TEMA 1: INTEGRALES MÚLTIPLES

Ampliación de Matemáticas (Grado en Ingeniería en T. I.)

EPI Gijón - UNIOVI

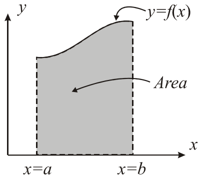
Recordemos que en el cálculo de funciones de una variable $y = f(x)$ la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

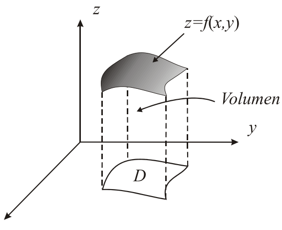
es el área que se indica en la figura (si $f(x) \geq 0$). Ahora vamos a generalizar este concepto para integrales de funciones de dos variables $z = f(x,y)$, y trabajaremos sobre subconjuntos del plano. Veremos que la idea análoga que surgirá será que la integral:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

es el volumen que se indica en la figura (si $f(x,y) \geq 0$).



(a)



(b)

Definición (**Rectángulo de $\mathbb{R}^2$**)

Llamaremos rectángulo R de $\mathbb{R}^2$ a un conjunto de la forma:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\}$$

Definición (**Partición regular de un rectángulo**)

Por *partición regular* de R de orden n, entenderemos dos colecciones ordenadas de $n+1$ puntos igualmente espaciados $\left\{x_j\right\}_{j=0}^{n}$ y $\left\{y_k\right\}_{k=0}^{n}$; esto es, puntos que satisfacen:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}; \qquad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

Sea R_{jk} el rectángulo $\left[x_j, x_{j+1}\right] \times \left[y_k, y_{k+1}\right]$ y sea c_{jk} cualquier punto de R_{jk}, como se indica en la siguiente figura.

Suponemos que $f(x,y) : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada de dos variables.

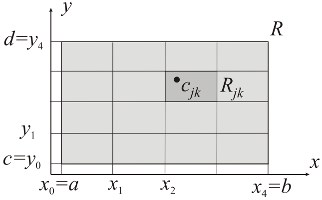


Figura: Formación de la suma de Riemann.

Formamos la suma:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right)\Delta x\Delta y = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right)\Delta A$$

La suma está tomada sobre todo j y k de 0 a $n-1$, de modo que hay n^2 sumandos. Una suma de este tipo se llama *suma de Riemann* para f.

Definición (La integral doble límite de una sucesión de sumas)

Supongamos que f es una función acotada, definida en R. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \longrightarrow \infty$ y el límite S es el mismo para cualquier selección de puntos c_{jk} en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es integrable sobre R. Al límite S lo denominamos integral doble de f sobre R y lo denotamos por:

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy$$

De esta forma podemos escribir la integrabilidad de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta x \Delta y = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

para cualquier elección de $c_{jk} \in R_{jk}$.

- **Interpretación de la Integral doble como un volumen**

Si $f(x,y) \geq 0$ y si c_{jk} es un punto en donde $f(x,y)$ tiene su mínimo en cada R_{jk}, entonces la suma:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta x \Delta y$$

es igual al volumen de un sólido inscrito, parte del cual se muestra en la figura.

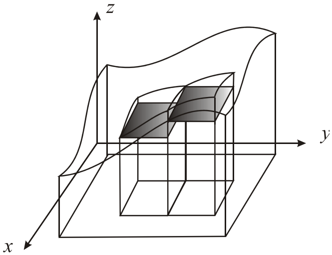


Figura: Volumen de un sólido inscrito.

De manera análoga, si c_{jk} es un punto en donde $f(x, y)$ tiene su máximo en cada R_{jk}, entonces la suma:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{jk}\right) \Delta x \Delta y$$

es igual al volumen de un sólido circunscrito, parte del cual se muestra en la figura.

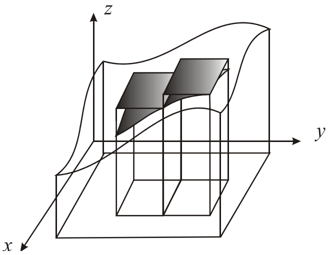


Figura: Volumen de un sólido circunscrito.

Por lo tanto, si existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ y es independiente de $c_{jk} \in R_{jk}$, entonces los volúmenes de los sólidos inscrito y circunscrito tienden al mismo límite cuando $n \longrightarrow \infty$, que será el volumen del sólido cilíndrico que se indica en la figura.

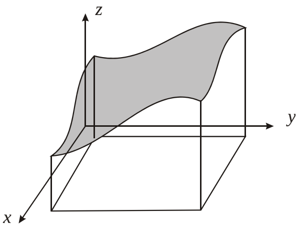


Figura: Volumen del sólido.

- Es inmediato ver que si $f(x, y) = 1$, entonces

$$\iint_R dxdy = \acute{a}rea(R)$$

Propiedades de la Integral Doble

Se demuestran fácilmente algunas propiedades para la integral $\iint_R f(x,y)\,dxdy$. Estas propiedades son esencialmente las mismas que para la integral de una función con valores reales, de una variable.

a) **Linealidad**.

Si $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en R y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $f+g$ y αf son integrables en R. Además se cumple que:

$$\iint_R (f+g)\,dxdy = \iint_R fdxdy + \iint_R gdxdy; \qquad \iint_R \alpha fdxdy = \alpha \iint_R fdxdy$$

b) **Monotonía**.

Si $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en R y $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$ entonces:

$$\iint_R fdxdy \leq \iint_R gdxdy$$

En particular, teniendo en cuenta que si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en R entonces $|f|$ es integrable en R, se verifica que:

$$\left|\iint_R fdxdy\right| \leq \iint_R |f|\,dxdy$$

c) **Acotación.**
Si $f, g : R \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables en R y $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in R$, entonces:

$$mA(R) = m(b-a)(d-c) \leq \iint_R f dxdy \leq M(b-a)(d-c) = MA(R)$$

d) **Aditividad respecto a rectángulos.**
Si el rectángulo R es unión de dos rectángulos con un lado común, $R = R_1 \cup R_2$, entonces $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en R si y sólo si lo es en R_1 y R_2, y además:

$$\iint_R f dxdy = \iint_{R_1} f dxdy + \iint_{R_2} f dxdy$$

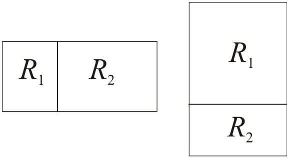


Figura: Aditividad respecto a rectángulos.

