TEMA 2: INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

Ampliación de Matemáticas (Grado en Ingeniería en T.I.)

EPI Gijón - UNIOVI

En este capítulo vamos a continuar estudiando la integración de funciones de varias variables. Si en el capítulo anterior el objetivo fue el estudio de las integrales de funciones $f(x, y)$ de dos y $f(x, y, z)$ de tres variables sobre subconjuntos D de $\mathbb{R}^2$ o Ω de $\mathbb{R}^3$, en este capítulo vamos a considerar la integración de diversas funciones a lo largo de una curva y sobre una superficie. Surgirán así los conceptos matemáticos de Integral de línea, también llamada integral curvilínea, e Integral de Superficie.

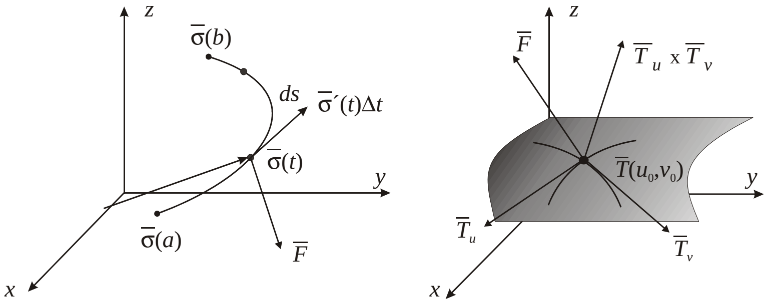


Figura: Integración a lo largo de una curva y sobre una superficie.

Definición (Parametrización de curva)

Una parametrización de curva en $\mathbb{R}^n$ es una función continua:

$$\overline{\sigma} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

Los puntos $\overline{\sigma}(a)$ y $\overline{\sigma}(b)$ se llaman extremos. La imagen de la parametrización $\overline{\sigma}$ es la curva C, esto es $C = \overline{\sigma}(I)$. Si $\overline{\sigma}$ es diferenciable o de clase C^1, decimos que C es una curva diferenciable o C^1.

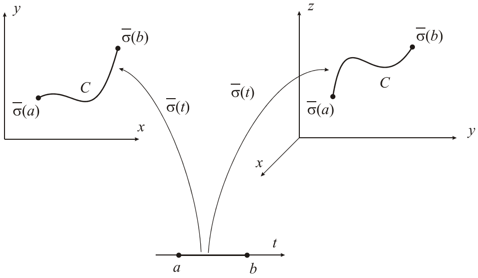


Figura: Parametrización de curva.

Es bastante útil denotar la variable como t y pensar que $\overline{\sigma}(t)$ va trazando una curva en $\mathbb{R}^n$ conforme t va variando. En muchos casos podemos imaginar t como el tiempo y $\overline{\sigma}(t)$ como la posición de una partícula en movimiento en el instante t. Si $\overline{\sigma}$ es una parametrización en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir:

$$\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

y denominamos a $x(t), y(t)$ y $z(t)$, *funciones componentes* de $\overline{\sigma}$. Es inmediato ver que de la misma forma podemos considerar funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o en general en $\mathbb{R}^n$.

A las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

se les llama *ecuaciones paramétricas* de la curva C y t es el *parámetro*.

El vector tangente a la curva será:

$$\overline{\sigma}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$

Definición (**Curva simple. Curva Orientada**)

Llamaremos curva simple C a la imagen de una parametrización C^1 a trozos $\overline{\sigma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que sea inyectiva en el intervalo I. Por tanto, una curva simple es la que no se interseca a sí misma. Toda curva simple C tiene dos orientaciones o direcciones asociadas a ella. Si P y Q son los extremos de la curva, entonces podemos considerar que C está dirigida de P a Q o de Q a P. A la curva simple C junto con un sentido de recorrido la llamaremos curva simple orientada.

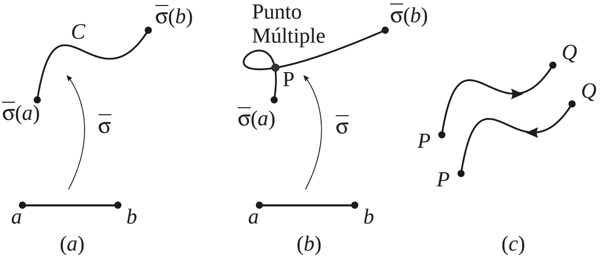


Figura: (a) Curva simple. (b) Punto múltiple. (c) Curva simple orientada.

Definición (Curva cerrada simple)

Llamaremos curva cerrada simple a la imagen de una parametrización C^1 a trozos $\overline{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ que sea inyectiva en $[a, b)$ y cumpla $\overline{\sigma}(a) = \overline{\sigma}(b)$. Si $\overline{\sigma}$ verifica que $\overline{\sigma}(a) = \overline{\sigma}(b)$ pero no es inyectiva en $[a, b)$, llamamos a su imagen curva cerrada.

Las curvas cerradas simples tienen dos orientaciones, que corresponden a las dos direcciones de movimiento posibles a lo largo de la curva.

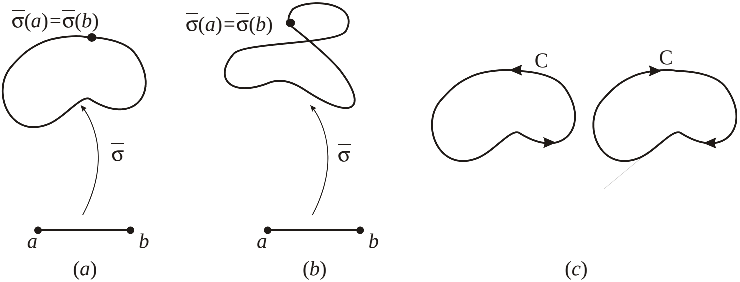


Figura: (a) Curva cerrada simple. (b) Curva cerrada. (c) Curva cerrada simple orientada.

Ejemplo 1

Hallar una parametrización de la elipse de ecuación:

$$\left(\frac{x-c_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y-c_2}{b}\right)^2=1$$

Solución: Podríamos utilizar x como parámetro pero entonces deberíamos usar dos parametrizaciones distintas para recorrer toda la elipse. Por eso es más cómodo emplear las funciones trigonométricas:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x-c_1}{a}=\cos t\\ \frac{y-c_2}{b}=\operatorname{sen} t\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=c_1+a\cos t\\ y=c_2+b\operatorname{sen} t\end{array}\right.$$

Por tanto la parametrización sería: $\overline{\sigma}(t): I=[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^2$

$$\overline{\sigma}(t)=(c_1+a\cos t, c_2+b\operatorname{sen} t)$$

Ejemplo 2

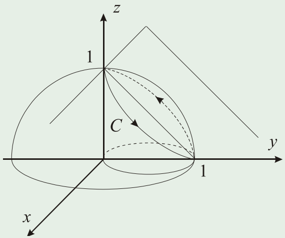
Parametrizar la curva dada por la intersección de las superficies:

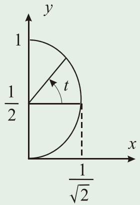
$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad y + z = 1$$

Solución: Proyectamos la curva en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy : $(z = 1 - y)$:

$$x^2 + y^2 + (1-y)^2 = 1; \quad x^2 + 2y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + 2(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}; \frac{x^2}{1/2} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{1/4} = 1; \left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-\frac{1}{2}}{1/2}\right)^2 = 1$$





y parametrizamos dicha proyección:

$$\begin{cases} \frac{x}{1/\sqrt{2}} = \cos t \\ \frac{y-\frac{1}{2}}{1/2} = \text{sen}\, t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t \end{cases}$$

$$z = 1 - y; z = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t); z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t \end{cases}$$

Es decir la parametrización será: $\overline{\sigma}(t) : I = [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\overline{\sigma}(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \text{sen}\, t)$$

Ejercicio 1

Hallar unas ecuaciones paramétricas de la curva de $\mathbb{R}^2$, dada por la ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.*Solución*: $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, para $0 \leq t < 2\pi$.

