TEMA 5: VARIABLE COMPLEJA

Ampliación de Matemáticas (Grado en Ingeniería en T.I.)

EPI Gijón - UNIOVI

En los temas de cálculo elemental el lector sin duda estudió ampliamente el concepto de función de una y varias variables reales, así como los fundamentos básicos del manejo de los números complejos.

Consideraremos ahora funciones de una variable compleja para las que desarrollaremos, de forma muy resumida, conceptos, como la derivación, integración, series de potencias, etc. El lector debe entender que este capítulo es una mera introducción a la teoría de las funciones de variable compleja, un tema muy denso del cual aquí damos unas leves pinceladas.

Definición (Función de variable compleja)

Sea S un conjunto de números complejos. Una función f definida en S es una aplicación que asigna a cada z en S un número complejo w. El número w se llama el valor de f en z y se denota:

$$w = f(z)$$

El conjunto S se llama *dominio de definición* de f.

Supóngase que $w = u + iv$ es el valor de una función f en $z = x + iy$; es decir:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u + iv$$

Cada uno de los números reales u y v dependen de las variables x e y.

Ejemplo 1

Si $f(z) = z^2$, tendremos:

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

por lo que:

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v = 2xy$$

Este ejemplo ilustra cómo una función de la variable compleja z se puede expresar en términos de dos funciones reales de las variables x e y

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

La siguiente definición será muy importante para luego definir las funciones elementales.

Definición (Región Fundamental)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$ y f una función de A en $\mathbb{C}$ tal que $f(A) = \mathbb{C}$.
Un subconjunto $\Omega \subset A$ es una región fundamental de f si cumple:
a) Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ en el que f es inyectiva.
b) $f(\Omega)$ es todo $\mathbb{C}$ salvo un número finito de semirrectas (llamadas cortes).

Definición (Función potencial de exponente n)

La función potencial de exponente n es la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = z^n$$

Si (r, θ) son las coordenadas polares de z entonces:

$$(r^n, \alpha)$$

en donde $\alpha = n\theta$ son las coordenadas polares de z^n.

A partir de la función $f(z) = z^n$, se obtienen las *funciones polinómicas* definidas por:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_m z^m$$

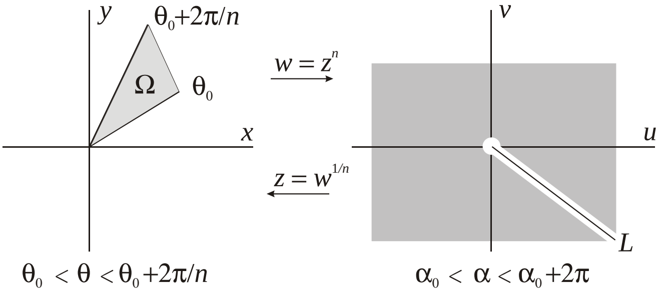
y las *funciones racionales* como el cociente de dos polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ definidas por:

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

La imagen por $f(z) = z^n$ de cualquier sector angular del plano complejo de medida $2\pi/n$ es todo $\mathbb{C}$ salvo una semirrecta, ya que:

$$\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi/n \Rightarrow n\theta_0 < n\theta < n\theta_0 + 2\pi \Rightarrow \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + 2\pi$$

Por lo que dicho sector es una región fundamental Ω, *ya que es conexo y* $f(\Omega)$ *es todo* $\mathbb{C}$ salvo un corte.



Función raíz n-ésima
La correspondencia que a cada número complejo le asocia sus n raíces n-ésimas no es una aplicación, pues cada z posee n imágenes diferentes. Esta clase de correspondencias suelen denominarse *funciones multiformes* y a cada una de sus formas *rama*. Para que

$$\sqrt[n]{z}$$

sea una aplicación es necesario añadir alguna condición que fije una única rama.

Dada la función potencial $w = f(z) = z^n$ definida en una de sus regiones fundamentales $f : \Omega \to \mathbb{C} - L$, que como vimos anteriormente es una biyección, con:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \theta_0 < \arg z < \theta_0 + \frac{2\pi}{n}\}$$

$$L = \{w \in \mathbb{C} / w = 0 \ o \ \arg w = n\theta_0\}$$

definimos la función raiz n-ésima como la función inversa

$$f^{-1} : \mathbb{C} - L \to \Omega$$

y la representamos por

$$z = g(w) = \sqrt[n]{w}$$

Por lo tanto para determinar $g(w)$ hay que fijar L y establecer el valor de g en un punto de $\mathbb{C} - L$, pues de esta manera se determina también Ω.

