Introducción.

Una senoide es una señal que tiene la forma de la función seno o coseno. Las señales senoidales se encuentran en la naturaleza, son fáciles de generar y transmitir. Es la forma de tensión que se genera en todo el mundo y suministradas a casas, fábricas,... A través del análisis de Fourier, cualquier señal periódica puede representarse como suma de senoides. Además es fácil de manejar matemáticamente.

Representación temporal, compleja y exponencial.

Representación temporal:

$$u(t) = \sqrt{2}U\,sen(wt + \varphi) \tag{2.1}$$

donde U es el valor eficaz, $w = 2\pi f$ es la pulsación, $wt + \varphi$ es la fase de la onda y, φ la fase inicial.

En la práctica de la ingeniería resulta muy útil, trabajar con φ en grados y, aunque son inaceptables dimensionalmente, serán válidas para nosotros.

Obsérvese que cada onda tendrá una fase, y se denomina diferencia de fase o desfase entre dos ondas sinusoidales de igual frecuencia, a la diferencia entre sus fases respectivas. Si tenemos dos ondas de tensión como las siguientes:

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_1 sen(wt + \varphi_1) \qquad u_2(t) = \sqrt{2}U_2 sen(wt + \varphi_2) \tag{2.2}$$

El desfase será:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{2.3}$$

Si $0 < \varphi < 180^o$ se dice que la onda u_1 adelanta φ a la onda u_2. Si $-180^o < \varphi < 0$ se dice que la onda u_1 retrasa φ a la onda u_2. Si $\varphi = 0$ las dos ondas están en fase y si $\varphi = 180$ ques están en oposición.

Representación compleja:

La expresión de un número complejo (forma rectangular y exponencial) será:

$$\underline{z} = x + jy = re^{j\varphi} = rcos(\varphi) + jrsen(\varphi) = r\angle\varphi \tag{2.4}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \varphi = arctan\frac{y}{x}$

De acuerdo con las expresiones anteriores tendremos que una función senoidal se puede expresar en función de un número complejo variable en el tiempo:

$$u(t) = Im[\sqrt{2}Ucos(wt + \varphi) + j\sqrt{2}Usen(wt + \varphi)] = Im[\sqrt{2}Ue^{j\varphi}e^{jwt}] \tag{2.5}$$

Este número complejo se denomina fasor. Un fasor es un número complejo que representa en amplitud y fase una senoide. Representa un medio simple para analizar los circuitos lineales.

Si se suprime $\sqrt{2}$ y $e^{jwt}(factor\ de\ tiempo)$, cuyo módulo es la unidad y que indica el movimiento del fasor, se tendrá, la denominada representación compleja:

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi} = Ucos(\varphi) + jUsen(\varphi)$$

La representación compleja indica el valor eficaz de la onda senoidal y el valor de la fase inicial.

En el cuadro2.1 se indican las representaciones temporales y complejas de una función senoidal y cosenoidal.

Si realizamos una derivada o integral de una función senoidal $u(t) = \sqrt{2}Usen(wt + \varphi)$ tendremos (cuadro 2.2):

Expresiones anteriores permiten comprobar que una derivada con respecto al tiempo de una función senoidal $u(t)$ se corresponde en el dominio complejo con la multiplicación por jw del conmplejo $\underline{U}$. A su vez una integral con respecto al tiempo, corresponde con la multiplicación $1/jw$.

Se debe recordar que u(t) es instantánea (dominio del tiempo), mientras que $\underline{U}$ es la representación compleja de una función senoidal. Por lo tanto u(t) depende del tiempo y $\underline{U}$ no.

Representación dominio temporal	Representación dominio complejo
$u_1(t) = \sqrt{2}Usen(wt + \varphi)$	$\underline{U}_1 = Ue^{j\varphi}$
$u_2(t) = \sqrt{2}Ucos(wt + \varphi)$	$\underline{U}_2 = Ue^{j(\varphi+\pi/2)} = jUe^{j\varphi}$

Cuadro 2.1: Funciones seno y coseno

Representación dominio temporal	Representación dominio complejo
$\frac{du(t)}{dt} = (\sqrt{2}Uw)cos(wt + \varphi)$	$jwUe^{j\varphi} = jw\underline{U}$
$\int u(t)dt = \sqrt{2}\frac{U}{w}[-sen(wt + \varphi)]$	$\frac{U}{jw}e^{j\varphi} = \frac{\underline{U}}{jw}$

Cuadro 2.2: Senoide. Derivada e integral

Respuesta senoidal de los elementos ideales pasivos.