Ejercicio 2

Hallar unas ecuaciones paramétricas de la curva de $\mathbb{R}^3$, *intersección de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, *y el plano* $y + z = 2$. *Solución*: $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = 1 + \mathrm{sen}\, t$, $z = 1 - sent$ para $0 \leq t < 2\pi$.

Ejercicio 3

Hallar unas ecuaciones paramétricas de la curva de $\mathbb{R}^3$, *intersección del cilindro* $x^2 + y^2 = a^2$, *y el plano* $z = 0$. *Solución*: $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\, t$, $z = 0$ para $0 \leq t < 2\pi$.

Definición (Integral de línea de función escalar)

Sea f un campo escalar continuo sobre la curva C dada por la parametrización $\overline{\sigma} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) de clase C^1. Definimos la integral de línea de f a lo largo de C como:

$$\int_C f ds = \int_a^b f\left(\overline{\sigma}(t)\right) \left\|\overline{\sigma}'(t)\right\| dt$$

En el caso de $\mathbb{R}^2$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ y

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

y en el caso de $\mathbb{R}^3$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Si la curva es cerrada suele usarse la siguiente notación:

$$\oint_C f ds$$

Definición (Longitud de una curva)

Sea C una curva dada por $\overline{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^1. La longitud de dicha curva está definida como:

$$l = \int_C ds = \int_a^b \left\| \overline{\sigma}'(t) \right\| dt$$

Para curvas en $\mathbb{R}^3$, la fórmula es:

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

y para curvas en $\mathbb{R}^2$, la fórmula es:

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Definición (Arco rectificable)

Un arco de curva se dice rectificable si su longitud es finita.

Ejemplo 3

Sea $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ *un campo escalar y* C *la elipse de ecuación:* $x^2 + 2y^2 = 2$. *Calcular la integral de línea:*

$$I = \int_C f(x,y)\,ds$$

Solución: Podemos expresar la elipse como: $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1$. Como vimos anteriormente $\overline{\sigma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}'(t) &= (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t); \quad \|\overline{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t} \\ f(\overline{\sigma}(t)) &= \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}} \end{aligned}$$

$$I = \int_C f(x,y)\,ds = \int_0^{2\pi} f(\overline{\sigma}(t))\,\|\overline{\sigma}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\operatorname{sen} t \cos t\,dt = 0$$

Ejemplo 4

Sea $\overline{\sigma}$ *la hélice* $\overline{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *y sea* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. *Calcular la integral:*

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\sigma}'(t) \right\| &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\operatorname{sen} t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^{2\pi} f(\overline{\sigma}(t)) \left\| \overline{\sigma}'(t) \right\| dt = \int_0^{2\pi} \left(1 + t^2\right) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \left(3 + 4\pi^2\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Hallar la longitud del arco de la hélice definida por la parametrización:

$$\overline{\sigma}(t) : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \overline{\sigma}(t) = \left(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \sqrt{5}t\right)$$

Solución: El vector derivada de $\overline{\sigma}(t)$ es $\overline{\sigma}'(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t, \sqrt{5})$ cuyo módulo es:

$$\left\|\overline{\sigma}'(t)\right\| = \sqrt{4(\operatorname{sen} 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

Por tanto la longitud de arco es:

$$l(\overline{\sigma}) = \int_0^{4\pi} \left\|\overline{\sigma}'(t)\right\| dt = \int_0^{4\pi} 3dt = 12\pi$$

Ejercicio 4

Calcular $\int_C (x+y)ds$ siendo C un triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. *Solución*: $1+\sqrt{2}$.

Ejercicio 5

Calcular $\int_C (|x|+|y|)ds$ siendo C una circunferencia de radio a centrada en el origen. *Solución*: $8a^2$.

Ejercicio 6

Hallar la longitud de la curva dada por la intersección de las superficies: $x^2+y^2+z^2=4$; $y+z=2$. *Solución*: $2\sqrt{2}\pi$.

Campo vectorial

Un campo vectorial $\overline{F}(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ está compuesto de dos campos escalares componentes F_1 y F_2, de modo que:

$$\overline{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Un campo vectorial $\overline{F}(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ está compuesto de tres campos escalares componentes F_1, F_2 y F_3, de modo que:

$$\overline{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

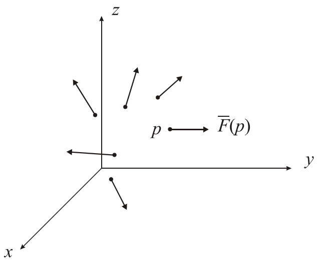


Figura: Campo vectorial.

Definición (Integral de línea de función vectorial)

Sea $\overline{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) continuo sobre una curva dada por la parametrización $\overline{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$), de clase C^1. Definimos la integral de línea de $\overline{F}$ a lo largo de C como:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_a^b \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\sigma}'\left(t\right) dt$$

Otra manera de denotar las integrales de línea es:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial $\overline{F}$. Esta notación es útil para recordar el cálculo de la integral de línea, pues:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_a^b \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\sigma}'\left(t\right) dt = \int_a^b (F_1, F_2, F_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

$$= \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

- **Trabajo**

El trabajo realizado por el campo de fuerza $\overline{F}$ sobre la partícula que se mueve a lo largo de la curva C imagen de $\overline{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ viene dado por:

$$W = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_a^b \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\sigma}'\left(t\right) dt$$

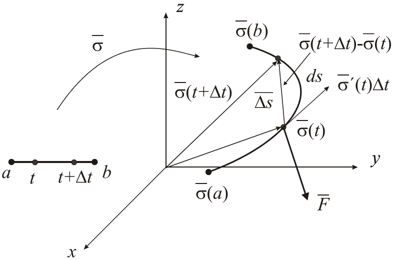


Figura: Interpretación como un trabajo.

- **Justificación:**

$$Trabajo \simeq \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\triangle s} \simeq \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\sigma}'\left(t\right) \triangle t$$

Ejemplo 6

Sea C la curva dada por $\overline{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\overline{\sigma}(t) = (t, t^2, 1)$. Sea $\overline{F}(x,y,z) = x^2\overline{i} + xy\overline{j} + \overline{k}$. Calcular:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

Solución: En primer lugar hemos visto que:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C x^2 dx + xydy + dz$$

Calculamos:

$$dx/dt = 1, dy/dt = 2t, dz/dt = 0$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + xydy + dz &= \int_0^1 \left([x(t)]^2 \frac{dx}{dt} + [x(t)y(t)] \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 + 2t^4 \right) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Consideremos el campo vectorial $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $\overline{F}(x, y) = (-xy, x^2)$ *y el arco de la circunferencia* C *de radio unidad centrada en el origen de coordenadas, en la que el punto inicial es el punto* $A\,(1, 0)$ *y el final* $B\,(0, 1)$*, recorrido en sentido horario. Hallar:*

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

Solución: Unas ecuaciones paramétricas de C son $\overline{\sigma} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $0 \leq t \leq \pi/2$.

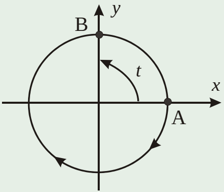


Figura: Sentido horario.

