# TEMA 3: ECUACIONES DIFERENCIALES

Ampliación de Matemáticas (Grado en Ingeniería en T.I.)

EPI Gijón - UNIOVI

# CONCEPTOS GENERALES

### Definición (**Ecuación diferencial**)

*Se llama ecuación diferencial a cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, respecto de una o más variables independientes.*

### Definición (**Orden de una ecuación diferencial**)

*Se denomina orden de una ecuación diferencial al de la derivada de orden más alto contenida en ella.*

**Definición (Ec. diferencial ordinaria. Ec. en derivadas parciales)**

*Si en una ecuación diferencial sólo interviene una variable independiente, la ecuación diferencial se llama ordinaria (EDO) y en caso contrario se dice que es una ecuación en derivadas parciales (EDP).*

**Definición (Ecuación diferencial ordinaria (EDO))**

*Se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) una ecuación del tipo:*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

*que liga la variable independiente* $x$*, la función buscada* $y = y(x)$ *y las derivadas de ésta* $y'(x)$*,* $y''(x)$*, ...,* $y^{(n)}(x)$ *.* $F$ *es una función conocida.*

**Ejemplo 1**

(a) Dadas las ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = 2y; \;\; \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} + 3y = \operatorname{sen} x; \;\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

las dos primeras son ecuaciones diferenciales ordinarias y la última en derivadas parciales.

(b) De igual modo podemos clasificar:

$$\begin{array}{ll} y'' + 3y' + \cos y - \operatorname{sen} x = 0 & \text{es una EDO de segundo orden} \\ y' \log x = 0 & \text{es una EDO de primer orden} \\ 2xy + e^{y'} + \operatorname{tg} y''' = 0 & \text{es una EDO de tercer orden} \\ y' = x + y^{100} & \text{es una EDO de primer orden} \end{array}$$

Al plantear numerosos problemas tanto de las propias matemáticas, como también de otras ciencias (física, química, biología, etc.), aparecen ecuaciones diferenciales que tendremos que resolver.

## Ejemplo 2

*Hallar una curva tal que la pendiente de la recta tangente en cada uno de los puntos de la curva sea igual a la ordenada del punto de tangencia.*

**Solución:** Supongamos que $y = y(x)$ es la ecuación de la curva buscada. Como se sabe, $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$, y por tanto, la propiedad de la curva que la define se expresa por la igualdad $y'(x) = y(x)$ que constituye una ecuación diferencial de primer orden.

No es difícil ver que la función $y = Ce^x$, en donde $C$ es una constante cualquiera, verifica dicha ecuación. Como $C$ es una constante arbitraria, habrá infinitas curvas que cumplan la propiedad enunciada.

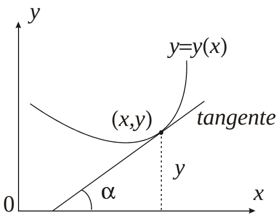


Figura: Planteamiento de una ecuación diferencial.

En la gran mayoría de las asignaturas que tenéis en la carrera os tenéis que enfrentar con la resolución de ecuaciones diferenciales.

- Por ejemplo en un circuito eléctrico RL que consta de una f.e.m. de $E(t)$, una resistencia de $R$ y una inductancia $L$; siendo $I(t)$ la intensidad en el tiempo $t$. y aplicando la ley de Ohm y la ley de Kirchhoff, se llega a la ecuación $L\frac{dI}{dt} + RI = E$. que habrá que resolver
- Otro ejemplo sería un objeto de masa $m$ que se deja caer desde el reposo en el que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si $v(t)$ representa la velocidad, aplicando la segunda ley de Newton, llegamos a la ecuación $m\frac{dv}{dt} = mg - cv$ que habrá que resolver.

**Ejercicio 1**

Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 gramos de sal. Sea $Q(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante $t$. Una solución salina de 2 g/l entra en el tanque a 10 litros por minuto mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 litros por minuto. Hallar la EDO asociada al problema. *Solución*: $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{30+t} = 20$.

**Definición (Solución de una ecuación diferencial)**

*Se denomina solución de una ecuación diferencial de n-ésimo orden en el intervalo* $(a, b)$ *a toda función* $y = \varphi(x)$ *que tiene en el intervalo citado derivadas de hasta n-ésimo orden inclusive y es tal que la sustitución de la función* $y = \varphi(x)$ *y de sus derivadas en la ecuación diferencial reduce ésta a una identidad, para cualquier valor de* $x$ *en el intervalo* $(a, b)$.

La gráfica de la solución de una ecuación diferencial lleva el nombre de *curva integral* de dicha ecuación. El proceso de búsqueda de la solución de una ecuación diferencial se suele denominar *integración* de la ecuación diferencial.

## Ejemplo 3

(a) La función $y = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.
En efecto, la función $y = e^{2x}$ tiene como derivadas $y' = 2e^{2x}$ e $y'' = 4e^{2x}$. Por lo tanto:

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x} - 5\left(2e^{2x}\right) + 6e^{2x} = 10e^{2x} - 10e^{2x} = 0$$

es decir la función verifica la ecuación diferencial.

(b) La función $y = \operatorname{sen} x$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + y = 0$, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.
En efecto, $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$; al sustituir en la ecuación dada $y$ e $y''$, obtenemos:

$$-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \equiv 0,\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

# ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. DEFINICIONES

A partir de aquí, nos centramos ya en las ecuaciones de primer orden que, de acuerdo con las definiciones anteriores, serán de la forma:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

siendo $F$ una función real de $x, y$ e $y'$. Supondremos que $y$ es la variable dependiente, $x$ la variable independiente y que ambas son reales.

**Definición (Solución de una ecuación diferencial de primer orden)**

*Sea $f$ una función real definida en un intervalo $I$ y derivable en dicho intervalo. Se dice que $f$ es una solución explícita en $I$ de la ecuación $F\left(x, y, y'\right) = 0$, si al sustituir $y = f(x)$ en la ecuación diferencial, ésta se verifica, $\forall x \in I$. Es decir:*

$$F\left(x, f(x), f'(x)\right) = 0, \quad \forall x \in I$$

Habrá algunos casos en los que no podremos obtener la solución en forma explícita $y = y(x)$ y tengamos que limitarnos a dar la solución como una relación del tipo $g(x, y) = 0$, diremos entonces que $g(x, y) = 0$ define una *solución en forma implícita* de la ecuación diferencial.

- **Caso Particular**

La ecuación diferencial mas sencilla es la del tipo:

$$y' = f(x)$$

donde $f(x)$ es una función conocida, continua en cierto intervalo $(a, b)$; $y = y(x)$ es la función que buscamos. Ya ha aparecido una ecuación de este tipo en el tema del cálculo integral donde a partir de la función $f(x)$ se necesitaba hallar la primitiva de ésta $\mathcal{F}(x)$. Como se sabe, la función general que satisface la ecuación diferencial anterior tiene por expresión:

$$y = \int f(x)dx = \mathcal{F}(x) + C$$

donde $\mathcal{F}(x)$ es una primitiva cualquiera para la función $f(x)$ en el intervalo $(a, b)$, y $C$ es una constante arbitraria. De este modo, la función buscada $y = y(x)$ no es única.

Del comentario anterior se desprende que una ecuación diferencial puede tener una infinidad de soluciones. Si de las infinitas soluciones queremos hallar una en concreto, deberemos prefijar cierta condición inicial $y(x_0) = y_0$. Geométricamente esto significa que se prefija un punto $M_0\,(x_0, y_0)$ por el cual ha de pasar la curva integral que estamos hallando.

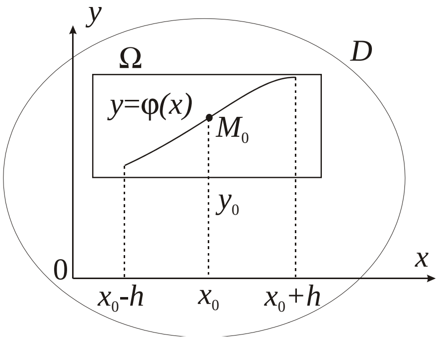


Figura: Problema de Valores Iniciales o Problema de Cauchy.

**Teorema ($\mathbf{T}^{ma}$ de existencia y unicidad del Problema de Cauchy)**

*Sea la ecuación diferencial:*

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

*y supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en cierto dominio $D$ en el plano $xOy$. Si existe un entorno $\Omega$ del punto $M_0(x_0, y_0) \in D$, en el que se cumple* **que la función $f(x, y)$ es continua y tiene derivada parcial acotada $\partial f / \partial y$ entonces existe una única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1)**, *definida en un cierto intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ del eje $Ox$ , que toma el valor $y_0$ cuando $x = x_0$.*

Geométricamente esto significa que por el punto $M_0(x_0, y_0)$ pasa una, y sólo una, curva integral de la ecuación (1).
El teorema es de carácter local, es decir garantiza la existencia de la única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación (1) solamente en un entorno suficientemente pequeño del punto $x_0$.