Definición (Función exponencial)

Se llama función exponencial a la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

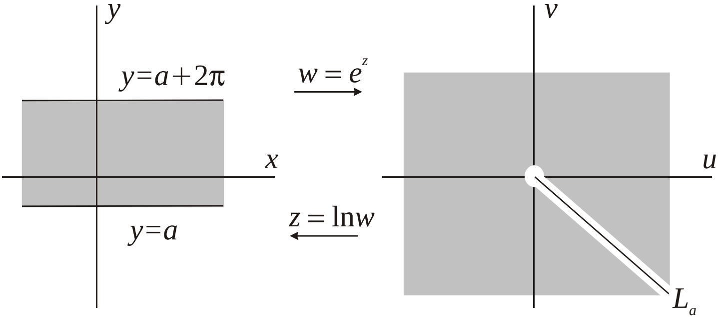
De donde

$$|f(z)| = |e^z| = e^x \quad y \quad \arg e^z = y$$

Es muy sencillo probar que se cumple:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \;\; f(x) = e^x; \;\; f(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y; \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

Una región fundamental Ω de f es un abierto del plano limitado por dos rectas paralelas al eje OX que distan entre si $2\pi(y = a, y = a + 2\pi)$.
La imagen de Ω por f es todo $\mathbb{C}$ salvo el corte $\theta = a$.



Definición (Función logaritmo)

Dado un número complejo $w \neq 0$ se llama logaritmo de w a cualquier número complejo $z = x + iy$ tal que $e^z = w$.

Entonces si $w = |w|e^{i\theta}$

$$e^{x+iy} = |w|e^{i\theta} \Longleftrightarrow e^x = |w|, \quad e^{iy} = e^{i\theta}$$

$$x = \ln|w|, \quad y = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \ln w = \ln|w| + i(\theta + 2k\pi)$$

Se define así una función multiforme:

$$\ln w = \ln|w| + i(\theta + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

La función logaritmo se define siguiendo un proceso análogo al utilizado para la función raíz n-ésima.

Ejemplo 2

Calcular:

$$\ln(-1-i)$$

Solución:

$$\ln(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2k\pi\right); \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dada la función exponencial $w = f(z) = e^z$ definida en una de sus regiones fundamentales $f : \Omega \to \mathbb{C} - L_a$, que como vimos anteriormente es una biyección, con:

$$\Omega = \{z = x + iy / a < y < a + 2\pi\}$$

$$L_a = \{w \in \mathbb{C} / w = 0 \ o \arg w = a\}$$

definimos la función logaritmo como la función inversa:

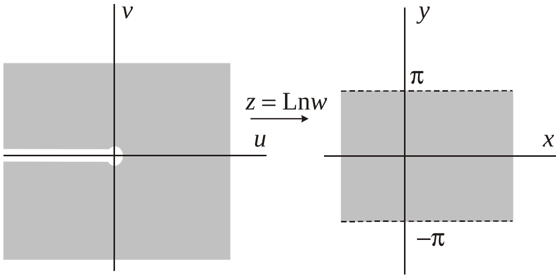
$$f^{-1} : \mathbb{C} - L_a \to \Omega$$

y la representamos por $g(w) = \ln w$.
Por lo tanto para determinar $g(w)$ hay que fijar L_a y establecer el valor de g en un punto de $\mathbb{C} - L_a$, pues de esta manera se determina también Ω.

Cada una de las funciones logaritmo se denomina *rama* de la función multiforme $\ln w$. La rama correspondiente a la región fundamental:

$$\Omega = \{z = x + iy \,/ -\pi < y < \pi\}$$

o lo que es equivalente al corte L_a determinado por $a = -\pi$, se llama *rama principal del logaritmo*.



- **Funciones trigonométricas e hiperbólicas**

A partir de la función exponencial se definen las *funciones trigonométricas* complejas y las las *funciones hiperbólicas* complejas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ shz &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

De la misma forma en los puntos que no se anulen el denominador, se definen las funciones:

$$tgz = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}; \; ctgz = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}; \quad thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz}$$

El alumno puede comprobar que se verifican las mismas formulas trigonoméricas e hiperbólicas que para el caso real.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a)\ z^2 = i; \quad (b)\ z^4 = -1; \quad (c)\ z^3 = 1 + i$$

Solución: (a) $1\lfloor\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, $k = 0, 1$. *(b)* $1\lfloor\frac{\pi+2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. *(c)* $2^{3/2}$ $\lfloor\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Ejercicio 2

Encontrar un polinomio en $\mathbb{C}$ tal que sus ceros sean los vértices de un hexágono regular centrado en el origen y con un vértice en $(1, 0)$. Calcular las coordenadas de los vértices. *Solución:* $z^6 - 1 = 0$.

Ejercicio 3

Calcular:

$$(a)\ \ln(1 + i); \quad (b)\ \ln 1; \quad (c)\ \ln(-1)$$

Solución: (a) $\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. *(b)* $i(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. *(c)* $i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a)\ z^6 - 9z^3 + 8 = 0;\ (b)\ z^2 + (2-i)z - 2i = 0$$

Solución: (a) $2\lfloor \frac{2k\pi}{3}, 1\lfloor \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2$. (b) $i, -2$.

Ejercicio 5

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a)\ \operatorname{sen} z = 0;\ (b)\ \cos z = 0;\ (c)\ \cos z = 2$$

Solución: (a) $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. (b) $z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. (c) $z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 6

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a)\ e^{z} = 1 + i;\ (b)\ e^{z^2} + 1 = 0$$

Solución: (a) $z = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. (b) $z = \sqrt{i(\pi + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definición (**Límite**)

Sea f una función definida en todos los puntos z de algún entorno de z_0, salvo posiblemente en el mismo z_0. Se dice que w_0 es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y se representa por $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, cuando para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \qquad \textit{siempre que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Esto es, el punto $w = f(z)$ puede quedar arbitrariamente próximo a w_0 si elegimos z suficientemente próximo a z_0 pero distinto de él.