Para concluir este apartado, vamos a ver un importante resultado análogo al teorema del valor medio del cálculo integral de funciones de una variable.

Definición (Valor medio integral)

Dada una función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, se denomina promedio integral o valor medio integral de f en R al valor:

$$f_R = \frac{1}{\acute{a}rea(R)} \iint_R f(x, y) dxdy$$

Teorema (Teorema del valor medio para integrales dobles)

Supongamos que $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces para algún punto (x_0, y_0) en R, tenemos:

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = f(x_0, y_0)\, A(R)$$

en donde $A(R)$ denota el área de R.

- **Integrales Iteradas**

Para calcular la integral doble haremos algo similar para el caso de una variable, que evitamos tener que calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de su definición como límite de una suma y la calculamos, mediante la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema (Teorema de Fubini sobre un rectángulo)

Supongamos que $f(x,y)$ es una función integrable sobre un rectángulo: $R: a \le x \le b,\ c \le y \le d$. Si para cada x de $[a,b]$ e y de $[c,d]$ existen las integrales:

$$\int_a^b f(x,y)\,dx; \quad \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Entonces se cumple que:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Ejemplo 1

Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *y sea* $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. *Calcular la integral:*

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

Solución:

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dx\right] dy$$

Para calcular $\int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dx$, mantenemos y como cte e integramos la x.

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} + 2y^2$$

A continuación integramos $\frac{2}{3} + 2y^2$ respecto a y, de 0 a 1, y obtenemos:

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right) dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{4}{3}$$

Como vimos anteriormente el valor de la integral es el volumen del sólido representado en la figura, que es un sólido cilíndrico cuya base inferior es el rectángulo R, la base superior es la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ y de generatrices paralelas al eje OZ.

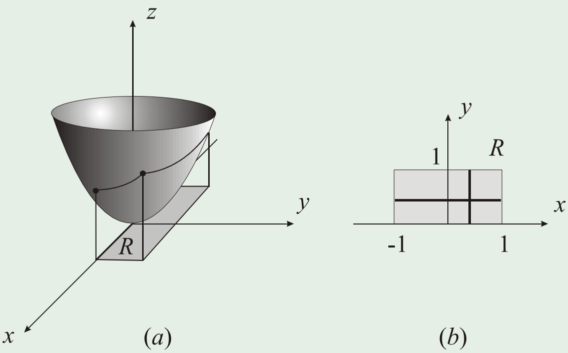


Figura: (a) Volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y sobre $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. (b) Proyección R.

Ejercicio 1

Sea $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Calcular $\iint_R \cos x \operatorname{sen} y dxdy$. *Solución*: 1.

Ejercicio 2

Sea $R = [0, 2] \times [0, 3]$. *Calcular* $\iint_R \left(x^2 + 4y\right) dxdy$. *Solución*: 44.

Ejercicio 3

Demostrar que $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}$. *Demostrar que, sin embargo,* $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}$. *¿Hay alguna contradicción entre estos dos resultados?.*

Definición (Función característica)

Para cada subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ llamamos *función característica* $\chi_D : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a la función definida por:

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in D \\ 0 & \text{si} \quad x \notin D \end{cases}$$

Teorema (Integral doble sobre un conjunto acotado)

Supongamos que D es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, R un rectángulo que contiene a D y $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es integrable en D si lo es la función $f \cdot \chi_D$ en R, en cuyo caso se llama integral doble de f sobre D y se representa por:

$$\iint_D f dxdy = \iint_R f \cdot \chi_D dxdy = \iint_R f^* dxdy$$

Por tanto, como ya sabemos calcular integrales dobles sobre rectángulos, con esta definición ya podemos calcular integrales dobles sobre cualquier conjunto acotado.

La justificación de la definición anterior sería la siguiente. Obsérvese que:

$$f^* = f \cdot \chi_D = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in R - D \end{cases}$$

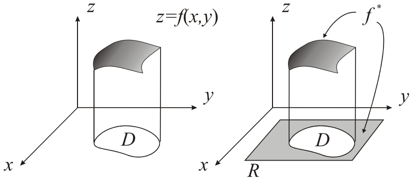


Figura: Regiones no rectangulares.

Por lo que:

$$\iint_R f^* dxdy = \iint_D f dxdy + \iint_{R-D} 0 dxdy = \iint_D f dxdy$$

Ejemplo 2

Sea $R = [-1,1] \times [0,1]$ y *sea* A *el conjunto:*

$$A = \left\{ (x,y) \in R / x^2 \leq y \leq 1 \right\}$$

Calcular la integral:

$$\iint_A x^2 y^3 \, dxdy$$

Solución: Representamos el conjunto A inscrito en el rectángulo R.

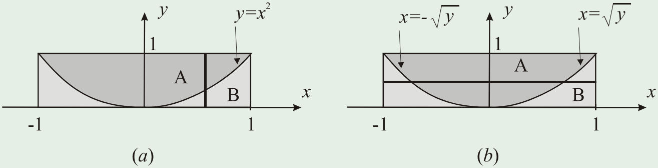


Figura: (a) Integrando primero la variable y. (b) Integrando primero la variable x.

$$f^* = f \cdot \chi_D = \begin{cases} x^2y^3 & \text{si} \quad (x,y) \in A \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in B \end{cases}$$

Ahora podríamos calcular la integral doble integrando primero la variable y o la variable x. Elegimos la primer opción y dejamos al alumno que compruebe el resultado mediante la opción b.

$$\begin{aligned} I &= \iint_A f dxdy = \iint_R f^* dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 f^*(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} f^*(x,y)\, dy + \int_{x^2}^{1} f^*(x,y)\, dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} 0 dy + \int_{x^2}^{1} x^2y^3 dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} x^2y^3 dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4}x^2y^4 \right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}x^2 \left(1 - x^8 \right) dx = \frac{4}{33} \end{aligned}$$

Definición (**Medida nula**)

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ *tiene medida nula si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe un conjunto finito o infinito numerable de rectángulos* $R_1, R_2, ..., R_n, ...$ *(un recubrimiento numerable) tal que* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ *y* $\sum_{i=1}^{\infty} \text{área}\,(R_i) \leq \varepsilon$.

Definición (**Conjunto medible-Jordan**)

Sea D *un subconjunto acotado de* $\mathbb{R}^2$ *y* R *un rectángulo que lo contiene. Se dice que* D *es medible-Jordan si existe la integral* $\iint_R \chi_D dxdy$, *y al valor de dicha integral se le llama medida-Jordan de* D.