**Definición (Solución general)**

*Llamaremos solución general de la ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$, *en cierto dominio* $\Omega$, *en el que se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, a una familia de funciones* $y = \varphi(x, C)$ *dependientes de* $x$ *y de una constante arbitraria* $C$ *(parámetro), tal que:*
*1) para cualquier valor real de la constante* $C$ *la función* $y = \varphi(x, C)$ *verifica la ecuación diferencial:*

$$\varphi'(x, C) \equiv f(x, \varphi(x, C))$$

*2) cualquiera que sea la condición incial* $y|_{x=x_0} = y_0$, *se puede elegir un valor* $C_0$ *de la constante* $C$ *tal que la solución* $y = \varphi(x, C_0)$ *satisface la condición inicial:*

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0$$

Se supone que $(x_0, y_0) \in \Omega$.

**Definición (Solución Particular)**

*Llamaremos soluciones particulares de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ a las soluciones que se obtienen de la solución general dando valores concretos a la constante arbitraria $C$. Por tanto, la solución general de la citada ecuación diferencial puede ser definida como el conjunto de las infinitas soluciones particulares de la ecuación.*

En el proceso de integración de una ecuación diferencial llegamos con frecuencia a la ecuación:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

la cual prefija la solución general de la ecuación en forma implícita.

La ecuación anterior suele recibir el nombre de *integral general* de la ecuación diferencial (1).

La ecuación $\Phi(x, y, C_0) = 0$, donde $C_0$ es cierto valor concreto de la constante $C$, se llama *integral particular*.

**Definición (Solución Singular)**

*Una solución* $y = \psi(x)$ *de la ecuación diferencial* $(1)$ *se llama singular si no es una solución particular.*

*Se puede comprobar que en cada uno de sus puntos se perturba la propiedad de unicidad, es decir, por cada uno de sus puntos* $(x_0, y_0)$ *pasa, además de dicha solución singular , también otra solución de la ecuación* $(1)$ *que no coincide con* $y = \psi(x)$ *en un entorno tan pequeño como se quiera del punto* $(x_0, y_0)$*.*

La gráfica de la solución singular se denomina *curva integral singular* de la ecuación. Geométricamente dicha gráfica representa la envolvente de un haz de curvas integrales de la ecuación diferencial definidas por su integral general. (Recordemos que se llama envolvente de un haz de curvas $\Phi(x, y, C) = 0$ a una curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva del haz).

Por consiguiente, para que la ecuación $(1)$ tenga solución singular, es necesario, que, en cada uno de sus puntos, no se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

## Ejemplo 4

Dada la ecuación diferencial $y' = 3y^{2/3}$, comprobar que tiene por solución general $y = (x + C)^3$ , y que $y = 0$ es solución singular.

**Solución**

En los puntos del eje $Ox$, no se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Se puede comprobar fácilmente que $y = (x + C)^3$ verifica la ecuación diferencial para cualquier valor de $C$, por lo que es su solución general. La recta $y = 0$ también verifica la EDO, sin embargo no es solución particular, por lo que es solución singular. En la figura se puede comprobar que por cada punto del eje $Ox$, pasan dos soluciones de la EDO.(una particular y la singular)

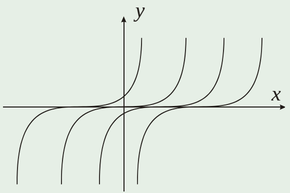


Figura: $y = (x + C)^3$ y la solución singular $y = 0$.

En esta sección presentamos algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden y las técnicas de integración que nos permiten calcular su solución general.

- Las ecuaciones diferenciales de primer orden que vamos a estudiar podrán venir expresadas de dos formas:

  a) En forma de derivada: $y' = f\,(x, y)$

  b) En forma diferencial: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Se comprueba que es inmediato pasar de una forma a la otra.

Definición

**1. Ecuaciones de Variables Separables**

Una ecuación diferencial de primer orden se llama de *variables separables* si la podemos expresar de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

La integral general de esta ecuación diferencial se calcula directamente integrando..

Así obtenemos como solución general de la ecuación

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

## Ejemplo 5

*Resolver la ecuación diferencial:* $x\,(y+1)\,dx + \left(x^2+1\right)\,dy = 0$.
**Solución:** Separamos las variables, escribiendo la ecuación en la forma:

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{y+1}dy = 0$$

Con lo que la solución será (nombrando la cte. arbitaria siempre como $C$):

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{y+1}dy = C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|y+1| = C \Rightarrow \ln\left(x^2+1\right) + 2\ln|y+1| = C$$

$$\ln\left[\left(x^2+1\right)(y+1)^2\right] = C \Rightarrow \left(x^2+1\right)(y+1)^2 = C$$

**Definición (2. Ecuaciones homogéneas)**

Se llama *ecuación homogénea* a una ecuación de la forma:

$$y' = f\left(y/x\right)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales efectuaremos el cambio de variable $u = y/x$, por lo que $y = xu$ y si ahora sustituimos en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$u + x\frac{du}{dx} = f\left(u\right) \Longrightarrow x\frac{du}{dx} = f\left(u\right) - u \Longrightarrow \left[u - f\left(u\right)\right] dx + xdu = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f\left(u\right)} = 0$$

que es una ecuación de variables separadas a la que se puede aplicar el método anterior para obtener su solución.

### Ejemplo 6

*Resolver la ecuación diferencial* $(x+y)\,dx-(x-y)dy=0$.
**Solución:** Escribimos, en primer lugar, la ecuación en la forma:

$$y'=\frac{x+y}{x-y}\Longrightarrow y'=\frac{1+y/x}{1-y/x}$$

A continuación, hacemos el cambio $u=y/x$, es decir, $y=xu$, con lo que la ecuación se transforma en:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}\Longrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u\Longrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

Esta ecuación es de variable separadas ya que se puede escribir como:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}\Longrightarrow\frac{dx}{x}+\frac{u-1}{u^2+1}du=0$$

Así integrando, obtenemos como solución:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) - \operatorname{arctg} u = C$$

$$\ln|x\sqrt{u^2+1}| = C + \operatorname{arctg} u$$

$$|x|\sqrt{u^2+1} = Ce^{\operatorname{arctg} u}$$

Por último, sustituyendo $u = y/x$, obtenemos:

$$\sqrt{y^2+x^2} = Ce^{arctg\ \frac{y}{x}}$$

**Definición (3. Ecuaciones reducibles a homogéneas)**

Son *ecuaciones reducibles a homogéneas* aquellas de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Para integrarlas hay que distinguir dos casos según las rectas:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \;\; a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

sean paralelas o se corten.
**Caso 1**: Supongamos que las rectas se cortan en $(x_0, y_0)$.
Haciendo el cambio de variables $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ y sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} &= f\left(\frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)\\ \frac{dY}{dX} &= f\left(\frac{a_1 + b_1 Y/X)}{a_2 + b_2 Y/X}\right)\end{aligned}$$

que es una ecuación homogénea que ya sabemos resolver.

**Caso 2**: Supongamos que las rectas son paralelas, por lo que se cumple:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha \Longrightarrow a_1 = \alpha a_2 \wedge b_1 = \alpha b_2$$

Así la ecuación se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\alpha(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

y si hacemos el cambio $u = a_2 x + b_2 y$ llegamos a una ecuación de variables separadas.

$$u' = a_2 + b_2 y'$$

$$\frac{1}{b_2}(u' - a_2) = f\left(\frac{\alpha u + c_1}{u + c_2}\right) \Longrightarrow du = \left(a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha u + c_1}{u + c_2}\right)\right) dx$$

$$\frac{du}{a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha u + c_1}{u + c_2}\right)} = dx$$

### Ejemplo 7

*Resolver la ecuación diferencial:*

$$y' = -\frac{x - y + 3}{3x + y + 1}$$

**Solución:** Calculamos el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

La solución es $y_0 = 2$ y $x_0 = -1$. Por tanto el cambio de variable:

$$\begin{array}{l} x = X - 1 \Longrightarrow X = x + 1; \quad dX = dx \\ y = Y + 2 \Longrightarrow Y = y - 2; \quad dY = dy \end{array}$$

convierte la ecuación diferencial dada en una homogénea, concretamente:

$$Y' = -\frac{X - Y}{3X + Y}$$

Con el cambio $Y = UX$ se obtiene:

$$(X - UX) + (3X + UX)(XU' + U) = 0$$

$$U'X + U = \frac{U-1}{U+3} \Rightarrow U'X = \frac{-1 - U^2 - 2U}{U+3} \Rightarrow \frac{(U+3)}{(U+1)^2} dU = -\frac{dX}{X}$$

$$C - \ln|X| = \int \frac{dU}{U+1} + 2\int \frac{dU}{(U+1)^2}$$

$$C - \ln|X| = \ln|U+1| - \frac{2}{U+1} \Longrightarrow C + \frac{2}{U+1} = \ln|XU + X|$$

Deshaciendo el cambio $Y = UX$ y quitando logaritmos, se obtiene:

$$|X + Y| = Ke^{\frac{2X}{(Y+X)}}$$

Como $X = x + 1$, $Y = y - 2$, la solución en las variables originales es:

$$|x + y - 1| = Ke^{\frac{(2x+2)}{(x+y-1)}} \Longrightarrow x + y - 1 = Ce^{\frac{(2x+2)}{(x+y-1)}}$$

**Definición (4. Ecuaciones diferenciales exactas)**

Una ecuación:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

recibe el nombre de ecuación *exacta* si el primer miembro de la ecuación representa la diferencial total de cierta función $u(x,y)$ de dos variables independientes $x$ e $y$:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \Longleftrightarrow \begin{cases} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Es inmediato ver que en este caso $u(x,y) = C$ será la integral general de la ecuación diferencial.