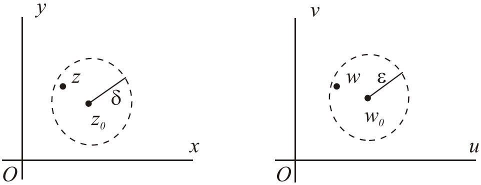


Figura: Definición de límite.

Teorema (**Teoremas sobre límites**)

a) Supóngase que:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad y \quad w_0 = u_0 + iv_0$$

Entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *si y sólo si:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

b) Supóngase que:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad y \quad \lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$$

Entonces:

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0; \quad \lim_{z\to z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}, \quad si \;\; W_0 \neq 0$$

CONTINUIDAD

Definición (Continuidad)

Una función f es continua en un punto z_0 si se cumplen las tres condiciones siguientes:

$$(a)\ \textit{Existe}\ \lim_{z \to z_0} f(z)$$

$$(b)\ \textit{Existe}\ f(z_0)$$

$$(c)\ \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Una función $f(z)$ se dice que es continua en una región R, si es continua en cada punto de R.

Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto son también continuos en tal punto, y su cociente es continuo en todo punto en que el denominador sea distinto de cero.

Una función f de una variable compleja es continua en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$, si y sólo si sus funciones componentes u y v son continuas en ese punto.

Ejemplo 3

Estudiar la continuidad en $z = i$ de la función:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z-i} & si \quad z \neq i \\ 3i & si \quad z = i \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)(z+i)}{z-i} = 2i$$

Debido a que $f(i) = 3i$ es distinto de:

$$\lim_{z \to i} f(z) = 2i$$

la función es discontinua en $z = i$.

DERIVADAS. DEFINICIÓN

Definición (**Derivada**)

La derivada de f en z_0, $f'(z_0)$, se define por la ecuación:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

supuesto que el límite exista.

Ejemplo 4

Calcular, con la definición, la derivada de $f(z) = z^2$.
Solución:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

Teorema (Regla de L´Hôpital)

Si $g(z_0) = 0$ y $h(z_0) = 0$, y si $g(z)$ y $h(z)$ son diferenciables en z_0 con $h'(z_0) \neq 0$, entonces:

$$\mathop{lim}_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} = \mathop{lim}_{z \to z_0} \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

Desde el punto de vista formal, esta regla es idéntica a la que se emplea en el cálculo elemental para evaluar formas indeterminadas con funciones de variable real.

Ejemplo 5

Calcular:

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z - 2i}{z^4 - 16}$$

Solución: Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z - 2i}{z^4 - 16} = \lim_{z \to 2i} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to 2i} \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{-1}{32i}$$

Teorema (Proposición)

La existencia de la derivada de una función en un punto implica la continuidad de la función en tal punto.

Para verlo, suponemos que existe $f'(z_0)$ y escribimos

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

de donde se deduce que:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Se demuestra fácilmente el siguiente teorema.

Teorema (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *y que* $f'(z_0)$ *existe en un punto* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Entonces, las derivadas parciales de primer orden de* u *y* v *respecto a* x *e* y *han de existir en* (x_0, y_0) *y han de satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto:*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad y \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Además, $f'(z_0)$ *viene dada por una cualquiera de las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

El que satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ no basta para asegurar la existencia de la derivada de una función $f(z)$ en ese punto.

Pero bajo ciertas condiciones de continuidad, tenemos el siguiente teorema de gran utilidad.

Teorema (**Teorema de condiciones suficientes**)

Supóngase que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ está definida en un entorno de radio ε de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Supóngase también que existen las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v respecto a x e y en todos los puntos del entorno y que son continuas en (x_0, y_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, existe la derivada $f'(z_0)$ en (x_0, y_0).

Ejemplo 6

Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(z) = |z|^2$$

Solución: En este caso se cumple que:

$$\begin{aligned} f(z) &= |z|^2 = (x^2 + y^2) + i0 \\ u(x, y) &= x^2 + y^2; \quad v(x, y) = 0 \end{aligned}$$

así que

$$u_x(x, y) = 2x; \quad v_y(x, y) = 0 \qquad u_y(x, y) = 2y; \quad v_x(x, y) = 0$$

Puesto que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen a menos que $x = y = 0$, la derivada $f'(z)$ no existe si $z \neq 0$.

Las derivadas parciales de primer orden de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ existen para todos los puntos de un entorno del punto $z = 0$ y son continuas en el punto $z = 0$. Además:

$$u_x(0,0) = 0, \;\; v_y(0,0) = 0, u_y(0,0) = 0 \text{ y } v_x(0,0) = 0,$$

Por lo que se cumplen las ecuaciones de Cauchy- Rieman *en el punto* $z = 0$*:*

$$u_x\,(0,0) = v_y\,(0,0) \qquad y \qquad u_y\,(0,0) = -v_x\,(0,0)$$

Por lo que la función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$ y además su derivada en ese punto es:

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$$

Definición (Función analítica)

Una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0, si su derivada existe, no sólo en z_0, sino también en cada punto z de un entorno de z_0.

