EJERCICIOS
TEMA 2
CÁLCULO INTEGRAL EN UNA VARIABLE

INTEGRAL INDEFINIDA

Ejercicio 1 *Calcular*

$$a) \int e^{4x}dx;\ b) \int 7^x dx;\ c) \int \sqrt[m]{x^n}dx$$

Solución: a) $\frac{1}{4}e^{4x}+C$; *b)* $\frac{7^x}{\ln 7}+C$; *c) Si* $\frac{n}{m}=-1$, $I=\ln|x|+C$. *Si* $\frac{n}{m}\neq -1$, $I=\frac{x^{(n/m)+1}}{n/m+1}+C$.

Ejercicio 2 *Calcular*

$$a) \int \cosh(3x+1)dx;\ b) \int \frac{dx}{1+2x^2}$$

Solución: a) $\frac{1}{3}\operatorname{senh}(3x+1)+C$; *b)* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C$.

Ejercicio 3 *Obtener por cambio de variable el valor de las siguientes integrales indefinidas*

$$a) \int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;\quad b) \int \frac{dx}{x\ln x}$$

Solución: a) $e^{\operatorname{arcsen} x}+C$. *b)* $\ln|\ln x|+C$.

Ejercicio 4 *Calcular por cambio de variable*

$$\int \frac{x^3}{2+x^8}dx$$

Solución: $\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+C$.

Ejercicio 5 *Calcular por cambio de variable el valor de las siguientes integrales indefinidas*

$$a) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx;\ b) \int \frac{x}{1+x^4}dx$$

Solución: a) $\ln|\operatorname{sen} x|+C$; *b)* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$.

Ejercicio 6 *Calcular por cambio de variable el valor de las siguientes integrales indefinidas*

$$a) \int \frac{(\ln x)^3}{x}dx;\ b) \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$$

Solución: a) $\frac{\ln|x^4|}{4}+C$; *b)* $2\left(\frac{(\sqrt{x})^3}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|\right)+C$.

Ejercicio 7 *Calcular por cambio de variable el valor de las siguientes integrales indefinidas*

$$a) \int x\sqrt{x-5}dx;\ b) \int \sqrt[3]{1+3\operatorname{sen} x}\cos x dx$$

Solución: a) $2\left[\frac{(\sqrt{x-5})^5}{5}+\frac{5(\sqrt{x-5})^3}{3}\right]+C$; *b)* $\frac{1}{4}(1+3\operatorname{sen} x)^{4/3}+C$.

Ejercicio 8 *Integrar por partes*

$$a) \int x^5\ln x dx;\ b) \int (x^2+1)\cos x dx$$

Solución: a) $\frac{x^6}{36}[6\ln x-1]+C$. *b)* $(x^2+1)\operatorname{sen} x+2x\cos x-2\operatorname{sen} x+C$.

Ejercicio 9 *Calcular, integrando por partes*

$$\int e^x\cos x dx$$

Solución: $\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x+\cos x)+C$.

Ejercicio 10 *Integrar por partes*

$$a) \int x \operatorname{sen} x dx; \quad b) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Solución: a) $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$; *b)* $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$.

Ejercicio 11 *Integrar por partes*

$$a) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad b) \int (x^3+1)\cos x dx$$

Solución: a) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$; *b)* $(x^3-6x+1)\operatorname{sen} x + (3x^2-6)\cos x + C$.

Ejercicio 12 *Integrar por partes*

$$a) \int \cos(\ln x) dx; \quad b) \int (x^2-2x+5)e^{-x} dx$$

Solución: a) $\frac{1}{2}x\left(\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\right) + C$; *b)* $-e^{-x}(x^2+5) + C$.

Ejercicio 13 *Obtener una fórmula de reducción para la integral*

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

Solución: $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$.

Ejercicio 14 *Integrando por partes, deducir la fórmula de reducción*

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

Ejercicio 15 *Sea*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Obtener la fórmula de reducción

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \ \forall_n \geq 2$$

Ejercicio 16 *Sea*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Obtener la fórmula de reducción

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}\right], \ \forall_n \geq 2$$

Ejercicio 17 *Obtener una fórmula de reducción para la integral*

$$I_n = \int (a^2-x^2)^n dx$$

Solución: $I_n = \frac{x(a^2-x^2)^n}{1+2n} + \frac{2na^2}{1+2n} I_{n-1}$.