Veamos un teorema que nos permite discernir cuándo una ecuación diferencial es exacta.

**Teorema**

*Supongamos que en la ecuación diferencial:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

*las funciones* $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *tienen derivadas parciales primeras continuas en un dominio* $D$*. Entonces la ecuación diferencial es exacta, si y sólo si:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial N}{\partial x}(x,y),\ \forall (x,y) \in D$$

- **Resolución práctica de las ecuaciones exactas**

**Paso a)** Integrar la relación $\partial u/\partial x = M(x, y)$ respecto a $x$. Se obtiene así la expresión:

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria de $y$.
**Paso b)** Calcular $\varphi(y)$. Se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \varphi'(y)$$

Al igualar el segundo miembro de la ecuación obtenida a $N(x, y)$, hallaremos:

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$$

que sólo dependerá de la variable $y$. Integrando se obtendrá $\varphi(y)$.
**Paso c)** Sustituir el valor de $\varphi(y)$ calculado en b) en la expresión de a).

## Ejemplo 8

*Resolver la ecuación diferencial:* $(2x + y)\,dx + (x + 1)dy = 0$.
**Solución:** En este caso

$$M(x, y) = 2x + y, N(x, y) = x + 1$$

y como: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$, la ecuación es exacta. Por tanto, su solución será $u(x, y) = C$, donde se verifica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = x + y$$

De la primera condición, resulta $u(x, y) = x^2 + xy + \varphi(y)$ e imponiendo la segunda obtenemos:

$$x + \varphi'(y) = x + 1 \Longrightarrow \varphi'(y) = 1 \Longrightarrow \varphi(y) = y$$

Luego $u(x, y) = x^2 + xy + y$, con lo que la solución de la ecuación es:

$$x^2 + xy + y = C$$

**Definición (5. Factores integrantes)**

*Se dice que $\mu(x,y)$ es un factor integrante de $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, cuando la ecuación diferencial:*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

*es exacta.*

Como la anterior ecuación diferencial es exacta, el factor integrante tendrá que verificar:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Longleftrightarrow \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

que es una ecuación en derivadas parciales, lo que constituye, en general, un problema más complejo aún. Sin embargo si se dispone de información sobre el factor integrante $\mu(x,y)$ se reduce la dificultad de la ecuación en derivadas parciales y se facilita su integración.

Veremos a continuación cómo calculamos algunos factores integrantes.

- **Factor integrante dependiendo sólo de x.**

En este caso $\mu = \mu(x)$ y por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

por lo que la ecuación en derivadas parciales nos queda de la siguiente forma:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{d\mu}{dx} N$$

$$\frac{d\mu/dx}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\mu'}{\mu}$$

como $\mu$ sólo depende de $x$, para que exista el factor integrante debe cumplirse que:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$$

Integrando en la ecuación anterior tenemos que $\ln|\mu|=\int f(x)dx$ y por tanto:

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$$

es un factor integrante.

- **Factor integrante dependiendo sólo de y**.

Dejamos al alumno que demuestre que para que esto ocurra debe cumplirse que:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$$

en este caso, operando igual que antes se obtiene que:

$$\mu(y)=e^{\int f(y)dy}$$

es un factor integrante.

## Ejemplo 9

*Resolver la ecuación diferencial:* $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$.
**Solución:** En este caso:

$$M(x, y) = 4xy + 3y^2 - xyN(x, y) = x(x + 2y)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x(x+2y)}(4x + 6y - 2x - 2y) = \frac{2x + 4y}{x(x+2y)} = \frac{2}{x}$$

Como $\int \frac{2}{x} dx = 2\ln x = \ln x^2$, un factor integrante es $\mu(x) = e^{\ln x^2} = x^2$, con lo que multiplicando por él obtenemos la ecuación:

$$(4x^3y + 3y^2x^2 - x^3)dx + (x^4 + 2yx^3)dy = 0$$

Como dicha ecuación es exacta, su solución será $u(x, y) = C$, donde $u$ verifica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3y + 3y^2x^2 - x^3 \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = x^4 + 2yx^3$$

De la segunda condición obtenemos $u(x,y) = x^4y + y^2x^3 + \varphi(x)$ e imponiendo la primera resulta:

$$4x^3y + 3y^2x^2 + \varphi'(x) = 4x^3y + 3y^2x^2 - x^3 \Longrightarrow \varphi'(x) = -x^3$$
$$\varphi(x) = -\frac{x^4}{4} \Longrightarrow u(x,y) = x^4y + y^2x^3 - \frac{x^4}{4}$$

De lo que deducimos que la solución es:

$$x^4y + y^2x^3 - \frac{x^4}{4} = C \Longrightarrow 4x^4y + 4y^2x^3 - x^4 = C$$

**Definición (6. Ecuaciones lineales)**

Llamaremos ecuaciones diferenciales lineales a aquellas de la forma:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Se puede demostrar que este tipo de ecuaciones siempre admiten como factor integrante:

$$e^{\int f(x)dx}$$

En primer lugar multiplicamos por el factor integrante:

$$e^{\int f(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int f(x)dx}f(x)y=e^{\int f(x)dx}g(x)$$

véase que el primer miembro lo podemos poner como la derivada de un producto, por lo que se cumple:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx}y\right)=e^{\int f(x)dx}g(x)$$

Si ahora integramos los dos miembros de la igualdad anterior:

$$e^{\int f(x)dx}y=\int e^{\int f(x)dx}g(x)dx+C$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx}g(x)dx+C\right)$$

## Ejemplo 10

*Resolver la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 8x$$

**Solución:** Como:

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln x = \ln x^2$$

un factor integrante es $e^{\ln x^2} = x^2$, con lo que multiplicando por él:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = 8x^3$$

Y, sin más que integrar, obtenemos como solución general:

$$x^2 y = 2x^4 + C \Longrightarrow y = 2x^2 + \frac{C}{x^2}$$

Existen ecuaciones diferenciales que pueden reducirse, por cambio de variables, a ecuaciones lineales. Entre tales ecuaciones figura la de *Bernoulli*.

**Definición (7. Ecuaciones de Bernoulli)**

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n$$

- Si $n = 0$, o bien $n = 1$, la ecuación es lineal con lo que el método anterior la resolvería.

- Si $n \neq 0$, y $n \neq 1$, multiplicamos los dos miembros por $y^{-n}$, por lo que:

$$y'y^{-n} + f(x).y^{1-n} = g(x)$$

A continuación efectuamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-n}$$

de donde:

$$\begin{aligned} z' &= (1-n)y^{-n}y' \\ \frac{z'}{1-n} &= y^{-n}y' \end{aligned}$$

Mediante la sustitución la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal respecto de la función $z(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{z'}{1-n} + f(x)z &= g(x) \\ z' + (1-n)f(x)z &= (1-n)g(x) \end{aligned}$$

## Ejemplo 11

*Resolver la ecuación diferencial de Bernoulli:*

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$$

**Solución:** Es una ecuación de Bernoulli con $n = -2$, multiplicando por $y^2$ la ecuación dada es equivalente a:

$$3xy'y^2 - 2y^3 = x^3$$

El cambio es $z = y^3$, de donde $3y'y^2 = z'$, y se convierte la ecuación en:

$$xz' - 2z = x^3 \Longrightarrow z' - \frac{2}{x}z = x^2$$

Esta ecuación es lineal y tiene por solución: $z = x^3 + Cx^2$, con lo que la integral general de la ecuación de Bernoulli es:

$$y^3 = x^3 + Cx^2$$

## Ejercicio 2

Determinar a qué tipo pertenecen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{array}{ll}
a) & 3e^t \tan(x) + (2 - e^t)\sec(x)^2 x' = 0 \\
b) & (3t^2 x + x^3)x' + 2t^3 = 0 \\
c) & xy' + y = y^2 \ln(x) \\
d) & t\cos(t+x) + \operatorname{sen}(t+x) + t\cos(t+x)x' = 0 \\
e) & (3tx + x^2) + (3tx + t^2)x' = 0 \\
f) & tx\cos(tx) + \operatorname{sen}(tx) + (t^2\cos(tx) + e^x)x' = 0 \\
g) & 3x + 3e^t x^{\frac{2}{3}} + tx' = 0 \\
h) & y' = \frac{y}{2y\ln(y) + y - x} \\
i) & y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) \\
j) & xy' + y = 2x
\end{array}
$$

*Solución:* a) Separadas. b) Homogénea. c) Bernoulli. d) Exacta. e) Homogénea. f) Exacta. g) Bernoulli. h) Exacta. i) Homogénea. j) Lineal.

## Ejercicio 3

*Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & (x+y-2)y' = 1-2x-2y \\
\text{(b)} & y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2 \\
\text{(c)} & \left(x^2+y^2\right) dx - 2xydy = 0 \\
\text{(d)} & e^{-y} dx - \left(2y + xe^{-y}\right) dy = 0 \\
\text{(e)} & y' + 2y = x^2 + 2x \\
\text{(f)} & \left(1+y^2\right) + xyy' = 0
\end{array}
$$

*Solución:* (a) $x+y+1 = Ce^{\frac{(2x+y)}{3}}$. (b) $\frac{1}{y} = \frac{(x+1)^4}{6} + C(x+1)$. (c) $y^2 - x^2 = Cx$. (d) $xe^{-y} - y^2 = C$. (e) $y = Ce^{-2x}\frac{1}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)$. (f) $x^2\left(1+y^2\right) = C$.

