EJERCICIOS
TEMA 4
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

TOPOLOGÍA

Ejercicio 1 *Sea el conjunto $A = (0,1) \cup \{2\}$. Hallar $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, A' y $fr(A)$.*

Solución: $\overset{\circ}{A} = (0,1)$; $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$; $A' = [0,1]$; $fr(A) = \{0,1,2\}$.

Ejercicio 2 *Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}$: $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $B = (0,1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Estudiar si son abiertos o cerrados. Hallar el interior, la adherencia, el conjunto derivado y frontera de ambos.*

Solución: No son abiertos ni cerrados. $\overset{\circ}{A} = \emptyset = \overset{\circ}{B}$; $\overline{A} = [0,1] = \overline{B}$; $fr(A) = [0,1] = fr(B)$; $A' = [0,1] = B'$.

Ejercicio 3 *Sean los conjuntos*

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = \frac{3n-1}{2n}, \ n \in \mathbb{N} \right\}; \ n \in \mathbb{N} \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = \frac{n^2+2}{n^2}, \ n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

a) A y B ¿son cerrados?, ¿son abiertos?. b)Determinar si $A \cup B$ es un conjunto cerrado. c) Calcular $A', \overline{A}, B', \overline{B}, \overline{(A \cup B)}$ y $(A \cup B)'$.

Solución: a) A y B no son abiertos ni cerrados. b) $A \cup B$ es cerrado. c) $\overline{A} = A \cup \{3/2\}$; $A' = \{3/2\}$, $\overline{B} = B \cup \{1\}$; $B' = \{1\}$; $\overline{A \cup B} = A \cup B$; $(A \cup B)' = \{1, 3/2\}$.

Ejercicio 4 *Determinar: $\overset{\circ}{A}$, $ext(A)$, $fr(A)$, $\overline{A}$, A' siendo A el conjunto*

$$A = \{(x,y)/ \, |x| < 1, |y| < 1, \ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Solución: $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; $ext(A) = \mathbb{R}^2 - \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, |y| \leq 1, \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$;
$A' = \overline{A} = fr(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, \ \ |y| \leq 1, \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Ejercicio 5 *Dado el conjunto:*

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determinar el interior, la adherencia, el derivado y la frontera de C.

Solución: $\overset{\circ}{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 2\right\}$; $\overline{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$; $C' = \{0\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$; $fr(C) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = 2\right\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

Ejercicio 6 *En $\mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes conjuntos*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 2\right\}; B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \wedge y = 0\right\}; C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < \sqrt{2}\right\}$$

a) ¿Es $A - C$ cerrado?. Si no lo es, dar su adherencia. b) ¿Es $A - B$ abierto?. Si no lo es dar su interior. c) ¿Es A compacto? ¿Es $\overline{A}$ compacto? ¿Es $\overline{C}$ compacto? d) ¿Es $C - A$ cerrado?. Si no lo es, dar $\overline{C - A}$.

Solución: a) $A - C$ no es cerrado, $\overline{A - C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \wedge x \leq 1\right\}$. *b) $A - B$ es un conjunto abierto. c) A no es compacto, $\overline{A}$ es compacto, $\overline{C}$ no es compacto. d) $C - A$ no es cerrado,* $\overline{C - A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq \sqrt{2} \wedge x^2 + y^2 \geq 2\right\}$.

Ejercicio 7 *Sea en $\mathbb{R}^2$, el conjunto X de puntos (x,y) tales que $0 < x \leq a$, $-b < y < b$, excluyendo los puntos de la diagonal AB siendo $A(a,b)$ y $B(0,-b)$ e incluyendo los puntos*

$$Q_i \left(2a, \frac{b}{i}\right), \ i = 1, 2, 3, ..., n, ...; \quad \text{con} \ \ (a > 0, b > 0)$$

Calcular su conjunto derivado, interior, adherencia y calificar el conjunto dado.

Solución: $\overset{\circ}{X} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < a, -b < y < b\right\} - \overline{AB}$; $\overline{X} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\right\} \cup \{(2a, b/i), \ i = 1, 2, 3...\} \cup \{(2a, 0)\}$; $X' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\right\} \cup \{(2a, 0)\}$. *El conjunto X no es cerrado, tampoco es abierto. No es compacto ni conexo.*

GRÁFICAS, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Ejercicio 8 *Hallar y representar el dominio natural de definición de las funciones:*

$$a)\ z = \left(\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}\right)^{1/2};\ b)\ z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$$

Solución: a) el dominio natural de definición es la lúnula $x \leq x^2+y^2 < 2x$; *b)* $-1 \leq x^2+y \leq 1$.

Ejercicio 9 *Hallar y representar el dominio natural de definición de las funciones:*

$$a)\ \operatorname{arcsen} \frac{x}{x+y};\ b)\ z = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$$

Solución: a) $(2x \geq -y \wedge y \geq 0) \cup (2x \leq -y \wedge y \leq 0) - \{(0,0)\}$; *b)* $2k\pi \leq x^2+y^2 \leq \pi(2k+1)$, *con* $k = 0, 1, 2, ...$ *(familia de anillos concéntricos).*

Ejercicio 10 *Calcular y representar las curvas de nivel de las funciones*

$$a)\ z = e^{2x/(x^2+y^2)};\ b)\ z = e^{xy}$$

Solución: a) haz de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (sin incluir éste) y que tienen el centro $(1/\ln k, 0)$ *sobre el eje* OX *y radio* $1/\ln k$, *más la recta* $x = 0$. *b) familia de hipérbolas equiláteras situadas en los cuatro cuadrantes, más los ejes de coordenadas.*

Ejercicio 11 *Calcular y representar las curvas de nivel de la función*

$$z = |x| + y$$

Solución: $(y = -x+k) \cup (y = x+k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$*(familia de semirectas).*

Ejercicio 12 *Comprobar que la función* f *no tiene límite en el punto* $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{x^2-3y^2}$$

Solución: Los límites radiales dependen de m.