En primer lugar hemos visto que:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C -xydx + x^2 dy$$

$$\int_C -xydx + x^2 dy = \int_0^{\pi/2} \left([-x(t)y(t)] \frac{dx}{dt} + [x(t)]^2 \frac{dy}{dt} \right) dt$$

Tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t, \frac{dy}{dt} = \cos t$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} &= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos t \operatorname{sen} t (-\operatorname{sen} t) + \left(\cos^2 t \right) \cos t \right) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\cos t (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \right) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t dt = [\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 8

Hallar el trabajo realizado por el campo $\overline{F}(x,y) = (-3x^2y^4, 3y^2x^3)$ para mover una partícula de masa m desde el punto $(1,0)$ al punto $(0,1)$ a lo largo de la curva $x^3 + y^3 = 1$.

Solución: Podemos parametrizar el arco de curva $C : x^3 + y^3 = 1$, que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ de la siguiente forma:

$$x = \cos^{2/3} t, \quad y = \operatorname{sen}^{2/3} t; \quad t \in [0, \pi/2]$$

El trabajo es la integral de línea del campo, y teniendo en cuenta que:

$$x'(t) = -\frac{2}{3}\cos^{-1/3} t \operatorname{sen} t; \quad y'(t) = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{-1/3} t \cos t$$

obenemos:

$$\begin{aligned} W &= \int_C -3x^2y^4 dx + 3y^2x^3 dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[2\cos t \operatorname{sen}^{11/3} t + 2\operatorname{sen} t \cos^3 t\right] dt = \frac{13}{14} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Calcular $\oint_C ydx + zdy + xdz$ siendo C la circunferencia $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x + y = 1\}$ (sentido antihorario visto desde el origen de coordenadas). Solución: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 8

Calcular la integral de línea $\int_C \overline{F}.\overline{ds}$ siendo $\overline{F} = (0, x, 0)$ y siendo C la curva intersección de $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$; $y + z = 2$ recorrida de forma que se suba por el primer octante. Solución: $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Ejercicio 9

Calcular la integral de línea $\int_C xdx + ydy + xdz$ siendo C la curva de $\mathbb{R}^3$ dada por la intersección de las superficies $z = 1 - (x^2 + y^2)$; $y + z = 1$ recorriendo C de forma que "subamos"por el primer octante. Solución: $\frac{\pi}{4}$.

Definición (Parametrización de superficie)

Una parametrización de superficie es una función continua $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, donde* D *es un dominio en* $\mathbb{R}^2$*. La superficie* S *correspondiente a la parametrización* $\overline{T}$ *es su imagen:* $S = \overline{T}(D)$*. Se suele escribir:*

$$\overline{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

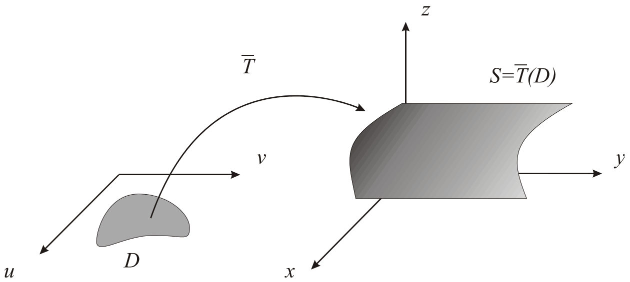


Figura: Parametrización de Superficie.

$\overline{T}(u,v)$ va trazando una superficie S en $\mathbb{R}^3$ conforme el punto (u,v) va recorriendo el conjunto D.

Si $\overline{T}$ es diferenciable o es de clase C^1 (que es lo mismo que decir que $x(u,v), y(u,v)$ y $z(u,v)$ son funciones diferenciables o C^1) decimos que S es una superficie diferenciable o C^1.

La función $\overline{T}(u,v)$ también la podemos expresar en forma vectorial:

$$\overline{T}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\overline{k}$$

A las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x\left(u,v\right) \\ y = y\left(u,v\right) \\ z = z\left(u,v\right) \end{cases}$$

se les llama *ecuaciones paramétricas* de la superficie S y u, v son los *parámetros*.

- **Normal a una superficie**

Suponiendo que $\overline{T}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\overline{k}$ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, y fijando u en u_0 obtenemos una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$v \to \overline{T}\,(u_0, v) = x(u_0, v)\bar{i} + y(u_0, v)\bar{j} + z(u_0, v)\overline{k}$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie . El vector tangente a esta curva en el punto $\overline{T}\,(u_0, v_0)$ es:

$$\overline{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,(u_0, v_0)\,\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,(u_0, v_0)\,\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,(u_0, v_0)\,\overline{k}$$

De la misma forma, si fijamos v y obtenemos una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$u \to \overline{T}\,(u, v_0) = x(u, v_0)\bar{i} + y(u, v_0)\bar{j} + z(u, v_0)\overline{k}$$

cuya imagen es una curva sobre la superficie . El vector tangente a esta curva en el punto $\overline{T}\,(u_0, v_0)$ es:

$$\overline{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,(u_0, v_0)\,\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,(u_0, v_0)\,\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,(u_0, v_0)\,\overline{k}$$

- **Normal a una superficie**

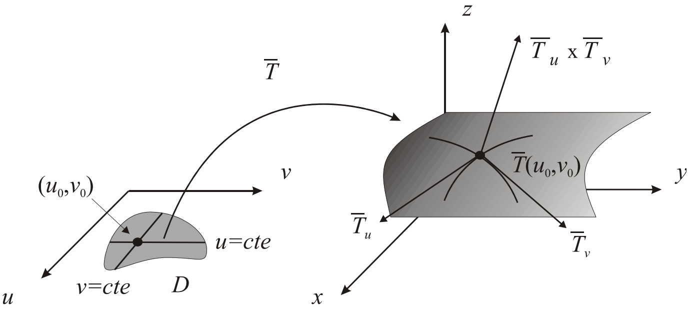


Figura: Parametrización de superficie. Significado de $\overline{T}_u \times \overline{T}_v$.

Debido a que los vectores $\overline{T}_u$ y $\overline{T}_v$ son tangentes (y no paralelos) a dos curvas sobre la superficie, en $\overline{T}\,(u_0, v_0)$, deben determinar el plano tangente a la superficie en este punto, por lo que la normal será:

$$\overline{N} = \overline{T}_u \times \overline{T}_v$$

Definición (Superficie orientada)

Decimos que una superficie es una superficie orientada si tiene dos lados, uno de ellos se toma como positivo y el otro como negativo. En cada punto $(x, y, z) \in S$ *habrá dos vectores normales unitarios* $\overline{n}_1$ *y* $\overline{n}_2$*, donde*

$$\overline{n} = \pm \frac{(\overline{T}_u \times \overline{T}_v)}{\|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\|} = \begin{cases} \overline{n}_1 = +\frac{\overline{T}_u \times \overline{T}_v}{\|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\|} \\ \overline{n}_2 = -\frac{\overline{T}_u \times \overline{T}_v}{\|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\|} \end{cases} \rightarrow \overline{n}_1 = -\overline{n}_2$$

Cada una de estas normales se asocia con un lado de la superficie. Así, para especificar un lado de una superficie S, en cada punto escogemos el vector unitario $\overline{n}$ que apunta hacia afuera desde ese lado de S en ese punto.