### Ejercicio 4

Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando factores integrantes de la forma que se indica:

$$\begin{array}{ll} (a) & (x^2+y^2+x)dx + xydy = 0;\ \text{con } \mu(x,y)=\mu(x) \\ (b) & \left(1+xy+y^2\right) + (1+xy+x^2)y' = 0;\ \text{con } \mu(x,y)=\mu(x\cdot y) \end{array}$$

*Solución: (a)* $6x^2y^2+3x^4+4x^3=C$. *(b)* $(x+y)e^{xy}=C$.

### Ejercicio 5

Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando factores integrantes de la forma que se indica:

$$\begin{array}{ll} (a) & xy'(y-1)-y=0;\ \text{con } \mu(x,y)=\mu(y) \\ (b) & (t+1)^2+(1+t^2)x'=0;\ \text{con } \mu(t,x)=\mu(t+x) \end{array}$$

*Solución: (a)* $xye^{-y}=C$. *(b)* $(1+t^2)e^{t+x}=C$.

La resolución de muchos problemas lleva a la integración de EDOs. En esta sección presentamos algunas aplicaciones de las EDOs de primer orden.

- **Crecimiento de población y similares**

Sea $x(t)$ la cantidad de individuos de una población en el instante $t$. El ritmo de crecimiento de la población es proporcional al número de individuos, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Existen otros fenómenos que se rigen por una EDO similar: la desintegración radiactiva, el intercambio de calor, etc.

- **Caída de cuerpos y otros problemas de movimiento**

La caída libre de un cuerpo viene determinada por la EDO:

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

Si suponemos que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo que cae, la EDO del movimiento es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

## Ejemplo 12

*Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura $T$ del cuerpo y la temperatura $T_0$ del aire. Si la temperatura del aire es de $20^\circ C$ y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde $100^\circ C$ hasta $60^\circ C$ , ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta $30^\circ C$ ?.*

**Solución:**La ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right)$$

con $T_0 = 20$, rige el comportamiento del sistema. Por lo tanto se trata de una ecuación de variables separables cuya solución se obtiene del siguiente modo

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int k dt$$

es decir $\ln\left|T - T_0\right| = kt + C_1$, que equivale a

$$T = T_0 + Ce^{kt}$$

En el instante inicial $(t = 0)$, la temperatura del cuerpo es $T = 100^\circ C$ y la del aire $T_0 = 20^\circ C$. Entonces $C = 80$ y la solución es

$$T = 20 + 80e^{kt}$$

La constante $k$ se determina con la condición de que para $t = 20$ la temperatura vale $T = 60^\circ C$. Sustituyendo en la solución se obtiene

$$60 = 20 + 80e^{20k} \Longrightarrow k = -\frac{\ln 2}{20}$$

Por tanto el tiempo $t$ que tarda en enfriarse a $30^\circ C$ verifica $30 = 20 + 80e^{kt}$ de donde $t = \frac{\ln \frac{1}{8}}{k}$, es decir

$$t = \frac{-\ln 8}{-\frac{\ln 2}{20}} = \frac{20 \ln 8}{\ln 2} = 60 \text{ minutos}$$

### Ejercicio 6

Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 g de sal. Una solución salina de 2 g/l de sal entra en el tanque a 10 litros por minuto, y la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 l/min. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que éste empieza a rebosarse?. *Solución*: $696,8$g.

### Ejercicio 7

Consideremos un circuito eléctrico RL. Supongamos que en el circuito la resistencia es de $12\Omega$ y la inductancia es de $4H$. Si la batería proporciona un voltaje constante de $60V$ y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de manera que $I(0) = 0$, calcular: a) $I(t)$. b) La corriente al cabo de 1 segundo. c) El valor límite de la corriente. *Solución*: a) $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$. b) $I(1) \simeq 4{,}75A$. c) $5A$.

## Ejercicio 8

Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de $m_0$ gramos. Al ser observado después de 24 horas, ha experimentado una reducción de masa del 10 %. a) Encuentrar una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. b) Calcular el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original (esto es, su vida media). *Solución*: a) $m(t) = m_0 e^{-0{,}00439t}$. b) $158h$.

## Ejercicio 9

*Calcular la velocidad límite que alcanza un paracaidista en su caída, si se sabe que la resistencia del paracaídas es proporcional a su velocidad. Solución*: $v_{\lim} = \frac{mg}{K}$.

**Definición (Ecuación diferencial lineal de orden n)**

*Se denomina ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden, aquellas de la forma:*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = F(x) \tag{1}$$

*donde* $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), F(x)$ *son funciones definidas sobre cierto intervalo* $I = (\alpha, \beta)$*. Si* $F(x) \equiv 0$ *en dicho intervalo, la ecuación se llama lineal homogénea, en caso contrario no homogénea o completa.*

*Si las funciones* $a_i$ *que aparecen en la definición anterior son constantes, para todo* $x \in (\alpha, \beta)\,, 0 \leq i \leq n$*, se dice que la ecuación diferencial:*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = F(x)$$

*es una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes.*

**Ejemplos:**

1) $x^2 y'' + (\operatorname{sen} x)\, y' = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables.

2) $y''' + 2y' = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden con coeficientes constantes.

### Definición (**Problemas de valores iniciales**)

*Un problema de valores iniciales relativo a la ecuación diferencial (1) consiste en, dado $x_0 \in I$ y fijadas $n$ constantes reales $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, hallar la función $y(x)$ que verifica la ecuación en el intervalo $I$ y, las llamadas condiciones iniciales:*

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

### Teorema (**Existencia y unicidad de soluciones**)

*Consideremos la ecuación:*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

*donde las funciones $a_i$ y $F$ son continuas en $I$ y $a_0(x) \neq 0, \forall x \in I$. Entonces, fijado $x_0 \in I$ y $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, existe una única solución en $I$ de la ecuación diferencial que verifica:*

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

**Teorema (Estructura de la solución general de la ec. lineal homogénea)**

*Si las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogéna de orden n, la solución general es:*

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

*donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.*

Por tanto el cálculo de la solución general de una ecuación lineal homogénea de orden $n$ consiste en calcular $n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación, lo que se llama un *sistema fundamental de soluciones de la ecuación:*

$$\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$$

La siguiente definición será importante en el desarrollo posterior:

**Definición (Wronskiano de un sistema de funciones)**

*Sean $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ funciones que admiten derivadas al menos hasta el orden $k-1$ en el intervalo $I$. Se llama wronskiano al determinante:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_k \\ y_1' & \ldots & y_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(k-1)} & \ldots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

## Teorema (**Fórmula de Liouville**)

*Sean* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *soluciones en* $I$ *de la ecuación lineal homogénea de orden* $n$*. Denotemos por* $W$ *al wronskiano de dichas funciones y sea* $x_0 \in I$*. Entonces:*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}, \forall x \in I$$

## Teorema (**Caracterización de los sistemas de soluciones linealmente independientes**)

*La condición necesaria y suficiente para que las soluciones particulares:*

$$\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$$

*de la ecuación diferencial lineal homogénea:*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

*sean linealmente independientes en el intervalo* $I$ *es que* $W(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*.*

- **Ec. lineales homogéneas, coeficientes constantes, de orden n**

En esta sección vamos a estudiar la ecuación lineal homogénea de orden $n$ y coeficientes constantes, es decir:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

donde las $a_i \in \mathbb{R}$.
Supondremos siempre $a_0 \neq 0$, con lo que podemos restringirnos al caso:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

**Definición (Ecuación característica)**

*Llamaremos ec. característica asociada a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes reales* $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ *a la ecuación polinómica:*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

**Definición (Polinomio característico)**

*El polinomio:*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

*se denomina polinomio característico.*

- **Ec. lineales homogéneas, coeficientes constantes, de orden 2**

Vamos a estudiar, en primer lugar la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{1}$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

**Caso 1.** Si las raíces $\lambda_1, \lambda_2$ de la ecuación caracteristica son **reales y distintas**, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

($C_1$, $C_2$ son las constantes arbitrarias).

