TEMA 4: SERIES DE FOURIER. APLICACIONES

Ampliación de Matemáticas (Grado en Ingeniería en T. I.)

EPI Gijón - UNIOVI

Introducción

En numerosos problemas de ingeniería aparecen funciones periódicas que se necesitan aproximar mediante sumas de las funciones trigonométricas seno y coseno, lo que conduce a las series de Fourier.

Las series de Fourier admiten más posibilidades de aplicación que las series de Taylor, ya que muchas funciones discontinuas se pueden desarrollar en serie de Fourier pero, por supuesto, no tienen representación en serie de Taylor. Recordemos que para que una función $f(x)$ admita serie de Taylor en el punto $x = a$ es condición necesaria que sea indefinidamente derivable en ese punto.

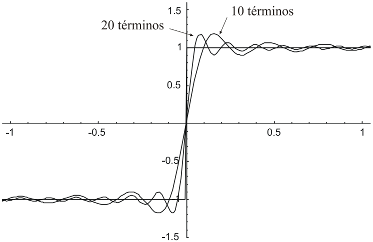


Figura: Serie de Fourier.

CONCEPTOS PREVIOS

- Comencemos por repasar algunos conceptos generales sobre funciones que utilizaremos a lo largo de este tema.

Definición (Función periódica)

Una función $f(x)$ es periódica si está definida para todo x real y existe algún número positivo T (llamado periodo de $f(x)$) tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+T) = f(x)$$

La gráfica de una función periódica se obtiene mediante la repetición periódica de la gráfica de dicha función en cualquier intervalo de longitud T.

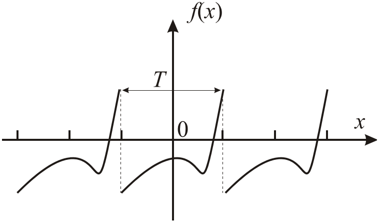


Figura: Función periódica de periodo T.

Se puede comprobar fácilmente que *si* $f(x)$ *tiene periodo* T, *entonces* $f(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$ *admite por periodo* T. Esto se puede comprobar en la siguiente gráfica.

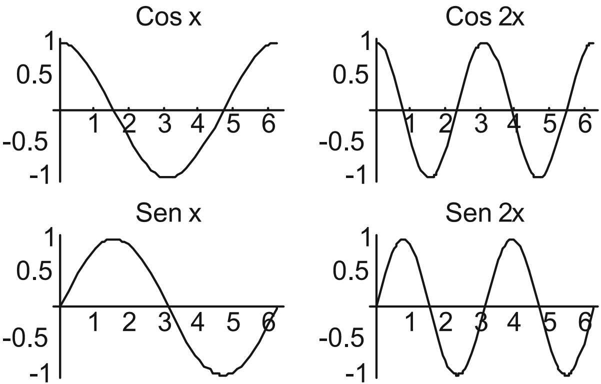


Figura: Funciones cosenoidales y senoidales con periodo común 2π.

En esta sección vamos a estudiar la representación de una función real por medio de una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

Si dicha serie converge, su suma será una función periódica de periodo 2π, por lo que en un principio, sólo tiene sentido buscar representaciones de este tipo para funciones periódicas de periodo 2π. Más adelante veremos que se puede extender esta representación a funciones que son periódicas de periodo distinto a 2π, o incluso a funciones que no son periódicas.

- Recordemos también las siguientes definiciones.

Definición (Función par e impar)

Una función f es par si $f(-x) = f(x)$, e impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x del dominio de definición.

Se puede comprobar fácilmente que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Como $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ el coseno y el seno son funciones par e impar, respectivamente.

La proposición que damos a continuación menciona algunas propiedades de las funciones pares e impares, y su demostración es inmediata.

Propiedades de las funciones pares e impares

a) El producto de dos funciones pares es una función par.
b) El producto de dos funciones impares es una función par.
c) El producto de una función impar y una función par es una función impar.
d) La suma o diferencia de dos funciones pares es una función par.
e) La suma o diferencia de dos funciones impares es una función impar.
f) Si f es par

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

g) Si f es impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Vamos a ver algunos resultados previos que utilizaremos más adelante. Aplicando fórmulas conocidas de trigonometría tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx$$

Por lo que, es inmediato ver que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \pi & \text{si} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \pi & \text{si} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx dx = 0, \ \forall m, n$$

DEFINICIÓN DE SERIE DE FOURIER

Vamos a suponer que una serie trigonométrica converge, por lo que su suma será una cierta función $f(x)$. Si suponemos que $f(x)$ es continua, se tiene[1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

Si la serie se puede integrar término a término (por ejemplo, si la convergencia es uniforme), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nxdx\right) \\ &= a_0 \pi \end{aligned}$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

[1] En los puntos de discontinuidad veremos más adelante que no se cumple la igualdad.

Por otra parte, para $k \geq 1$, multiplicando (1) por $\cos kx$, e integrando, teniendo en cuenta las fórmulas de ortogonalidad, se obtiene

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx dx \right) \\
&= a_k \pi
\end{aligned}
$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

DEFINICIÓN DE SERIE DE FOURIER

De igual modo, para $k \geq 1$, multiplicando (1) por $\operatorname{sen} kx$, e integrando, teniendo en cuenta las fórmulas de ortogonalidad, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx dx \right) \\ &= b_k \pi \end{aligned}$$

de donde

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx$$

Los cálculos anteriores dan lugar al siguiente concepto:

DEFINICIÓN DE SERIE DE FOURIER

Definición (Coeficientes de Fourier. Serie de Fourier)

Sea $f(x)$ una función de periódo 2π, integrable sobre $[-\pi, \pi]$. Se definen los coeficientes de Fourier de $f(x)$ por

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx)$$

se dice que es la serie de Fourier asociada a $f(x)$ o generada por $f(x)$ y se denota[2]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx)$$

[2] El sentido de esta notación se comprenderá mejor cuando veamos la convergencia

Ejemplo 1

Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)$, de periodo 2π, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{cuando} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \textit{cuando} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: Suelen aparecer funciones de este tipo en diversos problemas mecánicos y eléctricos. De la definición se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = -\pi + \pi = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} \cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[- \left.\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] = 0 \end{aligned}$$

SERIES DE FOURIER. EJEMPLO

De manera semejante, se obtiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{sen}\, nx dx + \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}\, nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] \end{aligned}$$

Como $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\cos 0 = 1$, se tiene

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\right] = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

Como los a_n y a_0 son cero, la serie de Fourier correspondiente es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) =$$

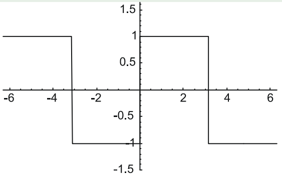
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} nx)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \ ... \right)$$

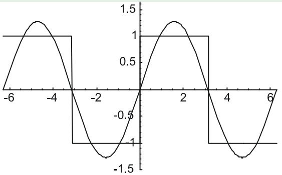
Las sumas parciales son

$$S_1 = \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x, \quad S_2 = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right), \ ...$$

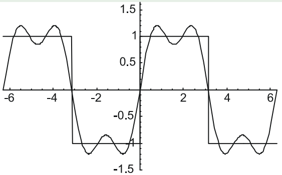
y sus gráficas, en la figuras b,c y d, parecen indicar que la serie es convergente y que tiene por suma $f(x)$, la función dada.