Se dice que una función f es analítica en una región R, si es analítica en cada punto de R. En la literatura se usa también el término *holomorfa* para denotar analiticidad.
Una condición necesaria, pero en modo alguno suficiente, para que una función f sea analítica en un dominio D, es claramente la continuidad de f en todo D. El que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario, pero no suficiente.

Definición (Función entera)

Una función entera es una función analítica en cada punto de todo el plano finito.

Ejemplo 7

(a) La función

$$f(z) = z^2$$

es analítica en todo punto.
(b) Sin embargo, la función

$$f(z) = |z|^2$$

no es analítica en ningún punto, dado que su derivada existe sólo en $z = 0$ y no en todo un entorno.

Definición (Punto singular)

Si una función no es analítica en un punto z_0, pero lo es en algún punto de todo entorno de z_0, z_0 se llama entonces punto singular o singularidad de f.

Definición (Punto singular aislado)

El punto z_p es un punto singular aislado de $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_p pero sí en un entorno abierto de z_p.

Considérese, por ejemplo, la función

$$f(z) = 1/z, (z \neq 0)$$

cuya derivada es $f'(z) = -1/z^2$. Tal función es analítica en todos los puntos, salvo en $z = 0$, donde ni siquiera está definida. El punto $z = 0$ es, por tanto, un punto singular aislado.

Ejemplo 8

¿Para qué valores de z la función:

$$f(z) = \frac{z^3 + 2}{z^2 + 1}$$

no es analítica?.

Solución: Para z tal que $z^2 + 1 = 0$, es decir, $z = \pm i$. Así, $f(z)$ tiene singularidades aisladas en $+i$ y $-i$.

Ejercicio 7

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a)\ f(z) = e^z;\ (b)\ f(z) = z^3;\ (c)\ f(z) = \frac{1}{z},\ z \neq 0$$

Solución: (a) $f'(z) = e^z$; (b) $f'(z) = 3z^2$; (c) $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$.

Ejercicio 8

Dada la función:

$$f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$$

aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann, estudiar si es derivable, en los puntos: (a) $z = i$; (b) $z = 1 + i$.
Solución: (a) Derivable. (b) No derivable.

Ejercicio 9

Dada la función:

$$f(z) = \frac{(z+\overline{z})^2}{4} - i\frac{(z-\overline{z})^2}{4}$$

(a) Estudiar en qué puntos es derivable. (b) Hallar $f'(1+i)$.(c) Estudiar si es analítica en ese punto.
Solución: (a) En todos los puntos de la recta $y = x$. (b) 2. (c) No es analítica en ese punto.

Ejercicio 10

Dada la función:

$$f(z) = -3(z+\overline{z})^2 + (z-\overline{z})^3$$

(a) Estudiar en qué puntos es derivable y representarlos gráficamente. (b) Hallar, si es posible, $f'(1-i)$. (c) Estudiar si es analítica en ese punto.
Solución: (a) En todos los puntos de la parábola $y^2 = x$. (b) -24. (c) No es analítica en ese punto.

Definición (Integral de línea de una función de variable compleja)

Sea C la curva $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Definimos la integral de línea, o bien integral de contorno, de f sobre C como:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)dt$$

El integrando de esta integral es el producto de las dos funciones complejas:

$$f\left[z(t)\right] = u\left[x(t), y(t)\right] + iv\left[x(t), y(t)\right] \quad \text{y} \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

De este modo:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \left(ux' - vy'\right) dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt$$

O bien:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Por lo que podríamos calcular la integral hallando las dos integrales de línea correspondientes.

Ejemplo 9

Calcular la integral:

$$I = \int_C \bar{z}dz$$

donde el camino de integración C es la mitad superior del círculo $|z| = 1$ de $z = -1$ a $z = 1$.

Solución: Una representación paramétrica para C es:

$$z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}; \;\; (0 \leq \theta \leq \pi)$$

y dado que $d\left(e^{i\theta}\right)/d\theta = ie^{i\theta}$ tendremos:

$$I = -\int_C \bar{z}dz = -\int_0^{\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = -\pi i$$

Teorema (**Teorema de Cauchy-Goursat**)

Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema (**Principio de independencia de la trayectoria**)

Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces el valor de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ no dependerá del contorno utilizado para ir de z_1 a z_2.

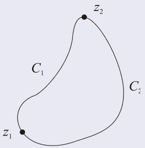


Figura: Independencia del camino.

En el cálculo real, el método básico de integración consiste en buscar una primitiva $F(x)$ para el integrando $f(x)$. Luego se evalúa $F(x)$ en los límites de integración

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} dF = F(x_2) - F(x_1)$$

¿Podrá aplicarse un procedimiento similar a las integrales de línea complejas?. Veamos que, con ciertas restricciones, la respuesta es sí.

Teorema (Integración de derivadas de funciones analíticas)

Sea $f(z)$ una función continua y sea $F(z)$ una función analítica en un dominio D, tal que $dF/dz = f(z)$ en D. Entonces, si z_1 y z_2 son puntos de D

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

donde la integración se puede efectuar a lo largo de cualquier contorno en D que vaya de z_1 a z_2.