**Caso 2.** Las raíces de la ecuación característica son **complejas** conjugadas, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, entonces La solución general de la ecuación (1) en este caso será:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

**Caso 3.** Por último supongamos que las raíces de la ecuación característica son **reales e iguales a** $\lambda_1$, entonces solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

### Ejemplo 13

(a) *Hallar la solución general de la ecuación diferencial:* $y'' - 3y' + 2y = 0$.
**Solución:** La ecuación característica es: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ y tiene por raíces $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Por lo que la solución general buscada es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

(b) *Hallar la solución general de la ecuación* $y'' + 2y' + 5y = 0$.
**Solución:** Las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1 = -1 + 2i$; $\lambda_2 = -1 - 2i$, por lo que $\alpha = -1, \beta = 2$; la solución general será:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} 2x$$

## Ejemplo 14

(a) *Hallar la solución general de la ecuación:* $y'' + 2y' + y = 0.$
**Solución:** La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene raíces múltiples $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Por eso la solución general de la ecuación diferencial de partida será:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

(b) Hallar *la solución general de la ecuación:* $3y'' - 2y' - 8y = 0.$
**Solución:** En este caso, la ecuación característica es $3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$. Sus soluciones son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{4}{3}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$$

(c) Hallar *la solución general de la ecuación:*$y'' + 2y' + y = 0.$
**Solución:** Resolviendo la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ se obtiene la raíz real doble $\lambda = -1$. Por tanto la solución general de la ecuación es:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x} \left( C_1 + C_2 x \right)$$

- **Ec. lineales homogéneas, coeficientes constantes, de orden n**

Vamos a generalizar el método, que acabamos de ver para las ecuaciones de $2^o$ orden, a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden $n$ con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (2)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todos números reales. La ecuación característica es:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

a) Por cada raíz simple $\lambda$ de la ecuación característica en la solución general de la ecuación (2) aparece la función:

$$e^{\lambda x}$$

b) Por cada par de raíces complejas conjugadas simples $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ en la solución general de la ecuación (2) aparecen:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; \;\; e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

c) Por cada raíz real $\lambda$ de multiplicidad $r$ en la solución general de la ecuación (2) aparecen

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}$$

d) los razonamientos expuestos en el apartado c) valen también para las raíces complejas. Por lo que, a cada par de raíces complejas conjugadas $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ de multiplicidad $\mu$, en la solución general de la ecuación (2) aparecen $2\mu$ funciones:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{array}\right\}$$

## Ejemplo 15

(a) Hallar *la solución general de la ecuación:* $y''' - 8y = 0$.

**Solución:** (a) La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es $\lambda^3 - 8 = 0$. Dado que las raíces cúbicas de 8 son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i$ y $\lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$, entonces la solución general de la ecuación es:

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x)$$

(b) Hallar *la solución general de la ecuación:* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

**Solución:** (b) La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$. Dado que $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$, las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = i$ (doble), $\lambda_2 = -i$ (doble). Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} x$$

### Ejercicio 10

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{llll} (a) & 4y'' + y' = 0 & (c) & y'' + 9y = 0 \\ (b) & y'' - y' - 6y = 0 & (d) & y'' - 4y' + 5y = 0 \end{array}$$

*Solución:* (a) $y = c_1 + c_2 e^{-1/4}x$. (b) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.
(c) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. (d) $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

### Ejercicio 11

Resolver los problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' + 16y = 0, & y(0) = 2, & y'(0) = -2 \\ (b) & y'' - 4y' - 5y = 0, & y(1) = 0, & y'(1) = 2 \end{array}$$

*Solución:* (a) $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$. (b) $y = \frac{1}{3} e^{5(t-1)} - \frac{1}{3} e^{-(t-1)}$.

## Ejercicio 12

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{llll} (a) & y''' - 4y'' - 5y' = 0 & (c) & y^{(4)} + y''' + y''' = 0 \\ (b) & \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 0 & (d) & 16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \end{array}$$

*Solución:* (a) $y = c_1 + c_2e^{5x} + c_3e^{-x}$.
(b) $y = c_1e^t + e^{-t}(c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t)$.
(c) $y = c_1 + c_2x + e^{-1/2x}(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.
(d) $y = c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4x\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

## Ejercicio 13

Resolver los problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{lllll} (a) & y'' + y' + 2y = 0, & y(0) = 0, & y''(0) = 0 & \\ (b) & y''' + 12y'' + 36y' = 0, & y(0) = 0, & y'(0) = 1, & y''(0) = -7 \end{array}$$

*Solución:* (a) $y = 0$. (b) $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}$.

## Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección, volvemos sobre las ecuaciones de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

con las $a_i$ y $f$ continuas en $I$ y $a_0(x) \neq 0, \forall x \in I$.

**Teorema (Solución general de la ecuación diferencial lineal completa de orden $n$)**

*Si $y_P$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, la solución general de dicha ecuación es:*

$$y = y_H + y_P$$

*siendo $y_H$ la solución general de la ecuación homogénea asociada.*

Dado que para resolver una ecuación lineal no homogénea será imprescindible el cálculo de una solución particular, a continuación, estudiaremos dos métodos para realizar dicho cálculo.

- **Cálculo de una solución particular**

**A) MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES**

Este método, a diferencia del método de coeficientes indeterminados que estudiaremos posteriormente, permite hallar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea, independientemente de que sus coeficientes sean constantes o variables, a partir de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Sea $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un sistema fundamental conocido de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. Buscaremos la solución de la ecuación no homogénea en la forma:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x) \qquad (3)$$

donde $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ son funciones desconocidas.

Para hallar las $n$ funciones $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ , resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = F(x) \end{cases}$$

Despejando las incógnitas tenemos que $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, por lo que:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Al sustituir las expresiones halladas para $C_i(x)$ en (3), obtenemos la solución particular de la ecuación no homogénea.

### Ejemplo 16

*Resolver la ecuación diferencial:* $y''' - 2y'' - y' + 2y = -2e^x$.

**Solución:** Se obtiene fácilmente que la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$$

Aplicamos el método de variación de las constantes, para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y_P = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} + c_3(x)e^{-x}$$

donde las $c_i(x)$ verifican:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + c_3'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} - c_3'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + 4c_2'(x)e^{2x} + c_3'(x)e^{-x} = -2e^x \end{array} \right.$$

Haciendo operaciones:

$$c_1'(x) = 1;\; c_2'(x) = -\frac{2}{3}e^{-x};\; c_3'(x) = -\frac{1}{3}e^{2x}$$

Integrando, calculamos $c_1(x) = x, c_2(x) = \frac{2}{3}e^{-x}, c_3(x) = -\frac{1}{6}e^{2x}$, con lo que llegamos a la solución particular:

$$y_p = xe^x + \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{6}e^x = xe^x + \frac{1}{2}e^x$$

De esta forma, ya tenemos la solución general de la ecuación:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x} + xe^x + \frac{1}{2}e^x$$

## Ejercicio 14

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' + y = \sec x & (c) & y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x) \\ (b) & y'' + y = \cos^2 x & (d) & y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t \end{array}$$

*Solución:*
*(a)* $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$.
*(b)* $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x$.
*(c)* $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x} \operatorname{sen}(e^x)$.
*(d)* $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + e^{-t} \left( \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^2 \right)$.

- **Cálculo de una solución particular**

**B) MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS (CI)**
Este método sirve para calcular una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes, es decir, de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

siempre que el segundo miembro $F(x)$ sea una combinación lineal de funciones de la forma:

$$F(x) = e^{ax} \left( P_l(x) \cos bx + Q_m(x) \operatorname{sen} bx \right)$$

con $P_l(x)$ un polinomio de grado $l$, $Q_m(x)$ un polinomio de grado $m$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Si $a \pm bi$ no es raíz de la ecuación característica, una solución particular es de la forma:

$$y_P = e^{ax}\left(T_r(x)\cos bx + S_r(x)\,\mathrm{sen}\, bx\right)$$

donde $T_r, S_r$ son polinomios, de coeficientes indeterminados, de grado $r =$max$(l, m)$.

b) Si $a \pm bi$ es raíz de multiplicidad $k$ de la ecuación característica, una solución particular es de la forma:

$$y_P = x^k e^{ax}\left(T_r(x)\cos bx + S_r(x)\,\mathrm{sen}\, bx\right)$$

donde $T_r, S_r$ son polinomios, de coeficientes indeterminados, de grado $r =$max$(l, m)$.

Para la aplicación práctica de este método será muy útil el siguiente teorema.

**Teorema (Superposición de soluciones)**

*Sea la ecuación diferencial. lineal de orden $n$ :*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = G(x) + H(x)$$

*Si $y_{P_1}$ e $y_{P_2}$ son soluciones particulares de las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y &= G(x) \\ y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y &= H(x) \end{aligned}$$

*respectivamente, entonces $y_{P_1} + y_{P_2}$ es solución de la ecuación:*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = G(x) + H(x)$$

## Ejemplo 17

*Hallar una solución particular de la ecuación:* $y'' + y' = 2x + 3$.

**Solución:** La ecuación característica $\lambda^2 + \lambda = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

En este ejemplo:

$$F(x) = e^{ax}\left(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\,\mathrm{sen}\, bx\right) = 2x + 3$$

Por lo que $a = 0$, $b = 0$, $l = 1$, $m = 0$, por lo tanto $r = 1$ y $a \pm bi = 0$ es raíz de multiplicidad $k = 1$ de la ecuación característica, por lo que una solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = xe^{ax}\left(T_1(x)\cos bx + S_1(x)\,\mathrm{sen}\, bx\right) = x\left(B_0 x + B_1\right)$$

Sustituyendo $y_p(x)$ en la ecuación y comparando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, llegamos a que $B_0 = 1, B_1 = 1$; por eso, la solución particular buscada será:

$$y(x) = x^2 + x$$

## Ejemplo 18

*Hallar una solución particular de la ecuación* $y'' + 2y' + y = \cos x$.