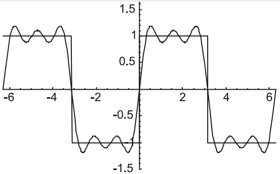
(a) La función $f(x)$.



(b) La Suma parcial $S_1(x)$.



(c) La Suma parcial $S_2(x)$.



(d) La Suma parcial $S_3(x)$.

Figura: Aproximaciones de las sumas parciales a la función $f(x)$.

Ejercicio 1

Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)$, de periodo 2π, definida por: $f(x) = \operatorname{sen} x$ si $x \in [0, \pi]$; $f(x) = 0$ si $x \in (\pi, 2\pi)$.*Solución:* $f(x) \sim S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos 2nx$.

Ejercicio 2

Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)$, de periodo 2π, definida por: $f(x) = 0$ si $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x$ si $0 < x \leq \pi$.*Solución:* $f(x) \sim$

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \right).$$

Ejercicio 3

Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)$, de periodo 2π, definida por: $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$; $f(x) = \pi - x$ si $0 \leq x < \pi$.*Solución:*

$$f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right).$$

CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

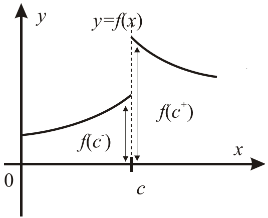
Antes de dar las condiciones de convergencia veamos una definición:

Definición (Función monótona a trozos)

Una función $f(x)$ es monótona a trozos en el intervalo $[a, b]$ si dicho intervalo se puede dividir en un número finito de subintervalos (a, x_1), (x_1, x_2), ... , (x_{n-1}, b) de tal modo que la función sea o bien monótona creciente, o bien monótona decreciente en cada uno de estos intervalos.

Se ve fácilmente que si la función $f(x)$ es monótona a trozos y está acotada en el intervalo $[a, b]$, entonces únicamente puede tener puntos de discontinuidad de primera especie.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c^-), \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+)$$



Teorema (Condiciones suficientes de convergencia)

Sea $f(x)$ una función periódica, de periodo 2π, monótona a trozos y acotada en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Entonces la serie de Fourier, correspondiente a esta función, es convergente en todos los puntos y además la suma de dicha serie $S(x)$ es igual al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función. Si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función, la suma de la serie es

$$S(x)\big|_{x=c} = \frac{f(c^-) + f(c^+)}{2}$$

siendo $f(c^-) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$, y $f(c^+) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

La mayor parte de las funciones con las que nos encontramos en los problemas de física e ingeniería verifican las condiciones de este teorema y no tendremos dificultades en relación a la convergencia de las series de Fourier. Cuando una función verifique las condiciones del teorema diremos entonces que *admite desarrollo en serie de Fourier o que es representable en serie de Fourier*.

- **Traslación del intervalo**

Dada una función $\psi(x)$, periódica de periodo 2π, se verifica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)dx$$

cualquiera que sea λ.

Lo que nos dice esta propiedad es que la integral de una función periódica $\psi(x)$ en un intervalo cualquiera de longitud igual al periodo tiene siempre el mismo valor. La podemos ilustrar gráficamente de la siguiente forma: las áreas sombreadas en la figura son iguales.

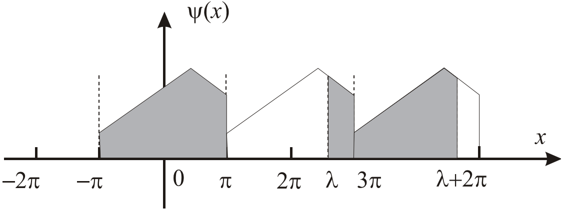


Figura: Traslación del intervalo.

De esta propiedad se deduce fácilmente que, en las fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier, podemos sustituir el intervalo de integración $(-\pi, \pi)$ por otro $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, siendo λ un número real cualquiera. Por tanto podemos poner

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

siendo λ el valor real que más nos convenga.

- Para deducir estas fórmulas hemos tenido en cuenta que si la función $f(x)$ es periódica de periodo 2π, las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)\,\mathrm{sen}\,nx$ son también funciones periódicas de periodo 2π.

- **Series senoidal y cosenoidal**

Supongamos que $f(x)$ es una función par, desarrollable en serie de Fourier. Entonces aplicando las propiedades de las funciones pares e impares, los coeficientes de Fourier de $f(x)$ serán

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nxdx = 0 \end{aligned}$$

con lo cual, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ se reduce a una serie de cosenos de la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

- Si la función $f(x)$ es impar, de nuevo usando el mismo razonamiento, se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx \end{aligned}$$

y la serie de Fourier asociada se reducirá a una serie de senos de la forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Ejemplo 2

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π, definida del modo siguiente

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x \leq \pi$$

Solución:

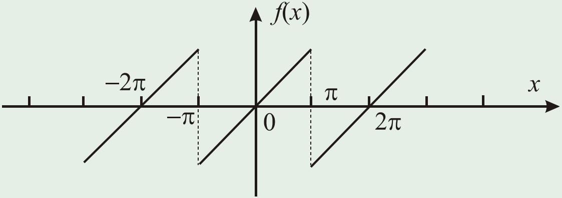


Figura: Función impar.

Se trata de una función monótona a trozos y acotada en $(-\pi, \pi)$. Sabemos que admite desarrollo en serie de Fourier. Además como es impar se tiene

Integrando por partes, obtenemos

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Por tanto, la serie de Fourier correspondiente es

$$\begin{aligned} f(x) &\sim 2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ \dots \ (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ \dots\right] = \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \end{aligned}$$

La función $f(x)$ es igual a la suma de la serie de Fourier en todos los puntos, excepto en los puntos de discontinuidad. En éstos, la suma de la serie es igual a la semisuma de los límites laterales de la función por la derecha y por la izquierda, que, en este caso, es cero.

Ejercicio 4

Formar la serie de Fourier de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. *Solución:* $S(x) = \operatorname{sen} x$.

Ejercicio 5

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por: $f(x) = -x$ si $-\pi \leq x \leq 0$; $f(x) = x$ si $0 < x \leq \pi$.
Solución: $f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$.

Ejercicio 6

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por: $f(x) = x^2, \ -\pi \leq x \leq \pi$. *Solución:*
$f(x) \sim S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$..