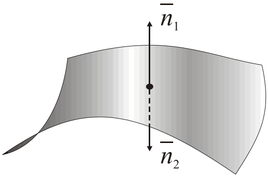


Figura: Superficie orientada

A lo largo del capítulo vamos a trabajar sólo con superficies orientadas y que, por tanto, siempre van a tener dos lados, pero existen superficies con un sólo lado y que, por tanto, no son superficies orientadas.
Un ejemplo muy conocido de dicho tipo de superficie es la cinta de Möbius.

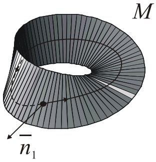


Figura: Superficie no orientada. Cinta de Möbius.

En cada punto de M hay dos normales unitarias, $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_2$. Sin embargo, ni $\overline{n}_1$ ni $\overline{n}_2$ determinan un lado único de M. Para ver esto de manera informal, podemos deslizar $\overline{n}_1$ alrededor de la curva cerrada que se indica. Cuando $\overline{n}_1$ regrese al mismo punto de la curva, coincidirá con $\overline{n}_2$, mostrando que tanto $\overline{n}_1$ como $\overline{n}_2$ apuntan desde el mismo lado de M y, por tanto, M tiene un solo lado.

Ejemplo 9

Hallar dos parametrizaciones para el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución: Utilizando coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Por tanto la parametrización es: $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\overline{T}(u, v) = u\overline{i} + v\overline{j} + (u^2 + v^2)\overline{k}; \quad D = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$$

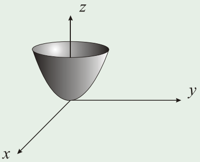


Figura: Dos parametrizaciones para el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = z \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del paraboloide:

$$z = x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v = u^2$$

y, por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = u^2 \end{cases}$$

y la parametrización es: $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\overline{T}(u, v) = u \cos v \bar{i} + u \operatorname{sen} v \bar{j} + u^2 \overline{k}; \quad D = [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$$

- **Caso particular: Coordenadas cartesianas**

Con mucha frecuencia nuestra superficie S va ser la gráfica de una función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad

$$z = g(x, y)$$

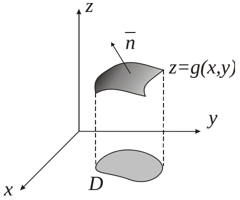


Figura: Superficie, gráfica de $z = g(x, y)$.

Para este caso particular podemos utilizar como parámetros x e y, con lo que:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = g(x, y)$$

Entonces:

$$\overline{T}(x, y) = x\overline{i} + y\overline{j} + g(x, y)\overline{k}$$

- **Caso particular: Coordenadas cartesianas**

De donde:

$$\overline{T}_x = \overline{i} + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\overline{k}; \quad \overline{T}_y = \overline{j} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\overline{k}$$

y sin más que operar, para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la normal será:

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\overline{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\overline{j} + \overline{k}$$

Las dos normales a la superficie vienen dadas pues por:

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = \pm \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$$

Veremos como en las integrales de superficie de función vectorial, deberemos ajustar el sentido correcto de la normal.

Ejercicio 10

Hallar una parametrización para la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Hallar el módulo de la normal Solución: $x = a \operatorname{sen} u \cos v$; $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$; $z = a \cos u$ *para* $0 \leq u \leq, \pi$, $0 \leq v \leq, 2\pi$. *Módulo* $= a^2 \operatorname{sen} u$.

Ejercicio 11

Hallar una de las dos normales a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el origen. Solución: $(0, 0, 1)$.

Ejercicio 12

Hallar la ecuación explícita de la superficie de ecuaciones paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 - v^2$, *para* $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$. *Solución*: $z = xy$.

Ejercicio 13

Consideremos la parametrización de superficie dada por $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$*:* $\overline{T}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ *con* $D = \left\{(u, v) \,/\, u^2 + v^2 \leq 1\right\}$. Hallar una normal y *estudiar hacia qué lado apunta dicha normal. Solución:* hacia dentro.

Supongamos que S es una superficie definida por la parametrización:

$$\begin{aligned} \overline{T} \quad &: \quad D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ \overline{T}(u,v) &= x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k} \end{aligned}$$

donde los parámetros son u y v. Tomemos como hipótesis que x, y, z y sus derivadas parciales respecto de u y v están definidas y son continuas en una región D del plano uv. Las derivadas parciales de $\overline{T}(u,v)$ están dadas por:

$$\overline{T}_u = \frac{\partial \overline{T}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\overline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overline{k}, \quad \overline{T}_v = \frac{\partial \overline{T}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\overline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overline{k}$$

Definición (Integral de superficie de función escalar)

Sea $f(x,y,z)$ una función continua con valores reales definida en S. Definimos la integral de f sobre S como:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y,z)dS &= \iint_S f dS = \iint_D f\left(\overline{T}(u,v)\right) \left\|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\right\| dudv \\ &= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left\|\overline{T}_u \times \overline{T}_v\right\| dudv \end{aligned}$$

- **Caso particular: Coordenadas cartesianas**

Ahora supongamos que S es la gráfica de una función C^1, $z = g(x, y)$. Si utilizamos x e y como parámetros, hemos visto que:

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -\left(\partial g/\partial x\right)\bar{i} - \left(\partial g/\partial y\right)\bar{j} + \bar{k}$$

y, por tanto, el módulo de la normal (en cualquiera de las dos orientaciones) es en este caso:

$$\|\overline{T}_x \times \overline{T}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

por lo que:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

La integral doble está extendida a la región D, que es la proyección sobre el plano xy de la superficie S.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

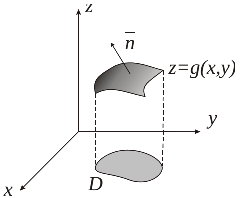
Definición (Área de una superficie)

Sea S la superficie definida por la parametrización $\overline{T}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$ y sea D una región del plano uv en la cual x, y, z y sus derivadas parciales respecto de u y v están definidas y son continuas. El área de la superficie S está definida por:

$$\text{área}(S) = \iint_S dS = \iint_D ||\overline{T}_u(u,v) \times \overline{T}_v(u,v)||\, dudv$$

En el caso de que la superficie venga dada por $z = g(x,y)$, el área es:

$$\iint_D ||\overline{T}_x \times \overline{T}_y||\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + (g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2}\, dxdy$$



Ejemplo 10

Supongamos que se describe una helicoide mediante la parametrización:

$$\overline{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta), 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1$$

y sea f dada por $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$. *Hallar:*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

Solución: Se tiene:

$$\overline{T}(r,\theta) = r\cos\theta\bar{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\bar{j} + \theta\overline{k}$$
$$\overline{T}_r(r,\theta) = \cos\theta\bar{i} + \mathrm{sen}\,\theta\bar{j}$$
$$\overline{T}_\theta(r,\theta) = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\bar{i} + r\cos\theta\bar{j} + \overline{k}$$

$$\overline{T}_r \times \overline{T}_\theta = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \overline{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{sen}\,\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j} + r\overline{k}$$

$$\left|\left|\overline{T}_r \times \overline{T}_\theta\right|\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + r^2} = \sqrt{1+r^2}$$

Por otra parte, $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta) = \sqrt{r^2+1}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\overline{T}(r,\theta))\left\|\overline{T}_r \times \overline{T}_\theta\right\| drd\theta \\ &= \iint_D \sqrt{1+r^2}\sqrt{1+r^2}drd\theta = \iint_D \left(1+r^2\right) drd\theta \end{aligned}$$

$$D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(1+r^2\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(1+r^2\right) dr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 11

Calcular:

$$\iint_S x dS$$

donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$.