De este modo, si se satisfacen las condiciones del teorema, podemos usar las reglas de integración convencionales y las tablas de integrales usuales.

Ejemplo 10

Calcular:

$$\int_{1+i}^{2+2i} z^2 dz$$

Solución:
La proposición anterior justifica la siguiente operación:

$$\int_{1+i}^{2+2i} z^2 dz = \int_{1+i}^{2+2i} \frac{d}{dz}\frac{z^3}{3} dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{1+i}^{2+2i} = \frac{1}{3}\left[(2+2i)^3 - (1+i)^3\right]$$

Ejercicio 11

Calcular la integral de línea $\int_C (z + \overline{z})dz$ siendo C la curva $x + y = 1$, desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(0, 1)$.
Solución: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Ejercicio 12

Calcular la integral de línea $\int_C \frac{1}{z-2}dz$ siendo $C : |z - 2| = 2$, en sentido positivo.
Solución: $2\pi i$.

Ejercicio 13

Calcular la integral de línea $\int_C \frac{\ln z}{z}dz$ siendo $C : |z| = 1$ en sentido positivo.
Solución: $-2\pi^2$.

Ejercicio 14

Sea n un número entero positivo o nulo, y C un círculo de radio r centrado en el origen. Calcular directamente, y comprobar que según el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C z^n dz = 0$$

Ejercicio 15

Demostrar que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}i} ze^z dz = (1 - \frac{\pi}{2}) - i$$

Ejercicio 16

Demostrar que:

$$\int_0^{i} z \operatorname{sen} z dz = -\frac{i}{e}$$

SERIES DE TAYLOR

- Este tema se dedica a la **representación mediante series de las funciones analíticas**. Enunciaremos teoremas que garantizan la existencia de tales representaciones, adquiriendo al tiempo cierta destreza en el manejo de las series.

- Centraremos nuestro interés en las **Series de Taylor y de Laurent**, por lo que no trataremos las propiedades de las series de números complejos y de las series generales de funciones de variable compleja.

- En todo caso, la **analogía** existente con la teoría de las series de funciones reales (ya conocida por el alumno) nos será muy útil. Así, términos como convergencia puntual, absoluta o uniforme supondremos que son asimilados de forma correcta.

Definición (**Serie de Taylor**)

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0. Sea C el mayor círculo centrado en z_0 dentro del cual $f(z)$ es analítica, y sea $a > 0$ el radio de C. Entonces existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ que converge a $f(z)$ en C :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < a, \quad donde \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Esta serie de potencias se conoce como desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0.

En el caso particular en que $z_0 = 0$, la serie de Taylor se conoce como serie de Maclaurin.

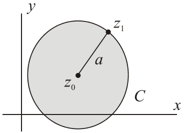


Figura: Convergencia de la Serie de Taylor.

Este teorema no asegura la convergencia de la serie a $f(z)$ cuando z es un punto del perímetro de C.

Lo que si asegura es la convergencia es en todos los puntos interiores del círculo representado en la figura, siendo z_1 la singularidad de $f(z)$ más cercana a z_0.

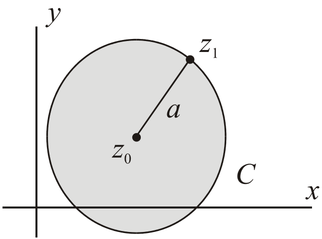


Figura: Convergencia de la Serie de Taylor.

Es sencillo hallar las series de Taylor siguientes:

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad (|z| < \infty) \\
\operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad (|z| < \infty) \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \quad (|z| < \infty) \\
\operatorname{senh} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \quad (|z| < \infty) \\
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad (|z| < \infty) \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1) \quad ; \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 11

Desarrollar:

$$f(z) = \frac{1}{3(z+1)}$$

en serie de Taylor alrededor del punto $z_0 = 1$.

Solución: Para desarrollar $f(z)$ en primer lugar la expresamos en potencias de $(z-1)$. Así:

$$\begin{aligned} \frac{1/3}{(z+1)} &= \frac{1/3}{(z-1)+2} = \frac{1/6}{1+\frac{(z-1)}{2}} \\ &= 1/6\left[1-\frac{(z-1)}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}-\cdots\right] \end{aligned}$$

que converge para $\frac{|z-1|}{2} < 1 \Rightarrow |z-1| < 2$.

Ejercicio 17

Desarrollar las siguientes funciones en los puntos que se indican, indicando el campo de validez:

$$(a)\ f(z) = \frac{1}{z+2},\ z_0 = 1\ ;\ (b)\ f(z) = \frac{1}{2z-1},\ z_0 = 0$$

Solución: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{3^n}$, $|z-1| < 3$. (b) $-\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$, $|z| < 1/2$.

Ejercicio 18

Desarrollar las siguientes funciones en los puntos que se indican, indicando el campo de validez:

$$(a)\ f(z) = \frac{1}{z-1},\ z_0 = i\ ;\ (b)\ f(z) = \frac{1}{z-1},\ z_0 = -i$$

Solución: (a) $\frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(i-1)^n}$, $|z-i| < \sqrt{2}$. (b) $\frac{-1}{i+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(i+1)^n}$, $|z+i| < \sqrt{2}$.