La respuesta en el dominio del tiempo y en el dominio complejo de los tres elementos pasivos simples, resistencia, inductancia y condensador se resumen en el cuadro 2.3:

$i(t) = \sqrt{2}Isen(wt+\varphi)$	Dominio del tiempo	Dominio complejo
Resistencia	$u(t) = Ri(t) = \sqrt{2}RIsen(wt+\varphi)$	$\underline{U} = R\underline{I} = RIe^{j\varphi}$
Inductancia	$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}wLIcos(wt+\varphi)$	$\underline{U} = jwL\underline{I} = jwLIe^{j\varphi}$
Condensador	$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \sqrt{2}\frac{-I}{wC}sen(wt+\varphi)$	$\underline{U} = \frac{1}{jwC}\underline{I} = \frac{1}{jwC}Ie^{j\varphi}$

Cuadro 2.3: Elementos pasivos simples. Dominio complejo

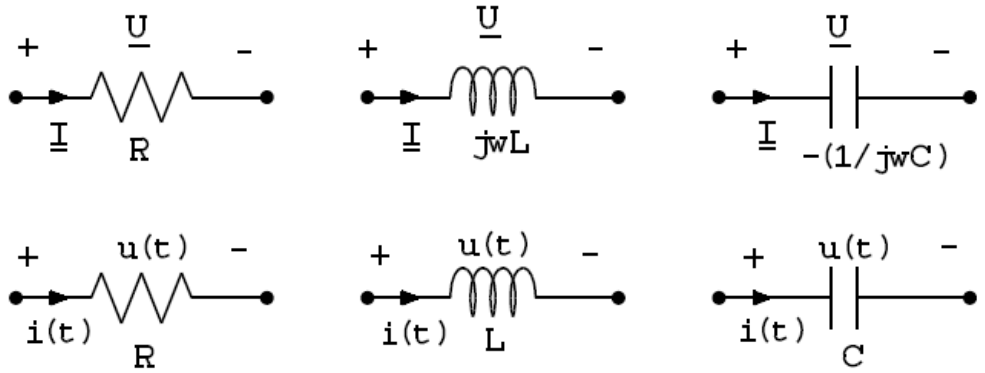


Figura 2.1: Elementos pasivos. Representación compleja

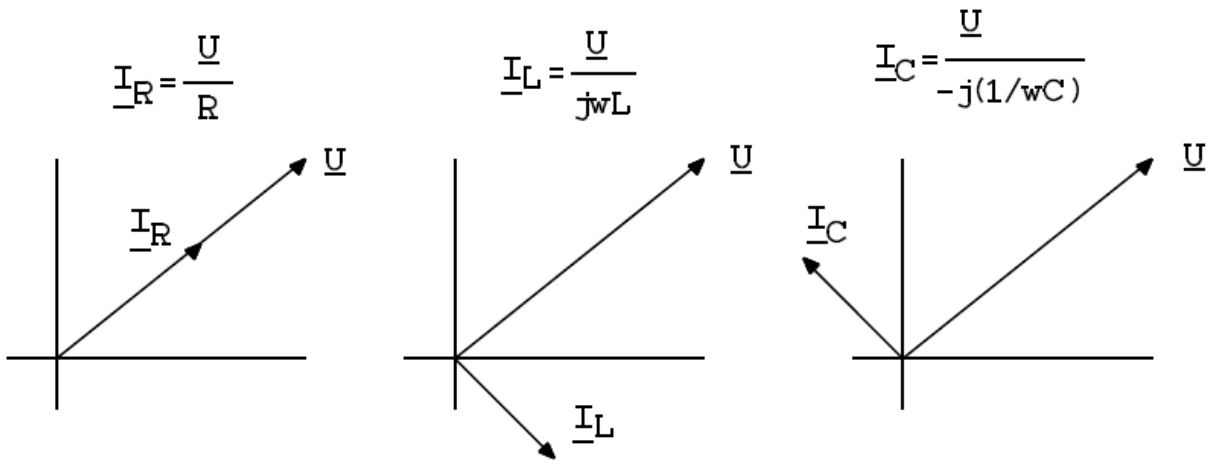


Figura 2.2: Elementos pasivos. Diagramas fasoriales

En la figura 2.1 se indica el circuito equivalente correspondiente a los tres elementos pasivos simples. Se verifica que:

Resistencia $\underline{U} = R\underline{I}$ *Inductancia* $\underline{U} = jwL\underline{I}$ *Condensador* $\underline{U} = \frac{1}{jwC}\underline{I}$

Impedancias y admitancias.