Teorema (**Teorema de Lebesgue para conjuntos acotados**)

Supongamos que D *es un subconjunto acotado medible-Jordan de* $\mathbb{R}^2$ *y* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función acotada. Se cumple que* f *es integrable sobre* D *si y sólo si su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida nula.*

Propiedades de la Integral Doble

Se puede comprobar fácilmente que las propiedades que habíamos visto para las integrales dobles sobre rectángulos se verifican para las integrales dobles sobre conjuntos acotados.

1) **Linealidad**.

$$\iint_D (f+g)\,dxdy = \iint_D fdxdy + \iint_D gdxdy; \qquad \iint_D \alpha fdxdy = \alpha \iint_D fdxdy$$

2) **Monotonía**.

$$f(x,y) \leq g(x,y),\ \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint_D fdxdy \leq \iint_D gdxdy$$

3) **Acotación**.

$$m \leq f(x,y) \leq M,\ \forall (x,y) \in D \Rightarrow mA(D) \leq \iint_D fdxdy \leq MA(D)$$

4) **Aditividad respecto al dominio**.

$$D = D_1 \cup D_2 \Longrightarrow \iint_D fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy$$

Definición (**Valor medio**)

Dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, se denomina promedio integral o valor medio integral de f en D al valor:

$$f_D = \frac{1}{\text{área}(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$$

Teorema (**Teorema del valor medio para integrales dobles**)

Supongamos que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces para algún punto (x_0, y_0) en D, tenemos:

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = f\left(x_0,y_0\right)A\left(D\right)$$

en donde $A\left(D\right)$ denota el área de D.

- Por último es inmediato ver que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

es el volumen del sólido cilíndrico cuya base superior es la superficie $z = f(x,y)$, cuya base inferior es el conjunto D y de generatrices paralelas al eje z.

- Además:

$$\iint_D dxdy$$

es el área del conjunto D.

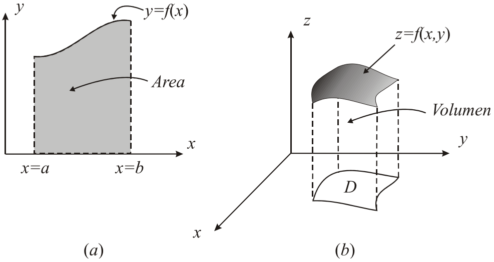


Figura: (a) Área bajo una curva. (b) Volumen bajo una superficie.

Para no tener que calcular la función característica f^*, el rectángulo R circunscrito al conjunto D, etc., hallamos $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, sistematizando el cálculo mediante el teorema de Fubini y para ello previamente definiremos los distintos tipos de regiones de integración.

$$\text{Regiones Tipo } (I): D_I = \{(x,y)\,/\,a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

$$\text{Regiones Tipo } (II): D_{II} = \{(x,y)\,/\,\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

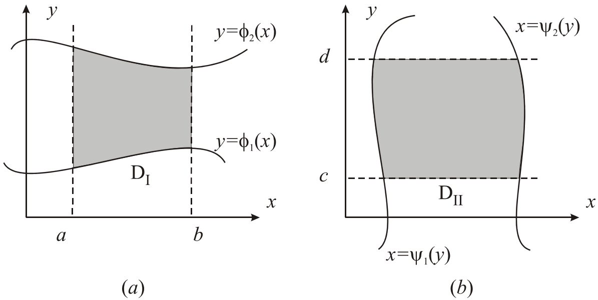


Figura: (a) Regiones del Tipo (I). (b) Regiones del Tipo (II).

Teorema (Teorema de Fubini en regiones de integración de $\mathbb{R}^2$)

Supongamos que f es continua en D. Si la región D es del tipo (I), es decir, si

$$D = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

donde $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre D se calcula por:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

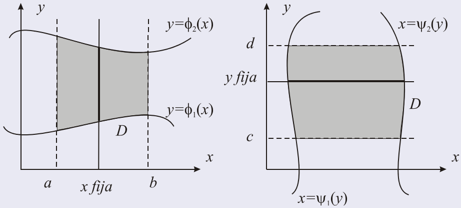


Figura: Visualización de las integrales iteradas.

Teorema (Teorema de Fubini en regiones de integración de $\mathbb{R}^2$)

Si la región D es del tipo (II), es decir, si

$$D = \{(x, y) \, / \, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

donde $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[c, d]$, entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre D se calcula por:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

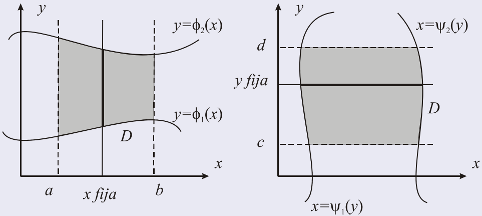


Figura: Visualización de las integrales iteradas.

Ejemplo 3

Siendo D la región triangular limitada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$ y $x = 1$, calcular la integral doble:

$$\iint_D (x + y)\, dxdy$$

por integración iterada: a) Integrando primero respecto a y. b) Integrando primero respecto a x.

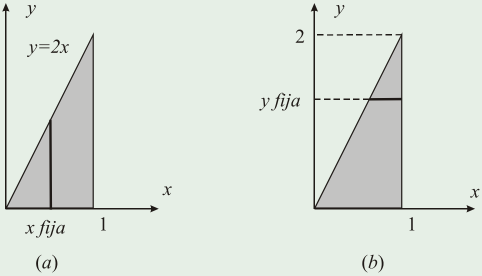


Figura: (a) Integrando respecto a y. (b) Integrando respecto a x.

Solución:

$$
\begin{aligned}
a)\ I &= \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x+y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^1 4x^2\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ I &= \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y/2}^{1} (x+y)\,dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_{x=y/2}^{x=1} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right] dy \\
&= \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{5y^3}{24} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4

Calcular $\iint_D \left(x^2 - y\right) dxdy$ siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2, y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. *Solución*: $\frac{4}{5}$.

Ejercicio 5

Hallar $\iint_D xydxdy$ siendo D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$. *Solución*: $\frac{1}{12}$.

Ejercicio 6

Calcular la integral doble de la función $f(x, y) = 1 + x + y$ extendida al dominio D limitado por las curvas: $y = -x$; $x = \sqrt{y}$; $y = 2$. *Solución*: $\frac{44}{15}\sqrt{2} + \frac{13}{3}$.

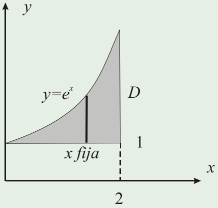
En algunas ocasiones es interesante o conveniente invertir el orden de integración en las integrales iteradas.