Ejercicio 18 *Sea*

$$I(m+1,n+1) = \int \frac{\cos^{m+1} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x} dx$$

Obtener la fórmula de reducción, dependiendo de los dos índices

$$I(m+1,n+1) = -\frac{1}{n}\frac{\cos^m x}{\operatorname{sen}^n x} - \frac{m}{n} I(m-1,n-1)$$

Ejercicio 19 *Calcular las integrales de las funciones racionales siguientes*

$$a) \int \frac{dx}{x^2-4x+3};\quad b) \int \frac{x+1}{x^2+4x+4}dx;\quad c) \int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}dx$$
$$d) \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx;\quad e) \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

Solución:

$$a)\ \ln\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|}+C;\quad b)\ \ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+C;\quad c)\ \frac{x^2}{2}-4x+\ln(x^2+4x+13)+\frac{48}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$
$$d)\ \frac{1}{x}+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C;\quad e)\ \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

Ejercicio 20 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{16(x^2+2x+5)^2}+\frac{3(x+1)}{128(x^2+2x+5)}+\frac{3}{256}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

Ejercicio 21 *Calcular las integrales de las funciones racionales siguientes*

$$a) \int \frac{dx}{x^8+x^6};\quad b) \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Solución: a) $-\frac{x^{-5}}{5}+\frac{x^{-3}}{3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C$*; b)* $-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

Ejercicio 22 *Calcular las integrales de las funciones racionales siguientes*

$$a) \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx;\quad b) \int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$$

Solución: a) $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+C$*; b)* $\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3|+C$.

Ejercicio 23 *Calcular*

$$a) \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx;\quad b) \int (\operatorname{tg}x)^3dx$$

Solución: a) $\operatorname{arctg}(e^x)+C$*. b)* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 x+1)+C$.

Ejercicio 24 *Calcular*

$$a) \int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}dx;\quad b) \int \frac{(\operatorname{tg}x)^3+\operatorname{tg}x}{1-2\operatorname{tg}x}dx$$

Solución: a) $-3e^x+4\ln|e^x+1|+C$*. b)* $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x-\frac{1}{4}\ln|1-2\operatorname{tg}x|+C$.

Ejercicio 25 *Calcular*

$$I=\int \frac{dx}{1+2\operatorname{sen}x}$$

Solución: $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right)+C$.

Ejercicio 26 *Calcular*

$$a) \int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx;\quad b) \int \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x+\cos^2 x}dx$$

Solución: a) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)-x+C$*. b)* $\frac{-2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

Ejercicio 27 *Calcular*

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx$$

Solución: $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$.

Ejercicio 28 *Calcular*

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)dx$$

Solución: $\frac{-1}{22}\cos(11x) + \frac{1}{2}\cos x + C$.

Ejercicio 29 *Calcular*

$$a)\ \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}dx;\ b)\ \int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$$

Solución: a) $\frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$*; b)* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$.

Ejercicio 30 *Calcular*

$$a)\ \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx;\ b)\ \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx$$

Solución: a) $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$*; b)* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$.

Ejercicio 31 *Calcular*

$$a)\ \int \operatorname{sen}^4 x dx;\ b)\ \int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x dx$$

Solución: a) $\frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$*; b)* $\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6} + C$.

Ejercicio 32 *Calcular*

$$a)\ \int \operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 3x dx;\ b)\ \int \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x dx$$

Solución: a) $\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right) + C$*; b)* $-\frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} + C$.

Ejercicio 33 *Calcular*

$$\int \operatorname{sh}^2 x dx$$

Solución: $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + C$.

Ejercicio 34 *Calcular las siguientes integrales*

$$a)\ \int \sqrt{1-x^2}dx;\quad b)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Solución: a) $-\frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\arccos x}{2} + C$*. b)* $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argch} x + C$.

