EJERCICIOS
TEMA 1
CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA VARIABLE

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Ejercicio 1 *Demostrar, aplicando el principio de inducción, las siguientes propiedades*

$$a)\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N};\quad b)\ 2^n\leqslant n!\ si\ n\geqslant 4$$

Ejercicio 2 *Demostrar, aplicando el principio de inducción, las siguientes propiedades*

$$\begin{aligned} a)\ 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= n^2,\ \forall n\in\mathbb{N}\\ b)\ 1+5+9+\cdots+(4n-3) &= n(2n-1),\ \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Demostrar aplicando el principio de inducción*

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejercicio 4 *Hallar los números reales x que verifican*

$$||x-1|-|x+1||\leq 1$$

Solución: $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$.

Ejercicio 5 *Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos*

$$A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ -2<x<5\};\quad B=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 0<x\leq 12\};\quad C=\{x\in\mathbb{R}\ /\ -4\leq x\leq 2\}$$

Solución: A es abierto en $\mathbb{R}$. B no es abierto en $\mathbb{R}$. C es cerrado en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6 *Sea el conjunto*

$$B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$$

Hallar: puntos interiores, frontera, de acumulación y adherentes.

Solución: B no tiene ningún punto interior. La frontera de B es $B\cup\{0\}$. El único punto de acumulación de B es el 0. $adh(B)=B\cup\{0\}$.

Ejercicio 7 *a) Hallar los números reales x que verifican*

$$|3x-1|>|2x-4|$$

b) Estudiar si el conjunto de puntos que verifican la desigualdad anterior es abierto, cerrado o acotado.

Solución: a) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$. *b) Es un conjunto abierto. No es un conjunto acotado.*

Ejercicio 8 *a) Hallar los números reales x que verifican*

$$|2x-1|<|x-4|$$

b) Estudiar si el conjunto de puntos que verifican la desigualdad anterior es abierto, cerrado o acotado.

Solución: a) $(-3,\frac{1}{2})\cup[\frac{1}{2},\frac{5}{3})=(-3,\frac{1}{2})$. *b) Es un conjunto abierto y acotado.*

FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Ejercicio 9 *Dada la función*

$$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$$

demostrar que para $x_1,x_2\in(-1,1)$ se cumple la identidad siguiente

$$f(x_1)+f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2})$$

Ejercicio 10 *Hallar el dominio de definición y la imagen de las funciones siguientes*

$$a)\ y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}};\ b)\ y = \frac{x}{1 + x^2}$$

Solución: a) $\operatorname{Dom} f = (-\infty, 0)$. $\operatorname{Im} f = (0, \infty)$. *b)* $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. $\operatorname{Im} f = [-1/2, 1/2]$.

Ejercicio 11 *Hallar el dominio de las funciones siguientes*

$$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3};\quad b)\ g(x) = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{x^2 + x + 3}{x^2 + 1}} - 1\right)$$

Solución: a) $\operatorname{Dom} f = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$. *b)* $\operatorname{Dom} g = (-2, \infty)$.

Ejercicio 12 *a) Probar que* $f(x) = \sqrt{x - 1}$ *es estrictamente creciente en el* $\operatorname{Dom} f$. *b) Probar que* $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ *es estrictamente decreciente en* $B = \{x \in \mathbb{R}/x < 1\}$.

Ejercicio 13 *Estudiar si son pares o impares las siguientes funciones*

$$a)\ f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2});\ b)\ f(x) = x^2 + x$$

Solución: a) $f(x)$ *es impar. b)* $f(x)$ *no es par ni impar.*

Ejercicio 14 *Estudiar la paridad de las funciones*

$$a)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + x + x^3}{x^2 + \cos x + 4};\quad b)\ g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^5 + x^3 + 2}$$

Solución: a) $f(x)$ *es una función impar. b) La función* $g(x)$ *no es par ni impar.*

Ejercicio 15 *Estudiar si es periódica la función*

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

Solución: $f(x)$ *es periódica de periodo* 4π.

Ejercicio 16 *Hallar* $g[f(x)]$ *y* $f[g(x)]$ *si* $g(x) = x^2$ *y* $f(x) = 2^x$.

Solución:

$$g[f(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x};\quad f[g(x)] = 2^{x^2}$$

Ejercicio 17 *Hallar la inversa de la función*

$$y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Solución:

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Ejercicio 18 *Estudiar la función inversa de la función* $y = x^2$ *en el intervalo* $(0, \infty)$ *y construir sus gráficas.*

Solución: $x = \sqrt{y}$.

Ejercicio 19 *Se llama cicloide a la curva descrita por un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta. Supongamos que el punto móvil* M*, de la circunferencia coincide, al principio del movimiento, con el origen de coordenadas. Determinar las ecuaciones paramétricas de la cicloide.*

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}\ 0 \le t \le 2\pi$$

Ejercicio 20 *Se llama astroide a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes*

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{array}\right\}\ 0 \le t \le 2\pi$$

Obtener la ecuación de la curva en la forma $F(x, y) = 0$.

Solución: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Ejercicio 21 *Demostrar la fórmula*

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Ejercicio 22 *Hallar el dominio de definición de la función*

$$f(x) = \sqrt{\cos(\operatorname{sen} x)} + \operatorname{arcsen}\frac{1+x^2}{2x}$$

Solución: El dominio de definición de $f(x)$ consta sólo de los dos puntos $x = \pm 1$.

Ejercicio 23 *Hallar el periodo de las funciones*

$$a)\quad f(x) = |\operatorname{sen} x|\,;\quad b)\quad f(x) = 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$$

Solución: a) $T = \pi$. b) $T = \pi/2$.

Ejercicio 24 *Demostrar la fórmula*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Ejercicio 25 *Demostrar la fórmula*

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a\operatorname{sh} b$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIONES

Ejercicio 26 *Demostrar, utilizando la definición correspondiente, que*

$$\lim_{x\to 1}(2x-1) = 1$$

Ejercicio 27 *Demostrar, utilizando la definición correspondiente, los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7x+2}{4x+3} = \frac{7}{4};\quad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{(2-x)^2} = +\infty;\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$$

Ejercicio 28 *Analizar los límites*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen} x;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

Solución: a) $\nexists\lim$. b) $\nexists\lim$.

Ejercicio 29 *Hallar los límites siguientes*

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-3x+2};\quad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{|x-2|}$$

Solución: a) -1. b) $\nexists\lim$.

Ejercicio 30 *Hallar cuando $x\to 0$ los límites laterales de la función*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$$

Solución: $f(0^+) = \sqrt{2}$; $f(0^-) = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 31 *Hallar cuando $x\to 0$ los límites laterales de la función*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$$

Solución: $f(0^+) = 0$; $f(0^-) = 1$.