Definición (Serie de Laurent)

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio anular D definido por $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Si z pertenece a D, $f(z)$ puede representarse mediante un desarrollo en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \cdots + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Los coeficientes están dados por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple contenido en D y tal que la frontera interna $|z - z_0| < r_1$ quede confinada por C. La serie converge uniformemente en toda la región anular de D centrada en z_0.

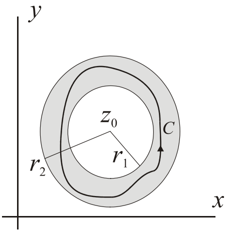


Figura: Serie de Laurent.

Así pues, un desarrollo en serie de Laurent, a diferencia del desarrollo en serie de Taylor, puede contener uno o más términos con $(z - z_0)$ elevados a una potencia negativa. También puede contener potencias positivas de $(z - z_0)$.

Con frecuencia, los ejemplos de series de Laurent se obtienen a partir de series de Taylor.

Ejemplo 12

Desarrollar $f(z) = (z-1)^2 e^{1/(z-1)}$ *en serie de Laurent en potencias de* $z-1$.

Solución: Para desarrollar $f(z)$ en primer lugar sabemos que:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots$$

Haciendo $u = (z-1)^{-1}$ en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{1/(z-1)} &= 1 + (z-1)^{-1} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \cdots, \quad z \neq 1 \\ &= \cdots + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + 1, \quad z \neq 1 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $(z-1)^2$ obtenemos:

$$f(z) = \cdots + \frac{(z-1)^{-1}}{3!} + \frac{1}{2!} + (z-1) + (z-1)^2, \; (0 < |z-1| < \infty)$$

Ejemplo 13

(a) El desarrollo:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty)$$

se deduce de la representación en serie de Maclaurin:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots, \quad (|z| < \infty)$$

(b) De la misma forma :

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}, \quad (0 < |z| < \infty)$$

Las siguientes definiciones nos serán de utilidad.

Definición (Punto singular aislado)

El punto z_p *es un punto singular aislado de* $f(z)$ *si* $f(z)$ *no es analítica en* z_p *pero sí en un entorno abierto de* z_p.

Definición (Cero aislado)

Si $f(z_0) = 0$ *se dice que* z_0 *es un cero aislado de* $f(z)$ *si existe un entorno abierto de* z_0 *en todo punto del cual* $f(z) \neq 0$.

Definición (Orden de un cero)

Sea m *un entero* ≥ 1. *Si* $f(z)$ *es analítica e igual a cero en* z_0 *y si en todo punto de un entorno de* z_0, $f(z)$ *tiene la forma* $(z - z_0)^m \phi(z)$, *donde* $\phi(z_0) \neq 0$, *decimos que la función tiene un cero de orden* m *en* z_0.

Ejemplo 14

(a) Por ejemplo, los puntos $z = 1$ y $z = 2$ son puntos singulares aislados de:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}$$

(b) La función:

$$f(z) = (z-1)(z-3)$$

tiene un cero aislado en $z = 1$ pues todo entorno abierto con centro en $z = 1$ y radio inferior a 2 constituye un dominio en el que $f(z) \neq 0$. Otro cero aislado de esta función es el punto $z = 3$.

Ejercicio 19

Desarrollar $f(z) = \frac{1}{1-z}$ *en serie de Laurent de potencias de* z, indicando el campo de validez.

Solución: $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, (|z| > 1)$.

Ejercicio 20

Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ *en series de Laurent de potencias de* z, indicando los campos de validez.

Solución: (L_1): $\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n, (0 < |z| < 1)$; ($L_2$): $\frac{-1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, (1 < |z| < \infty)$.

Ejercicio 21

Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ *en series de Laurent de potencias de* $z-1$, indicando los campos de validez.

Solución: (L_1): $\frac{-1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$, $(0 < |z-1| < 1)$;

(L_2): $\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$, $(1 < |z-1| < \infty)$.

Ejercicio 22

Desarrollar $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ *en series de Laurent de potencias de* $z-i$, indicando los campos de validez.

Solución: (L_1): $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$, $(0 < |z-i| < 2)$;

(L_2): $\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^n}$, $(2 < |z-i| < \infty)$.

RESIDUOS Y SU USO EN LA INTEGRACIÓN

- **El teorema de Cauchy-Goursat** nos dice que si una función es **analítica** sobre todos los puntos de un contorno C y en su interior, el valor de la integral a lo largo del contorno es **cero**.

- Sin embargo, si la función deja de ser analítica en un número finito de puntos del interior de C, entonces es posible asociar a cada uno de esos puntos un número, llamado **residuo**, con el que contribuye al valor de la integral.

- Analizaremos aquí la teoría de residuos y las aplicaremos al cálculo de ciertos tipos de **integrales**, y veremos que una serie de Laurent (y en particular uno de sus términos) sirve para evaluar dichas integrales.