Solución: La superficie S es parte del plano definido mediante la ecuación $x+y+z=1$. Por tanto:

$$z = g(x,y) = 1 - x - y$$

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

$$\left\| \overline{T}_x \times \overline{T}_y \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$I = \iint_S x dS = \sqrt{3} \iint_D x dx dy$$

donde D es el dominio en el plano xy proyección de la superficie S, indicado en la siguiente figura.

Calculando la integral doble:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3}\iint_D x\,dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\,dy\right) dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

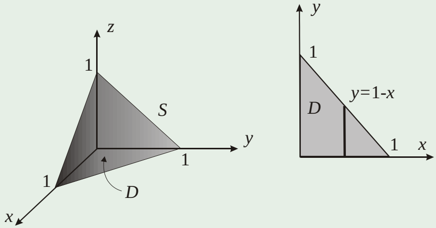


Figura: Superficie S y proyección D.

Ejemplo 12

Calcular el área de la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 5$ que está por encima del plano $z = 1$.

Solución: Sea

$$g(x, y) = 5 - x^2 - y^2$$

Entonces $g_x(x, y) = -2x$, $g_y(x, y) = -2y$ y

$$S = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$$

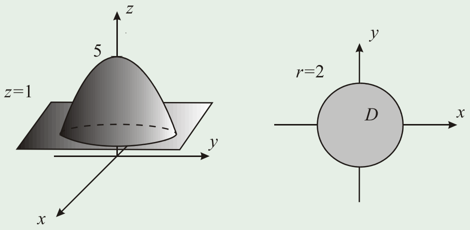


Figura: Paraboloide y proyección.

Pasamos a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\,rdr \right) d\theta \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la iterada, efectuamos el cambio de variable $u = 1 + 4r^2$, de donde:

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{17} u^{1/2} \frac{du}{8} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^{17} d\theta$$

$$S = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(17^{3/2} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$$

Ejercicio 14

Sea S la semiesfera $x^2+y^2+z^2-a^2=0$, $z \geq 0$. Hallar $\iint_S \left(x^2+y^2\right) dS$.
Solución: $\frac{4}{3}\pi a^4$.

Ejercicio 15

La porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ cortada por el cilindro $x^2+y^2-y=0$ (con $z \geq 0$) se llama bóveda de Viviani. Denotemos por S dicha superficie y por C su contorno. Calcular la integral de superficie $\iint_S z.ydS$. Nota: se recomienda parametrizar la superficie a cartesianas. *Solución*: $\frac{\pi}{8}$.

Ejercicio 16

Calcular el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, en el primer octante. *Solución*: $2\pi(4 - \sqrt{7})$.

Ejercicio 17

La parte de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $z \geq 0$, se llama bóveda de Viviani. Calcular su área. *Solución*: $2a^2(\frac{\pi}{2} - 1)$.

Ejercicio 18

Hallar el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = ay$; $z \geq 0$, que queda dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. *Solución*: $2a^2$.

Definición (Integrales de superficie de función vectorial)

Supongamos que S es una superficie definida por la parametrización:

$$\begin{aligned} \overline{T} &: D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3 \\ \overline{T}(u,v) &= x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k} \end{aligned}$$

Sea $\overline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\overline{i} + F_2(x,y,z)\overline{j} + F_3(x,y,z)\overline{k}$ un campo vectorial continuo definido en S. La integral de superficie de $\overline{F}$ sobre S la definimos como:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F}\left(\overline{T}(u,v)\right) \cdot \left(\overline{T}_u \times \overline{T}_v\right) dudv$$

La integral de superficie también se pueden representar en *forma diferencial* por:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_S F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy$$

- **Caso particular: Coordenadas cartesianas**

Consideremos la superficie S descrita por:

$$z = g(x,y), \quad (x,y) \in D$$

Sabemos que podemos parametrizar S por $\overline{T} : D \to \mathbb{R}^3$ con:

$$\begin{aligned} \overline{T}(x,y,z) &= x\bar{i} + y\bar{j} + g(x,y)\overline{k} \\ \overline{T}_x \times \overline{T}_y &= -(\partial g/\partial x)\,\bar{i} - (\partial g/\partial y)\bar{j} + \overline{k} \end{aligned}$$

Por tanto si $\overline{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\overline{k}$ la integral de superficie será:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F} \cdot (\overline{T}_x \times \overline{T}_y)\, dxdy$$

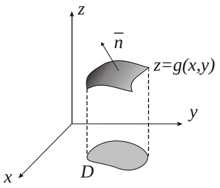


Figura: Área de una superficie, gráfica de $z = g(x,y)$.

Ejemplo 13

Sea $\overline{F}(x,y,z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ *y* S *la superficie esférica de centro el origen y radio* 1. *Calcular, según la normal exterior:*

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$$

Solución: La parametrización es:

$$\overline{T}(\theta,\phi) = \cos\theta \operatorname{sen}\phi \overline{i} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \overline{j} + \cos\phi \overline{k}$$

Hallamos la normal:

$$\begin{aligned}
\overline{T}_\theta &= (-\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\,\overline{i} + (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\,\overline{j} \\
\overline{T}_\phi &= (\cos\theta\cos\phi)\,\overline{i} + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\,\overline{j} - (\operatorname{sen}\phi)\,\overline{k} \\
\overline{T}_\theta \times \overline{T}_\phi &= \pm\left(-\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\right)\overline{i} - \left(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta\right)\overline{j} - (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\,\overline{k}
\end{aligned}$$

En el punto $\phi = \frac{\pi}{2}, \theta = 0$ la normal es: $\overline{T}_\theta \times \overline{T}_\phi = -\overline{i} - \overline{k}$. Por lo que la normal exterior será con signo $-$.

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}
\overline{F}\cdot\left(\overline{T}_\theta\times\overline{T}_\phi\right) &= \left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\overline{k}\right)\cdot\left(\overline{T}_\phi\times\overline{T}_\theta\right)\\
&= \left[(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\bar{i}+(\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)\,\bar{j}+(\cos\phi)\,\overline{k}\right]\\
&\cdot(\mathrm{sen}\,\phi)\left[(\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)\,\bar{i}+(\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\bar{j}+(\cos\phi)\,\overline{k}\right]=\\
&= (\mathrm{sen}\,\phi)\left(\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\phi\right)=\mathrm{sen}\,\phi
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$I=\iint_S\overline{F}\cdot\overline{dS}=\iint_D\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$$

y calculando la integral doble:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\right)d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}d\theta=\int_0^{2\pi}2\,d\theta=4\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 14

Calcular la integral de superficie:

$$\iint_S ydydz - xdxdz + dxdy$$

donde S es el paraboloide:

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

orientado según las normales hacia el interior del sólido que limitan la superficie y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

Solución: Resolvamos el problema trabajando en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} z &= g(x,y) = x^2 + y^2 \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \end{aligned}$$

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -\left(\partial g/\partial x\right)\bar{i} - (\partial g/\partial y)\bar{j} + \bar{k} = -2x\bar{i} - 2y\bar{j} + \bar{k}$$

Se puede ver que es la normal interior ya que: $(\overline{T}_x \times \overline{T}_y)(0,0) = \overline{k}$.
En este caso tenemos que $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j} + \overline{k}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \overline{F} \cdot \left(\overline{T}_x \times \overline{T}_y\right) &= (y\overline{i} - x\overline{j} + \overline{k}) \cdot (-2x\overline{i} - 2y\overline{j} + \overline{k}) = \\ -2xy + 2xy + 1 &= 1 \end{aligned}$$

Con lo que la integral de superficie es:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F} \cdot \left(\overline{T}_x \times \overline{T}_y\right) dxdy = \iint_D dxdy$$

siendo D la proyección del paraboloide sobre el plano xy que es el círculo:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}/0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y sabemos que $\iint_D dxdy$ es el área de dicho círculo, por lo que:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D dxdy = \pi 1^2 = \pi$$

Ejercicio 19

Calcular la integral $I = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ siendo $\overline{F} = (-x, -y, 0)$ y siendo S la superficie $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$; $1 \leq z \leq 2$ orientada con la normal interior.
Solución: $\frac{14\pi}{3}$.