Funciones de periodo arbitrario

Sea $f(x)$ una función de periodo $2l$. Efectuemos el cambio de variable:

$$x = \frac{l}{\pi} t$$

Ahora, la función $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ es una función periódica, de periodo 2π en la variable t. En efecto

$$f(x + 2l) = f(x)$$

$$f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi} t + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$$

Ahora desarrollamos esta función en serie de Fourier en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \qquad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) dt, \;\; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \cos nt dt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \operatorname{sen} nt$$

Ahora deshacemos el cambio de variable y volvemos a la variable original x

$$x = \frac{l}{\pi} t \ , \qquad t = x \frac{\pi}{l} \ , \qquad dt = \frac{\pi}{l} dx$$

Con lo que los coeficientes de Fourier quedarán como:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n \tfrac{\pi}{l} x dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} n \tfrac{\pi}{l} x dx \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Y deshacieno el cambio la fórmula (1) queda de la siguiente forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \right) \tag{3}$$

Por lo que para una función de periodo $2l$, podemos dar la siguiente definición:

Definición (Coeficientes de Fourier. Serie de Fourier)

Sea $f(x)$ una función de periodo $2l$, integrable sobre $[-l, l]$. Se definen los coeficientes de Fourier de $f(x)$ por

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}xdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\, n\frac{\pi}{l}xdx, \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

La serie de Fourier asociada a $f(x)$ o generada por $f(x)$ es:[3]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\right)$$

[3] El sentido de esta notación se comprenderá mejor cuando veamos la convergencia de las series de Fourier.

Ejemplo 3

Hallar la serie de Fourier de la función de periodo $T = 2l = 4$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{cuando} \quad -2 < x < -1 \\ k & \textit{cuando} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \textit{cuando} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

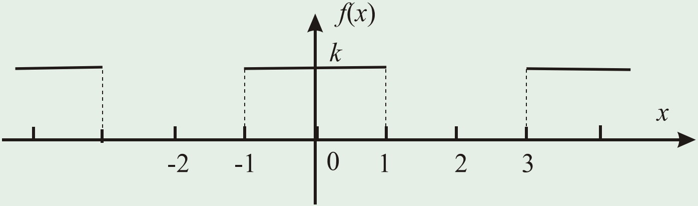


Figura: La función es par de periodo 4.

Solución:

Como la función es par de periodo 4, se obtiene

$$a_0 = 2\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = 2\frac{1}{2}\int_0^1 kdx = k$$

$$a_n = 2\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \int_0^1 k\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) \sim \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

por tanto, $a_n = 0$ cuando n es par, $a_n = 2k/n\pi$ cuando $n = 1, 5, 9, ...$ y $a_n = -2k/n\pi$ cuando $n = 3, 7, 11, ...$ Además se tiene que $b_n = 0$ para $n = 1, 2, ...$ De aquí que el resultado es

$$f(x) \sim \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - \;...\right)$$

Ejercicio 7

Hallar la serie de Fourier, de la función de periodo 1, definida por:
$f(x) = x$; $x \in [1, 2]$.*Solución:* $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi} \operatorname{sen} 2n\pi x$.

Ejercicio 8

a)Hallar laserie de Fourier de la función periódica de periodo 1, definida por: $f(x) = x^2$; $1 \leq x < 2$. b)Hallar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Solución:*
a)$f(x) \sim \frac{7}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(2n\pi x) - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x)$. b) $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 9

a) Hallar la serie de Fourier, de la función de periodo 6, definida por:
$f(x) = 0$, si $x \in [-3, 0]$; $f(x) = x - 3$, si $x \in (0, 3]$. b) Calcular $S(36)$.
c) ¿Qué serie numérica se obtiene para $x = 3$?. ¿Cúal es su suma?
Solución: a) $f(x) \sim \frac{-3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$. b)
$S = \frac{-3}{2}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Funciones no periódicas.

Supongamos que tenemos definida en un cierto intervalo $[a, b]$ una función $f(x)$ acotada y monótona a trozos. Vamos a ver que aunque $f(x)$ no es periódica, también la podemos representar por una serie de Fourier.

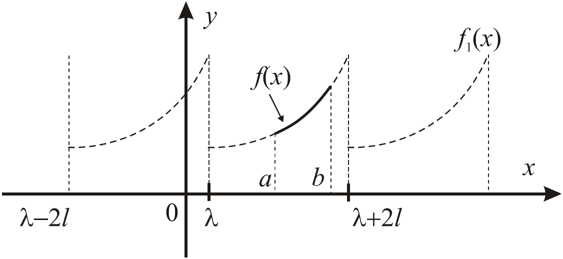


Figura: Desarrollo de una función no periódica.

Para ello, definiremos una *función auxiliar* arbitraria, periódica, monótona a trozos y acotada, $f_1(x)$, de periodo $2l \geq |b-a|$, de tal forma que coincida con la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. De alguna forma hemos prolongado la definición de la función $f(x)$, consiguiendo una función periódica.

Desarrollos de medio rango

En muchos problemas de ingeniería se necesita hallar el desarrollo en serie de Fourier para funciones $f(x)$ que únicamente están definidas en el intervalo $0 \leq x \leq l$ y sobre este intervalo se desea representar $f(x)$ mediante una serie de Fourier. Esto lo podemos hacer de distintas formas según construyamos la función auxiliar $f_1(x)$. En este sentido, es fundamental cómo definamos la función en el intervalo $-l < x < 0$. Por brevedad, sólo estudiaremos los tres casos más importantes.

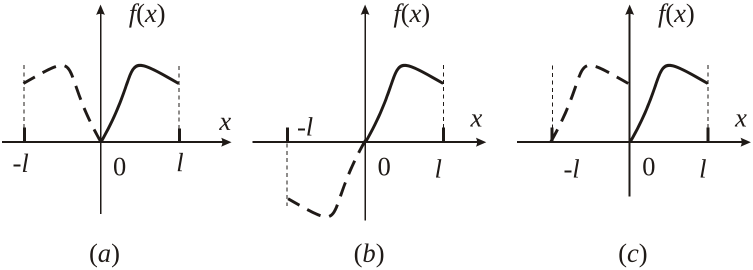


Figura: (a) Extensión par. (b) Extensión impar. (c) Repetición.

a) Será una *serie cosenoidal* de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \qquad (0 \leq x \leq l)$$

y los coeficientes tendrán la forma

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \qquad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \qquad n = 1, 2, \ \ldots$$

b) Será una *serie senoidal* de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \qquad (0 \leq x \leq l)$$

y los coeficientes tendrán la forma

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x dx, \qquad n = 1, 2, \ \ldots$$

c) No será ni *serie senoidal*, ni *cosenoidal* y ya vimos cómo hallaríamos su desarrollo.

Ejemplo 4

Desarrollar $f(x) = x^2$, *definida en* $0 \leq x \leq l$.

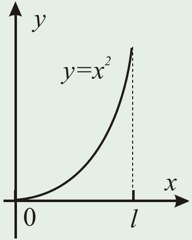


Figura: Función definida en $0 \leq x \leq l$.

en una serie cosenoidal.

