EJERCICIOS
TEMA 3
SUCESIONES Y SERIES

SUCESIONES NUMÉRICAS

Ejercicio 1 *Hallar el límite de*

$$a)\ a_n = \frac{8n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\operatorname{sen}^3\frac{1}{n}}{(2n^2+5n)\cos\frac{2\pi n-2}{6n+3}};\quad b)\ a_n = (n+2)\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$$

Solución: a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$*; b)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ejercicio 2 *Hallar*

$$a)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n!e^n}{n^n};\quad b)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(n!)^2\,e^{2n}}{n^{2n+1}}$$

Solución: a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$*; b)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\pi$.

Ejercicio 3 *Hallar*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n+3}-n;\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}\quad (c\neq d)$$

Solución: a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a-b}{c-d}$.

Ejercicio 4 *Calcular los siguientes límites*

$$\begin{array}{ll} a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2+3}; & b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\ln(n+1)}}; & d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n^3-1}\right)^{\frac{1}{\ln(n^4-3)}} \end{array}$$

Solución: a) $L = e^{-1/2}$; *b)* $L = \frac{1}{e}$; *c)* $L = e^2$; *d)* $L = e^{-\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 5 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$a)\ a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n;\ b)\ a_n = \left(\frac{2+n}{n+1}\right)^n;\ c)\ a_n = \sqrt[n]{n}$$

Solución: a) e^{-1}; *b)* e; *c)* 1.

Ejercicio 6 *Calcular los límites*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\cos 2\pi n)^{n^2+3};\quad b)\ \lim_{n\to\infty} n\,(\operatorname{sen}\pi n);\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Solución: a) 1; *b)* 0; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Ejercicio 7 *Hallar los límites siguientes*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!};\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

Solución: a) 1; *b)* 1.

Ejercicio 8 *Calcular*

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

Solución: 1.

Ejercicio 9 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$a)\ a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2}-n;\ b)\ a_n = \left(1+\frac{1}{n!+1}\right)^{n!-1}$$

Solución: a) 2/3; *b)* e.

Ejercicio 10 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$\begin{aligned} a)\ a_n &= \left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+n}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2-1}} \\ b)\ a_n &= \left[1-\ln(n^2+5n)+\ln(n^2+6n-3)\right]^{n+2} \end{aligned}$$

Solución: a) e; b) e.

Ejercicio 11 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$a)\ a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right);\ b)\ a_n = \left(n^5+n^4\right)^{1/n}$$

Solución: a) $\ln a$*; b)* 1.

Ejercicio 12 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$a)\ a_n = \frac{\ln n!}{\ln n^n};\ b)\ a_n = \frac{3+6+...+3n}{n^2}$$

Solución: a) 1*; b)* 3/2.

Ejercicio 13 *Hallar el límite de las sucesiones de término general*

$$a)\ a_n = \frac{\operatorname{sen}\pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + ... + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\ln n};\ b)\ a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Solución: a) π*; b)* $1/e$.

SERIES NUMÉRICAS

Ejercicio 14 *Estudiar el carácter de las series de término general*

$$a)\ a_n = \frac{2}{3^{n-1}};\quad b)\ a_n = 2^n;\quad c)\ a_n = (-1)^{n-1}\cdot 2$$

Solución: a) convergente; b) divergente; c) oscilante.

Ejercicio 15 *De la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se conoce que la sucesión de las sumas parciales* (S_n) *viene dada por*

$$S_n = \frac{3n+2}{n+4};\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

a) Hallar el término general a_n *de la serie. b) Hallar el carácter de la serie.*

Solución: a) $a_n = \frac{10}{(n+3)(n+4)}$*; b) convergente.*

Ejercicio 16 *Hallar, calculando sus sumas parciales, el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(0.2)^n;\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right);\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Solución: a) convergente; b) convergente; c) divergente; d) oscilante.

Ejercicio 17 *Determinar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3+1}$$

Solución: a) divergente; b) divergente.

Ejercicio 18 *Determinar el carácter de la serie de término general*

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Solución: divergente.

Ejercicio 19 *Hallar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right);\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-7)^n$$

Solución: a) divergente; b) convergente; c) divergente.