Ejercicio 35 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

Solución: $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \ln|\, x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$.

Ejercicio 36 *Calcular*

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$$

Solución: $\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^{2x}-1} + \frac{1}{2}\operatorname{argcosh} e^x + C$.

Ejercicio 37 *Calcular*

$$a)\ \int \sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx;\quad b)\ \int \sqrt{4-x^2}dx$$

Solución: a) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$*; b)* $2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right) + C$.

INTEGRAL DEFINIDA

Ejercicio 38 *Dada la función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[0, 3]$ por*

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Q \\ 2 & si \quad x \notin Q \end{cases}$$

estudiar la existencia de la integral según Riemann

$$\int_0^3 f(x)dx$$

Solución: la función $y = f(x)$ no es integrable (sentido Riemann) en el intervalo $[0, 3]$.

Ejercicio 39 *Utilizando la definición de integral, y si $b > a$, calcular*

$$\int_a^b kxdx$$

Ejercicio 40 *Utilizando la definición de integral (con $b > a$), calcular*

$$a) \int_a^b mdx \quad (m \text{ cte.}); \quad b) \int_a^b e^x dx$$

Ejercicio 41 *Calcular las derivadas de las funciones*

$$a)\ F(x) = \int_1^x \operatorname{sen} t^2 dt; \ b)\ F(x) = \int_1^{x^3} \ln t dt; \ c)\ F(x) = \int_{4x}^{x^2} \operatorname{arctg} t dt$$

Solución: a) $F'(x) = \operatorname{sen} x^2$. b) $F'(x) = 3x^2 \ln x^3$. c) $F'(x) = 2x \operatorname{arctg} x^2 - 4 \operatorname{arctg} 4x$.

Ejercicio 42 *Calcular las derivadas de las funciones*

$$a)\ F(x) = \int_1^{x^2} \cos t^3 dt; \ b)\ F(x) = \int_{\cos x^2}^{x^3} \sqrt{t} dt$$

Solución: a) $F'(x) = 2x \cos x^6$; b) $F'(x) = 3x^2\sqrt{x^3} - \sqrt{\cos x^2}(-2x \operatorname{sen} x^2)$.

Ejercicio 43 *Calcular, aplicando la regla de l'Hopital, los siguientes límites*

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} z)^2 dz}{\sqrt{x^2+1}}; \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}; \quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{z} dz}{x^3}$$

Solución: a) $\frac{\pi^2}{4}$; b) 0; c) $\nexists$.

Ejercicio 44 *Calcular el polinomio de MacLaurin de 4º grado de la función*

$$g(x) = \int_0^x \ln(t^2+1) dt$$

Solución: $\frac{x^3}{3}$.

Ejercicio 45 *Calcular los puntos críticos de la función*

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{z^2 - 5z + 4}{2 + e^z} dz$$

Solución: $0, \pm 1, \pm 2$.

Ejercicio 46 *Calcular las siguientes integrales definidas*

$$a) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx; \ b) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx; \ c) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Solución: a) 1. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 47 *Calcular el valor medio de la función* $f(x) = \cos^2 x$ *en el intervalo* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *¿En qué punto se alcanza este valor?.*

Solución: el valor medio es $\frac{1}{2}$. *El valor medio se alcanza en el punto* $c = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 48 *Calcular las siguientes integrales definidas*

$$a)\ \int_0^1 e^x dx;\ b)\ \int_1^e \frac{1}{x} dx;\ c)\ \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Solución: a) $e-1$; *b)* 1; *c)* $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|$.

Ejercicio 49 *Calcular las siguientes integrales definidas*

$$a)\ \int_0^2 |1-x| dx;\ b)\ \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx;\ c)\ \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$$

Solución: a) 1; *b)* 2; *c)* $200\sqrt{2}$.

Ejercicio 50 *En un circuito eléctrico el voltaje es* $e(t) = 160 \operatorname{sen} t$ *y la intensidad de corriente es* $i(t) = 2 \operatorname{sen}(t - \pi/6)$. *La potencia media se define como el valor medio de* $e(t) \cdot i(t)$ *en* $[0, 2\pi]$. *Calcular la potencia media.*

Solución: $80\sqrt{3}$.