Ejercicio 32 *Hallar los límites laterales de las siguientes funciones*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si \quad x \le 1 \\ 3x-5 & si \quad x > 1 \end{cases} \quad \textit{cuando } x \to 1; \quad b)\ f(x) = \frac{5}{(x-2)^3} \quad \textit{cuando } x \to 2$$

Solución: a) $f(1^-) = 1$; $f(1^+) = -2$. *b)* $f(2^-) = -\infty$; $f(2^+) = +\infty$.

Ejercicio 33 *Hallar*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

Solución: $f(1^-) = -2$; $f(1^+) = 2$. $\nexists \lim$.

Ejercicio 34 *Hallar*

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}$$

Solución: $f(2^-) = 1$; $f(2^+) = 0$. $\nexists \lim$.

INFINITÉSIMOS

Ejercicio 35 *Calcular los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\ln(1+4x)}; \quad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}; \quad c)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} 4x)}{e^{\operatorname{sen} 5x}-1}$$

Solución: a) $\frac{5}{4}$; *b)* -2; *c)* $\frac{4}{5}$.

Ejercicio 36 *Calcular los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x-1}; \quad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{x} \ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}; \quad c)\ \lim_{x \to \infty} x(a^{1/x}-1)$$

Solución: a) 1; *b)* $3/5$; *c)* $\ln a$.

Ejercicio 37 *Calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$$

Solución: -1.

INFINITOS

Ejercicio 38 *Calcular el límite*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^6+4x^3+1}{4x^6+2x^5+14x^2}$$

Solución: $\frac{7}{4}$.

Ejercicio 39 *Calcular los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{0{,}0001x}{7^{10} \ln x}; \quad b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{5x^{100}}; \quad c)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{10^{10} x^{200}}$$

Solución: a) ∞; *b)* ∞; *c)* ∞.

Ejercicio 40 *Calcular*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x}+x^3+e^{3x}}{x!}$$

Solución: ∞.

Ejercicio 41 *Hallar las constantes a y b para que se verifique*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$$

Solución: $a = 1, b = -1$.

INDETERMINACIONES

Ejercicio 42 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^2\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3x^2}$$

Solución: a) 1. b) $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 43 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right);\quad b)\ \lim_{x\to a}\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})}{x-a}$$

Solución: a) $\frac{3}{2}$. b) $\frac{\sqrt[n]{a}}{an}$.

Ejercicio 44 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\,[\cos x]^{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$$

Solución: a) 1. b) 1.

Ejercicio 45 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2x^2};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} 2x \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$$

Solución: a) 1/2. b) 2.

Ejercicio 46 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right);\quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$

Solución: a) 0. b) 2/3.

Ejercicio 47 *Calcular*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left[\cos^2 x\right]^{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x^2}};\quad b)\ \lim_{x\to 0} x^x$$

Solución: a) $1/e$. b) 1.

Ejercicio 48 *Hallar las constantes a y b para que se verifique*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$$

Solución: $a = 1, b = -1/2$.

ASÍNTOTAS

Ejercicio 49 *Obtener las asíntotas de las siguientes funciones*

$$a)\ f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2};\quad b)\ f(x)=\sqrt{1+x^2}+2x$$

Solución: a) Asíntota vertical $x = -1$. *Asíntota oblicua* $y = x - 2$. *b) La recta* $y = 3x$ *es asíntota oblicua por la derecha. La recta* $y = x$ *es asíntota oblicua por la izquierda.*

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIONES

Ejercicio 50 *Estudiar la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican.*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases} \quad en\ x = 0; \ \ b)\ f(x) = \frac{x^3+1}{x+1} \ \ en\ x = -1$$

Solución: a) En el punto $x = 0$ la función es continua. b) La función no existe en el punto $x = -1$, con lo cual no es continua.

Ejercicio 51 *Estudiar la continuidad de la función parte entera $E(x)$.*

Solución: tiene puntos de discontinuidad no evitables en todo valor entero de la variable independiente. El salto es $s = 1$.

Ejercicio 52 *Sea la función*

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

¿Cómo podemos elegir el valor de $f(x)$ en $x = 2$ para que f sea continua en este punto?.

Solución: $f(2) = 4$.

Ejercicio 53 *Estudiar en $x = 0$ la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución: tiene discontinuidad de 2ª especie.

Ejercicio 54 *Estudiar la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican*

$$\begin{aligned} a)\ f(x) &= \begin{cases} 1/5(2x^2+3) & si \quad -\infty < x \leq 1 \\ 6-5x & si \quad 1 < x < 3 \\ x-3 & si \quad 3 \leq x < \infty \end{cases} \quad en\ x = 1\ y\ x = 3 \\ b)\ g(x) &= \begin{cases} -2x^2 & si \quad x \leq 3 \\ 3x & si \quad x > 3 \end{cases} \quad en\ x = 3 \\ c)\ h(x) &= \begin{cases} \frac{|2x-3|}{2x-3} & si \quad x \neq 3/2 \\ 0 & si \quad x = 3/2 \end{cases} \quad en\ x = 3/2 \end{aligned}$$

Solución: a) $f(x)$ es continua en $x = 1$. $f(x)$ es discontinua de 1ª especie en $x = 3$, no evitable, salto 9. b) $g(x)$ es discontinua de 1ª especie en $x = 3$, no evitable, salto 3. c) $h(x)$ es discontinua de 1ª especie en $x = 3/2$, no evitable, salto 2.

Ejercicio 55 *Estudiar la continuidad en $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución: discontinuidad de 2ª especie en $x = 0$.

Ejercicio 56 *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones*

$$a)\ f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2+5}); \quad b)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x + x^2 + 1}{2\cos x - 1}$$

Solución: a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. b) $x_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ son los puntos de discontinuidad de la función.

Ejercicio 57 *Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de las funciones*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases} ; \quad b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(2x+1)}{x+1} & si \quad x \neq -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \end{cases}$$

Solución: a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. b) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 58 *Estudiar la continuidad en* $\mathbb{R}$ *de la función*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^{1/x}} & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ \sqrt{x^2+1} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Solución: $f(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}-\{0\}$.

Ejercicio 59 *Determinar los valores de los parámetros* a *y* b *para que* f *sea continua en todo* $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & si \quad x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen} x+b & si \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución: $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 60 *Estudiar la continuidad en* $\mathbb{R}$ *de la función*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-2)^2}{(x-2)} & si \quad x\neq 2 \\ 0 & si \quad x=2 \end{cases}$$

Solución: f *es continua en* $\mathbb{R}$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Ejercicio 61 *Probar que* $x^3-3x+40=0$ *tiene alguna raíz real y dar un intervalo en el que esté contenida.*

Solución: $(-4,-3)$.