Solución: En primer lugar hallamos el coeficiente a_0

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\,dx = \frac{2}{3}l^2$$

Para calcular a_n integramos por partes

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\left[\left.\frac{lx^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x}{n\pi}\right|_0^l - \frac{2l}{n\pi}\int_0^l x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x dx\right] \\ &= -\frac{4}{n\pi}\left[\left.\frac{-lx\cos\frac{n\pi}{l}x}{n\pi}\right|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x dx\right] = \frac{4l^2(-1)^n}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la serie de Fourier obtenemos

$$f(x) \sim \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

Ejercicio 10

Hallar el desarrollo cosenoidal de la función: $f(x) = \dfrac{2k}{l}x$ si $0 \leq x < \frac{l}{2}$;
$f(x) = \dfrac{2k}{l}(l - x)$ si $\frac{l}{2} < x \leq l$. Solución:
$f(x) \sim \frac{k}{2} - \frac{4k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{2\pi}{l}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{6\pi}{l}x + \ ...\right).$

Ejercicio 11

Hallar el desarrollo senoidal de la función: $f(x) = 1$, si $x \in [0, 1]$;
$f(x) = 2 - x$, si $x \in (1, 2]$, Solución:
$f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x.$

Ejercicio 12

Hallar los desarrollos de medio rango de: $f(x) = x - x^2; \quad 0 < x < 1.$
Solución: a)
$f(x) \sim \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{4} + \frac{\cos 4\pi x}{16} + \frac{\cos 6\pi x}{36} + \frac{\cos 8\pi x}{64} + \ ...\right)$. b)
$f(x) \sim \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi x}{27} + \frac{\operatorname{sen} 5\pi x}{125} + \frac{\operatorname{sen} 7\pi x}{343} + \ ...\right)$

Introducción

En primer lugar analizamos la forma autoadjunta de una ecuación lineal homogénea de segundo orden. Dada la ecuación

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$$

donde las $a_i(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, multiplicando la ecuación por $\frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$, obtenemos

$$e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y'\right] + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0$$

Si llamamos $p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$ y $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$, la ecuación queda

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + q(x)\,y = 0$$

Esta es la *forma autoadjunta* de la ecuación diferencial lineal de 2^o orden.

Definición (Problema homogéneo de contorno de Sturm-Liouville)

El problema homogéneo de contorno de Sturm-Liouville consiste en hallar la solución de la ecuación lineal homogénea de segundo orden, expresada en forma autoadjunta

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\, y'\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0,\ \ a \leq x \leq b$$

en donde p *es derivable con continuidad en* $[a, b]$, q *y* r *son continuas en* $[a, b]$, λ *es un parámetro real y* $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$,*y que verifique las dos condiciones de contorno de la forma*

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

en donde se cumple que $|a_1| + |a_2| > 0$ *y* $|b_1| + |b_2| > 0$.

A lo largo del tema supondremos que se cumplen todas las hipótesis del problema.

Definición (Valores propios)

Se llaman valores propios, valores característicos, o autovalores, a los valo-res reales de λ para los que el problema de contorno de Sturm-Liouville posee alguna solución distinta de la trivial en $[a, b]$.

Definición (Funciones propias)

Si λ_1 es un valor propio del problema de Sturm-Liouville, por lo cual existirá al menos una solución distinta de la trivial de

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + \left[q(x) + \lambda_1 r(x)\right] y = 0, \; a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

entonces cualquier solución no trivial de este problema decimos que es una función propia, función característica, o autofunción, asociada al valor propio λ_1.

Ejemplo 5

Hallar los valores propios y las funciones propias asociadas al problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solución: Denotamos por D al operador derivada, por lo que podemos expresar la ecuación diferencial en la forma

$$\left(D^2 + \lambda\right) y = 0$$

con lo que las soluciones dependerán de las raíces del polinomio característico $D^2 + \lambda$ y tendremos que estudiar los tres casos siguientes.

1) Caso $\lambda = 0$.En este caso la solución general de la ecuación será

$$y = c_1 + c_2 x$$

por lo que, imponiendo las condiciones de contorno, obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} y\left(0\right) = 0 \\ y\left(\pi\right) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \pi = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, existe únicamente la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ no es un valor propio.

2) Caso $\lambda < 0$.En este segundo caso, hacemos $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, por lo que las raíces de $D^2 + \lambda$ son $\pm\alpha$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Si ahora imponemos las condiciones de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = 0 \end{array} \right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones resultante es

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi} & e^{-\alpha\pi} \end{array} \right| = e^{-\alpha\pi} - e^{\alpha\pi}$$

por lo que, el determinante es distinto de cero (solamente sería cero si $-\alpha\pi = \alpha\pi \Longrightarrow \alpha = 0$); por tanto, existe únicamente la solución trivial, por lo que no hay valores propios para $\lambda < 0$.

3) Caso $\lambda > 0$.En este tercer caso, podemos hacer $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, con lo que las raíces de $D^2 + \lambda$ son $\pm\alpha i$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$$

Si imponemos la condiciones de contorno, nos queda que

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen} \alpha\pi = 0 \end{array} \right.$$

Ahora, para que existan soluciones no triviales, debe cumplirse que $\operatorname{sen} \alpha\pi = 0$, por lo que $\alpha = n \in \mathbb{N}$ y los valores propios son $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2,$ ...Suponiendo que $\lambda_n = n^2$, vemos que son soluciones todas las de la forma $y = c_1 \cos nx + c_2 \operatorname{sen} nx$, con $c_1 = 0$, por tanto las funciones propias asociadas a

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, ...$$

son

$$y_n = k_n \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, ...$$

Problema no homogéneo de contorno

A continuación, vamos a estudiar el problema de contorno en el que la ecuación diferencial es no homogénea, por lo que ahora tendremos

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p\left(x\right)y'\right]+\left[q\left(x\right)+\lambda r\left(x\right)\right]y=f\left(x\right), \; a\leq x\leq b \\ a_1 y\left(a\right)+a_2 y'\left(a\right)=0 \\ b_1 y\left(b\right)+b_2 y'\left(b\right)=0 \end{cases}$$

en donde suponemos que las hipótesis son las mismas que las del problema homogéneo y que la función f es continua en el intervalo $[a, b]$.

Comencemos estudiando la existencia de solución para tal problema.

Teorema

Si λ no es valor propio del problema de contorno homogéneo, entonces el problema no homogéneo tiene solución única.

Resolución del problema no homógeneo

Vamos a ver ahora un método, basado en las series de Fourier, para calcular la solución del problema no homogéneo.

Denotamos L el operador lineal

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,y'\right] + q(x)\,y$$

con lo que el problema a resolver es de la forma

$$\begin{cases} L(y) + \lambda r(x)\,y = f(x)\,, \; a \leq x \leq b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Suponemos conocidos los valores propios λ_n del problema homogéneo asociado, así como las correspondientes funciones propias ϕ_n, y vamos a intentar el cálculo de la solución del problema no homogéneo por medio de

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x)$$

hallando las constantes A_n de forma que la serie anterior sea solución del problema planteado.