RESIDUOS Y SU USO EN LA INTEGRACIÓN

Definición (**Residuo**)

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y en todo punto del interior de C, salvo z_1. Entonces el residuo de $f(z)$ en z_1 que se denota por $\operatorname{Res}[f(z), z_1]$, está definido por:

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} f(z)dz$$

Veamos en la siguiente proposición la relación que existe entre $\operatorname{Res}[f(z), z_1]$ y una serie de Laurent para $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_1)^n = \cdots + c_{-1}(z - z_1)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_1)^1 + \cdots$$

Es inmediato demostrar los siguientes teoremas:

Teorema

El residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_1 es igual al coeficiente c_{-1} de $(z-z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por $0<|z-z_1|<R_1$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] = c_{-1}$$

Teorema

Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y su interior salvo en una singularidad z_1 en el interior de C.
Si $\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right]$ es el residuo de f en tal singularidad, entonces:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right]$$

RESIDUOS Y SU USO EN LA INTEGRACIÓN

Veamos ahora la generalización al caso de una función $f(z)$ que tiene un número finito de puntos singulares aislados dentro de un contorno C.

Teorema (Teorema de los residuos)

Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y su interior salvo en un número finito de singularidades $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el interior de C.
Si $\mathrm{Res}\,[f(z), z_1]\,, \mathrm{Res}\,[f(z), z_2]\,, \ldots, \mathrm{Res}\,[f(z), z_n]$ son los residuos de f en tales singularidades, entonces:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,[f(z), z_1] + \mathrm{Res}\,[f(z), z_2] + \ldots \mathrm{Res}\,[f(z), z_n])$$

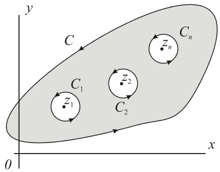


Figura:

Ejemplo 15

Calcular la integral:

$$\oint_{C^+} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$$

siendo C el círculo $|z| = 2$, orientado positivamente.
Solución: El integrando

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$$

es analítico sobre C y su interior salvo en la singularidad $z = 1$. Luego el valor de la integral es $2\pi i$ por el residuo de f en $z = 1$.
Para calcular este residuo, recordemos el desarrollo en serie de Maclaurin:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

de donde se deduce que:

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}e^{-(z-1)}}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!e}(z-1)^{n-2}, \quad 0 < |z-1| < \infty$$

En esta serie de Laurent el coeficiente de $1/(z-1)$ es $-1/e$. Es decir, el residuo de f en $z=1$ es $-1/e$. Por tanto:

$$\oint_{C^+} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = -\frac{2\pi i}{e}$$

Cuando $f(z)$ posee un punto singular aislado en z_1, resulta útil conocer el coeficiente c_{-1} en el desarrollo de Laurent de la función alrededor de dicho punto.

- En esta sección estudiaremos algunos conceptos que nos permitirán determinar este coeficiente **sin necesidad de obtener el desarrollo de Laurent**.

Hemos visto que si una función f tiene una singularidad aislada en z_1 entonces f admite un desarrollo de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n + \frac{b_1}{z - z_1} + \frac{b_2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_1)^n} + \cdots$$

en un dominio $0 < |z - z_1| < R$, con centro en tal punto.

Definición (Parte principal)

La parte de la serie formada por las potencias negativas de $z - z_1$ se denominan parte principal de f en z_1.

Usaremos ahora este concepto para clasificar los tres tipos de singularidades aisladas posibles.

- **Tipos de singularidades aisladas:**

1) Polo
2) Singularidad esencial
3) Singularidad evitable

RESIDUOS Y SU USO EN LA INTEGRACIÓN

Definición (**1. Polo**)

Si la parte principal de f en z_1 tiene al menos un término no nulo pero el número de tales términos es finito, el desarrollo de Laurent toma la forma:

$$
\begin{aligned}
f(z) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n + \frac{b_1}{z - z_1} + \frac{b_2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_1)^m}, \\
&\qquad (0 < |z - z_1| < R)
\end{aligned}
$$

y existirá un entero positivo m tal que $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. En este caso la singularidad aislada z_1 se denomina polo de orden m.

Definición (**2. Singularidad esencial**)

Cuando la parte principal de f en z_1 tiene un número infinito de términos no nulos, el punto se denomina singularidad esencial.

Definición (**3. Singularidad evitable**)

Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en una singularidad aislada z_1 son cero, el punto z_1 se denomina singularidad evitable de f.

Ejemplo 16

Clasificar las singularidades aisladas de las siguientes funciones:

$$(a)\ \frac{z^2-2z+3}{z-2};\ (b)\ \frac{\operatorname{senh} z}{z^4};\ (c)\ e^{1/z};\ (d)\ \frac{e^z-1}{z}$$

Solución: (a) La función:

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2}=z+\frac{3}{z-2}=2+(z-2)+\frac{3}{z-2},\quad (0<|z-2|<\infty)$$

tiene un polo simple en $z=2$. Su residuo correspondiente es 3.
(b) La función:

$$\frac{\operatorname{senh} z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}z+\frac{1}{7!}z^3+\cdots$$

tiene un polo de orden 3 en $z=0$, con residuo $1/6$.

(c) La función:

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \cdots$$

tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Su residuo allí es la unidad.
(d) La función:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1\right) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

tiene en $z = 0$ es una singularidad evitable; y si definimos $f(0) = 1$, la función es entonces entera.