Ejemplo 4

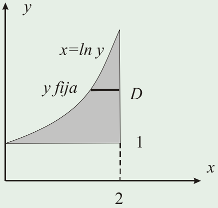
Invertir el orden de integración en la integral iterada

$$\int_0^2 \left(\int_1^{e^x} f(x, y) dy \right) dx$$

Solución: En primer lugar representamos gráficamente la región D a partir de los límites de integración en x e y (figura (a)). En este ejemplo observamos que primero se integra con respecto a y, luego D es una región de tipo (I).



(a)



(b)

Para invertir el orden de integración consideramos a D como una región de tipo (II). Así, al invertir el orden de integración, se obtiene

$$\int_1^{e^2} \left(\int_{\ln y}^{2} f(x,y)dx \right) dy$$

Ejercicio 7

Hallar, invirtiendo el orden de integración, $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{dy}{(x+y^2)^{1/2}} \right) dx$. *Solución*: $4(\sqrt{2}-1)$.

Ejercicio 8

Cambiar el orden de integración en $\int_1^4 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx$.

Dada la integral doble $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ el problema consiste en cambiar las dos variables x, y de la función $f(x,y)$ por dos nuevas variables, u, v, según las ecuaciones de transformación:

$$x = x(u,v), \;\; y = y(u,v)$$

Estas ecuaciones definen la función $\overline{F} : D' \underline{\subset} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\overline{F}(u,v) = (x,y) = (x(u,v), x(u,v))$$

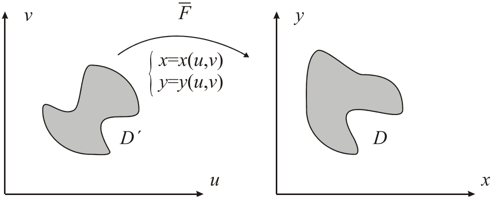


Figura: Esquema del cambio de variables.

A continuación vamos a enunciar el resultado que establece la condiciones para el cambio de variables en una integral doble.

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Teorema (Teorema del cambio de variables en integrales dobles)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en la región $D \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\overline{F} : D' \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{F}(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ una función inyectiva, de clase C^1 y supongamos que el jacobiano $J(u,v) = |\overline{F}'(u,v)|$ es distinto de cero en todos los puntos (u,v) de D'. Entonces se cumple:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \, |J(u,v)| \, dudv$$

Recordemos el concepto de determinante *Jacobiano*, que se define como:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Nota: Puede demostrarse que la fórmula sigue siendo válida aunque la aplicación deje de ser inyectiva en un subconjunto de medida nula o que el Jacobiano se anule en un subconjunto de medida nula.

Ejemplo 5

Sea D el paralelogramo acotado por $y = 2x, y = 2x - 2, y = x$ y $y = x + 1$. Calcular:

$$\iint_D xydxdy$$

Solución: Es fácil ver que nos interesa hacer el cambio de variable inverso $\overline{F}^{-1}$:

$$u = y - x; \quad v = y - 2x$$

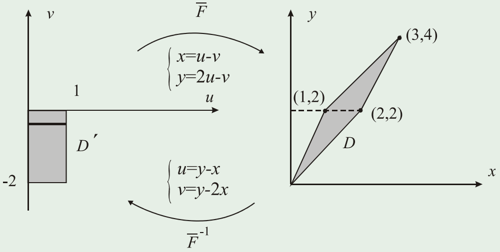


Figura: Esquema del cambio de variables.

Por tanto al usar $\overline{F}$ se simplifica notablemente la región de integración de D a D'. Se tiene:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| = 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \iint_{D'} (u-v)(2u-v)dudv \\
&= \int_{-2}^{0}\left(\int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2)du\right)dv = \\
&= \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2v}{2} + v^2u\right]_{u=0}^{u=1} dv \\
&= \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2\right]dv = \\
&= \left[\frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3}\right] = 7
\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Calcular la integral $\iint_D \frac{1}{x^3} dxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ la región del primer cuadrante limitada por las parábolas: $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y^2 = x$; $y^2 = 2x$. *Solución*: $\frac{1}{3} \ln 2$.

Ejercicio 10

Calcular la integral $\iint_D x^3 y dxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio del 1^{er} cuadrante limitado por las curvas: $y = x^2$; $y = x^2 + 1$; $y = 2 - x^2$; $y = 3 - x^2$. *Solución*: $\frac{3}{8}$.

Ejercicio 11

Calcular $\iint_D \frac{(x-y)}{[2-(x+y)]^2} dxdy$ siendo D el dominio limitado por: $x - y = 0$; $x + y = 0$; $x = 1$. *Solución*: $\frac{1}{2}$.

- **El cambio a coordenadas polares**

La relación entre estas coordenadas y las coordenadas cartesianas x, y del punto P es, como se puede ver fácilmente en la figura:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

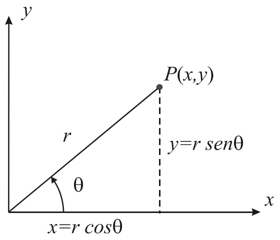


Figura: Coordenadas polares.

El plano $r\theta$ se describe con los rangos de variación: $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

En el caso de coordenadas polares, el jacobiano de la transformación que aparece en la fórmula de cambio de variables es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

Por tanto, la fórmula del teorema de cambio de variables, en este caso particular, es:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D'} f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta \\ &= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, rdrd\theta \end{aligned}$$

Nota. No hay un criterio general que nos diga cuándo debemos efectuar el cambio a coordenadas polares para calcular una integral doble; sin embargo cuando en la región de integración y/o en la función $f(x,y)$ a integrar aparezca la expresión (x^2+y^2), puede resultar conveniente intentar el cálculo de la integral haciendo previamente el cambio a coordenadas polares.

Ejemplo 6

Calcular:

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$$

donde D es la región del primer cuadrante que está entre los arcos de las circunferencias:

$$x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=b^2, (0<a<b)$$

Solución: Estas circunferencias tienen de ecuaciones $r=a$ y $r=b$ en coordenadas polares.

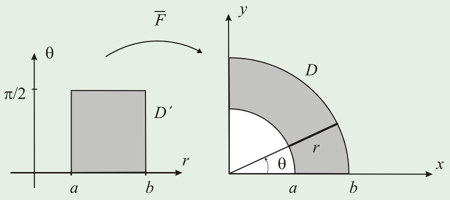


Figura: Esquema del cambio de variables.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \ln r^2\, r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_a^b r \ln r^2 dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \int_a^b r \ln r^2 dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \ln r dr \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{ccc} u = \ln x & \Rightarrow & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & \Rightarrow & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

obtenemos el resultado:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \ln r dr = \frac{\pi}{2} \left[b^2 \ln b - a^2 \ln a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right]$$

Ejercicio 12

Dada la integral $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio del 1^{er} cuadrante limitado por las curvas: $y = x$; $y = x^2$, (a) Plantearla en cartesianas. (b) Calcularla mediante el cambio a coordenadas polares. *Solución*: $\sqrt{2} - 1$.