Ejercicio 62 *Probar que las gráficas de las funciones* $f(x)=\ln x$ *y* $g(x)=e^{-x}$ *se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.*

Solución: las gráficas se cortan en algún punto de $(1,2)$.

Ejercicio 63 *Dada la función*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-4}{4} & si \quad 0\leq x\leq 1/2 \\ e^{-x^2} & si \quad \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$

se cumple que $f(0)=-1<0$ *y* $f(1)=e^{-1}>0$. *Sin embargo no existe ningún* $c\in(0,1)$ *tal que* $f(c)=0$. *¿Contradice esto el teorema de Bolzano?.*

Solución: No hay contradición.

Ejercicio 64 *La función* $y=\operatorname{tg} x$ *toma valores de signos distintos en los extremos de* $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, *y sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice ésto el teorema de Bolzano?.*

Solución: No hay contradición.

Ejercicio 65 *Si el término independiente de un polinomio* $P(x)$ *es* -5 *y el valor que toma* $P(x)$ *en* 3 *es* 7, *razonar que hay algún punto en* $(0,3)$ *en el que* $P(x)$ *toma el valor* (-2).

Ejercicio 66 *Demostrar que todo polinomio de potencia máxima impar tiene al menos una raíz real.*

DERIVADA Y DIFERENCIAL

DEFINICIONES

Ejercicio 67 *Comprobar si es derivable en* $x=0$ *la función*

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

Solución: f *es derivable en* $x=0$, *y su derivada vale* $f'(0)=0$.

Ejercicio 68 *Comprobar si es derivable en $x = 0$ la función*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución: $f'(0) = 0$.

Ejercicio 69 *Estudiar en los puntos $x = -1$ y $x = 0$ la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1) & si & x \leq -1 \\ x^2 & si & -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & si & x \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $f(x)$ es derivable en $x = -1$ y $f'(-1) = -2$. No existe $f'(0)$.

Ejercicio 70 *Estudiar en los puntos $x = 0$ y $x = \pi/2$ la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si & x \leq 0 \\ \cos x & si & 0 < x < \pi/2 \\ (x - \pi/2)^2 & si & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Solución: $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. No existe $f'(\pi/2)$.

Ejercicio 71 *Estudiar si es derivable en $x = 1$ la función*

$$f(x) = |\ln x|$$

Solución: $f'_+(1) = 1$; $f'_-(1) = -1$; no es derivable.

Ejercicio 72 *Estudiar en $x = 0$ las derivadas laterales de la función*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Solución: $f'_+(0) = \infty$; $f'_-(0) = -\infty$.

Ejercicio 73 *Hallar en el punto $(2, 4)$ las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva*

$$y = x^3 - 3x + 2$$

Solución: la ecuación de la tangente es $y - 4 = 9(x - 2)$ y la ecuación de la normal $y - 4 = \frac{-1}{9}(x - 2)$.

Ejercicio 74 *Hallar el ángulo bajo el que se cortan la recta $y = 4 - x$ y la parábola $y = 4 - x^2/2$.*

Solución: ambas curvas se cortan bajo un ángulo de aproximadamente $18{,}45^o$.

Ejercicio 75 *Recordando el significado geométrico de la derivada, determinar el ángulo formado en el punto $x = 0$ por las tangentes a la izquierda y a la derecha de la curva*

$$y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

Solución: $\pi/2$.

Ejercicio 76 *Demostrar que la curva*

$$y = e^{|x|}$$

no puede tener tangente en el punto $x = 0$.

Solución: $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$.

Ejercicio 77 *¿Tiene tangente la curva $y = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$ en el punto $x = 0$?.*

Solución: sí.

Ejercicio 78 *Determinar todos los valores de los parámetros m y n para los cuales la función*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si & x < \pi \\ mx + b & si & x \geq \pi \end{cases}$$

a) es continua en $x = \pi$ y b) es derivable en $x = \pi$.

Solución: a) $f(x)$ *es continua en* $x = \pi$ *para todo par de valores de* m *y* n *tales que:* $m\pi + b = 0$. *b)* $f(x)$ *es derivable en* $x = \pi$ *si* $m = -1$, *y* $b = \pi$.

Ejercicio 79 *Demostrar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & si \quad x \neq 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

no es derivable en $x = 2$.

Ejercicio 80 *Estudiar la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(|x+1| - |x-1|\right)$$

Solución: no es derivable en $x = 0, x = -1$ *y* $x = 1$.

Ejercicio 81 *Estudiar en* $x = 0$ *la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \operatorname{arc}\cos(\cos x)$$

Solución: no es derivable.

Ejercicio 82 *Determinar todos los valores del parámetro* α *para los cuales la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

a) es continua en $x = 0$. *b) es derivable en* $x = 0$.

Solución: a) $\alpha > 0$; *b)* $\alpha > 1$.

Ejercicio 83 *Estudiar en* $x = 0$ *la continuidad y derivabilidad de la función*

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{x + |x|}{2} - \frac{x - |x|}{2}$$

Construir su gráfica.

Solución: es continua y no es derivable.

Ejercicio 84 *Estudiar en* $x = -1, x = 1$ *y* $x = 3$ *la derivabilidad de la función*

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x - 3|$$

Solución: no es derivable en ninguno de esos puntos.

Ejercicio 85 *Hallar, utilizando la definición, la derivada de la función constante*

$$f(x) = k$$

Solución: $f'(x) = 0$.

Ejercicio 86 *Hallar, utilizando la definición, la derivada de la función*

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Solución: $f'(x) = \cos x$.

Ejercicio 87 *Hallar, utilizando la diferencial, el valor aproximado de*

$$a) \ \operatorname{sen} 46^o; \ b) \ \sqrt[3]{8{,}02}$$

Solución: a) $\operatorname{sen} 46^o \simeq 0{,}71944$. *b)* $\sqrt[3]{8{,}02} \simeq 2{,}0016667$.

Ejercicio 88 *Hallar* dy, *para* $x = 0$ *y* $dx = 0.2$, *de la función*

$$y = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arctg} e^{5x}$$

Solución: $dy = 1.5$.

Ejercicio 89 *Calcular el incremento y la diferencial de la función* $y = x^3 - 7x^2 + 8$ *cuando* x *varía desde* 5 *a* 5.01.

Solución: $\Delta y = 0.050801, dy = 0.05$.

Ejercicio 90 *Empleando el concepto de diferencial, hallar el valor aproximado de*

$$a)\ \cos 31^o;\ b)\ \sqrt[5]{33}$$

Solución: a) 0.85752; *b)* 2.0125.

TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Ejercicio 91 *Hallar la derivada de las funciones siguientes*

$$a)\ f(x) = 2x \operatorname{arctg}(2x) - \ln\sqrt{1+4x^2};\quad b)\ f(x) = \cos^4(3x+1)^2$$

Solución:

$$a)\ f'(x) = 2\operatorname{arctg}(2x);\quad b)\ f'(x) = -24(3x+1)\cos^3(3x+1)^2\operatorname{sen}(3x+1)^2$$

Ejercicio 92 *Hallar la derivada de la función*

$$y = \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Solución:

$$y' = \frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Ejercicio 93 *Hallar* $y'(x)$ *siendo*

$$a)\ x = y^2\sqrt{1-y};\ b)\ x = 3y - \frac{\cos y}{2}$$

Solución:

$$a)\ y'_x = \frac{2\sqrt{1-y}}{4y-5y^2};\quad b)\ y'_x = \frac{1}{3+\frac{\operatorname{sen} y}{2}}$$

Ejercicio 94 *Hallar la pendiente de la tangente en un punto cualquiera de la curvas de ecuaciones paramétricas*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} x = a(t-\operatorname{sen} t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}\right\}\ 0 \le t \le 2\pi;\quad b)\ \left.\begin{array}{l} x = 2\ln(\operatorname{cotg} t) \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t \end{array}\right\}$$

Solución:

$$a)\ y'_x = \frac{a(\operatorname{sen} t)}{a(1-\cos t)};\quad b)\ y'_x = \operatorname{cotg} 2t$$

Ejercicio 95 *Hallar la derivada* $y'(x)$ *de las funciones dadas en forma paramétrica*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} x = e^{-t^2} \\ y = \operatorname{arctg}(2t+1) \end{array}\right\};\quad b)\ \left.\begin{array}{l} x = a(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t + \cos t) \end{array}\right\}$$

Solución: a) $y' = \frac{-e^{t^2}}{t+t(2t+1)^2}$. *b)* $y' = \operatorname{tg} t$.

Ejercicio 96 *Hallar la derivada* $y'(x)$ *de la función dada en forma paramétrica*

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right\}$$

Solución: $y' = t$.

Ejercicio 97 *Hallar la pendiente de la tangente en el punto* $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ *a la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución: $y' = -\frac{b}{a}$.

Ejercicio 98 *Hallar dy/dx si y es una función derivable de x que verifica*

$$\operatorname{sen}(x^2 + y) = y^2(3x + 1)$$

Solución:

$$y' = \frac{3y^2 - 2x\cos(x^2 + y)}{\cos(x^2 + y) - 2y(3x + 1)}$$

Ejercicio 99 *Hallar la derivada de las funciones dadas en forma implícita*

$$a)\ xy + x - 2y - 1 = 0;\quad b)\ x^3y - xy^3 = 2$$

Solución: a) $y' = \frac{y+1}{2-x}$; *b)* $y' = \frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2}$.

Ejercicio 100 *Hallar la derivada de las funciones dadas en forma implícita*

$$a)\ x + \sqrt{xy} + y = a;\quad b)\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución: a) $y' = -\frac{2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}+x}$; *b)* $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Ejercicio 101 *Calcular, mediante el empleo de logaritmos, la derivada de las funciones*

$$a)\ y = x^x;\quad b)\ y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{e^x}$$

Solución:

$$a)\ y' = x^x(\ln x + 1);\quad b)\ y' = \frac{-2x^2 + 5x - 1}{2\,(x^2 - 1)} \cdot \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{e^x}$$

Ejercicio 102 *Calcular, mediante el empleo de logaritmos, la derivada de la función*

$$y = \frac{e^{\operatorname{sh} ax}}{\operatorname{sh} bx - \operatorname{ch} bx}$$

Solución: $y\prime = (a\operatorname{ch} ax + b)y$.

DERIVADAS SUCESIVAS

Ejercicio 103 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ \ x = 0 \\ x - \frac{x^3}{6} & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

¿Cuántas veces es derivable en $x = 0$?.

Solución: la función es derivable sólo cuatro veces en $x = 0$.

Ejercicio 104 *Sea*

$$f(x) = |x|^3$$

Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$. Demostrar que no existe $f'''(0)$.

Solución: $f'(x) = 3x^2$ *si* $x \geq 0; -3x^2$ *si* $x < 0$. $f''(x) = 6x$ *si* $x \geq 0; -6x$ *si* $x < 0$. *No existe* $f'''(0)$ *pues* $f'''_+(0) = 6$, $f'''_-(0) = -6$.

Ejercicio 105 *Hallar las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones elementales*

$$a)\ f(x) = e^x;\ b)\ f(x) = \ln x;\ c)\ f(x) = x^k;\ d)\ f(x) = \operatorname{sen} x;\ e)\ f(x) = \cos x$$

Solución:

$$\begin{aligned} a)\ f^{(n)} &= e^x;\ \ b)\ f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};\ \ c)\ f^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} \\ d)\ f^{(n)} &= \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2});\ \ e)\ f^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Ejercicio 106 *Calcular la derivada de orden* 100 *de la función*

$$f(x) = \cos x \cdot (1 - x^2)$$

Solución:

$$f^{(100)}(x) = \cos(x + 100\frac{\pi}{2}) \cdot (1 - x^2) - 200x\cos(x + 99\frac{\pi}{2}) - 100 \cdot 99\cos(x + 98\frac{\pi}{2})$$

Ejercicio 107 *Calcular la derivada n-ésima de la función*

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x$$

Solución:

$$f^{(n)}(x) = \frac{-1}{2}2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicio 108 *Calcular la derivada n-ésima, en $x = 0$, de la función*

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Solución:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & si \quad n \text{ es par} \\ 0 & si \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejercicio 109 *Calcular la derivada n-ésima, en $x = 0$, de la función*

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Solución: $y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!;\ \ y^{(2n)}(0) = 0.$

Ejercicio 110 *Calcular la derivada n-ésima de la función*

$$f(x) = a^x$$

Solución: $f^{(n)}(x) = \ln^n a \cdot a^x$.

Ejercicio 111 *Calcular la derivada n-ésima, en $x = 0$, de la función*

$$f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!\left(\frac{13}{(-3)^{n+1}} - \frac{8}{(-2)^{n+1}}\right)$$

Ejercicio 112 *Calcular la derivada n-ésima, en $x = 0$, de la función*

$$f(x) = x^n.e^x$$

Solución: $f^{(n)}(0) = n!$.

Ejercicio 113 *Calcular la derivada primera, en $x = 0$, de la función*

$$f(x) = x(x - 1)(x - 2)...(x - 1000)$$

Solución: $f^{'}(0) = 1000!$.