Ejercicio 20

Sea S la porción de la superficie $z = 2 - (x^2 + y^2)$ que queda por encima del plano xy. (a) Calcular su área. (b) Calcular, aplicando la definición, $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ siendo $\overline{F} = (0, -x, z)$ y considerando en S la normal interior.
Solución: (a) $\frac{13\pi}{3}$. (b) -2π.

Ejercicio 21

Sea $\overline{F} = (-x, -y, 0)$ y sea S la superficie del cono $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que queda por encima del plano $z = 1$, orientada con la normal interior. (a) Calcular la integral de superficie: $I = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$. (b) Calcular la integral de superficie: $I = \iint_S (z-3)^2 x^2 \cdot dS$. Solución: (a) $\frac{16}{3}\pi$. (b) $\frac{32}{3}\pi\sqrt{2}$.

Comencemos estudiando algunas propiedades de los campos vectoriales y escalares, así como su significado geométrico y físico. Es importante lograr una clara comprensión de estos conceptos para continuar con las secciones siguientes.

Definición (**Operador $\overline{\nabla}$**)

Denotaremos al operador nabla $\overline{\nabla}$ como:

$$\overline{\nabla} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\overline{\nabla}$ es un operador que puede actuar sobre campos escalares o campos vectoriales.

Definición (**Gradiente**)

Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar. Se define el gradiente de f como:

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$$

Definición (**Rotacional**)

Sea $\overline{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\overline{k}$. *Se define el rotacional de* $\overline{F}$ *como*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\overline{F} &= \overline{\nabla}\times\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\overline{k} \end{aligned}$$

Definición (**Divergencia**)

Sea $\overline{F} = F_1\bar{i} + F_2\bar{j} + F_3\overline{k}$. *Se define la divergencia de* $\overline{F}$ *como*

$$\operatorname{div}\overline{F} = \overline{\nabla}\cdot\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ejemplo 15

Sea $\overline{F}(x,y,z) = x\overline{i} + xy\overline{j} + \overline{k}$. *Hallar* $\operatorname{rot}\overline{F}$ y $\operatorname{div}\overline{F}$.

Solución: Tenemos, sin más que aplicar las definiciones:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\overline{F} &= \overline{\nabla}\times\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\overline{i} - (0-0)\overline{j} + (y-0)\overline{k} = y\overline{k} \\
\operatorname{div}\overline{F} &= \overline{\nabla}\cdot\overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + y
\end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Green)

Sean D una región del tipo (III) y C su frontera. Supongamos que $P : D \to \mathbb{R}$ y $Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces:

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

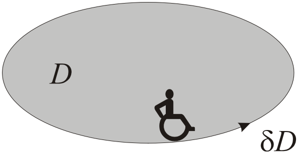


Figura: Orientación correcta.

Para poder aplicar el teorema de Green a regiones más generales, vamos a definir la *orientación correcta*, para las curvas frontera de una región D, como la orientación, que deja a dicha región a la izquierda.

A continuación indicamos una generalización del teorema de Green para regiones que no son del tipo (III), pero que se pueden descomponer en diversas partes, cada una del tipo (III).

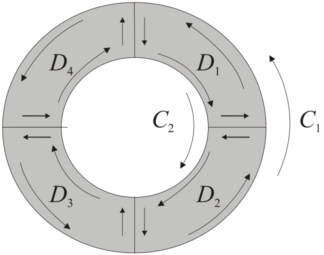


Figura: Generalización del teorema de Green.

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Siendo ∂D las curvas fronteras de D orientadas en el sentido correcto.

Ejemplo 16

Verificar el teorema de Green para $P(x, y) = x$ *y* $Q(x, y) = xy$ *siendo:*

$$D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Solución: Calculamos directamente los dos miembros del teorema de Green. La frontera C es el círculo cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, por lo que, con la orientación positiva, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \operatorname{sen} t \cos t\right] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D ydxdy$$

y esta integral es cero por simetría. Por tanto, hemos verificado el teorema.

Ejercicio 22

Empleando Green, calcular $I = \oint_{C^+} (x+y)^2 dx - \left(x^2 + y^2\right) dy$ a lo largo de la curva C : el triángulo de vértices: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. *Solución*: -1.

Ejercicio 23

Calcular la integral de línea $I = \oint_{C^+} \left[y^2 dx + \left(xy + y^2\right) dy\right]$ extendida al contorno situado en el primer cuadrante y formado por las líneas: $y = 0$, $x = z$, $y^2 = 2x$, (a) empleando el teorema de Green; (b) directamente. *Solución*: -2.

Teorema (Teorema de Stokes)

Supongamos que S es una superficie orientada definida por una parametrización $\overline{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Sea $C = \partial S$ la curva cerrada simple que constituye la frontera orientada de S y sea $\overline{F}$ un campo vectorial C^1 en S. Entonces se cumple:

$$\iint_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot \overline{dS} = \int_{\partial S} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

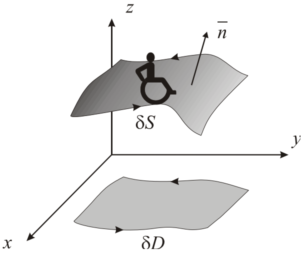


Figura: Orientación inducida en δS.

Ejemplo 17

Aplicar el teorema de Stokes para calcular:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

siendo $\overline{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ y C la curva intersección del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

Solución: Podemos aplicar el teorema de Stokes a cualquier superficie S cuyo contorno sea la curva C. Por tanto es más sencillo utilizar la porción S de plano $z = 2$ limitada por C que la del paraboloide.

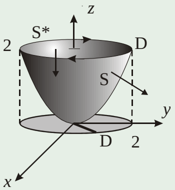


Figura: Teorema de Stokes.

En primer lugar hallamos el rotacional:

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\overline{i} - (z+3)\overline{k}$$

La normal al plano $z = g(x, y) = 2$ será:

$$\overline{T}_x \times \overline{T}_y = -(-\partial g/\partial x, -\partial g/\partial y, 1) = (0, 0, -1)$$

Aplicando el teorema de Stokes, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$:

$$\begin{aligned} \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} &= \iint_S \operatorname{rot}\overline{F} \cdot \overline{dS} \\ &= \iint_D \Big((z^2 + x), 0, -(z+3)\Big) \cdot (0, 0, -1)\, dxdy \\ &= \iint_D (z+3)\, dxdy = \iint_D [2+3]\, dxdy = 5A(D) = 20\pi \end{aligned}$$

TEOREMA DE STOKES

Ejercicio 24

Calcular, aplicando el Teorema de Stokes, la integral $I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$ siendo $\overline{F} = (yz, x^2, xy)$ y siendo C la intersección de las superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $x^2 + y^2 = 2z$. La curva C se supone recorrida en el sentido antihorario al considerar su proyección sobre el plano xy. *Solución*: -2π.

Ejercicio 25

Calcular, directamente y aplicando el Teorema de Stokes, la integral $I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$, siendo $\overline{F} = (0, x, 0)$ y siendo C la curva intersección de: $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $y + z = 2$. La curva C se supone recorrida en el sentido horario al considerar su proyección sobre el plano xy. *Solución*: $-\pi$.