Ejercicio 13

Calcular la integral doble $\iint_D x dxdy$ donde D es la región limitada por las rectas $y = x$; $x = 0$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y = 0$. *Solución*: $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 14

Calcular $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio del 1^{er} cuadrante limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ y las rectas $y = x$; $x = 2$. *Solución*: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

- **Las simetrías del recinto y la paridad de la función**

i) Si el recinto de integración D es simétrico respecto del eje OY y:
a) f es par en x, o sea $f(x,y) = f(-x,y)$ para todo $(x,y) \in D$

$$\iint_D f dxdy = 2 \iint_{D_1} f dxdy \quad \text{donde } D_1 = \{(x,y) \in D \,/\, x \geq 0\}$$

b) f es impar en x, o sea $f(-x,y) = -f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$

$$\iint_D f dxdy = 0$$

ii) Si el recinto de integración D es simétrico respecto del eje OX y:
a) f es par en y, o sea $f(x,y) = f(x,-y)$ para todo $(x,y) \in D$

$$\iint_D f dxdy = 2 \iint_{D_2} f dxdy \quad \text{donde } D_2 = \{(x,y) \in D \,/\, y \geq 0\}$$

b) f es impar en y, o sea $f(x,-y) = -f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$

$$\iint_D f dxdy = 0$$

iii) Si el recinto de integración D es simétrico respecto de los dos ejes de coordenadas y $f(x,y) = f(-x,y)$ y $f(x,y) = f(x,-y)$, para todo $(x,y) \in D$

$$\iint_D f dx dy = 4 \iint_{D_3} f dx dy \quad \text{siendo } D_3 = \{(x,y) \in D \,/\, x \geq 0; y \geq 0\}$$

Nota. Es obvio que existen otras muchas simetrías que facilitan el cálculo de integrales, destacando por su utilidad las simetrías de los cuerpos de revolución.

Ejemplo 7

Calcular, teniendo en cuenta las simetrías:

$$\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 1 + tg^2 y} dxdy$$

siendo:

$$D = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

Solución: Se verifica que el recinto de integración D es simétrico respecto del eje OY y que f es impar en x, o sea $f(-x, y) = -f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, por lo que:

$$\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 1 + tg^2 y} dxdy = 0$$

Ejercicio 15

Calcular, teniendo en cuenta las simetrías, $\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+1+tg^2 y} dxdy$ *siendo* $D = \{(x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. *Solución*: 0.

INT. TRIPLES. INTRODUCCIÓN

En esta sección veremos el concepto y cálculo de la integral triple de forma resumida, ya que, una vez desarrollada la teoría correspondiente a integrales dobles:

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

el paso a integrales triples:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz$$

resulta inmediato, sin más que sustituir los rectángulos de las particiones del plano, por paralelepípedos en las particiones en el espacio.

- Las propiedades y las condiciones de existencia son iguales que en las integrales dobles, por lo que las omitiremos en este desarrollo.

- **La Integral Triple sobre un paralelepípedo**

Siendo $f : B \to \mathbb{R}$, una función acotada, donde B es algún paralelepípedo rectangular en $\mathbb{R}^3$, dado por $B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, definimos la integral de $f(x, y, z)$ sobre B como un límite de sumas de Riemann, como hicimos para funciones de dos variables.
Partimos los tres lados de B en n partes iguales y definimos la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta V = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_{ijk}\right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

donde $c_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de B, y ΔV es el volumen de B_{ijk}.

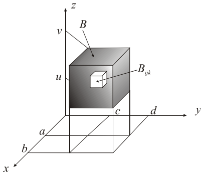


Figura: Partición del paralelepípedo rectangular B.

Definición (La integral triple límite de una sucesión de sumas)

Supongamos que f es una función acotada de tres variables, definida en B. Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y el límite S es el mismo para cualquier selección de c_{ijk} en el paralelepípedo B_{ijk}, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \iiint_B f(x, y, z)\,dxdydz$$

- A la vista de la definición es inmediato ver que se cumple:

$$\iiint_B dxdydz = Vol(B)$$

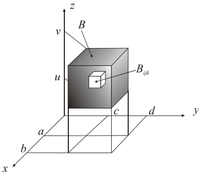


Figura: Volumen del paralelepípedo rectangular B.

Teorema (Teorema de Fubini sobre un paralelepípedo)

Si se cumple que $f(x,y,z)$ es continua sobre el paralelepípedo B :

$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, u \leq z \leq v$$

entonces se verifica que la integral triple se calcula mediante integrales iteradas de la forma siguiente:

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int_u^v \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

Se puede hacer la integración iterada en cualquier orden, con el necesario ajuste de los límites de integración.

Este teorema también se puede generalizar al caso en que f no necesariamente es continua, al igual que ocurría en integrales dobles.

Ejemplo 8

Calcular:

$$\iiint_B z^2 y e^x \, dxdydz$$

donde B es el paralelepípedo definido por las relaciones:

$$0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$$

Solución:

$$\iiint_B f(x,y,z) dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} \left(\int_{0}^{1} z^2 y e^x dx \right) dy \right) dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} z^2 y \left[e^x \right]_{x=0}^{x=1} dy \right) dz = \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} z^2 y \left[e-1 \right] dy \right) dz$$

$$= (e-1) \int_{-1}^{1} z^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} dz = (e-1) \int_{-1}^{1} z^2 \left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] dz$$

$$= \frac{3}{2}(e-1) \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{3}{2}(e-1) \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^{z=1} = e-1$$

Ampliamos ahora el concepto de integral triple de una función $f(x, y, z)$, sobre paralelepípedos B, a regiones Ω, más generales, en $\mathbb{R}^3$.
Cada subconjunto Ω de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada una función *característica* $\chi_\Omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

Definición (Integral triple sobre un conjunto acotado)

Supongamos que Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$, B un paralelepípedo que contiene a Ω y $f : B \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es integrable sobre Ω si lo es la función $f \cdot \chi_\Omega$ sobre B, en cuyo caso se llama integral triple de f sobre Ω y se representa por:

$$\iiint_\Omega f dxdydz = \iiint_B f \cdot \chi_\Omega dxdydz = \iiint_B f^* dxdydz$$

Definición (**Medida nula**)

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ *tiene medida nula si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe un conjunto finito o infinito numerable de paralelepípedos* $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ *(un recubrimiento numerable) tal que* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ *y* $\sum_{i=1}^{\infty} Vol\,(R_i) \leq \varepsilon$.