**Solución:** La ecuación característica $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ tiene por raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

En el caso dado $a = 0, b = 1$, por lo cual los números $a \pm bi = \pm i$ no son raíces de la ecuación característica; como $P_l(x) \equiv 1, Q_m(x) \equiv 0$ la solución particular de la ecuación debe buscarse en la forma;

$$y_p(x) = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x \quad (\text{con } A, B \text{ constantes})$$

Sustituyendo la función $y(x)$ en la ecuación, obtenemos $A = 0, B = 1/2$, y, por tanto:

$$y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$$

## Ejercicio 15

Resolver, mediante el método CI, las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & y''' - 3y' + 2y = 6e^x & (c) & y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x} \\
(b) & y''' - y'' + y' - y = x^2 + x & (d) & y'' + y = \operatorname{sen} t
\end{array}
$$

*Solución:*
*(a)* $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x} + x^2 e^x$.
*(b)* $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1$.
*(c)* $y = (c_1 + c_2 x)e^{4x} + e^{4x}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$.
*(d)* $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} t \cos t$.

En esta sección presentamos una de las muchas aplicaciones importantes de las ecuaciones diferenciales de orden superior: el estudio de las vibraciones y los circuitos eléctricos.

- **Aplicación al estudio de vibraciones**

La ecuación diferencial que rige el mecanismo masa-resorte de la figura es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, $m$ la masa, $\mu$ el coeficiente de amortiguamiento viscoso, $k$ la constante elástica del resorte y $f(t)$ la fuerza exterior.

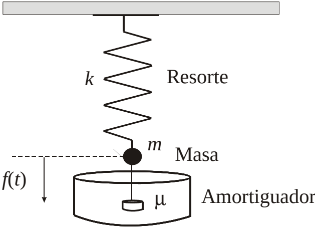


Figura: Sistema masa-resorte.

Hallaremos el desplazamiento (vibración) para los distintos valores de $\mu$, $k$ y $f$. Resolveremos este problema utilizando la nomenclatura habitual en el estudio de las vibraciones:

- **2 Casos:**

- (1) Si la EDO es homogénea, $f(t) = 0$, son vibraciones libres.
- (2) Si la EDO es completa, $f(t) \neq 0$, son vibraciones forzadas.

- **(1) Caso homogéneo. Vibraciones libres.**

Distinguiremos dos casos:
- (1a) $\mu = 0$, denominado vibraciones libres sin amortiguamiento.
- (1b) $\mu \neq 0$, denominado vibraciones libres amortiguadas.

**(1a) Vibraciones libres sin amortiguamiento.**

La ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Como el polinomio característico es $p(\lambda) = m\lambda^2 + k$, sus raíces son:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}i; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

y por tanto la solución general es:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Se trata de un movimiento vibratorio.

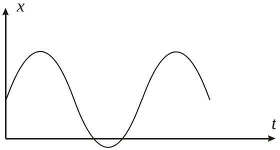


Figura: Vibraciones libres sin amortiguamiento.

**(1b) Vibraciones libres amortiguadas.**
La ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

cuyo polinomio característico es :

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + \mu\lambda + k$$

Las raíces del polinomio característico dependerán del signo de $\mu^2 - 4mk$.
Hay 3 casos:

- **(1b-i)** $\mu^2 - 4mk < 0$. Movimiento *Subamortiguado.*
- **(1b-ii)** $\mu^2 - 4mk = 0$. Movimiento *Críticamente amortiguado*
- **(1b-iii)** $\mu^2 - 4mk > 0$. Movimiento *Sobreamortiguado.*

**(1b-i)** $\mu^2 - 4mk < 0$. El movimiento se llama *subamortiguado* porque no hay suficiente amortiguación ($\mu$ es muy pequeña) para prevenir que el sistema oscile. El polinomio $p(\lambda)$ tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - i\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$$

y por tanto la solución general es:

$$x(t) = e^{\frac{-\mu}{2m}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t + B\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t\right)$$

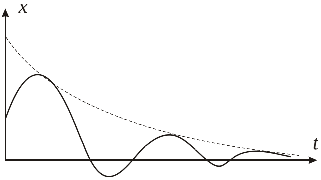


Figura: Movimiento subamortiguado.

**(1b-ii)** $\mu^2 - 4mk = 0$. El valor de $\mu$ que verifica la ecuación anterior es $\mu_c = 2\sqrt{km}$, denominado *amortiguamiento crítico*. El polinomio característico tiene la raíz $\lambda_1 = \frac{-\mu_c}{2m}$ doble y por tanto la solución general es:

$$x(t) = (A + Bt)e^{\frac{-\mu_c}{2m}}$$

El movimiento se llama *críticamente amortiguado* ya que si $\mu$ disminuyera de valor se presentaría oscilación.

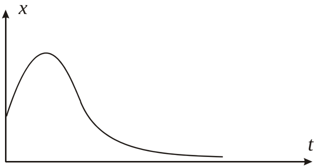


Figura: Movimiento críticamente amortiguado.

**(1b-iii)** $\mu^2 - 4mk > 0$. En este caso el polinomio $p(\lambda)$ tiene dos raíces $\lambda_1, \lambda_2$ reales y distintas:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}$$

y por tanto $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. La solución general es:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

La masa "regresa" a su posición normal de equilibrio ya que:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Los valores de $\mu$, tales que $\mu^2 - 4mk > 0$, son de *sobreamortiguamiento* y el movimiento se llama *sobreamortiguado* y es un movimiento no oscilatorio.

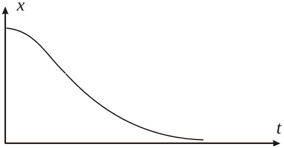


Figura: Movimiento sobreamortiguado.

**(2) Caso no homogéneo. Vibraciones forzadas.**

La ecuación a resolver es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

La solución de la ecuación será la suma de la solución general de la ecuación homogénea, analizada anteriormente, y una solución particular de la ecuación completa que dependerá de la función $f(t)$.

Normalmente $f(t)$ es una fuerza de tipo periódico $f(t)=\operatorname{sen} wt$.

Si nos encontramos en esta situación la solución particular de la completa será del tipo:

$$A\operatorname{sen} wt+B\cos wt$$

es decir, es una solución de carácter periódico, salvo ...

- ... en el caso que $\operatorname{sen} wt$ pudiese ser una posible solución de la ecuación homogénea, lo que sólo sucede en las vibraciones libres sin amortiguamiento, $\mu=0$, cuando:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}=w$$

Esta frecuencia, denominada de *resonancia*, da lugar a un caso "peligroso" ya que la solución particular de la ecuación completa es:

$$x_p(t) = At \operatorname{sen} wt + Bt \cos wt$$

y la función $x_p(t)$ no está acotada.

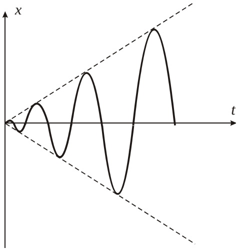


Figura: Sistema en resonancia.

## Aplicación al estudio de circuitos eléctricos

La ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes aparece en multitud de fenómenos. Así la ecuación que rige un circuito RLC es:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

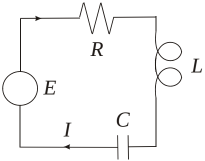


Figura: Circuito eléctrico.

El símil entre un sistema mecánico y un circuito RLC es total. La masa $m$ es equivalente al coeficiente de autoinducción $L$, el coeficiente de amortiguamiento viscoso $\mu$ juega análogo papel que la resistencia $R$, la constante elástica del resorte $k$ se convierte en $\frac{1}{C}$, el desplazamiento $x(t)$ debe ser sustituido por la carga $Q(t)$ y la fuerza exterior $f(t)$ por la fuerza electromotriz $E(t)$.

## Ejercicio 16

En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo, se fija un cuerpo de 4 Kg de masa y cuando el cuerpo queda en reposo, el muelle se ha alargado $39,2$ cm. En el instante $t = 0$, se lleva el cuerpo 20 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de 1 metro por segundo dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no actúan fuerzas exteriores, calcular el desplazamiento en función del tiempo, calculando la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento. *Solución*: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4})$ (mov. armónico simple).

## Ejercicio 17

Estúdiese el movimiento del cuerpo del problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el cuerpo una fuerza que (en Newtons) viene expresada como función del tiempo por $8\cos 5t$. *Solución*: $x(t) = \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t = \frac{\sqrt{2}}{5}\cos(5t - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{5}t\operatorname{sen} 5t$ (resonancia).

## Ejercicio 18

Del extremo inferior de un muelle fijado al techo se suspende un objeto de 16 Kg de masa que hace que el muelle se alargue 49 cm. A continuación, se lleva el objeto 20 centímetros por debajo de la posición de equilibrio y se le abandona en esa posición con una velocidad de $1,2$ metros por segundo dirigida hacia arriba. Estúdiese el desplazamiento del objeto, suponiendo que no existen fuerzas exteriores y que el medio opone una resistencia al movimiento que numéricamente (en newtons) vale $64v$, siendo $v$ la velocidad (en metros por segundo). *Solución:* $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{5}\cos 4t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 4t) = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{-2t}\cos(4t+\frac{\pi}{4})$ (mov. subamortiguado).

## Ejercicio 19

Resuélvase el problema anterior suponiendo que, además, actúa sobre el sistema una fuerza variable dada como función del tiempo (en Newtons) por $32\cos 2t$. *Solución:* $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{10}\cos 4t - \frac{11}{40}\operatorname{sen} 4t) + \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t$ (rég. transitorio y rég. estacionario).