SERIES NUMÉRICAS de TÉRMINOS POSITIVOS

Ejercicio 20 *Determinar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{2+2n^5};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

Solución: a) divergente; b) divergente.

Ejercicio 21 *Hallar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+5};\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(\ln n)\,n^3}$$

Solución: a) convergente; b) convergente.

Ejercicio 22 *Determinar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^n}\right)$$

Solución: a) convergente; b) convergente.

Ejercicio 23 *Determinar el carácter de la series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{10n+3}{3n-1}$$

Solución: a) convergente; b) convergente.

Ejercicio 24 *Determinar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}\right)$$

Solución: a) convergente; b) divergente.

Ejercicio 25 *Determinar el carácter de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot e^{-n}$$

Solución: a) convergente; b) convergente.

Ejercicio 26 *Determinar el carácter de la series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\operatorname{sen}^3 n}{n^n};\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$$

Solución: a) convergente; b) convergente; c) convergente.

Ejercicio 27 *Hallar el carácter de las siguientes series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{\left(\ln\left(2^2\sqrt[3]{2}\right)\cdots\ln\left(2^n\sqrt[3]{n}\right)\right)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

Solución: a) divergente; b) convergente.

Ejercicio 28 *Hallar el carácter de las siguientes series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}\right)^2;\ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$$

Solución: a) convergente; b) convergente.

Ejercicio 29 *Hallar el carácter de las siguientes series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{2n}{n+1}\right]^{-n};\ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\left[\sqrt{3}+(-1)^n\right]^n}{5^n}$$

Solución: a) divergente; b) convergente.

SERIES ALTERNADAS

Ejercicio 30 *Estudiar la convergencia de la serie alternada (armónica alternada)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Solución: convergente.

Ejercicio 31 *Estudiar la convergencia de la serie alternada*

$$\frac{5}{2}-\frac{7}{4}+\frac{9}{6}-\frac{11}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{2n}+\ldots$$

Solución: divergente.

Ejercicio 32 *Acotar el error que se comete en la serie alternada*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

al considerar la suma aproximada S_n con $n=3$ y $n=4$.

Solución: Error $=|S-S_3|<|a_4|=\frac{1}{4}$; *Error* $=|S-S_4|<|a_5|=\frac{1}{5}$.

Ejercicio 33 *Determinar el carácter de la serie*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2\sqrt{7}}-\frac{4}{\sqrt{65}}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}+\ldots$$

Solución: convergente.

Ejercicio 34 *Estudiar la convergencia de la serie alternada*

$$1-\ln\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ldots$$

Solución: convergente.

Ejercicio 35 *Estudiar el carácter de la serie*

$$\frac{2}{1!}-\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}-\frac{5}{4!}+\frac{6}{5!}-...$$

Solución: convergente.

Ejercicio 36 *Estudiar la convergencia absoluta de la serie*

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$$

Solución: absolutamente convergente.

Ejercicio 37 *Estudiar la convergencia absoluta de las series*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

Solución: a) no es absolutamente convergente; b) absolutamente convergente.

SERIES de POTENCIAS

Ejercicio 38 *Hallar el radio de convergencia de las series*

$$a)\sum_{n=0}^{\infty} nx^n;\ b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Solución: a) $R=1$; *b)* $R=1$.

Ejercicio 39 *Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$$

Solución: a) converge puntualmemente en $x\in[-3,1)$*; b) converge puntualmemente en* $x\in(-1,1)$ *; c) converge puntualmente en todo R.*

Ejercicio 40 *Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos*

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2n}$$

Solución: a) converge puntualmemente en $x\in[-2,2)$*; b) converge puntualmemente en* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Ejercicio 41 *Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!x^n;\ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2};\ c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$$

Solución: a) Convergencia sólo en $x=0$*; b) Convergencia puntual en* $[-1,1]$*; c) Convergencia puntual en* $(-1,1]$.

Ejercicio 42 *Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n};\ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Solución: a) Convergencia puntual en $[0,4)$*; b) Convergencia puntual en* $(-2,2)$.