Ejercicio 26

Ses S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$ (con $z \geq 0$) y C su contorno. (a) Calcular directamente la integral de línea $\int_C xdx + ydy + zxdz$ teniendo en cuenta que el sentido de recorrido debe ser: subiendo por el primer octante. (b) Verificar el resultado del apartado anterior aplicando el teorema de Stokes. *Solución*: $\frac{\pi a^3}{8}$.

TEOREMA DE GAUSS

Teorema (Teorema de Gauss o teorema de la Divergencia)

Supongamos que Ω es una región en el espacio del tipo (IV). Denotemos por $\partial\Omega$ la superficie cerrada orientada, según la normal exterior, que es la frontera de Ω. Sea $\overline{F}$ un campo vectorial C^1 definido en Ω. Entonces se cumple:

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iiint_{\Omega} \left(\operatorname{div} \overline{F}\right) dxdydz$$

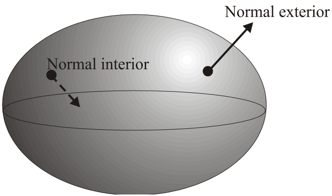


Figura: Orientaciones de una superficie cerrada.

Ejemplo 18

Sea $\overline{F} = 2x\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, *y* S *la superficie esférica unitaria definida por* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *Calcular, con la orientación de la normal exterior:*

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$$

Solución: Sea Ω el volumen limitado por la superficie esférica. Sabemos que por el teorema de Gauss:

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iiint_\Omega \left(\operatorname{div} \overline{F}\right) dxdydz$$

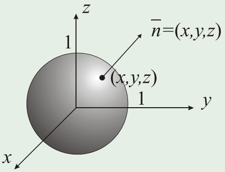


Figura: Normal unitaria exterior.

Como

$$\operatorname{div} \overline{F} = \overline{\nabla} \cdot \overline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2 + 2y + 2z$$

la integral triple es:

$$2 \iiint_\Omega (1 + y + z) dxdydz = 2 \iiint_\Omega dxdydz$$

ya que, aplicando simetrías, podemos asegurar que:

$$\iiint_\Omega ydxdydz = \iiint_\Omega zdxdydz = 0$$

Por tanto:

$$2 \iiint_\Omega (1 + y + z) dxdydz = 2 \iiint_\Omega dxdydz = \frac{8\pi}{3}$$

ya que la bola unitaria tiene volumen $4\pi/3$.

TEOREMA DE GAUSS

Ejercicio 27

Utilizar el teorema de Gauss para calcular $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$ siendo $\overline{F}(x,y,z) = xy^2\overline{i} + x^2y\overline{j} + y\overline{k}$ y S la superficie del cilindro $x^2+y^2=1$, acotado por los planos $z=1$ y $z=-1$ e incluyendo las porciones $x^2+y^2 \leq 1$ cuando $z=\pm 1$. Solución: π.

Ejercicio 28

Calcular, aplicando el teorema de Gauss, la integral de superficie $\iint_S \overline{F}.\overline{dS}$ siendo $\overline{F}(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ y S la superficie cerrada limitada por la semiesfera $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ y el plano $z=0$, con la orientación de la normal exterior. Solución: $\frac{2\pi a^5}{5}$.

Ejercicio 29

Calcular directamente y mediante Gauss la integral $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$, siendo $\overline{F}$ el campo vectorial $\overline{F} = (x,0,z)$ y siendo $S = S_1 \cup S_2$ la superficie cerrada formada por: $S_1 : z = x^2+y^2$; $S_2 : z = 4-(x^2+y^2)$. Solución: 8π.

CAMPOS CONSERVATIVOS (n=3)

Teorema (Campos Conservativos en $\mathbb{R}^3$)

Supongamos que $\overline{F}$ es un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ excepto, quizás, en un número finito de puntos. Si se cumple que $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{0}$, entonces, para toda curva cerrada simple orientada C, se cumple que:

$$\oint_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \iint_S \operatorname{rot}\overline{F} \cdot \overline{dS} = 0$$

O lo que es lo mismo para cualesquiera dos curvas no cerradas simples orientadas C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos se verifica:

$$\int_{C_1} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{C_2} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

CAMPOS CONSERVATIVOS (n=3)

En este caso para calcular la integral entre dos puntos es conveniente coger caminos paralelos a los ejes.

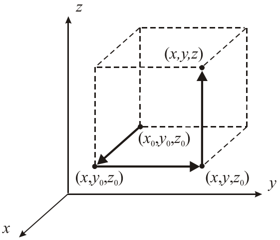


Figura: Campo conservativo.

Ejemplo 19

La fuerza gravitatoria ejercida por una masa de magnitud M, situada en el origen O, sobre otra masa de magnitud m situada en un punto arbitrario (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función:

$$\overline{F}(x,y,z) = -\frac{GMm}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\overline{k}\right)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Hallar el trabajo realizado para desplazar la masa m desde un punto A, situado a una distancia a del origen, a otro B, situado a una distancia b del origen, con $0 < b < a$.

Solución: Se comprueba fácilmente que $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{0}$, por lo que iremos del punto A (x_0, y_0, z_0) al punto B (x_1, y_1, z_1), a lo largo de caminos paralelos a los ejes, como se indica en la figura anterior. Para ello parametrizamos las tres rectas.

$$(1)\left\{\begin{array}{c} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{array}\right. \quad (2)\left\{\begin{array}{c} x = x_1 \\ y = t \\ z = z_0 \end{array}\right. \quad (3)\left\{\begin{array}{c} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = t \end{array}\right.$$

Sabemos que el trabajo es la suma de las tres integrales de línea:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \overline{F}\cdot\overline{ds} = \int_C \frac{-GMm}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(xdx+ydy+zdz\right) \\ &= \int_{(1)} \overline{F}\cdot\overline{ds} + \int_{(2)} \overline{F}\cdot\overline{ds} + \int_{(3)} \overline{F}\cdot\overline{ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{-GMmt\ dt}{\left(t^2+y_0^2+z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{y_0}^{y_1} \frac{-GMmt\ dt}{\left(x_1^2+t^2+z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{-GMmt\ dt}{\left(x_1^2+y_1^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[\frac{GMm}{\sqrt{t^2+y_0^2+z_0^2}}\right]_{t=x_0}^{t=x_1} + \left[\frac{GMm}{\sqrt{x_1^2+t^2+z_0^2}}\right]_{t=y_0}^{t=y_1} + \left[\frac{GMm}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+t^2}}\right]_{t=z_0}^{t=z_1} \\ &= GMm\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

Definición (Dominio simplemente conexo)

Un dominio D es simplemente conexo si, para cualquier curva cerrada simple C en D, la región R formada por C más su interior se encuentra totalmente en D.

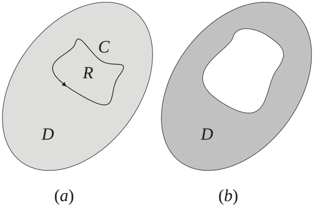


Figura: (a) Dominio simplemente conexo. (b) Dominio doblemente conexo.

Ejemplos de dominios simplemente conexos son los siguientes: el interior de un círculo, el interior de un cuadrado, un sector, un cuadrante, el plano xy en su totalidad. La región anular entre dos círculos no es simplemente conexo, ni lo es el interior de un círculo menos su centro. Por tanto, los agujeros pueden reducirse a puntos.

CAMPOS CONSERVATIVOS (n=2)

Aplicando el teorema de Green es inmediato comprobar el siguiente teorema.