# TRANSFORMADA DE LAPLACE. DEFINICIÓN

Sin duda el lector conoce y ha manejado numerosos operadores o transformaciones, como por ejemplo el operador derivada $(D = d/dt)$, donde se puede escribir $D[f(t)] = f'(t)$, es decir podemos considerar que el operador $D$ transforma una función $f(t)$ en otra función que en este caso es la derivada de $f(t)$.

Una clase de transformaciones de especial relevancia es la transformada de Laplace que hace corresponder a una función $f(t)$ otra función $F(s)$.

**Definición (Transformada de Laplace)**

*Sea $f(t)$ una función definida para $t > 0$. Si converge la integral impropia:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

*decimos que $f(t)$ admite transformada de Laplace y dicha trnasformada es el resultado de la integración, que será otra función de $s$ $(F(s))$. Se denota por:*

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

### Ejemplo 19

*Calcular, usando la definición, la transformada:*

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} bt\right], \;\; b \in \mathbb{R}$$

**Solución:** Aplicando la definición tenemos:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} bt\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen} bt dt = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-st} \operatorname{sen} bt dt$$

Si $s = 0$

$$\int_0^M e^{-st} \operatorname{sen} bt dt = \int_0^M \operatorname{sen} bt dt = -\left. \frac{\cos bt}{b} \right|_0^M = \frac{1}{b}(1 - \cos bM)$$

Es evidente que el segundo miembro no tiene límite cuando $M \longrightarrow +\infty$, por lo que no existe transformada de Laplace para $s = 0$.

Si $s \neq 0$, calculemos primero la integral indefinida, integrando dos veces por partes.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-st}\,\mathrm{sen}\, bt dt = \left\{ \begin{array}{ccc} u = e^{-st} & \longrightarrow & du = -se^{-st}dt \\ dv = \mathrm{sen}\, bt dt & \longrightarrow & v = -\frac{\cos bt}{b} \end{array} \right\} \\
&= -e^{-st}\frac{\cos bt}{b} - s\int e^{-st}\frac{\cos bt}{b}dt \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} u = e^{-st} & \longrightarrow & du = -se^{-st}dt \\ dv = \frac{\cos bt}{b}dt & \longrightarrow & v = \frac{\mathrm{sen}\, bt}{b^2} \end{array} \right\} \\
&= -e^{-st}\frac{\cos bt}{b} - s\left[e^{-st}\frac{\mathrm{sen}\, bt}{b^2} + s\int e^{-st}\frac{\mathrm{sen}\, bt}{b^2}dt\right] \\
&= -e^{-st}\left(\frac{\cos bt}{b} + s\frac{\mathrm{sen}\, bt}{b^2}\right) - s^2\frac{I}{b^2}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\left(\frac{s^2}{b^2}+1\right)I = -e^{-st}\left(\frac{\cos bt}{b} + s\frac{\mathrm{sen}\, bt}{b^2}\right)$$

con lo que:

$$I = \frac{-e^{-st}(b\cos bt + s\,\mathrm{sen}\,bt)}{s^2+b^2}$$

Por tanto:

$$\int_0^M e^{-st}\,\mathrm{sen}\,btdt = -\frac{1}{s^2+b^2}e^{-sM}(b\cos bM + s\,\mathrm{sen}\,bM) + \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{sen}\,btdt = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-st}\,\mathrm{sen}\,btdt = \begin{cases} \nexists & si \quad s<0 \\ 0 & si \quad s>0 \end{cases}$$

Es decir que se verifica:

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}\,bt\right] = \frac{b}{s^2+b^2},\ \text{para } s>0$$

De la misma forma se demuestra que:

$$\mathcal{L}\left[\cos bt\right] = \frac{s}{s^2+b^2},\ \text{para } s>0$$

## Ejemplo 20

*Dada la función:*

$$\delta_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} & si \quad 0 \leq t \leq c \\ 0 & si \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

*Se define la función impulso unitario o delta de Dirac* $\delta(t)$ como:

$$\delta(t) = \lim_{c \to 0} \delta_c(t)$$

*Calcular, usando la definición, su transformada de Laplace.*

**Solución:**

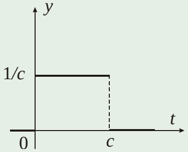


Figura: Función $\delta_c(t)$.

La transformada de $\delta_c(t)$ según la definición será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\delta_c(t)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\delta_c(t)dt = \int_0^{c} e^{-st}\frac{1}{c}dt = \\ &= \frac{1}{c}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^c = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{s}-\frac{e^{-sc}}{s}\right) = \frac{1}{cs}(1-e^{-sc})\end{aligned}$$

Si ahora calculamos el límite cuando $c$ tiende a 0, tendremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] &= \lim_{c\to 0}\frac{1}{cs}(1-e^{-sc}) = \lim_{c\to 0}\frac{1}{cs}\frac{e^{sc}-1}{e^{sc}} \\ &= \lim_{c\to 0}\frac{1}{cs}\frac{cs}{e^{cs}} = \lim_{c\to 0}\frac{1}{e^{cs}} = 1\end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

# TRANSFORMADA DE LAPLACE. EJERCICIOS

## Ejercicio 20

*Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de la función* $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *Solución*: $\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha}$,para $s > \alpha$.

## Ejercicio 21

*Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de la función (escalón unitario)* $1_{+}(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & t \geq 0 \\ 0 & si & t < 0 \end{array} \right.$ *Solución*: $\mathcal{L}\left[1_{+}(t)\right] = \frac{1}{s}$, para $s > 0$

## Ejercicio 22

*Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de la función (rampa)* $f(t) = \left\{ \begin{array}{lll} t & si & t \geq 0 \\ 0 & si & t < 0 \end{array} \right.$ *Solución*: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{s^2}$, para $s > 0$

**Definición (Linealidad de la Transformada)**

*La transformada de Laplace es lineal, es decir si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tienen por transformadas de Laplace respectivamente $F_1(s)$ y $F_2(s)$ y si $c_1$ y $c_2$ son constantes, entonces se verifica:*

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f_2(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] dt = \\ &= \mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] \end{aligned}$$

puesto que si dos integrales impropias son convergentes, su suma también lo es.

## Ejemplo 21

*Calcular, aplicando la linealidad del operador de Laplace, las transformadas de las funciones hiperbólicas:*

$$\operatorname{senh} \alpha t; \quad \cosh \alpha t$$

**Solución:** Por la linealidad y la definición de las funciones hiperbólicas se tiene:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{senh} \alpha t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right] = \frac{1}{2}\frac{2\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

esto es:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{senh} \alpha t\right] = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

Del mismo modo:

$$\mathcal{L}\left[\cosh \alpha t\right] = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

**Definición (Traslación de la variable s)**

*Sea* $L[f(t)] = F(s)$, *entonces se cumple que:*

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha); \ \forall s > s_0 + \alpha$$

En efecto. Supongamos que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, definida para $s > s_0$. Vamos a calcular la función cuya transformada es $F(s-\alpha)$ y definida para $s > s_0 + \alpha$. Tenemos que:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

sabemos que esta integral está definida para $\forall s > s_0$. Por tanto para $\forall s - \alpha > s_0 \Longleftrightarrow \forall s > s_0 + \alpha$

$$F(s-\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right]$$

es decir, se cumple que:

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha); \ \forall s > s_0 + \alpha$$

## Ejemplo 22

*Calcular la transformada de Laplace de las funciones:*

$$f(t) = e^{at}\cos bt; \quad g(t) = e^{at}\operatorname{sen} bt$$

**Solución:** Aplicando la definición de transformada vimos que:

$$\mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2} \text{ y } \mathcal{L}[\operatorname{sen} bt] = \frac{b}{s^2+b^2} \text{ para } s > 0$$

por lo que aplicando la propiedad anterior se cumple:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[e^{at}\cos bt\right] &= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \text{ para } s > a \\ \mathcal{L}\left[e^{at}\operatorname{sen} bt\right] &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \text{ para } s > a \end{aligned}$$

**Definición (Transformada de la Derivada)**

*Sea $L[f(t)] = F(s)$, y supongamos que $f'(t)$ admite transformada. Entonces se cumple:*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Como suponemos que $f'(t)$ admite transformada, será:

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt$$

Si integramos por partes:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u = e^{-st} & \rightarrow & du = -se^{-st}dt \\ dv = f'(t)dt & \rightarrow & v = f(t) \end{array} \right\}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'(t)\right] &= \left[e^{-st}f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-se^{-st}dt) = \\ &= 0 - f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\mathcal{L}\left[f(t)\right] \end{aligned}$$

- Podemos generalizar esta fórmula para el caso en que:

$$f(t), f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)$$

admitan transformadas. Operando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) = \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'''(t)\right] &= s\mathcal{L}\left[f''(t)\right] - f''(0) = \\ &= s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0) \\ &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \end{aligned}$$

y en general:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

**Definición (Derivada de la Transformada)**

Supongamos que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. *Entonces se cumple:*

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

Vamos a calcular:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Recordando la fórmula de Leibnitz para la derivación de integrales dependientes de un parámetro:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty} f(\alpha, t)dt = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha, t)dt$$

nos queda que:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty}(-t)e^{-st}f(t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-st}[tf(t)]dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

- Aplicando el teorema $n$ veces, llegamos al siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2F(s)}{ds^2} &= +\mathcal{L}[t^2 f(t)] \\
\frac{d^3F(s)}{ds^3} &= -\mathcal{L}[t^3 f(t)] \\
& \dots \\
\frac{d^nF(s)}{ds^n} &= (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]
\end{aligned}
$$