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término, al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n L\left(\phi_n(x)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n r(x)\, \phi_n(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Y como $\phi_n(x)$ es función propia correspondiente al valor propio λ_n del problema homogéneo, se tiene

$$L\left(\phi_n(x)\right) + \lambda_n r(x)\, \phi_n(x) = 0 \Longrightarrow L\left(\phi_n(x)\right) = -\lambda_n r(x)\, \phi_n(x)$$

Por ello

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n r(x)\, \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n r(x)\, \phi_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)\, A_n \phi_n(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \quad a \leq x \leq b$$

Y como $\frac{f(x)}{r(x)}$ es una función bien definida $(r(x) > 0)$, podremos calcular (en ciertos casos) un desarrollo de la forma

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b$$

Con lo que, llegaríamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) A_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$A_n = \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n}$$

y obtenemos, suponiendo $\lambda \neq \lambda_n$, los coeficientes A_n que buscábamos y, por tanto, la que llamaremos *solución formal*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} \phi_n(x)$$

Ejemplo 6

Hallar una solución formal del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 1, \ 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

(Suponemos que λ no es valor propio del problema homogéneo asociado). **Solución:** Anteriormente, resolvimos el problema homogéneo asociado y obtuvimos como valores propios, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ y, como funciones propias asociadas, $y_n = k_n \operatorname{sen} nx$. Así pues, debemos hallar la solución del problema no homogéneo por medio de

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial (suponiendo que la serie se puede derivar término a término), tenemos en $0 \leq x \leq \pi$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n \operatorname{sen} nx + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx = 1$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\lambda - n^2\right) \operatorname{sen} nx$$

Por tanto, debemos desarrollar $f(x) = 1$, $0 \leq x \leq \pi$ en serie de senos. Para lo cual, construimos $F(x)$ como la extensión impar de $f(x)$ a $[-\pi, \pi]$, es decir

$$F(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Si suponemos $F(x)$ extendida periódicamente a $\mathbb{R}$, es evidente que $F(x)$ es monótona a trozos y acotada en $[-\pi, \pi]$ (y además continua), con lo que se cumple que

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{con } b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx \end{aligned}$$

Si particularizamos a $[0, \pi]$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Por tanto, los coeficientes B_n que necesitamos hallar tienen que cumplir

$$B_n\left(\lambda - n^2\right) = b_n \Longrightarrow B_n = \frac{b_n}{\lambda - n^2}$$

Resolviendo las integrales que intervienen en b_n, obtenemos

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)|_0^{\pi}}{n} = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n} = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos(n\pi))}{n}$$

Por lo que:

$$\begin{cases} \text{Si n es par} & b_n = 0 \\ \text{Si n es impar} & b_n = \frac{4}{\pi n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_{2n} = 0 \\ B_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)[\lambda-(2n-1)]} \end{cases}$$

Por lo que la solución buscada es

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\,(2n-1)\,[\lambda-(2n-1)]} \operatorname{sen}(2n-1)\,x$$

Ejercicio 13

Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno: $y'' + \lambda y = x - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $y'(0) = y'(1) = 0$. *Solución:* $y(x) = \frac{1}{6\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - 4n^2\pi^2)n^2\pi^2} \cos(2n\pi x)$.

Ejercicio 14

Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno: $y'' + \lambda y = x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$ *Solución:* $y(x) = \frac{\pi}{2\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi\left(\lambda - (2n-1)^2\right)} \cos\left((2n-1)x\right)$.

Ejercicio 15

Hallar una solución formal del problema no homogéneo de contorno: $y'' + \lambda y = \pi x - x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$ *Solución:* $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi\left(\lambda - (2n-1)^2\right)} \operatorname{sen}\left((2n-1)x\right)$.

Introducción

Una ecuación diferencial en derivadas parciales es una ecuación que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes

Muchos fenómenos físicos están descritos mediante ecuaciones diferenciales de este tipo. por ejemplo la ecuación:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\delta\left(x,,y,z\right)$$

describe la propagación de los rayos de luz en un determinado medio de índice de refracción $\delta\left(x,,y,z\right)$ que depende de cada punto.

La ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

expresa la variación de temperatura en una barra delgada y en la dirección de la longitud de la misma. (Ecuación del calor)

Definición (Orden de ecuación)

Se denomina orden de una ecuación diferencial en derivadas parciales, al mayor de los órdenes que tienen las derivadas que en ella intervienen.

Definición (Ecuación lineal)

Una ecuación es lineal si las funciones que intervienen, así como sus derivadas parciales, están sólo en primer grado y además no hay productos de las funciones con sus derivadas, ni entre ellas.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = x + y \qquad \text{es una e.d.p. de primer orden y lineal}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = x \qquad \text{es una e.d.p. de segundo orden y lineal}$$

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = x \qquad \text{es una e.d.p. de segundo orden y no lineal}$$

Definición (Solución)

Se denomina solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales a toda relación entre las variables, que no conteniendo derivadas, satisface la ecuación.

$$u = xy + \tfrac{x^2}{2} + \varphi(y) \text{ es solución de } \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = x + y$$

$$u = \tfrac{x^2}{2}y + f(x) + \varphi(y) \text{ es solución de } \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = x$$

Estos ejemplos muestran que la solución general de una e.d.p. depende de funciones arbitrarias, una si es de primer orden, dos si de segundo, y como puede demostrarse, de n funciones arbitrarias, si es de orden n. Esta es una característica diferente de lo que ocurre con las ecuaciones ordinarias, en las que la solución general depende de n constantes.

La expresión general de la ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden, con una función $u(x, y)$ es de la forma:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u = g$$

Estas ecuaciones se clasifican de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 1.\mathit{Hiperbólicas} & si & b^2 - 4ac > 0 \\ 2.\mathit{Parabólicas} & si & b^2 - 4ac = 0 \\ 3.\mathit{Elípticas} & si & b^2 - 4ac < 0 \end{array}$$

La Ecuación de Euler

Un tipo particular de EDPs lineales de segundo orden con coeficientes constantes es la Ecuación de Euler, de especial interés, porque aparece en muchas aplicaciones y además es de muy fácil resolucion. Son de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se demuestra muy fácilmente que la solución general de la Ecuación de Euler se cálcula a partir de las raices de la ecuación carácteristica: $am^2 + bm + c = 0$.

1. Si $a \neq 0$ y $m_1 \neq m_2$ son las raices de la ecuación característica, entonces la solución general es:

$$u(x, y) = f(y + m_1 x) + g(y + m_2 x)$$

2. Si $a \neq 0$ y $m_1 = m_2 = m$ son las raices de la ecuación característica, entonces la solución general es:

$$u(x, y) = f(y + mx) + xg(y + mx)$$

3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ y m es la raiz de la ecuación característica, entonces la solución general es:

$$u(x, y) = f(y + mx) + g(x)$$

4. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces la solución general es:

$$u(x, y) = f(x) + yg(x)$$

Ejemplo 7

Dada la ecuación diferencial:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Clasificarla y *hallar su solución general.*

Solución:
En este caso $a = 2$, $b = -4$, y $c = 2$, como $b^2 - 4ac = 0$, es de tipo parábolico. La ecuación característica:

$$2m^2 - 4m + 2 = 0$$

tiene la raiz doble $m = 1$, por lo que la solución general es:

$$u(x,y) = f(y+x) + xg(y+x)$$

Ejercicio 16

Hallar la solución general de la ecuación diferencial:
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ *Solución:*
$u(x,y) = f(y+6x) + g(y+x)$