Ejercicio 43 *Analizar la convergencia de la serie*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

y demostrar que la función suma de la serie verifica

$$x^2f''(x)+xf'(x)-4x^2f(x)=0$$

DESARROLLO de una FUNCIÓN en SERIE de POTENCIAS

Ejercicio 44 *Obtener los desarrollos en serie de potencias de x (desarrollos de Maclaurin) de las funciones elementales*

$$a)\ e^x;\quad b)\ \operatorname{sen} x;\quad c)\ \cos x;\quad d)\ \ln(1+x);\quad e)\ (1+x)^\alpha$$

Solución:

$$a)\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{x^n}{n!};\ x\in\mathbb{R};\ b)\ \operatorname{sen} x=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!};\ x\in\mathbb{R};\ c)\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!};\ x\in\mathbb{R}$$

$$d)\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n};\ x\in(-1,1];\ e)\ (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n;\ x\in(-1,1)$$

Ejercicio 45 *Obtener el desarrollo de Maclaurin de las funciones*

$$a)\ \frac{1}{1+x};\quad b)\ \frac{1}{1-x};\quad c)\ \frac{1}{1+x^2};\quad d)\ \frac{1}{1-x^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a)\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n;\ x\in(-1,1);\ b)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n;\ x\in(-1,1) \\ c)\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n};\ x\in(-1,1);\ d)\ \frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n};\ x\in(-1,1) \end{aligned}$$

Ejercicio 46 *Desarrollar en serie de Taylor la función e^x alrededor de $x_0 = 1$.*

Solución:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n,\quad (x\in\mathbb{R})$$

Ejemplo 1 ***Ejercicio 47*** *Usando los desarrollos de Maclaurin de*

$$\frac{1}{1-x}\ y\ \frac{1}{1+x}$$

y derivando término a término, calcular los desarrollos de

$$a)\ \frac{1}{(1-x)^2};\quad b)\ \frac{1}{(1+x)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a)\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+\cdots,\quad x\in(-1,1) \\ b)\ \frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1} = 1-2x+3x^2+\cdots,\quad x\in(-1,1) \end{aligned}$$

Ejercicio 48 *Usando los desarrollos de Maclaurin de*

$$\frac{1}{1+x}\ y\ \frac{1}{1+x^2}$$

e integrando término a término, calcular los desarrollos de

$$a)\ \ln(1+x);\quad b)\ \operatorname{arctg} x$$

Solución:

$$\begin{aligned} a)\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots;\ x\in(-1,1) \\ b)\ \operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1};\ x\in(-1,1) \end{aligned}$$

Ejercicio 49 *Obtener el desarrollo de Maclaurin de la función*

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x$$

Solución:

$$\operatorname{arcsen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1};\ x\in(-1,1)$$

Ejercicio 50 *Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene como representación la serie de potencias que se indica, en los conjuntos dados:*

$$\begin{aligned} &a)\ \operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n};\ x\in\mathbb{R} \\ &b)\ \frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n;\ x\in(-1,1) \\ &c)\ \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-2}}{n\,(2n)!}x^{2n};\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 51 *Desarrollar en serie de potencias de x la función*

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $x \in (-1, 1)$.

Ejercicio 52 *Desarrollar en serie de potencias de x la función*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Solución: $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $x \in (-1, 1)$.

Ejercicio 53 *Desarrollar en serie de potencias de x la función*

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1 + (-1)^n 2^{n+1})x^n$; $x \in (-1/2, 1/2)$.

Ejercicio 54 *Desarrollar en serie de potencias de x la función*

$$f(x) = (1+x)e^{-x}$$

Solución: $\displaystyle 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n$; $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 55 *Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \ln x$ en torno al punto $a = 1$. Aplicando el desarrollo anterior, con $n = 3$, calcular de forma aproximada*

$$\int_0^1 x^7 \ln x dx$$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$.

Ejercicio 56 *Desarrollar en serie de potencias de x la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Aplicando el desarrollo anterior, con $n = 3$, calcular de forma aproximada*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$.

Ejercicio 57 *Desarrollar en serie de potencias de x la función $f(x) = x^{30}e^x$. Aplicando el desarrollo anterior, con tres términos del desarrollo, calcular de forma aproximada*

$$\int_0^1 x^{30} e^x dx$$

Solución: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+30}}{n!}$.