Ejercicio 51 *Calcular*

$$\int_0^1 x e^x dx$$

Solución: 1.

Ejercicio 52 *Calcular*

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx$$

Solución: π.

Ejercicio 53 *Calcular*

$$\int_1^2 (4x-5)^3 dx$$

Solución: 5.

Ejercicio 54 *Calcular*

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Solución: $\frac{\pi r^2}{4}$.

Ejercicio 55 *Calcular, mediante cambio de variable, la integral*

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

Solución: $2\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Ejercicio 56 *Demostrar, mediante el cambio de variable* $t = \pi - x$, *que*

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x) dx$$

Ejercicio 57 *Demostrar que si $f(x)$ es una función par*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

y que si $f(x)$ es una función impar

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Ejercicio 58 *Se sabe que $\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Calcular, integrando por partes, $\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}dx$.*

Solución: $\pi \ln 2$.

Ejercicio 59 *Calcular la integral*

$$\int_{1}^{\frac{\pi^2}{4}} \operatorname{sen}\sqrt{x}dx$$

Solución: 2.

Ejercicio 60 *Obtener, mediante integración por partes, una fórmula de reducción para*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx$$

Solución: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Ejercicio 61 *Calcular de forma exacta las integrales*

$$I_1 = \int_0^1 xe^{x^2}dx;\ I_2 = \int_0^2 xe^{x^2}dx$$

Calcular las integrales anteriores de forma aproximada, usando el polinomio de Maclaurin de grado 4 de la función $f(x) = e^{x^2}$. Comparar los resultados.

Solución: $I_1 = 0.859; I_2 = 26.799$. $I_1 \simeq 0.833; I_2 \simeq 11{,}333$.

Ejercicio 62 *Calcular de forma exacta la integral*

$$I = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

Calcular la integral anterior de forma aproximada, usando el polinomio de Maclaurin, centrado en $a = 0$, y de grado 3, de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Solución: $I = 0.4388$; $I \simeq 0.458$.

Ejercicio 63 *Calcular de forma exacta la integral:*

$$I = \int_0^{\pi/8} \cos^4 x dx$$

Calcular la integral anterior de forma aproximada, usando el polinomio de Maclaurin, centrado en $a = 0$, y de grado 2, de la función $f(x) = \cos^4 x$.

Solución: $I = 0.3552$; $I \simeq 0.3523$.

Ejercicio 64 *Calcular de forma exacta la integral*

$$I = \int_0^1 \ln(1 + x^2)dx$$

Calcularla de forma aproximada, utilizando para ello el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función: $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Solución: $I = 0.26$; $I \simeq 0.33$.

INTEGRALES IMPROPIAS

Ejercicio 65 *Dada la integral impropia de primera especie (integral tipo de primera especie)*

$$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx, \quad con \quad a > 0$$

estudiar su carácter para los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\begin{cases} \lambda > 1, \text{ el límite es finito (Integral convergente) y vale } I = -\dfrac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \\ \lambda \leq 1, \text{ el límite es infinito (Integral divergente)} \end{cases}$$

Ejercicio 66 *Calcular las integrales impropias*

$$a)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};\ b)\ I = \int_0^{\infty} e^{-3x} dx$$

Solución: a) $I = \frac{\pi}{2}$. *b)* $I = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 67 *Calcular las integrales impropias*

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};\ b) \int_1^{+\infty} \frac{(2x+1)dx}{(1+x)x^2}$$

Solución: a) π; *b)* $1 + \ln 2$.

Ejercicio 68 *Calcular la integral impropia*

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$$

Solución: $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Ejercicio 69 *Estudiar el carácter de la integral impropia*

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)} dx$$

Solución: I *es convergente.*

Ejercicio 70 *Estudiar el carácter de la integral impropia*

$$I = \int_{-1}^{\infty} \frac{x^2}{(2+x^2)^2} dx$$

Solución: I *es convergente.*

Ejercicio 71 *Comprobar el carácter de las integrales*

$$a) \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx; \quad b) \int_1^{\infty} \frac{1}{x + \operatorname{sen}^2 x} dx$$

Solución: a) Divergente; b) Divergente.