Ejercicio 114 *Hallar las derivadas* $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ *de la curva de ecuaciones parámetricas*

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

Solución: $\dfrac{dy}{dx} = \frac{-b\cos t}{a \operatorname{sen} t};\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2 \operatorname{sen}^3 t}.$

Ejercicio 115 *Calcular el valor de y'', en el punto donde $y = 0$, si la función viene definida implicítamente por la ecuación*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

Solución: $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

Ejercicio 116 *Calcular $y''(x)$ si la función viene definida implicítamente por la ecuación*

$$\operatorname{arctg} y - y + x = 0$$

Solución: $y'' = \frac{-2(1+y^2)}{y^5}$.

Ejercicio 117 *Comprobar que la función $y(x)$ definida paramétricamente por las ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{l} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{array}\right\}$$

verifica la ecuación

$$(x + y)^2 y'' + 2(y - xy') = 0$$

Ejercicio 118 *La fórmula para calcular la curvatura de una curva dada en forma explícita por $y = y(x)$ es*

$$k = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|$$

Deducir la que corresponde a una curva dada en forma paramétrica y aplicarla para

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\} \text{ con } t = \frac{\pi}{2}$$

Solución: $k = \frac{1}{2\sqrt{2}|a|}$.

APROXIMACIÓN MEDIANTE POLINOMIOS DE TAYLOR

Ejercicio 119 *Obtener los polinomios de Maclaurin ($a = 0$) de las funciones elementales siguientes*

$$a)\ f(x) = e^x; \quad b)\ f(x) = \operatorname{sen} x; \quad c)\ f(x) = \cos x; \quad d)\ f(x) = \ln(1 + x); \quad e)\ f(x) = (1 + x)^\alpha$$

Solución:

$$\begin{array}{lll} a)\ P_n(x) & = & 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} \\ b)\ P_n(x) & = & \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ c)\ P_n(x) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \\ d)\ P_n(x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \\ e)\ P_n(x) & = & \dbinom{\alpha}{0} + \dbinom{\alpha}{1} x + \dbinom{\alpha}{2} x^2 + ... + \dbinom{\alpha}{n} x^n \end{array}$$

Ejercicio 120 *Obtener el polinomio de Maclaurin ($a = 0$), de la función*

$$f(x) = \cosh x$$

Solución:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!}$$

Ejercicio 121 *Calcular de forma aproximada el número e utilizando su polinomio de Maclaurin de grado $n = 8$. Acotar el error.*

Solución:

$$e \simeq 2{,}7182787698; \quad |R| < 3\frac{1}{9!} = 8{,}27 \cdot 10^{-6}$$

Ejercicio 122 *Calcular de forma aproximada* $\ln(1{,}1)$ *tomando el polinomio de Maclaurin de* $f(x) = \ln(1+x)$ *de grado* $n = 1$*. Acotar el error.*

Solución:

$$\ln(1{,}1) \simeq 0{,}1; \quad |R| < \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}005$$

Ejercicio 123 *Obtener el polinomio de Taylor (*$a = 8$*), de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$*. Calcular* $\sqrt[3]{8{,}03}$ *con un error menor de* 10^{-8}*.*

Solución:

$$P_n(x) = 2+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\right)\frac{(x-8)}{1!}+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{2^5}\right)\frac{(x-8)^2}{2!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot ...\cdot(3n-4)}{3^n}\cdot\frac{1}{2^{3n-1}}\frac{(x-8)^n}{n!}$$

$$\sqrt[3]{8{,}03} \simeq P_2(8{,}03) = 2+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\right)\frac{(0{,}03)}{1!}+(\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{2^5})\frac{(0{,}03)^2}{2!}$$

Ejercicio 124 *Dada la función*

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

a) Calcular el polinomio de Taylor de cuarto grado de f *en* $x = 0$*. b) Calcular un valor aproximado de* $\sqrt{1{,}02}$ *utilizando el polinomio de segundo grado.*

Solución:

$$a)\ 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4; \quad b)\ 1{,}00995$$

Ejercicio 125 *a) Calcular el polinomio de MacLaurin (*$a = 0$*), de grado* n*, de la función*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

b) Calcular $\frac{1}{1{,}1}$ *de forma aproximada, tomando* $n = 2$*, y acotar el error cometido.*

Solución:

$$a)\ 1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n; \quad b)\ \frac{1}{1{,}1} \simeq 0{,}91,\ |R| < 10^{-3}$$

Ejercicio 126 *a) Calcular el polinomio de MacLaurin (*$a = 0$*), de grado* n*, de la función*

$$f(x) = x^3 + e^x$$

b) Calcular $f(1)$ *de forma aproximada, considerando el polinomio de grado* $n = 3$*. c) Acotar el error cometido en el apartado anterior.*

Solución:

$$a)\ 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+7\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}; \quad b)\ f(1) \simeq \frac{11}{3}; \quad c)\ |R| < \frac{e}{24}$$

Ejercicio 127 *Sea* $f(x)$ *la función*

$$f(x) = xe^x$$

a) Calcular su polinomio de MacLaurin en $a = 0$*. b) Calcular de forma aproximada* $f(1) = e$ *con el polinomio de grado* $n = 3$*. Acotar el Error.*

Solución:

$$a)\ \frac{x}{1!}1+\frac{x^2}{2!}2+...+\frac{x^n}{n!}n; \quad b)\ e \simeq 2{,}5;\ |R| < \frac{5}{8}$$

Ejercicio 128 *Calcular el polinomio de Taylor, centrado en* $a = 1$*, y de grado* n*, de la función*

$$f(x) = \ln\sqrt{x}$$

Solución:

$$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2}+...+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

Ejercicio 129 *Aplicando el polinomio de Maclaurin (a = 0), de la función* $f(x) = \operatorname{ch} x$ *de grado* 3*, calcular* ch 0,5 *y acotar el error cometido.*

Solución:

$$\operatorname{ch} 0{,}5 \simeq 1{,}125; \quad |R_3(0{,}5)| < 3{,}9 \cdot 10^{-3}$$

Ejercicio 130 *Aproximar* $\operatorname{tg} x$ *por el polinomio de Maclaurin (a = 0) de grado* 3*. Acotar el error cometido si se tomara* $x = 0{,}1$*.*

Solución:

$$\operatorname{tg} x \simeq x + \frac{x^3}{3}. \quad |R_3(0{,}1)| < 10^{-4}$$

Ejercicio 131 *Verificar que para* $f(x) = e^{-x/2} \cos \frac{x}{2}$ *se cumple* $f^{(4)}(x) = \frac{-1}{4} f(x)$*. Hallar el polinomio de MacLaurin de orden* 6*.*

Solución:

$$P_6(x) = 1 + (\frac{-1}{2})x + (\frac{1}{2})x^2 + (\frac{-1}{4})x^3 + (\frac{1}{4})x^4 + (\frac{-1}{8})x^5 + (\frac{1}{8})x^6$$

Ejercicio 132 *Con la ayuda de los desarrollos adecuados, calcular los siguientes límites*

$$a) \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2+2x}; \quad b) \ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3 \cos x}$$

Solución: a)$\frac{1}{3}$*; b)* $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 133 *Con la ayuda de los desarrollos adecuados, calcular los siguientes límites*

$$a) \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}; \quad b) \ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2 \operatorname{sen} x}$$

Solución: a) 1/3*; b)* 1/3.