Definición (**Conjunto medible-Jordan**)

Sea Ω *un subconjunto acotado de* $\mathbb{R}^3$ *y* B *un paralelepípedo que lo contiene. Se dice que* Ω *es medible-Jordan si existe la integral* $\iiint_B \chi_\Omega dxdydz$. *Al valor de dicha integral se le llama medida-Jordan de* Ω.

Teorema (**Teorema de Lebesgue para conjuntos acotados**)

Si Ω *es un subconjunto acotado medible-Jordan de* $\mathbb{R}^3$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función acotada, entonces se cumple que* f *es integrable sobre* Ω *si y sólo si su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida nula.*

- **Regiones de integración en $\mathbb{R}^3$**

Una región Ω es del tipo (I), si se puede describir como el conjunto de los (x, y, z) tales que:

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \tag{1}$$

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \tag{2}$$

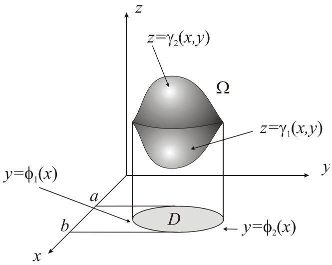


Figura: Región en $\mathbb{R}^3$ del tipo (I).

Una región es de tipo (II) si se puede expresar en la forma de la ecuación (1) o (2) intercambiando los papeles de x y z, y es del tipo (III) si se puede expresar en la forma de la ecuación (1) o (2) , con y y z intercambiados. Una región que sea a la vez de tipo (I), (II) y (III), se llama de tipo (IV).

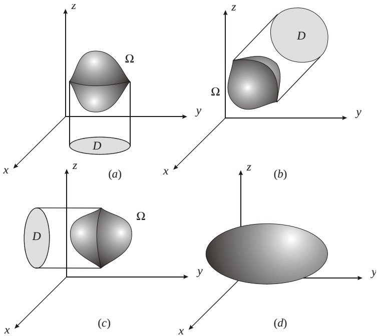


Figura: (a) Región $\mathbb{R}^3$ del tipo (I). (b) Región $\mathbb{R}^3$ del tipo (II). (c) Región $\mathbb{R}^3$ del tipo (III). (d) Región $\mathbb{R}^3$ del tipo (IV).

Teorema (**Teorema de Fubini en regiones de integración de $\mathbb{R}^3$**)

Si suponemos que Ω es del tipo (I), entonces:

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\
&= \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dydx \\
\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy \\
&= \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy
\end{aligned}
$$

siempre que Ω esté definida por la ecuación (1) o por la ecuación (2).

La función $f(x,y,x)$ se supone en principio continua sobre la región Ω, aunque se admiten condiciones menos estrictas, como que f sea continua en el interior de Ω y acotada en Ω.

Ejemplo 9

Sea Ω *la región acotada por los planos* $x = 0, y = 0, z = 2$ *y la superficie* $z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$*. Calcular:*

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz$$

Solución: La región Ω es del tipo (I):

$$\gamma_1(x,y) = x^2 + y^2, \gamma_2(x,y) = 2$$

$$\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = \sqrt{2 - x^2}; \quad a = 0, b = \sqrt{2}$$

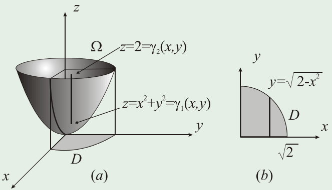


Figura: La región Ω y su proyección sobre el plano xy.

Sin más que operar:

$$I=\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\left(2-x^2\right)^{1/2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\left(2-x^2\right)^{1/2}} x\left(2-x^2-y^2\right)dy\right)dx=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} x\left[\left(2-x^2\right)^{3/2}-\frac{\left(2-x^2\right)^{3/2}}{3}\right]dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{3}\left(2-x^2\right)^{3/2}dx=\left[\frac{-2\left(2-x^2\right)^{5/2}}{15}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

Ejercicio 16

Hallar $\iiint_\Omega yz\,dxdydz$ donde Ω es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos $x+y=1$ y $z=4$. *Solución*: $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 17

Calcular la integral triple extendida a Ω, $I=\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ siendo Ω el dominio limitado por los planos de coordenadas y el plano $x+y+z=1$. *Solución*: $\frac{-5}{16}+\ln\sqrt{2}$.

Ejercicio 18

Calcular, mediante una integral triple, el volumen del cuerpo limitado por los planos: $x+z=1$; $x-z=-1$; $y=-1$; $y=1$; $z=0$. *Solución*: 2.

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

Dada la integral triple $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ el problema consiste en cambiar las variables x, y ,z de la función $f(x,y,z)$ por tres nuevas variables, u, v,w según las ecuaciones de transformación:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w)$$

Estas ecuaciones definen la función:

$$\begin{aligned} \overline{F} \quad &: \quad \Omega' \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \overline{F}(u,v,w) \quad &= \quad (x,y,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \end{aligned}$$

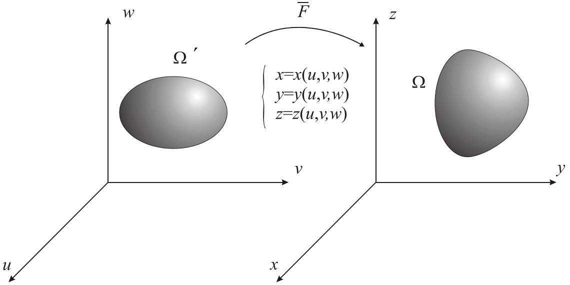


Figura: Esquema del cambio de variables.

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

Teorema (Teorema del cambio de variables en integrales dobles)

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en la región* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Sea* $\overline{F} : \Omega' \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \overline{F}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ *una función inyectiva, de clase* C^1 *y supongamos que el jacobiano* $J(u,v,w) = |\overline{F}'(u,v,w)|$ *es distinto de cero en todos los puntos* (u,v,w) *de* Ω'. *Entonces se cumple:*

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f\left(\overline{F}(u,v,w)\right)|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

El *Jacobiano* ahora es:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

Nota: Puede demostrarse que la fórmula sigue siendo válida aunque la aplicación deje de ser inyectiva en un subconjunto de medida nula o que el Jacobiano se anule en un subconjunto de medida nula.