Ejercicio 72 *Comprobar el carácter de las integrales*

$$a) \int_1^{\infty} (1 - \cos \frac{2}{x}) dx; \quad b) \int_a^{\infty} \frac{1}{1+2x^2+3x^4} dx$$

Solución: a) Convergente; b) Convergente.

Ejercicio 73 *Dada la integral impropia de segunda especie (integral tipo de segunda especie)*

$$J = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda} dx$$

con $f(x)$ no acotada en el extremo inferior, estudiar su carácter para los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\begin{cases} \lambda < 1, \text{ el límite es finito (Integral convergente) y vale } J = \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \\ \lambda \geq 1, \text{ el límite es infinito (Integral divergente)} \end{cases}$$

Ejercicio 74 *Estudiar el carácter de la integral impropia*

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$$

Solución: I es convergente.

Ejercicio 75 *Estudiar el carácter de la integral impropia*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4-1}$$

Solución: I es divergente.

Ejercicio 76 *Comprobar el carácter de las integrales*

$$a) \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\operatorname{sen} x}-1} dx; \quad b) \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^2}} dx$$

Solución: a) Converge; b) Converge.

Ejercicio 77 *Comprobar el carácter de las integrales*

$$a) \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{16-x^4}} dx; \quad b) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$$

Solución: a) Converge; b) Diverge.

Ejercicio 78 *Calcular la integral impropia*

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$$

Solución: $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 79 *Calcular*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(Se sugiere el cambio de variable $\frac{1}{x} = t$).

Solución: $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 80 *Calcular las integrales impropias*

$$a) \ I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}; \ b) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

Solución: a) divergente; b) $\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$.

Ejercicio 81 *Calcular las integrales impropias*

$$a) \ I = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \cos \frac{\pi}{1-x} dx; \ b) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Solución: a) divergente; b) $2\sqrt{\ln 2}$.

INTEGRALES PARAMÉTRICAS

Ejercicio 82 *Calcular la integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}, \ \textit{con } \lambda \geq 1$$

Solución: $I(\lambda) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\lambda}$.

Ejercicio 83 *Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de la función* $f(t) = 1$, *con* $s > 0$.

$$F(s) = \mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt, \ s > 0$$

Solución: $F(s) = \frac{1}{s}$.

Ejercicio 84 *Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de la función* $f(t) = t$, *con* $s > 0$.

Solución: $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$.

Ejercicio 85 *Calcular, usando la definición, la transformada de Laplace de* $f(t) = e^{\alpha t}$, *con* $s - \alpha > 0$.

Solución: $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s-\alpha}$.

Ejercicio 86 *Calcular, usando las integrales de Euler, las integrales*

$$a) \int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx; \quad b) \int_0^4 x^{3/2}(4-x)^{5/2} dx$$

Solución: a) 0.45. *b)* 12π.

Ejercicio 87 *Calcular* $\Gamma(n)$ *siendo* n *un número natural.*

Solución: $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Ejercicio 88 *A partir de la definición, demostrar*

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx$$

Ejercicio 89 *Hallar la derivada respecto de* λ *de la integral paramétrica*

$$I(\lambda) = \int_{2\lambda}^{\lambda^2} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} dx$$

Solución: $\frac{dI}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}(3 \operatorname{sen} \lambda^3 - 2 \operatorname{sen} 2\lambda^2)$.

Ejercicio 90 *Calcular*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx$$

Solución: $I(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha$.

Ejercicio 91 *Resolver la integral dependiente de un parámetro*

$$I(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda (\ln x)^8 dx$$

Solución: $I(\lambda) = \frac{8!}{(\lambda+1)^9}$.

Ejercicio 92 *Calcular la integral convergente*

$$I(\lambda) = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx, \quad \text{con } \lambda > 0$$

Solución: $I(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Ejercicio 93 *Partiendo de*

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$$

y mediante derivación respecto al parámetro, calcular

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$$

Solución: $n!$.