Ejercicio 134 *Con la ayuda de los desarrollos adecuados, calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x}{\ln^2(1+x^2)}$$

Solución: a) 1/3.

TEOREMA DE ROLLE

Ejercicio 135 *Sea la función*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

Comprobar si verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 3]$.

Solución: sí, $c = 1$.

Ejercicio 136 *Sea la función*

$$f(x) = \cos x$$

Comprobar si verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[\pi, 5\pi]$.

Solución: sí, $c = 2\pi, 3\pi$ *y* 4π.

Ejercicio 137 *La función*

$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|}$$

toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1/2, 1/2]$ *pero su derivada no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice ésto el teorema de Rolle?.*

Solución: no.

Ejercicio 138 *Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ y es impar, la ecuación*

$$x^n + x + 1 = 0$$

tiene una única raíz real.

Ejercicio 139 *La ecuación*

$$e^x - 1 - x = 0$$

admite la raíz real $x = 0$. Probar que no puede tener otra.

Ejercicio 140 *Estudiar si las siguientes funciones verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos que se indican. En caso afirmativo hallar el punto c intermedio donde $f'(c) = 0$.*

$$a)\ f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}\ \text{en}\ [0,2];\quad b)\ f(x) = x^3 - 9x\ \text{en}\ [-3,3];\ c)\ f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ \text{en}\ [-\pi,\pi]$$

Solución: a) no; b) sí, $c = \pm\sqrt{3}$; c) no.

Ejercicio 141 *Demostrar que la ecuación $16x^4 - 64x + 31 = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(0,1)$.*

Ejercicio 142 *Demostrar que la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene sólo una raíz real si $b^2 - 3ac < 0$.*

Ejercicio 143 *Demostrar que la ecuación $x^3 + ax + b = 0$, con $a < 0$, tiene a lo sumo una raíz real en el intervalo*

$$\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3|a|}, \frac{1}{3}\sqrt{3|a|}\right)$$

Ejercicio 144 *Sea $P(x)$ un polinomio. Demostrar que entre dos raíces consecutivas de $P'(x)$ sólo puede existir una de $P(x)$.*

Ejercicio 145 *Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $[0,1]$.*

Ejercicio 146 *Demostrar que la derivada de*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas raíces en el intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 147 *Determinar el número de raíces reales positivas de la ecuación*

$$x^2 + x = e^{-x} + 2$$

Dar un intervalo de longitud 1 en el que esté contenida cada una de ellas.

Solución: tiene una raíz en $(1,2)$.

Ejercicio 148 *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación: $2x = \operatorname{sen}^2 x - 2$ en el intervalo $[-5,5]$?.*

Solución: una.

Ejercicio 149 *Sea*

$$p(x) = x^5 - 5x + a$$

Demostrar que: a) El polinomio $p(x)$ posee a lo sumo una raíz en el intervalo $[-1,1]$, para todo $a \in \mathbb{R}$. b) El polinomio $p(x)$ posee una raíz en $[-1,1]$ si, y sólo si, $|a| < 4$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE

Ejercicio 150 *Sea la función*

$$f(x) = x - x^3$$

Comprobar si verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-2,1]$.

Solución: sí, $c = -1$.

Ejercicio 151 *Sea la función*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

Comprobar si verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución: sí, $c = 0$.

Ejercicio 152 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Comprobar si verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$.

Solución: $c = \frac{1}{2}$, $c = \sqrt{2}$.

Ejercicio 153 *Estudiar si las siguientes funciones*

$$a)\ f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x \quad en \quad [0, 1]; \quad b)\ f(x) = x^2 + px + q \quad en \quad [a, b]$$

verifican las hipótesis del teorema de Lagrange en los intervalos que se indican. En caso afirmativo hallar el punto c intermedio.

Solución: a) sí, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$; *b) sí,* $c = \frac{a+b}{2}$.

Ejercicio 154 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le x_0 \\ ax + b & si \quad x > x_0 \end{cases}$$

con $0 < x_0 < 2$. *a) Determinar los coeficientes a y b para que* $f(x)$ *verifique las hipótesis del teorema de Lagrange en* $[0, 2]$. *b) Tomando* $x_0 = 1$ *hallar el punto c intermedio.*

Solución: a) $a = 2x_0, b = -x_0^2$. *b)* $c = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 155 *Demostrar que si* $x > 0$ *se cumplen las desigualdades*

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1 + x) < x$$

Ejercicio 156 *Demostrar que para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se cumple la desigualdad*

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x \le y - x$$

Ejercicio 157 *Demostrar que para* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple la desigualdad*

$$\ln(1 + x^2) > \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Ejercicio 158 *Demostrar que para* $x \in [-1, 1]$ *se cumple la igualdad*

$$2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1 + x^2} = 0$$

Ejercicio 159 *Demostrar que para* $x \ge 1$ *se cumple la igualdad*

$$2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1 + x^2} = \pi$$

Ejercicio 160 *Demostrar que para* $x \le -1$ *se cumple la igualdad*

$$2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1 + x^2} = -\pi$$

Ejercicio 161 *Comprobar si satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en* $[-3, 3]$ *las funciones*

$$f(x) = e^x; \;\; g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Solución: f y g no, pero g y f sí.

Ejercicio 162 *Aplicar el teorema de Cauchy en $[0,3]$ y calcular c para las funciones*

$$f(x) = x^3; \;\; g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

Solución: $c = \frac{3+\sqrt{21}}{4}$.

REGLA DE L'HÔPITAL

Ejercicio 163 *Calcular*

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}; \; b) \lim_{x\to 2} \frac{\cos x \cdot \ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$$

Solución: a) 0; *b)* $\cos 2$.

Ejercicio 164 *Calcular*

$$a) \lim_{x\to +\infty} (x - \ln^2 x); \;\; b) \lim_{x\to 0} x^x$$

Solución: a) $+\infty$; *b)* 1.