Ejemplo 10

Calcular el volumen del paralelepípedo limitado por los 6 planos en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1;\ x+y+z=2 \\ x-y-z &= 1;\ x-y-z=2 \\ x+y-z &= 1;\ x+y-z=2 \end{aligned}$$

Solución: Si introducimos las nuevas variables u, v, w tales que:

$$\begin{aligned} u &= x+y+z \\ v &= x-y-z \\ w &= x+y-z \end{aligned}$$

la región Ω' del espacio *uvw* que corresponde a nuestra región Ω es:

$$\Omega' = \{(u,v,w)\, /1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2, 1 \leq w \leq 2\}$$

El jacobiano de esta transformación es:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-1}{4}$$

Por tanto, sin más que operar:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega'} \frac{1}{4} dudvdw \\ &= \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 dw \right) dv \right) du = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas

Vamos a introducir tres nuevas coordenadas para un punto $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$, denotadas por r, θ, z, según las fórmulas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

o en forma equivalente, consideramos la función de transformación de coordenadas $\overline{F} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$, dada por:

$$\overline{F}(r, \theta, z) = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

A la terna (r, θ, z) se le llama *coordenadas cilíndricas* del punto P.

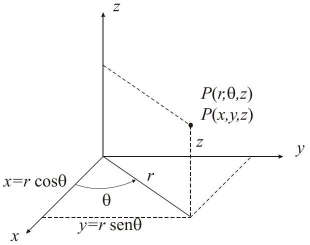


Figura: Sistema de Coordenadas Cilíndricas.

Nótese que la tercera coordenada z del sistema cartesiano es la misma que la tercera coordenada del sistema de coordenadas cilíndricas (que denotamos con la misma letra z). Para que la función $\overline{F}$ sea inyectiva, se debe pedir que:

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

El jacobiano de la transformación $\overline{F}(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z)$ es, en este caso:

$$\det \overline{F}(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

Por lo que la fórmula de cambio de variables x, y, z a coordenadas cilíndricas r, θ, z en una integral triple es:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z) \, rdzdrd\theta$$

donde Ω' es la región del espacio $r\theta z$ transformada en Ω por la función $\overline{F}$.

Ejemplo 11

Sea Ω la región acotada por los planos $x = 0, y = 0, z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$. Calcular:

$$\iiint_\Omega x dx dy dz$$

Solución: La región Ω se describe más fácilmente en coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta; \;\; y = r \operatorname{sen}\theta; \;\; z = z$$

Los límites de la región Ω' son: $r^2 \leq z \leq 2$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

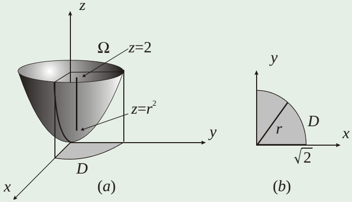


Figura: Cambio a cilíndricas.

Por tanto, la integral triple se calcula de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r\cos\theta \cdot r dz dr d\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{r^2}^{2} r^2 \cos\theta dz \right) dr \right) d\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2) r^2 \cos\theta dr \right) d\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \cos\theta d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 19

Calcular la integral $\iiint_{\Omega} y^2 dxdydz$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región limitada por las superficies: $1 = x^2 + y^2$; $z = 2 - (x^2 + y^2)$; $z = (x^2 + y^2) - 1$. *Solución*: $\frac{5\pi}{12}$.

Ejercicio 20

Calcular $\iiint_{\Omega} x^2 dxdydz$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio limitado por las superficies: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 6 - (x^2 + y^2)$. *Solución*: $\frac{104}{15}\pi$.

Ejercicio 21

Calcular $\iiint_{\Omega} x^2 z dxdydz$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región limitada por las superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $2z = x^2 + y^2$. *Solución*: $\frac{7}{12}\pi$.

- **Coordenadas esféricas**

Vamos a introducir ahora tres nuevas coordenadas para un punto $P = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$, denotadas por ρ, θ, ϕ, según las fórmulas:

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho \cos\phi$$

o, lo que es lo mismo, consideramos la función de transformación de coordenadas $\overline{F} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$, dada por:

$$\overline{F}(\rho, \theta, \phi) = (x, y, z) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \cos\phi)$$

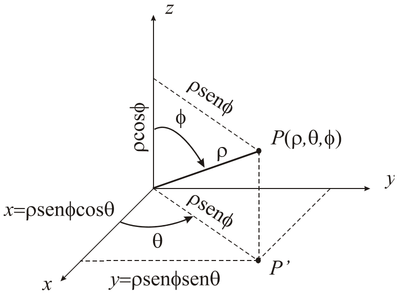


Figura: Sistema de Coordenadas Esféricas.

Para que la función $\overline{F}$ sea inyectiva, los límites de variación de las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ se establecen de la forma siguiente:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Calculamos ahora el jacobiano de la función de transformación a coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\phi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi & \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{bmatrix} = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

de modo que la fórmula de cambio de variables es:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho d\theta d\phi$$

Ejemplo 12

Hallar el volumen de la esfera unitaria: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: Parece conveniente trabajar en cooordenadas esféricas ya que en ellas la ecuación de la esfera es $\rho = 1$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho \right) d\theta \right) d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \right) d\phi = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \operatorname{sen}\phi d\theta \right) d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{3} 2\pi \operatorname{sen}\phi d\theta = \frac{1}{3} 2\pi \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

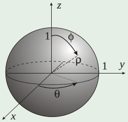


Figura: Esfera unitaria.

Ejercicio 22

Calcular $I = \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el cuerpo limitado en el primer octante por las superficies: $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2+z^2=9$. *Solución*: $\frac{65}{32}\pi^2$.

Ejercicio 23

Calcular $\iiint_\Omega e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio limitado por las superficies: $x^2+y^2+z^2=3$; $y=x$; $y=-x$; $z=0$ considerando sólo la zona donde: $y \geq 0, z \geq 0$. *Solución*: $\frac{\pi}{6}\left(e^{3\sqrt{3}}-1\right)$.