## Ejemplo 23

*Calcular la transformada de Laplace de la función* $f(t) = t^n e^{at}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

**Solución:** Como hemos visto anteriormente $\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = 1/(s-a)$.
Aplicando la propiedad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[te^{at}\right] &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2} \\
\mathcal{L}\left[t^2 e^{at}\right] &= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = \frac{2}{(s-a)^3} \\
&\ldots \\
\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Si particularizamos para $a = 0$ obtenemos la fórmula:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

## Definición (**Cambio de escala**)

*Se demuestra fácilmente que:*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

## Ejemplo 24

Sabiendo que:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} t\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

y aplicando la propiedad del cambio de escala tenemos que:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}\frac{t}{3}\right] = \frac{1}{1/3}\frac{1}{\left(\frac{1}{1/3}s\right)^2+1} = \frac{3}{9s^2+1}$$

## Definición (**Producto de convolución**)

Supongamos que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$. Llamaremos producto de convolución de $f(t)$ por $g(t)$ a la integral:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$$

Se demuestra el siguiente teorema:

## Teorema (**Teorema de convolución**)

*Sea* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *y* $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$. *Se cumple que:*

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau\right] = G(s) \cdot F(s)$$

Se puede ver fácilmente que además:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau = g(t) * f(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau$$

## Definiciones

Supongamos que dada una función $F(s)$, pretendemos determinar una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace sea precisamente $F(s)$.
El paso de la función $F(s)$ a la correspondiente $f(t)$ se llama *transformación inversa de Laplace o antitransformada* y se representa por

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}\left[F(t)\right] = f(s)$$

diremos que $f(t)$ es una transformada inversa de $F(s)$.
Como $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$ implica que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

Es evidente que la transformada inversa no es necesariamente única. Por ejemplo, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son idénticas salvo en un conjunto discreto de puntos (conjunto finito o infinito numerable), las integrales de ambas funciones serán iguales, es decir, tendrán la misma transformada.

**Teorema (Teorema de Lerch)**

*$L[f(t)] = L[g(t)]$ si y sólo si $f(t) = g(t)$ para $t > 0$, con la posible excepción de los puntos de dicontinuidad.*

Por tanto si una función $F(s)$ tiene una función inversa continua $f(t)$, entonces $f(t)$ es la única función inversa continua.
Suponiendo una única transformada inversa continua, ahora nos planteamos cómo hallarla realmente.
El método que emplearemos para hallar las transformadas inversas de Laplace consistirá en construir una tabla de transformadas y usarla a la inversa para hallar dichas transformadas inversas.
Por ejemplo habíamos visto que:

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$$

## Propiedades de la Transformada Inversa

Las propiedades de la transformada inversa se demuestran fácilmente a partir de las propiedades y teoremas estudiados para la transformación directa y se pueden resumir en la tabla siguiente:.

| $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ | $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ |
|---|---|
| | |
| $c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$ | $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$ |
| $F(s-a)$ | $e^{at}f(t)$ |
| $sF(s)-f(0)$ | $f'(t)$ |
| $F'(s)$ | $-tf(t)$ |
| $F^{(n)}(s)$ | $(-1)^n t^n f(t)$ |
| $\frac{F(s)}{s}$ | $\int_0^t f(u)du$ |
| $\int_s^\infty F(u)du$ | $\frac{f(t)}{t}$ |
| $F(bs)$ | $\frac{1}{b}f(\frac{t}{b})$ |
| $F(s).G(s)$ | $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ |

# TABLA DE T. DE LAPLACE

A partir de todo lo anterior podemos elaborar una tabla de transformadas, que será la que utilicemos para la resolución de las ecuaciones diferenciales y es la siguiente:

| $\mathbf{F(s)}$ | $\mathbf{f(t)}$ | | $\mathbf{F(s)}$ | $\mathbf{f(t)}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| $1$ | $\delta(t)$ | | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\operatorname{sen} at$ |
| $\frac{1}{s}$ | $1_+(t)$ | | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ | | $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\operatorname{senh} at$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh at$ |
| $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | | $\frac{1}{(s-a)^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ |

## Ejemplo 25

(1) Calcular: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right]$.

**Solución:** Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \operatorname{sen} 2t$ y $\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{-4s}{(s^2+4)^2}$ entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right] &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4s}{(s^2+1)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{4}(-t\operatorname{sen} 2t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

(2) Calcular: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]$.

**Solución:** Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$ y $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$ entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] &= \int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}dt = e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \\ &= e^{-2t}[e^{\tau}]_0^t = e^{-2t}(e^t-1) = e^{-t}-e^{-2t} \end{aligned}$$

## Ejemplo 26

*Hallar la transformada inversa de Laplace de la función:*

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

**Solución:** Llamaremos:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{1}{s-1} \text{ y } G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

por lo que:

$$f(t) = e^t \text{ y } g(t) = \operatorname{sen} t$$

por tanto:

$$x(t) = \int_0^t e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \operatorname{sen} \tau e^{(t-\tau)} d\tau = e^t \int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sen} \tau d\tau$$

resolviendo dicha integral por partes, se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} (\operatorname{sen} t + \cos t)$$

## Ejercicio 23

*A partir de* $L\left[\operatorname{sen}(\sqrt{10}t)\right]$ hallar $L\left[t\operatorname{sen}(\sqrt{10}t)\right]$. *Solución*:
$\mathcal{L}\left[t\operatorname{sen}(\sqrt{10}t)\right] = \frac{2\sqrt{10}s}{(s^2+10)^2}$,para $s > \alpha$.

## Ejercicio 24

*Hallar* $L\left[\int_0^t te^{5t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)\right]$ *Solución*:
$L\left[\int_0^t te^{5t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)\right] = \frac{2\sqrt{3}(s-5)}{((s-5)^2+3)^2}\frac{1}{s}$

## Ejercicio 25

*Aplicando el teorema de convolución hallar* $L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right]$ *Solución*:
$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] = e^{2t}(1 - e^{-t})$

- La aplicación de la transformada de Laplace a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, lo convierte en una **ecuación algebraica** con las transformadas como incógnitas.

### Ejemplo 27

*Resolver el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 1; y'(0) = -2 \end{cases}$$

**Solución:** Aplicando transformadas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y''\right] + \mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[\operatorname{sen} t\right] \\
s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
\left(s^2+1\right) Y(s) &= s - 2 + \frac{1}{s^2+1} \\
Y(s) &= \frac{s-2}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Tomando ahora antitransformadas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$$

Para la primera transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \cos t - 2\,\mathrm{sen}\, t$$

Para la segunda empleando el teorema de convolución obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\, t - t\cos t)$$

La solución del problema será:

$$y(t) = \cos t - 2\,\mathrm{sen}\, t + \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\, t - t\cos t)$$

- La aplicación de la transformada de Laplace a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, lo convierte en un **sistema algebraico** con las transformadas como incógnitas.

## Ejemplo 28

*Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

*con las condiciones*: $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

**Solución:** Tomando transformadas, tenemos:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 6X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - y(0) = 2X(s) + Y(s) \end{cases}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y agrupando queda:

$$\begin{cases} (s-6)X(s) + 3Y(s) = -1 \\ -2X(s) + (s-1)Y(s) = 0 \end{cases}$$

De este sistema algebraico podemos obtener las transformadas $X(s)$ e $Y(s)$. Aplicando Cramer:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{-s+1}{s^2-7s+12}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-6 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{s^2-7s+12} = \frac{-2}{s^2-3s-4}$$

$$s^2-7s+12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s=4 \\ s=3 \end{cases}$$

$$s^2-3s-4 = (s-3)(s-4)$$

De donde:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s+1}{(s-3)(s-4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-4}\right]$$

obteniéndose $A = 2$, $B = -3$. Además:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(s-3)(s-4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-4}\right]$$

obteniéndose $C = 2$, $D = -2$. Con lo que:

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{3t} - 3e^{4t} \\ y(t) = 2e^{3t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

## Ejercicio 26

Resolver mediante la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} (a) & y' - 3y = e^{2t};\ y(0) = 1 \\ (b) & x'' - x = e^{-t};\ x(0) = 0;\ x'(0) = 0 \\ (c) & y'' + a^2 y = f(t);\ y(0) = 1;\ y'(0) = -2 \\ (d) & y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0; y''(0) = -2 \end{array}$$

*Solución:*

*(a)* $y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$.

*(b)* $x(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{5}{4}e^{-t} + te^{-t}$

*(c)* $y(t) = \cos at - \frac{2}{a}\operatorname{sen} at + \frac{1}{a}\int_0^t f(\tau)\operatorname{sen} a(t-\tau)\,d\tau$

*(d)* $y(t) = e^t\left(\frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)$.

## Ejercicio 27

Resolver mediante la transformada de Laplace, los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{c} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{array} \right. \; ; \; x(0) = 1; \; y(0) = 0$$

$$(b)\quad \left\{ \begin{array}{c} 4x' - y' + 3x = \operatorname{sen} t \\ x' + y = \cos t \end{array} \right.$$

*Solución:*

*(a)* $x(t) = 5e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t - 4$; $y(t) = -5e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5$

*(a)* $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$; $y(t) = Ae^{-t} + 3Be^{-3t} + \cos t$