Ejercicio 94 *Mediante derivación en la integral*

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \alpha \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} dx$$

calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} dx$$

Solución: $I(1) = \pi \left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Ejercicio 95 *Sean*

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{\left(x^2 + t^2\right)^2} \quad y \quad G(t) = \int_0^t \frac{dx}{x^2 + t^2}, \quad con\ t > 0$$

Demostrar que $G'(t) + 2tF(t) = \frac{1}{2t^2}$. *Calcular* $F(t)$.

Solución: $F(t) = \frac{1}{8t^3}(2 + \pi)$.

Ejercicio 96 *Calcular, mediante derivación respecto al parámetro, la integral*

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} \operatorname{sen} x}{x} dx$$

con $\lambda > 0$.

Solución: $I(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \lambda$.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Ejercicio 97 *Calcular el área limitada por la sinusoide* $y = \operatorname{sen} x$ *y el eje* x *para* $x \in [0, 2\pi]$.

Solución: $A = 4$.

Ejercicio 98 *Calcular el área de la figura contenida entre las curvas* $4y = x^2$ *e* $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Solución: $A = 2\pi - \frac{4}{3}$.

Ejercicio 99 *Calcular el área de la figura limitada por las dos ramas de la curva* $(y - x)^2 = x^3$ *y la recta* $x = 1$.

Solución: $4/5$.

Ejercicio 100 *Calcular el área de la figura limitada por la curva* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ *y la recta* $x + y = 1$.

Solución: $1/3$.

Ejercicio 101 *Calcular el área de la figura limitada por las curvas* $f(x) = x^3$ *y* $f^{-1}(x)$.

Solución: 1.

Ejercicio 102 *Calcular el área común a los círculos* $x^2 + y^2 = 9$ *y* $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

Solución: $9(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8})$.

Ejercicio 103 *Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica* $y^2 = x^3$ *entre los puntos* $(0,0)$ *y* $(4,8)$.

Solución: $L = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$.

Ejercicio 104 *Comprobar la fórmula de la longitud de la circunferencia.*

Ejercicio 105 *Calcular la longitud del lazo de la curva* $3y^2 = x(x-1)^2$.

Solución: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ejercicio 106 *Calcular la longitud del arco de la curva* $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ *entre los puntos de abscisas* $x = 1$ *y* $x = e$.

Solución: $\frac{e^2+1}{4}$.

Ejercicio 107 *Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica* $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ *situado dentro de la parábola* $y^2 = \frac{x}{3}$.

Solución: $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$.

Ejercicio 108 *Calcular el área de la superficie del paraboloide, engendrado por la revolución alrededor del eje* Ox *del arco de parábola* $y^2 = 2x$, *correspondiente a la variación de* x *desde* $x = 0$ *hasta* $x = 1$.

Solución: $A = \frac{2\pi}{3}\left(3^{3/2} - 1\right)$.

Ejercicio 109 *Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje* Ox *la figura limitada por las dos ramas de la curva* $(y-x)^2 = x^3$ *y la recta* $x = 1$.

Solución: $V = \frac{8\pi}{7}$.

Ejercicio 110 *Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la catenaria* $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ *alrededor del eje* Ox *desde* $x = 0$ *hasta* $x = b$.

Solución: $V = \frac{\pi a^3}{4} \operatorname{sh} \frac{2b}{a} + \frac{\pi a^2 b}{2}$.

Ejercicio 111 *Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar un círculo de radio* a *alrededor de un eje situado en su plano y que dista* b *de su centro.*

Solución: $2a^2 b\pi^2$.

Ejercicio 112 *Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la curva* $y = x(x-a)$ *alrededor del eje* Ox *desde* $x = 0$ *hasta* $x = c$ *con* $c > a > 0$.

Solución: $\pi\left[\frac{c^5}{5} - \frac{ac^4}{2} + \frac{a^2c^3}{3}\right]$.

Ejercicio 113 *Hallar* c *en el ejercicio anterior, de modo que dicho volumen sea igual al del cono engendrado por el triángulo de vértices* $(0,0), (c,0)$ *y* $(c, c(c-a))$ *al girar en torno al eje* Ox.

Solución: $c = 5a/4$.