Ejercicio 23

Clasificar los puntos singulares de las siguientes funciones:

$$(a)\ f(z) = \frac{senz}{z};\ (b)\ f(z) = \frac{e^z}{z};\ (c)\ f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

Solución: (a) $z = 0$ *sing. evitable;* (b) $z = 0$ *polo simple;* (c) $z = 0$ *sing. esencial.*

Ejercicio 24

Sea $g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$.Comprobar si la función :

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

tiene en $z = \pi$ un polo y calcular *el residuo en* dicho punto.
Solución: Tiene un polo de orden 1 y el residuo es $\operatorname{Res}[f(z), \pi] = 1$.

- **Determinación del residuo**

Hay otra forma de hallar el residuo en una singularidad aislada z_1, cuando ésta es un polo, sin tener que desarrollar previamente en serie de Laurent la función correspondiente. Como veremos en algunos ejemplos a continuación.
Simplemente consiste en recordar la fórmula de taylor para desarrollar una función $\phi(z)$ en el entorno del punto z_1 :

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$$

Ejemplo 17

Usar el teorema de los residuos para calcular la integral:

$$\oint_{C^+} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

siendo C el círculo $|z| = 2$, orientado en sentido contrario al del reloj.
Solución: Aplicando el teorema de los residuos tenemos que:

$$\oint_{C^+} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), z_2\right]\right)$$

Hallaremos en primer lugar el residuo correspondiente a $z_1 = 0$, siendo en este caso $f(z) = \frac{1}{z}\frac{5z-2}{(z-1)} = \frac{1}{z}\phi(z)$, con lo que $\phi(z) = \frac{5z-2}{(z-1)}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\left(\begin{array}{c} \frac{\phi(0)}{0!}z^0 + \frac{\phi'(0)}{1!}z^1 + \frac{\phi''(0)}{2!}z^2 + \frac{\phi'''(0)}{3!}z^3 + \\ \cdots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] = c_{-1} = \frac{\phi(0)}{0!} = 2 \end{aligned}$$

En el punto $z_2 = 1$, $f(z) = \frac{1}{z-1}\frac{5z-2}{z} = \frac{1}{z-1}\phi(z)$, con lo que $\phi(z) = \frac{5z-2}{z}$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1}\left(\begin{array}{c} \frac{\phi(1)}{0!}(z-1)^0 + \frac{\phi'(1)}{1!}(z-1)^1 + \frac{\phi''(1)}{2!}(z-1)^2 + \\ + \frac{\phi'''(1)}{3!}(z-1)^3 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + \cdots \end{array}\right) \\
\Rightarrow & \quad \mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] = c_{-1} = \frac{\phi(1)}{0!} = 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$\oint_{C^+} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i\,(2+3) = 10\pi i$$

Basándonos en el método anterior vamos a ver otra forma de calcular el residuo.
Supongamos que tenemos una función $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_1)^m}$, siendo $\phi(z)$ analítica en z_1 y $\phi(z_1) \neq 0$, aplicando la fórmula de Taylor tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(m)}(z_1)}{m!}(z-z_1)^m$$

desarrollando el sumatorio:

$$\frac{\cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_1)}{(m-1)!}(z-z_1)^{m-1} + \frac{\phi^{(m)}(z_1)}{m!}(z-z_1)^m + \cdots}{(z-z_1)^m} =$$

$$\cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_1)}{(m-1)!}(z-z_1)^{-1} + \frac{\phi^{(m)}(z_1)}{m!} + \cdots ,$$

por lo que ya se ve que el residuo es el coeficiente de $(z-z_1)^{-1}$ es decir $\frac{\phi^{(m-1)}(z_1)}{(m-1)!}$.
De lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema.

RESIDUOS Y SU USO EN LA INTEGRACIÓN

Teorema

Sea $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_1)^m}$, *siendo* $\phi(z)$ *análitica en* z_1 *y* $\phi(z_1) \neq 0$. *El residuo de la función* $f(z)$, *en* z_1 *viene dado por:*

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] = \frac{\phi^{(m-1)}(z_1)}{(m-1)!}$$

Ejemplo 18

Usar el teorema de los residuos para calcular la integral $\oint_{C^+} \frac{z+1}{z^2} dz$ *siendo* C *el círculo* $|z| = 2$*, orientado en sentido contrario al del reloj.*

Solución: Tenemos una singularidad aislada en $z_1 = 0$, siendo en este caso $f(z) = \frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\phi(z)$, con lo que $\phi(z) = z + 1$ y $m = 2$.

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z_1] = \frac{\phi^{m-1}(0)}{(m-1)!} = \frac{\phi'(0)}{1!} = 1$$

y la integral:

$$\oint_{C^+} \frac{z+1}{z^2} dz = 2\pi i$$

Ejercicio 25

Calcular $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$, siendo C: $|z| = 3$, (sentido positivo).
Solución: $\pi(e^i - e^{-i})$.

Ejercicio 26

Calcular $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)z^2} dz$, siendo C: $z(t) = -i + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Solución: $\frac{\pi}{e^i}$.

Ejercicio 27

Calcular $\oint_C \frac{z^2+1}{e^z+1} dz$, siendo C: $z(t) = \pi i + \pi e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Solución: $2\pi i(\pi^2 - 1)$.