Ejercicio 165 *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$$

Solución: 1. *No es aplicable la regla de l´Hôpital.*

Ejercicio 166 *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + x + \operatorname{sen} x \cos x}{(x + \operatorname{sen} x \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x}}$$

Solución: $\nexists$. *No es aplicable la regla de l´Hôpital.*

Ejercicio 167 *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

Solución: 0. *No es aplicable la regla de l´Hôpital.*

Ejercicio 168 *Calcular, aplicando la regla de l´Hôpital*

$$a) \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\ln(1+x))}; \; b) \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Solución: a) 1*; b)* 2.

Ejercicio 169 *Calcular, aplicando la regla de l´Hôpital*

$$a) \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}; \; b) \lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right]$$

Solución: a) 0*; b)* $1/2$.

Ejercicio 170 *Calcular, aplicando la regla de l´Hôpital*

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{1 - x \operatorname{cotg} x}{x^2}; \; b) \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)^{\operatorname{sen} x}$$

Solución: a) $1/3$*; b)* 1.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Ejercicio 171 *Hallar los intervalos donde son estrictamente crecientes o decrecientes las funciones*

$$a) \; f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1; \;\; b) \; f(x) = \ln|x|$$

Solución: a) estrictamente creciente en $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ *y estrictamente decreciente en* $(-1,3)$ *;b) estrictamente decreciente en* $(-\infty,0)$ *y estrictamente creciente en* $(0,+\infty)$ *.*

Ejercicio 172 *Demostrar que es creciente la función*

$$f(x)=x+\cos x-a$$

Deducir que la ecuación $x+\cos x-a=0$ *no tiene raíces positivas si* $a<1$ *y que tiene una raíz positiva si* $a>1$*.*

Ejercicio 173 *Hallar los intervalos donde son estrictamente crecientes o decrecientes las funciones*

$$a)\ f(x)=2x^2-\ln x;\quad b)\ f(x)=x^2e^{-x}$$

Solución: a) estrictamente creciente en $(1/2,\infty)$ *y estrictamente decreciente en* $(0,1/2)$*; b) estrictamente creciente en* $(0,2)$ *y estrictamente decreciente en* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$*.*

Ejercicio 174 *Hallar los intervalos donde son estrictamente crecientes o decrecientes las funciones*

$$a)\ f(x)=\frac{2x}{\ln x};\quad b)\ f(x)=2^{\frac{1}{x-a}}$$

Solución: a) estrictamente creciente en (e,∞) *y estrictamente decreciente en* $(0,1)\cup(1,e)$*; b) estrictamente decreciente en* $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$*.*

CONDICIONES SUFICIENTES DE EXTREMO RELATIVO

Ejercicio 175 *Estudiar, mediante el criterio de la derivada primera, los puntos críticos de las funciones*

$$a)\ f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1;\ b)\ f(x)=x^{1/3}(x-4);\ c)\ f(x)=\begin{cases}2x^2+3 & si\quad x\neq 0\\ 4 & si\quad x=0\end{cases}$$

Solución: a) máximo relativo en $x=1$ *y mínimo relativo en* $x=3$*; b) mínimo relativo en* $x=1$*; c) máximo relativo en* $x=0$*.*

Ejercicio 176 *Estudiar, mediante el criterio de la derivada segunda, los puntos críticos de las funciones*

$$a)\ f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1;\ b)\ f(x)=3x^5-5x^3+2$$

Solución: a) máximo relativo en $x=1$ *y mínimo relativo en* $x=3$*; b) máximo relativo en* $x=-1$*, mínimo relativo en* $x=1$*.*

Ejercicio 177 *Estudiar los puntos críticos de las funciones*

$$a)\ f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1;\ b)\ f(x)=(x+1)^{10}$$

Solución: a) mínimo relativo en $x=1$*; b) mínimo relativo en* $x=-1$*.*

Ejercicio 178 *Estudiar, utilizando los criterios de la derivada primera y de la derivada segunda, los puntos críticos de las funciones*

$$a)\ f(x)=\frac{3x^4}{4}-x^3-9x^2+7;\quad b)\ f(x)=x(x+1)^3(x-3)^2$$

Solución: a) $x=-2$ *es mínimo,* $x=0$ *es máximo,* $x=3$ *es mínimo; b)* $x=-1$ *no es extremo,* $x\simeq-0{,}28$ *es mínimo,* $x\simeq 1{,}78$ *es máximo,* $x=3$ *es mínimo.*

Ejercicio 179 *Estudiar el punto crítico* $x=0$ *de la función*

$$f(x)=\operatorname{ch}x+\cos x$$

Solución: mínimo.

Ejercicio 180 *Hallar los extremos relativos de la función*

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

siendo $n\in\mathbb{N}$*.*

Solución: si n es impar hay un máximo en $x = 0$.

Ejercicio 181 *Estudiar el punto crítico $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$$

Solución: máximo.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejercicio 182 *Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican*

$$a)\ f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \text{ en } [0,2]\,;\ b)\ f(x) = (x+1)^{10} \text{ en } [-2,2]$$

Solución: a) máximo absoluto en $x = 0$ y en $x = 2$ y mínimo absoluto en $x = 1$; b) máximo absoluto en $x = 2$ y mínimo absoluto en $x = -1$.

Ejercicio 183 *Determinar los extremos absolutos de la función*

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ en el intervalo } \left[\frac{1}{100}, 100\right]$$

Solución: mínimo absoluto en $x = 1$, máximo absoluto en $x = \frac{1}{100}$ y $x = 100$.

Ejercicio 184 *Demostrar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si \quad x > 0 \\ 3x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

alcanza un mínimo en $x = 0$, aunque su derivada no cambia de signo en ese punto. Calcular su máximo y mínimo absolutos.

Solución: máximo absoluto: $+\infty$ y mínimo absoluto: 0.

Ejercicio 185 *Calculando los extremos absolutos, demostrar las siguientes desigualdades*

$$a)\ x + \frac{1}{x} \geq 2,\ \forall x > 0; \quad b)\ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2},\ \forall x \neq 0$$

Ejercicio 186 *Estudiar los extremos relativos de las funciones*

$$a)\ f(x) = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60};\ b)\ f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$$

Solución: a) $x = -3$ es máximo relativo, $x = 0$ es mínimo relativo, $x = 1$ es máximo relativo; b) $x = 0$ es mínimo relativo.

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Ejercicio 187 *Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones*

$$a)\ f(x) = \frac{1 + 4x^3}{x};\ b)\ f(x) = e^{-x^2}$$

Solución: a) convexa en $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right) \cup (0, \infty)$ y cóncava en $\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$. El único punto de inflexión es $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$; b) convexa en $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ y cóncava en $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Dos puntos de inflexión en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 188 *Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones*

$$a)\ f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1};\ b)\ f(x) = |x|^{1/3}$$

Solución: a) convexa en $(-1, 0)$ y cóncava en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, puntos de inflexión $x = -1$ y $x = 0$; b) cóncava en $(-\infty, +\infty)$, sin puntos de inflexión.