Ejercicio 24

Calcular el volumen de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por las superficies: $x^2+y^2+z^2=1$; $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$. *Solución*: $\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

SIMETRÍAS EN INTEGRALES TRIPLES

i) Si el recinto de integración Ω es simétrico respecto del plano $z = 0$ y

$$\Omega_1 = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x, y, z) \in \Omega \quad \text{y} \quad z \geq 0 \ \}$$

a) Si f es par en z, o sea, $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \Omega$, entonces:

$$\iiint_\Omega f dxdydz = 2 \iiint_{\Omega_1} f dxdydz$$

b) Si f es impar en z, o sea, $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \Omega$ entonces:

$$\iiint_\Omega f dxdydz = 0$$

Lo mismo ocurre para los otros dos planos coordenados.

ii) Si f es par en x, par en y, par en z, y el recinto de integración es simétrico respecto de los tres planos coordenados, entonces:

$$\iiint_\Omega f dxdydz = 8 \iiint_{\Omega'} f dxdydz$$

$$\Omega' = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x, y, z) \in \Omega, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

Ejemplo 13

Sea Ω el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1 - z, x = 0, x = 4$ y $z = 0$. Hallar:

$$I = \iiint_{\Omega} y^3 \operatorname{sen}^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$$

Solución: El recinto Ω es simétrico con respecto al plano $y = 0$ y se cumple:

$$f(x, -y, z) = -y^3 \operatorname{sen}^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -f(x, y, z)$$

Por lo que la función integrando es impar en y. Por lo tanto: $I = 0$.

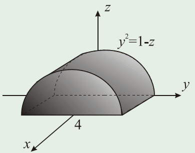


Figura: Recinto de integración.

- **Áreas de figuras planas**

$$\iint_D dxdy = \text{área}(D)$$

Ejemplo 14

Hallar el área del recinto A encerrado por una elipse de semiejes a y b.
Solución: Con el cambio a coordenadas polares generalizadas:

$$x = ar\cos\theta, \;\; y = br\,\mathrm{sen}\,\theta$$

de jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se transforma en $r = 1$ y la región de integración A se describe como:

$$A' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

Con lo cual:

$$\text{área}(A) = \iint_A dxdy = \iint_{A'} abrdrd\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = \pi ab$$

- **Centro de masa y momentos de figuras planas**

Mediante integrales dobles se pueden calcular algunas magnitudes físicas de cuerpos que ocupan una región D en el plano, siendo $\mu(x, y)$ la densidad en unidades de masa por unidades de área.

$$m = \iint_D \mu(x, y) dxdy$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x, y) dxdy, \quad M_y = \iint_D x\mu(x, y) dxdy$$

$$x_G = \frac{\iint_D x\mu(x, y) dxdy}{\iint_D \mu(x, y) dxdy}; \quad y_G = \frac{\iint_D y\mu(x, y) dxdy}{\iint_D \mu(x, y) dxdy}$$

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y)\, dxdy; \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y)\, dxdy$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mu(x, y)\, dxdy$$

Ejemplo 15

Calcular el momento de inercia de un cuerpo homogéneo de densidad μ_0, de forma cuadrada de lado a, respecto de un eje que pasa por uno de sus lados.

Solución: Podemos situar el cuerpo en la región siguiente:

$$D = \{(x, y) \,/ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$

y ahora calculamos el momento de inercia respecto del eje x. Dicho momento es:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu_0 \, dxdy = \mu_0 \int_0^a \left(\int_0^a y^2 dy \right) dx = \mu_0 \int_0^a \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^a dx = \frac{\mu_0 a^4}{3}$$

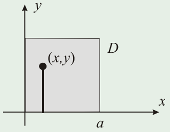


Figura: Momento de inercia del cuadrado.

- **Volúmenes de cuerpos en el espacio**

$$\iiint_\Omega dxdydz = \mathrm{vol}(\Omega)$$

Ejemplo 16

Sea Ω el recinto de $\mathbb{R}^3$ limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$. Calcular el volumen de Ω.

Solución: En este ejemplo vamos a ver cómo, en ocasiones, es más cómodo utilizar las coordenadas cilíndricas en un orden distinto al habitual. El recinto es:

$$\Omega' = \{(r, \theta, z)/0 \leq r \leq z, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dxdydz &= \iiint_{\Omega'} rdrdzd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\int_0^z rdr \right) dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{z^2}{2} dzd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{27}{6} d\theta = 9\pi \end{aligned}$$

- **Centro de masa y momentos de cuerpos en el espacio**

Mediante integrales triples se pueden calcular algunas magnitudes físicas de cuerpos que ocupan una región Ω en el espacio, siendo $\mu(x, y, z)$ la densidad en unidades de masa por unidades de volumen.

$$m = \iiint_{\Omega} \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_{\Omega} x\mu\left(x, y, z\right) dxdydz}{\iiint_{\Omega} \mu\left(x, y, z\right) dxdydz} \\ y_G &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_{\Omega} y\mu\left(x, y, z\right) dxdydz}{\iiint_{\Omega} \mu\left(x, y, z\right) dxdydz} \\ z_G &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_{\Omega} z\mu\left(x, y, z\right) dxdydz}{\iiint_{\Omega} \mu\left(x, y, z\right) dxdydz} \end{aligned}$$

Los momentos de inercia del cuerpo Ω respecto de los ejes x, y, z, denotados por I_x, I_y e I_z son:

$$I_x = \iiint_\Omega \left(y^2 + z^2\right) \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$
$$I_y = \iiint_\Omega \left(x^2 + z^2\right) \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$
$$I_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$

y el momento de inercia respecto del origen es:

$$I_0 = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$

Los momentos de inercia respecto de los planos coordenados son:

$$I_{xy} = \iiint_\Omega z^2 \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$
$$I_{xz} = \iiint_\Omega y^2 \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$
$$I_{yz} = \iiint_\Omega x^2 \mu\left(x, y, z\right) dxdydz$$

Ejemplo 17

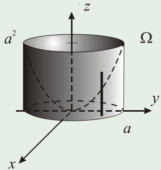
Calcular el momento de inercia I_z del sólido Ω, situado por encima del plano xy, acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, suponiendo que la densidad de masa μ es constante.

Solución:

$$I_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \mu\,(x, y, z)\, dxdydz$$

La intersección del paraboloide y el cilindro se encuentra en el plano $z = a^2$. Utilizando coordenadas cilíndricas, tenemos que:

$$I_z = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r^2} \mu r^2 r dz \right) d\theta \right) dr = \frac{\pi \mu a^6}{3}$$



Ejercicio 25

Hallar, mediante una integral doble, el área del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en el primer cuadrante, limitado por las circunferencias: $x^2 + y^2 - 2y = 0$; $x^2 + y^2 - 4y = 0$. *Solución*: $\frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 26

Hallar el volumen, en el primer octante, de la región común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$. *Solución*: $\frac{2a^3}{3}$.

Ejercicio 27

Hallar la masa del cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado por las superficies: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ siendo su densidad $\mu(x, y, z) = z$. *Solución*: $\frac{2\pi}{3}$.