Teorema (Campos Conservativos en $\mathbb{R}^2$)

Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, funciones con derivadas parciales continuas en D y sea D simplemente conexo. Si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en D, entonces:

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

para cualquier curva cerrada simple contenida en D. O lo que es lo mismo para cualesquiera dos curvas no cerradas simples orientadas C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos se verifica:

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Ejemplo 20

Dado el campo de fuerzas $\overline{F}(x, y) = y\overline{i} + x\overline{j}$*, hallar el trabajo de* $\overline{F}$ *a lo largo de las curvas:*
a) C_1 *dada por* $y = x$ *entre los puntos* $(0, 0)$ *y* $(1, 1)$*.*
b) C_2 *dada por* $y = x^3(x-1)\ln(x+2) + x$ *entre los puntos* $(0, 0)$ *y* $(1, 1)$*.*

Solución: El campo es conservativo, ya que las derivadas cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

y por ello la integral sólo depende de los puntos inicial y final, que en las dos curvas son los mismos. Vamos a calcular, por tanto, la integral a lo largo de la curva C_1 que es la más sencilla:

$$\int_{C_1} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_0^1 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

Así pues:

$$\int_{C_1} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{C_2} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

CAMPOS CONSERVATIVOS (n=2)

En el teorema anterior impusimos que las derivadas parciales fueran continuas en todos los puntos del conjunto D. Si existe un punto de discontinuidad, aplicando el teorema de Green generalizado, es inmediato comprobar el siguiente resultado.

Teorema

Supongamos que en el punto A existe una discontinuidad. Los valores de la integral $\oint_C Pdx + Qdy$ son:

- *El valor 0 cuando C no encierra al punto A.*
- *Un valor k (cte.) para todas las curvas cerradas simples C que rodean al punto A.*

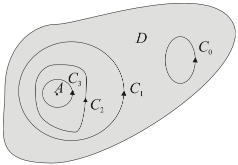


Figura: Dominio Doblemente Conexo.

Ejemplo 21

Hallar:

$$\oint \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

siendo C la elipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$.

Solución: En este ejemplo tenemos que :

$$P = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

son continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, con derivadas primeras continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, y además se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces, teniendo en cuenta que en el origen hay un punto de discontinuidad parece interesante cambiar de curva para calcular la integral.

Como la integral es independiente de la curva, consideremos, por su simplicidad, la circunferencia C^* de ecuaciones paramétricas: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Se cumple que:

$$\begin{aligned}
\oint_C Pdx + Qdy &= \oint_{C^*} Pdx + Qdy \\
&= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) - \cos t \cos t)dt = -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

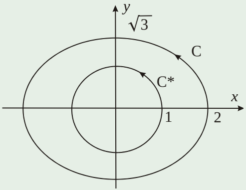


Figura: Circunferencia y elipse rodeando al $(0, 0)$.

Ejercicio 30

Calcular la integral de línea $\int_C ydx + xdy + zdz$ siendo C el arco de curva, situado en el primer octante, definido por la intersección de las superficies $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$. *Solución*: $\pm 2a^2$ (según el sentido de recorrido).

Ejercicio 31

Calcular la integral de línea $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$ tomada a lo largo de la circunferencia, de centro el origen de coordenadas y radio 1, en sentido positivo. *Solución*: π.

Ejercicio 32

Calcular $\oint \frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^2}$ alrededor de la elipse $x^2 + 3y^2 = 1$. *Solución*: 0.

A parte del cálculo de longitudes de curvas, de áreas de superficies y de regiones planas, y el cálculo de trabajos, los cuáles ya han sido suficientemente tratados en las secciones anteriores, en esta sección presentamos otras aplicaciones que consideramos interesantes para estudiantes del grado en Ingeniería.

- **Centro de Masa de figuras**

Sea $\mu(x, y, z)$ la densidad (lineal o superficial) de un cuerpo dado.
Curva C.
Las coordenadas del centro de masa de una curva C son:

$$x_G = \frac{\int_C x\mu(x,y,z)ds}{\int_C \mu(x,y,z)ds};\; y_G = \frac{\int_C y\mu(x,y,z)ds}{\int_C \mu(x,y,z)ds};\; z_G = \frac{\int_C z\mu(x,y,z)ds}{\int_C \mu(x,y,z)ds}$$

Superficie S.
Las coordenadas del centro de masa de una superficie S son:

$$x_G = \frac{\iint_S x\mu(x,y,z)dS}{\iint_S \mu(x,y,z)dS};\; y_G = \frac{\iint_S y\mu(x,y,z)dS}{\iint_S \mu(x,y,z)dS};\; z_G = \frac{\iint_S z\mu(x,y,z)dS}{\iint_S \mu(x,y,z)dS}$$

Ejemplo 22

Calcular el centro de gravedad del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, *con* $0 \leq z \leq a$, *de densidad superficial* μ *constante.*

Solución: Situando el cono como en la figura, en virtud de la simetría existente:

$$x_G = y_G = 0; \quad z_G = \frac{\iint_S \mu z dS}{\iint_S \mu dS}$$

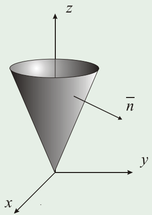


Figura: Superficie Cónica.

Debido a que la ecuación del cono es $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, entonces:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Por tanto, siendo $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq a^2\}$

$$z_G = \frac{\int\int_D \mu \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}dxdy}{\int\int_D \mu\sqrt{2}dxdy}$$

y efectuando el cambio a coordenadas polares se tiene que:

$$z_G = \frac{\mu \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{2}r^2 drd\theta}{\mu \int_0^{2\pi} \int_0^a r\sqrt{2}drd\theta} = \frac{\sqrt{2}2\pi\frac{a^3}{3}}{\sqrt{2}2\pi\frac{a^2}{2}} = \frac{2a}{3}$$

- **Momentos de Inercia de figuras**

Según tengamos una curva C o una superficie S, los momentos de inercia son respectivamente:

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_C x^2\mu(x,y,z)ds;\ I_{yz} = \iint_S x^2\mu(x,y,z)dS \\
I_{xz} &= \int_C y^2\mu(x,y,z)ds;\ I_{xz} = \iint_S y^2\mu(x,y,z)dS \\
I_{xy} &= \int_C z^2\mu(x,y,z)ds;\ I_{xy} = \iint_S z^2\mu(x,y,z)dS \\
I_x &= \int_C (y^2+z^2)\mu(x,y,z)ds;\ I_x = \iint_S (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS \\
I_y &= \int_C (x^2+z^2)\mu(x,y,z)ds;\ I_y = \iint_S (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dS \\
I_z &= \int_C (x^2+y^2)\mu(x,y,z)ds;\ I_z = \iint_S (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dS \\
I_o &= \int_C (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)ds;\ I_o = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS
\end{aligned}$$

Ejemplo 23

Sea C la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 0$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar el momento de inercia de C respecto del eje *OX. Considérese la densidad lineal μ constante.*

Solución: Para la curva C se tiene que:

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 0} = 1$$

De donde:

$$I_x = \mu \int_C y^2 ds = \mu \int_C y^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$I_x = \mu \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt = \mu \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi\mu$$

Ejercicio 33

Calcular la masa del arco de circunferencia: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq \pi$, cuya densidad es $\mu = y$. *Solución*: 2.

Ejercicio 34

Calcular los momentos de inercia de la 1^a espira de la hélice: $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = \mathrm{ht}/2\pi$, con respecto a los ejes de coordenadas, suponiendo la densidad $\mu = 1$. *Solución*: $I_x = I_y = (\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3})\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$; $I_z = a^2\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$.