Ejercicio 189 *Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la curva de Gauss*

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Solución: convexa en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ *y cóncava en* $\left(-\infty, -1/\sqrt{2}\right) \cup (1/\sqrt{2}, +\infty)$, *puntos de inflexión* $x = -1/\sqrt{2}$ *y* $x = 1/\sqrt{2}$.

Ejercicio 190 *Demostrar que los posibles puntos de inflexión de* $y = x \operatorname{sen} x$ *están sobre la curva*

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2$$

Ejercicio 191 *Sea* $f(x)$ *una función estrictamente positiva y dos veces derivable al menos. Se considera la función* $g(x) = \ln(f(x))$. *Demostrar que* $g(x)$ *es convexa si lo es* $f(x)$.

CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

Ejercicio 192 *Construir la gráfica de la función*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

Solución: máximo relativo en $x = -3$, *punto de inflexión en* $x = 0$, *asíntota vertical* $x = -1$, *asíntota oblicua* $y = x - 2$.

Ejercicio 193 *Construir la gráfica de la función*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$$

Solución: mínimo relativo en $x = 0$, *máximo relativo en* $x = \frac{2}{3}$, *punto de inflexión en* $x = 1$, *asíntota oblicua* $y = -x + \frac{1}{3}$.

Ejercicio 194 *Construir la gráfica de la función*

$$f(x) = \frac{1 + 4x^3}{x}$$

Solución: mínimo en $x = 1/2$; *punto de inflexión en* $x = -0{,}63$; *asíntota vertical* $x = 0$.

Ejercicio 195 *Construir la gráfica de la función*

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

Solución: decreciente y cóncava; asíntota oblicua $y = -x$.

Ejercicio 196 *Razonando adecuadamente, dibujar la gráfica de la función* $y = f(x)$, *en un entorno suficientemente pequeño del punto* $x = -1$, *conociendo las condiciones*

$$f(-1) = 2;\ f'(-1) = -1;\ f''(-1) = 0;\ f'''(x) > 0$$

OPTIMIZACIÓN EN INGENIERÍA

Ejercicio 197 *En un taller se quiere construir una caja abierta con una lámina de metal de* 24 cm *de ancho y* 45 cm *de largo. Para ello se cortan cuatro cuadrados iguales en las esquinas y se doblan hacia arriba las pestañas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?.*

Solución: la caja de volumen máximo se obtiene con 14 cm *de ancho,* 35 cm *de largo y* 5 cm *de profundidad.*

Ejercicio 198 *Un campo de futbol tiene por dimensiones:* 100 m *de largo por* 61 m *de ancho, estando la porteria, de* 11 m *de ancho situada a* 25 m *del corner. ¿Desde qué punto de la banda será más fácil meter gol en la portería?.*

Solución: debe lanzarse a 30 m *de distancia del corner.*

Ejercicio 199 *Un operario debe cercar una zona rectangular para que los niños jueguen, dentro de un terreno con forma de triángulo rectángulo de catetos* 4 *y* 12 *metros y le han puesto como condición que dos lados del parque infantil estén sobre los catetos. Hallar el área máxima que puede tener dicho parque infantil.*

Solución: las dimensiones del parque serán pues de $2\,\mathrm{m}$ *de ancho y* $6\,\mathrm{m}$ *de largo.*

Ejercicio 200 *Dos pueblos* P *y* Q *están en distintas orillas de un río de* $5\,\mathrm{km}$ *de ancho, como se muestra en la figura. Pedro, que vive en* P*, tiene su novia en* Q *y quiere llegar a verla en el mínimo tiempo posible. Hallar el camino que debe seguir, sabiendo que Pedro nada a una velocidad constante de* $3\,\mathrm{km/\,h}$ *y camina a una velocidad constante de* $5\,\mathrm{km/\,h}$.

Solución: el trayecto que debe recorrer andando: $x = 12 - \frac{15}{4} \simeq 8{,}25\,\mathrm{km}$.

Ejercicio 201 *Los cauces de dos ríos* r_1 *y* r_2 *tienen por ecuaciones* $r_1 : y - x^2 = 0$ *y* $r_2 : x - y - 2 = 0$ *(con las coordenadas en kilómetros). Se pretende construir un canal rectilíneo que una ambos ríos. Sabiendo que el coste de cada kilómetro de canal es de* 90000€*, hallar el coste mínimo.*

Solución: el coste mínimo es 111369€.

Ejercicio 202 *Una compañía de autobuses alquilará uno con capacidad para* 50 *personas a grupos de* 36 *o más. Si un grupo consta de* 36 *personas, pagará cada una* 60€*. Para grupos mayores, se reduce* 1€ *el precio por persona, por cada una que exceda de* 36*. Determine el tamaño del grupo que hace máximo el ingreso de la compañía.*

Solución: 48 *personas.*

Ejercicio 203 *Un cultivador de naranjas de Valencia estima que, si planta* 60 *naranjos, obtendrá una cosecha media de* 400 *naranjas por árbol. Este número bajará* 4 *unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hallar el número de árboles que hace máxima la cosecha.*

Solución: 80 *naranjos.*

Ejercicio 204 *Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematado en su parte superior con un semicírculo, y se quiere contornear con* p *metros de borde metálico. Hallar el radio de la parte semicircular si el área de la ventana ha de ser máxima.*

Solución: $r = \frac{p}{\pi+4}$.

Ejercicio 205 *La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Hallar el ancho de la viga de máxima resistencia que se puede obtener de un tronco de madera de* 16 *cm de diámetro.*

Solución: $8\,\mathrm{cm}$.

Ejercicio 206 *Inscribir en una esfera de radio* R*, un cilindro de superficie lateral máxima.*

Solución: radio del cilindro $r = R/\sqrt{2}$.

Ejercicio 207 *El precio del diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que rompiéndolo en dos partes, existe una depreciación de su valor, y que esta depreciación es máxima cuando las dos partes son iguales.*

Ejercicio 208 *Dos postes de* 12 *y* $28\,\mathrm{m}$ *de altura distan entre sí* $30\,\mathrm{m}$*. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar la menor cantidad posible de cable?*

Solución: a $9\,\mathrm{m}$ *del poste bajo.*

Ejercicio 209 *Un espejo plano de forma cuadrada de* $80\,\mathrm{cm}$ *de lado se ha roto por una esquina según una recta. Uno de los trozos tiene forma de triángulo rectángulo de catetos* 40 *y* $32\,\mathrm{cm}$*. Calcular el área máxima del espejo rectangular que puede recortarse del otro trozo, de modo que los bordes del nuevo espejo sean paralelos al primitivo.*

Solución: $3920\,\mathrm{cm}^2$.