ciertas condiciones correspondientes a dos pulsaciones w_1, w_2, la potencia disipada es la mitad del valor máximo; esto es:

$$P(w_1) = P(w_2) = \frac{RI^2_{wo}}{2} = \frac{U^2}{2R} \tag{4.21}$$

La potencias absorbidas para w_1, y w_2 son

$$P(w_1) = P(w_2) = R\,\frac{U^2}{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2} \tag{4.22}$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores (4.21 y 4.22), se tiene que cumplir que:

$$R = wL - \frac{1}{wC} \tag{4.23}$$

Despejando w de la ecuación 4.23, obtenemos:

$$w_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{LC}} \tag{4.24}$$

$$w_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{LC}} \tag{4.25}$$

Es posible relacionar las pulsaciones de potencia mitad con la pulsación resonante

$$w_0 = \sqrt{w_1 w_2} \tag{4.26}$$

lo que muestra que la pulsación de resonancia es la media geométrica de las pulsaciones de potencia mitad. Nótese que en general w_1 y w_2 no son simétricas alrededor de la pulsación de resonancia w_0, debido a que la respuesta en frecuencia no es simétrica.

Aunque la altura de la respuesta en frecuencia está determinada por R, el ancho de la misma depende de otros factores. El ancho de la curva de respuesta, denominado ancho de banda B, que se define como la diferencia entre las dos pulsaciones de potencia mitad

$$B = w_2 - w_1 \tag{4.27}$$

Resonancia paralelo.

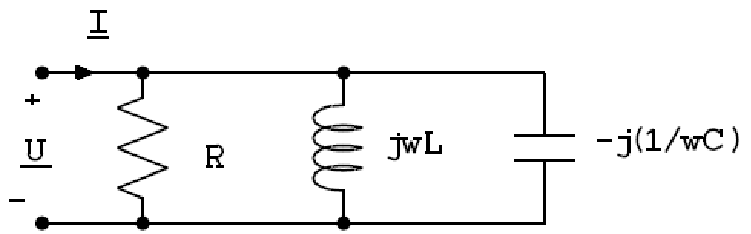

Figure 4.3: Circuito resonate paralelo

Si consideramos un circuito RLC paralelo (figura 4.3), la admitancia de entrada (impedancia de norton) en el dominio de la frecuencia es:

$$\underline{Y}(w) = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} + jwC + \frac{1}{jwL} = \frac{1}{R} + j(wC - \frac{1}{wL}) \tag{4.28}$$

La resonancia es una condición en un circuito RLC en el cual las reactancias inductiva y capacitiva son de igual magnitud, por lo cual dan lugar a una admitancia puramente resistiva.

Por lo tanto haciendo que la parte imaginaria de la impedancia de entrada sea nula (ecuación 4.28), tendremos que:

$$Im(\underline{Y}(w)) = wC - \frac{1}{wL} = 0 \tag{4.29}$$

El valor de w que satisface esta condición recibe el nombre de pulsación de resonancia, de forma que

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{4.30}$$

Nótese que en resonancia:

1. La admitancia es puramente resistiva, por lo que $\underline{Y} = 1/R$. En otras palabras, la combinación LC actúa como un circuito abierto, y toda la corriente de entrada circula por la resistencia ($\underline{I}_R = \underline{I}$).

2. La tensión en la entrada y la corriente se encuentran en fase, de modo que el factor de potencia es unitario.

3. La tensión es máxima en la condición de resonancia.

4. La corriente que circulan la inductancia y el condensador (que tienen un desfase de 180º) pueden ser mucho mayores que la corriente de la fuente.

$$\underline{I}_{Lwo} = \frac{R\underline{I}}{jw_oL} = -jQ_o\underline{I} = -\underline{I}_{Cwo} \tag{4.31}$$

A $Q_o$se le denomina factor de sobrecorriente.

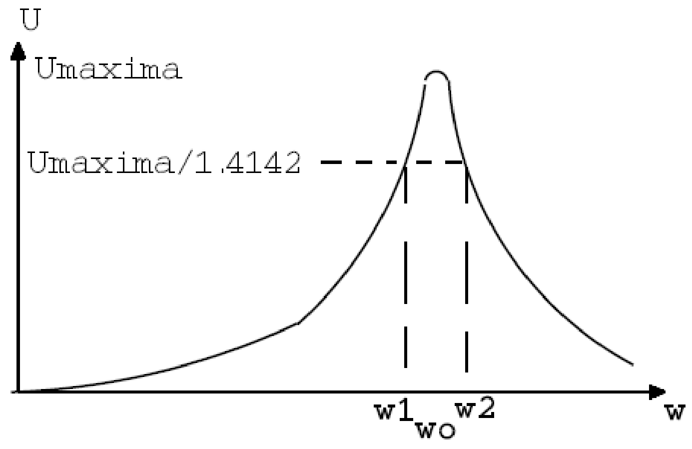

Figura 4.4: Respuesta en frecuencia circuito paralelo

La respuesta en frecuencia (la tensión soportada por el circuito) es (figura 4.4):

$$|\underline{U}| = U = \frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (wC - \frac{1}{wL})^2}} \tag{4.32}$$

La potencia activa disipada en el circuito tiene por valor:

$$P = \frac{U^2}{R} \tag{4.33}$$

En condición de resonancia, la tensión es máxima, y la potencia activa disipada es también máxima, por lo que:

$$P(w_0) = \frac{U_{w_0}^2}{R} = RI^2 \tag{4.34}$$

En ciertas condiciones correspondientes a dos pulsaciones w_1, w_2, la potencia disipada es la mitad del valor máximo; esto es:

$$P(w_1) = P(w_2) = \frac{U_{w_0}^2}{2R} = \frac{RI^2}{2} \tag{4.35}$$

La potencias absorbidas para w_1, y w_2 son

$$P(w_1) = P(w_2) = \frac{U^2}{R} = \frac{I^2}{R[\frac{1}{R^2} + (wC - \frac{1}{wL})^2]} \tag{4.36}$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores (4.35 y 4.36), se tiene que cumplir que:

$$1/R = wC - \frac{1}{wL} \tag{4.37}$$

Despejando w, obtenemos:

$$w_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{(\frac{1}{2RC})^2 + \frac{1}{LC}} \tag{4.38}$$

$$w_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{(\frac{1}{2RC})^2 + \frac{1}{LC}} \tag{4.39}$$

Es posible relacionar las pulsaciones de potencia mitad con la pulsación resonante

$$w_0 = \sqrt{w_1 w_2} \tag{4.40}$$

lo que muestra que la pulsación de resonancia es la media geométrica de las pulsaciones de potencia mitad. Nótese que en general w_1 y w_2 no son simétricas alrededor de la pulsación de resonancia w_0, debido a que la respuesta en frecuencia no es simétrica.

Aunque la altura de la respuesta en frecuencia está determinada por R, el ancho de la misma depende de otros factores. El ancho de la curva de respuesta denominado ancho de banda B, que se define como la diferencia entre las dos pulsaciones de potencia mitad

$$B = w_2 - w_1 \tag{4.41}$$