Ejercicio 17

Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$

Solución: $u(x,y) = yf(x) + g(x)$

Ejercicio 18

a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) = 0$. b) Hallar la solución particular que verifica las condiciones: $u(x,0) = -x^2$, $u(0,t) = t$ *Solución: a)* $u(x,t) = f(t) + g(x)$ b) $u(x,t) = t - x^2$

INTRODUCCIÓN

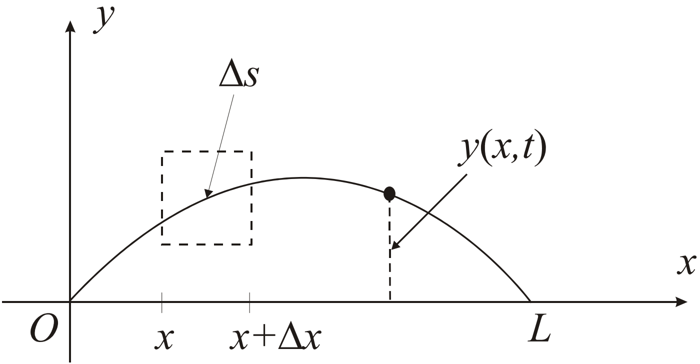
- Cuando planteamos el problema de hallar *una* solución de una **ecuación en derivadas parciales** de segundo orden, que, además de verificar la ecuación, satisfaga ciertas condiciones suplementarias, no suele ser un método eficaz el calcular la solución general de la ecuación y después imponer las condiciones suplementarias.

- En primer lugar, porque puede ser imposible hallar la solución general de la ecuación y, en segundo lugar, porque aún en el caso de que se pueda hallar dicha solución, el determinar las funciones arbitrarias que aparecen en la solución general suele ser costoso y, a menudo, imposible.

- Para este tipo de problemas, el método más utilizado es el **método de separación de variables** que vamos a estudiar a continuación.

- Vamos a hacer una introducción a este método a través de problemas físicos, como es **el problema de la cuerda vibrante**, que es el primero de los que vamos a estudiar.

- En el plano OXY se sitúa una cuerda elástica tensa con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(L,0)$. Suponemos que cada punto de la cuerda, de abscisa x con $0 < x < L$, se desplaza verticalmente al eje OX a una altura $f(x)$ y que, desde esa posición, en el instante $t = 0$, se abandona la cuerda, con una velocidad inicial en cada punto x, del intervalo $0 < x < L$, dada por una función conocida $g(x)$.



- Es evidente que, a partir de ese instante $t = 0$, la cuerda inicia un movimiento vibratorio y que si denotamos por y el desplazamiento, en la dirección OY, de cada punto de la cuerda, entonces y será una función que dependerá de x (es decir, del punto de la cuerda) y de t (el instante de tiempo en el que estemos). Pues bien, trataremos de determinar dicho desplazamiento $y\left(x, t\right)$.

- Se demuestra que $y\left(x, t\right)$ verifica la llamada **ecuación de ondas unidimensional**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Supongamos que se verifican además las siguientes condiciones suplementarias:

- En primer lugar, las *condiciones iniciales:*

$$y\left(x,0\right)=f\left(x\right),\quad 0<x<L$$

que indica la posición de la cuerda en el instante $t=0$.

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left(x,0\right)=g\left(x\right),\quad 0<x<L$$

que indica la velocidad inicial de cada punto de la cuerda.

- En segundo lugar, condiciones relativas a los extremos de la cuerda, también denominadas *condiciones de contorno:*

$$y\left(0,t\right)=y\left(L,t\right)=0, t\geq 0$$

que indican que la cuerda está fija en los extremos.

Así pues, el problema a resolver está formado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \geq 0,\ 0 < x < L \\ y\left(0, t\right) = y\left(L, t\right) = 0 & t \geq 0 \\ y\left(x, 0\right) = f\left(x\right); \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}\left(x, 0\right) = g\left(x\right) & 0 < x < L \end{cases}$$

Vamos a ver cómo se resuelve dicho problema por el **método de separación de variables**.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Para resolver este problema por el método de separación de variables, se empieza por suponer que la ecuación tiene una solución de la forma

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

donde X es una función que depende únicamente de x y T es una función que depende únicamente de t. Por tanto

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x)\,T''(t)\,; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t)$$

Imponiendo ahora que se verifique la ecuación, resulta

$$XT'' = c^2 X'' T$$

A continuación separamos las variables, obteniendo

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X}$$

Las funciones del primer miembro dependen únicamente de t, mientras que las del segundo miembro dependen únicamente de x.

Hemos obtenido una expresión en la cual, el primer miembro depende exclusivamente de t y el segundo miembro depende exclusivamente de x.

Luego para que se cumpla la igualdad, la única posibilidad es que ambos miembros sean igual a un parámetro λ, independiente tanto de t como de x.

Llegamos así a **dos ecuaciones diferenciales ordinarias** que deben satisfacer las funciones X y T :

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} T'' - \lambda T = 0 \\ X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0 \end{cases}$$

Ahora consideremos las **condiciones de frontera o de contorno.**
Como $y(x,t) = X(x)\,T(t)$, la condición de contorno

$$y(0,t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

se transforma en

$$X(0)\,T(t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

de lo que deducimos que $X(0) = 0$, pues si fuera $T(t) = 0,\ \forall t \geq 0$, al sustituir en $y(x,t)$ llegaríamos a la solución trivial $y(x,t) \equiv 0$, que podemos despreciar, pues estamos suponiendo que, efectivamente, la cuerda se mueve.
De la misma forma, la condición de contorno

$$y(L,t) = 0,\ \forall t \geq 0$$

se transforma en $X(L) = 0$, con lo que llegamos a que X ha de satisfacer el siguiente **problema de Sturm-Liouville:**

$$\begin{cases} X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Este **problema de Sturm-Liouville l**o resolvemos de la forma siguiente.

Para calcular las funciones propias estudiaremos los distintos casos para los posibles valores de λ.

1) Caso $\lambda = 0$.
La solución general de la ecuación $X'' = 0$ es

$$X = C_1 + C_2 x$$

y, al imponer las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$, obtenemos

$$C_1 = C_2 = 0$$

por lo que en este caso sólo existe la solución trivial.

2) Caso $\lambda > 0$. Podemos suponer $\lambda = \alpha^2$, con $\alpha > 0$.
En este caso la ecuación diferencial

$$X'' - \frac{\alpha^2}{c^2} X = 0$$

tiene por raíces de la ecuación característica

$$\pm \frac{\alpha}{c}$$

La solución general de esta ecuación es

$$X = C_1 e^{\frac{\alpha}{c} x} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{c} x}$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$X(0) = X(L) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{\alpha}{c} L} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{c} L} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, no existe solución distinta de la trivial para $\lambda > 0$.