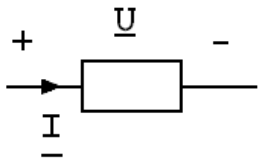


Figura 2.3: Impedancia compleja

Al observar la ecuación 2.6, indican que la tensión compleja puede expresarse como el producto de una expresión compleja, por la corriente compleja. Esta expresión se denomina impedancia compleja $\underline{Z}(jw)$, y representa la relación que existe entre la tensión y la corriente (figura 2.3):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \tag{2.7}$$

La inversa de la impendancia compleja se denomina admitancia compleja:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \tag{2.8}$$

Impedancias y admitancias de elementos pasivos

Elemento	Impedancia	Admitancia
Resistencia	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = 1/R$
Inductancia	$\underline{Z} = jwL$	$\underline{Y} = 1/(jwL)$
Condensador	$\underline{Z} = 1/(jwC)$	$\underline{Y} = jwC$

Cuadro 2.4: Impedancia complejas elementos simples

En los circuitos pueden existir impedancias complejas que estén en serie y otras que estén en paralelo. Las reglas para su asociación son semejantes a las de las impedancias operacionales, como se analizó en el tema 4.

n impedancias en serie: la impedancia equivalente Z_{eq}, tiene por valor:

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i \tag{2.9}$$

n impedancias en paralelo: la impedancia equivalente Z_{eq}, tiene por valor:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i} = \underline{Y}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Y \tag{2.10}$$

Como la impedancia de un circuito es la razón entre la tensión compleja $\underline{U}$ y la corriente compleja $\underline{I}$, medida en Ω, resulta:

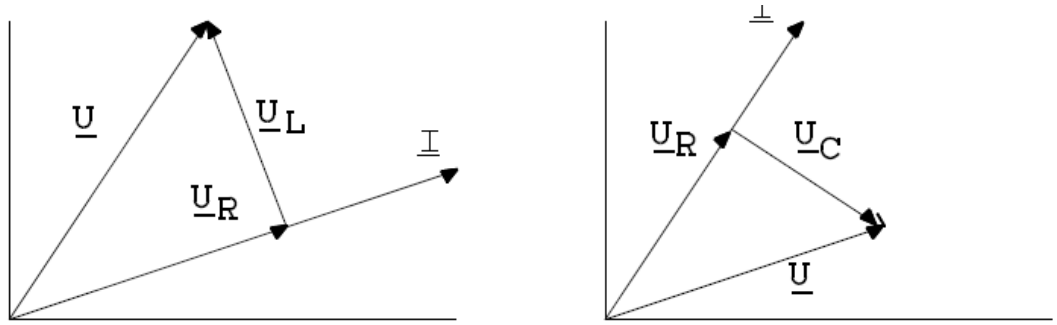
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} e^{jarctan(X/R)} \tag{2.11}$$

A la parte real de la impedancia se la denomina resistencia R=Re{Z} y a la parte imaginaria se la denomina reactancia X=Im{Z}.

El módulo de la impedancia compleja indica la relación de módulo entre la tensión y la corriente. El ángulo de la impedancia compleja, nos indica el desfase existente entre la tensión compleja y la corriente compleja.

Si la reactancia X es positiva la impedancia es de tipo inductivo y la corriente compleja esta retrasada respecto a la tensión compleja. En cambio si X es negativa, la impedancia es de tipo capacitivo y la corriente esta adelantada respecto a la tensión.

Figura 2.4: Diagrama fasorial impedancia inductancia e impedancia capacitiva



En la figura 2.4 se representa un circuito equivalente y su diagrama fasorial de una impedancia de tipo inductivo y otra de tipo capacitivo.

Las leyes de Kirchhoff en el dominio complejo.

El análisis de circuitos alimentados o excitados por fuentes de tipo senoidal, en vez de hacerse en el domino del tiempo, calculando las soluciones particulares de los ecuaciones integro-diferenciales, puede realizarse en el dominio complejo. La idea consiste en sustituir la red en el dominio del tiempo por una red compleja y aplicar en esta última, las leyes de Kirchhoff. Los elementos pasivos simples, resistencia, inductancia y condensador se representan mediante sus circuitos equivalentes figura 2.1. Si existe una fuente ideal de tensión, su representación equivalente es la misma, pero la f.e.m. se expresará en forma compleja. Para una fuente ideal de corriente, se representará en función de la corriente compleja suministrada.

Al aplicar las leyes de Kirchhoff, tendremos que

1. En un nudo, la suma de las corrientes complejas entrantes es igual a cero $\sum \underline{I} = 0$.
2. En un lazo, la suma de las f.e.m. complejas es igual a la suma de las tensiones complejas en las impedancias complejas de los elementos simples $\sum \underline{E}_g = \sum \underline{U}$.