3) Caso $\lambda < 0$. Podemos suponer $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha > 0$.
En este caso la ecuación diferencial

$$X'' + \frac{\alpha^2}{c^2} X = 0$$

tiene por raíces de la ecuación característica

$$\pm \frac{\alpha}{c} i$$

La solución general de esta ecuación es

$$X = C_1 \cos \frac{\alpha}{c} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} x$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$X(0) = X(L) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} L = 0 \end{cases}$$

Para obtener soluciones no triviales, exigimos que

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{c} L = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{c} L = n\pi$$

Con lo que vemos que los únicos valores de α que nos interesan son

$$\alpha_n = \frac{n\pi c}{L}, \;\; n = 1, 2, ...$$

- Por tanto, los llamados **valores propios** del problema de contorno de Sturm-Lioiuville son:

$$\lambda_n = -\alpha_n^2 = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}$$

- Y las llamadas **funciones propias** del problema de contorno de Sturm-Lioiuville son:

$$X_n = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Volvamos ahora a la ecuación diferencial que tiene que verificar T

$$T'' - \lambda T = 0$$

y vamos a resolverla, pero solamente para los valores λ_n que nos interesan, con lo que obtenemos la ecuación

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} T = 0$$

cuyas soluciones son

$$T_n = A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t$$

De esta forma, si sustituimos en

$$y\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)$$

obtenemos una sucesión de funciones

$$y_n=C_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi c}{L}t\right),\ n=1,2,...$$

o bien, agrupando las constantes

$$y_n=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi c}{L}t\right),\ n=1,2,...$$

- De momento, hemos hallado una sucesión de funciones y_n, $n\in N$, que verifican la ecuación en derivadas parciales que tenemos que resolver y las condiciones de contorno.
- Por tanto, ahora debemos lograr que se satisfagan también las dos **condiciones iniciales**.

En general, no es posible encontrar una función de la sucesión de las y_n que verifique dichas condiciones.
Por ello, lo que vamos a hacer es construir, a partir de las y_n, una nueva función $y(x,t)$ mediante la serie:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Longrightarrow y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

Supondremos que en dicha serie se puede derivar término a término.
- De esta forma, si conseguimos hallar A_n y B_n de forma que $y(x,t)$ verifique las condiciones iniciales, habremos obtenido lo que se llama una **solución formal** del problema propuesto.

APLICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER

Ahora bien, como

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(-A_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L} t + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

las condiciones iniciales se transforman en

$$\begin{aligned} y\left(x,0\right) &= f\left(x\right),\ 0<x<L \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = f\left(x\right),\ 0<x<L \\ \frac{\partial y}{\partial t}\left(x,0\right) &= g\left(x\right),\ 0<x<L \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = g\left(x\right),\ 0<x< \end{aligned}$$

- Por tanto, deberemos **desarrollar** $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ **en serie de Fourier de**

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

en el intervalo $0 < x < L$, (**desarrollo de medio rango**) para identificar los coeficientes buscados y así queda resuelto el problema planteado.

Ejemplo 8

Resolver, por el método de separación de variables, el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \geq 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ y(x,0) = \operatorname{sen}^2 x,\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: Manteniendo la notación anterior tenemos $c = \frac{2}{3}$ y $L = \pi$, con lo que la solución del problema es de la forma

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \left(A_n \cos \frac{2nt}{3} + B_n \operatorname{sen} \frac{2nt}{3} \right)$$

Al imponer las condiciones iniciales, resulta

$$
\begin{aligned}
y\left(x,0\right) &= \operatorname{sen}^2 x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}^2 x,\ 0 < x < \pi \\
\frac{\partial y}{\partial t}\left(x,0\right) &= \operatorname{sen} x \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3} B_n \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} x,\ 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$

De la segunda condición, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3} B_1 &= 1 \Longrightarrow B_1 = \frac{3}{2} \\
B_n &= 0,\ \forall n > 1
\end{aligned}
$$

EJEMPLO

Para calcular los coeficientes A_n, debemos desarrollar la función

$$\operatorname{sen}^2 x,\ 0 < x < \pi$$

en serie de $\operatorname{sen} nx$. Sin más que operar se obtiene que A_n

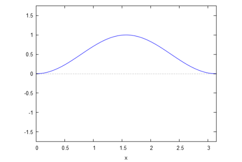
$$A_n = \frac{-4\left[1-(-1)^n\right]}{\pi n\,(n+2)\,(n-2)} \Longrightarrow \begin{cases} A_{2n} = 0 \\ A_{2n-1} = -\frac{8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n-3)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los coeficientes A_n y B_n que hemos obtenido, la solución es de la siguiente forma.

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx \left(A_n \cos \frac{2nt}{3} + B_n \operatorname{sen} \frac{2nt}{3} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \operatorname{sen} (2n-1) x \cos \frac{2(2n-1)t}{3} + B_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2t}{3}
\end{aligned}
$$

$$
y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{2t}{3} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2n-1) x}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)} \cos \frac{2(2n-1)t}{3}
$$

En la siguiente **animación realizada con wxMaxima** vemos las gráficas que representan la oscilación de la cuerda para diferentes valores de t.



Ejercicio 19

Resolver, por el método de separación de variables, el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \geq 0,\ 0 < x < \pi \\ y\left(0, t\right) = y\left(\pi, t\right) = 0 & t \geq 0 \\ y\left(x, 0\right) = x\left(\pi - x\right),\ \frac{\partial y}{\partial t}\left(x, 0\right) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \operatorname{sen}\left(2n-1\right) x \cos\left(2n-1\right) t.$

Ejercicio 20

Resolver, por el método de separación de variables, el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ y(x,0) = f(x), \ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{con } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{50}(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Solución: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{25(2n-1)^2\pi^2} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x \cos(2n-1)\pi t.$

Supongamos que situamos un alambre sobre el eje x, con $x = 0$ en el extremo izquierdo del alambre y $x = L$ en el extremo derecho. Si denotamos por u la temperatura del alambre, entonces u dependerá del tiempo t y de la posición x medida sobre el alambre. Tomaremos como hipótesis que el alambre es delgado y, por consiguiente, u será constante en una sección transversal del alambre, correspondiente a un valor fijo de x. También supondremos que el alambre se encuentra aislado, y así el calor no entra ni sale a través de la superficie del mismo.

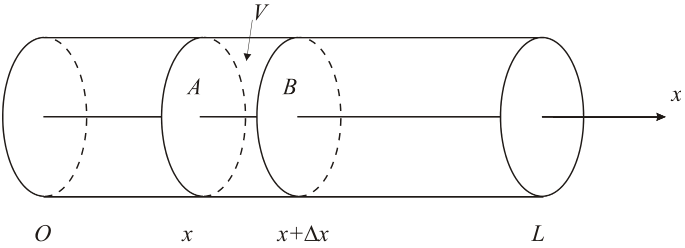


Figura: Ecuación del calor.

Pero además tenemos otras dos restricciones en el problema original. En primer lugar, consideramos que los extremos del alambre se mantienen a temperatura constante, por ejemplo a 0 ^{o}C. Así que se verifica

$$u\left(0,t\right)=u\left(L,t\right)=0$$

para todo t. Estas se llaman *condiciones de frontera*. En segundo lugar, suponemos que la distribución de temperatura inicial es $f\left(x\right)$. Es decir, se debe cumplir que

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right), \qquad 0<x<L$$

A la ecuación (3) se le denomina *condición inicial* en u.
Se tiene el siguiente modelo matemático de flujo de calor en un alambre cuyos extremos se mantienen a la temperatura constante de 0 ^{o}C

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right)=\beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,t\right) & 0<x<L,\ \ t>0 \\ u\left(0,t\right)=u\left(L,t\right)=0 & t>0 \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right) & 0<x<L \end{cases}$$

Este modelo es otro ejemplo de un *problema de valores inicial y de frontera*.

Método de separación de variables

Para resolver este problema por el método de separación de variables, se empieza por suponer que la ecuación tiene una solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

donde X es una función que depende únicamente de x y T es una función que depende únicamente de t. Por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\,T'(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t)$$

Sustituyendo estas expresiones en u obtenemos

$$X(x)\,T'(t) = \beta X''(x)\,T(t)$$

y, separando las variables, la ecuación se convierte en

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

las funciones del primer miembro dependen únicamente de t, mientras que las del segundo miembro dependen únicamente de x.

Puesto que x y t son variables independientes entre sí,:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \lambda \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}$$

En consecuencia para soluciones separables, se ha reducido el problema a resolver las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que acabamos de obtener.

Antes de continuar, consideremos las condiciones de frontera. Puesto que $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, estas condiciones son

$$X(0)\,T(t) = 0 \quad \text{y} \quad X(L)\,T(t) = 0, \quad t > 0$$

Si fuera $T(t) = 0$ para todo $t > 0$, implicaría que $u(x,t) \equiv 0$, que sería la solución trivial, por lo que se tendrá que verificar

$$X(0) = X(L) = 0$$

Ignorando la solución trivial, se combinan las condiciones de frontera con la ecuación diferencial en X y se obtiene el problema se Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos como vimos anteriormente. Para calcular las funciones propias estudiaremos los distintos casos para los posibles valores de λ.

1) Caso $\lambda > 0$.

En este caso, las raíces de la ecuación característica son $\pm\alpha$, siendo $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Para determinar C_1 y C_2 imponemos las condiciones de frontera

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(L) = C_1 e^{\alpha L} + C_2 e^{-\alpha L} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, no existe solución distinta de la trivial para $\lambda > 0$

2) Caso $\lambda = 0$.

Aquí $r = 0$ es una raíz doble de la ecuación característica, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Las condiciones de frontera originan las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 L = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, no existe solución distinta de la trivial para $\lambda = 0$.
3) Caso $\lambda < 0$.
En este caso, las raíces de la ecuación característica son $\pm\alpha i$, siendo $\lambda = -\alpha^2, \alpha > 0$. Por tanto, la solución general es

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \operatorname{sen} \alpha x$$

En esta ocasión las condiciones de frontera $X(0) = X(L) = 0$ dan lugar al sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos \alpha L + C_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0 \end{cases}$$

Como vimos anteriormente se tiene que cumplir:

$$\operatorname{sen} \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = n\pi \Rightarrow \lambda = -(n\pi/L)^2$$

Por tanto las soluciones no triviales (funciones propias) X, correspondientes al valor propio $\lambda = -(n\pi/L)^2$, están dadas por

$$X_n(x) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los valores a_n son constantes arbitrarias distintas de cero.

Habiendo obtenido que $\lambda = -\left(n\pi/L\right)^2$ para algún entero positivo n, consideremos ahora la segunda ecuación con $\lambda = -\left(n\pi/L\right)^2$

$$T'\left(t\right) + \beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\left(t\right) = 0$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, la solución general de la ecuación lineal de primer orden es

$$T_n\left(t\right) = b_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtiene la función

$$u_n\left(x, t\right) = X_n\left(x\right) T_n\left(t\right) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) b_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

y, agrupando las constantes,

$$u_n\left(x, t\right) = c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De momento, hemos hallado una sucesión de funciones u_n, $n \in N$, que verifican la ecuación en derivadas parciales que tenemos que resolver y las condiciones de contorno.
Por tanto, ahora debemos lograr que se satisfagan también las dos condiciones iniciales.
En general, no es posible encontrar una función de la sucesión de las u_n que verifique dichas condiciones; por ello, lo que vamos a hacer es construir, a partir de las u_n, una nueva función $u(x,t)$ mediante la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Supondremos que en dicha serie se puede derivar término a término, con lo que la función $u(x,t)$, así construida, seguirá siendo solución, tanto de la ecuación en derivadas parciales como de las condiciones de contorno. De esta forma, si conseguimos hallar c_n de forma que $u(x,t)$ verifique las condiciones iniciales, habremos obtenido lo que se llama una *solución formal* del problema propuesto.

Las constantes c_n las determinamos utilizando la condición inicial. Esto da lugar a

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Por tanto, debemos desarrollar $f(x)$ en serie de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, en el intervalo $0 < x < L$, de donde podremos obtener los coeficientes buscados y resolver nuestro problema.

Ejemplo 9

Resolver el siguiente problema de la ecuación de calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 100 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución:

Por lo tanto $\beta = 1$, $L = \pi$ y $f(x) = 100$, la solución del problema es de la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

Ahora imponemos la condición inicial $u(x, 0) = 100$, $0 < x < \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx = f(x), \quad f(x) = 100, \quad 0 < x < \pi$$

Por consiguiente, para determinar los coeficientes c_n habrá que desarrollar en el intervalo $[0, \pi]$ la función $f(x)$ en serie senoidal

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

siendo

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 100 \operatorname{sen} nx dx = -\left[\frac{200}{n\pi} \cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{200}{n\pi} \left[(-1)^n - 1\right]$$

$$b_{2n} = 0; \;\; b_{2n-1} = 400/(2n-1)\pi$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}(2n-1)x, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Vemos, al identificar los desarrollos, que :

$$c_n = b_n \Rightarrow \begin{cases} c_{2n} = b_{2n} = 0 \\ c_{2n-1} = b_{2n-1} = \frac{400}{(2n-1)\pi} \end{cases}$$

Recordemos que:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$$

Sustyituyendo los valores obtenidos para c_n, la solución formal es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x$$

Ejercicio 21

Resolver, por el método de separación de variables, el problema

$$\begin{cases} 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & 0 < x < \pi,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2x - 6\operatorname{sen} 5x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución: $u(x,t) = 3e^{-28t}\operatorname{sen} 2x - 6e^{-175t}\operatorname{sen} 5x$.

Ejercicio 22

Consideramos una varilla metálica aislada de longitud π, *cuyos extremos se mantienen a* $0\ {}^{o}C$, *y tomamos como eje de referencia* OX, *el eje de la varilla con origen* O *en un extremo de la misma. Denotamos por* $T(x,t)$ *la temperatura en el instante* t *del punto de la varilla que tiene abscisa* x. *Se supone que la ecuación diferencial de la variación de temperaturas es* $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$. *Si la temperatura inicial es* $T(x,0) = f(x)$, *hallar* T, *por el método de separación de variables, con* $f(x) = 100\operatorname{sen} x,\ 0 < x < \pi$.
Solución: $T(x,t) = 100e^{-t}\operatorname{sen} x$.