Ejercicio 13 *Comprobar que* $f(x,y)$ *no tiene límite en el punto* $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^5+y^2}$$

Solución: El límite radial es cero $\forall m$, *pero el límite según la trayectoria* $y = x^3$ *es* 1.

Ejercicio 14 *Comprobar que* $f(x,y)$ *no tiene límite en el punto* $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Los límites radiales dependen de m.

Ejercicio 15 *Estudiar el límite de la función* $f(x,y)$ *cuando* $(x,y) \to (0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Existen los límites reiterados, pero son distintos y por lo tanto no existe el límite.

Ejercicio 16 *Calcular el límite y los límites reiterados de la función* $f(x,y)$ *cuando* $(x,y) \to (0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} y & si \quad x > 0 \\ -y & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Solución: $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$ *y no existe el límite reiterado* $\lim_{y\to 0} f_2(y)$.

Ejercicio 17 *Calcular los límites reiterados de las siguientes funciones cuando $(x,y) \to (0,0)$ y explicar la información que proporcionan acerca del límite doble.*

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} ;\ b)\ f(x,y) = \begin{cases} y \ \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución: a) Como los límites reiterados existen y son distintos ($\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 1$, $\lim\limits_{y \to 0} f_2(y) = 0$), podemos asegurar que no existe el límite de la función; b) $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$, $\nexists \lim\limits_{y \to 0} f_2(y)$, por tanto puede existir el límite de la función, que deberá ser cero.

Ejercicio 18 *Calcular los límites reiterados de las siguientes funciones cuando $(x,y) \to (0,0)$ y explicar la información que proporcionan acerca del límite doble.*

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} ;\ b)\ f(x,y) = x \ \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \ \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Solución: a) Los límites reiterados existen y son iguales a cero, por lo tanto el límite doble, en caso de existir, será igual a cero; b) Dado que el $(0,0)$ no es punto interior del dominio X de la función $f(x,y)$, no podemos calcular los límites reiterados.

Ejercicio 19 *Dada la función f calcular su límite si $(x,y) \to (0,0)$*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 20 *Estudiar el límite en el origen de la siguiente función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 21 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y) \to (\infty,\infty)} \frac{x+y}{2x^2+3y^2}$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 22 *Calcular el límite en el origen de la función*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+\ln(1+x^2 y)}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$$

Solución: $l = 1$.

Ejercicio 23 *Probar la no existencia del límite*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Solución: El límite radial depende de m.

Ejercicio 24 *Probar la no existencia del límite*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

Solución: El límite radial es 1 si $m = 1$ y 0 si $m \neq 1$.

Ejercicio 25 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} xy \operatorname{sen} \frac{\pi}{xy}$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 26 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\ln(1+xy)}{\operatorname{sen}\left[xy(x^2+y^2)\right]}$$

Solución: $l = 1$.

Ejercicio 27 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 28 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$$

Solución: $l = e$.

Ejercicio 29 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^2+y^2}}$$

Solución: $l = e^0 = 1$.

Ejercicio 30 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt{x^2-y^2}+\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$

Solución: $l = 0$.

Ejercicio 31 *Estudiar la continuidad en el origen de la función f definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución: no es continua en el origen.

Ejercicio 32 *Comprobar la discontinuidad en el origen de la función f definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución: es discontinua en el origen.

Ejercicio 33 *Estudiar la continuidad en el origen de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución: la función es continua.

Ejercicio 34 *Estudiar la continuidad en el origen de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2) & si \quad x\neq0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

Solución: la función es discontinua en el origen.

Ejercicio 35 *Estudiar en el origen la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-y^2} & si \quad x^2-y^2 \neq 0 \\ 0 & si \quad x^2-y^2 = 0 \end{cases}$$

Solución: la función es discontinua en el origen.

Ejercicio 36 *Hallar el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2+y^2-1} & si \quad 4x^2+y^2 \neq 1 \quad y \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \quad 4x^2+y^2 = 1 \quad ó \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: el conjunto de los puntos de discontinuidad de f *es* $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2+y^2=1\right\} \cup \{(0,0)\}$.

Ejercicio 37 *Hallar el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-y} & si \quad y \neq x^2 \\ 0 & si \quad y = x^2 \end{cases}$$

Solución: f *es dicontinua en todos los puntos de la parábola* $y = x^2$.

Ejercicio 38 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^3} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Es continua en todo punto, salvo en $(0,0)$.

Ejercicio 39 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Es continua en todo punto.

Ejercicio 40 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2-1} & si \quad x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & si \quad x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Solución: La función es continua en todo punto, salvo en los puntos de la circunferencia: $x^2+y^2=1$.

Ejercicio 41 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq |y| \\ 0 & si \quad |x| > |y| \end{cases}$$

Solución: la función $f(x,y)$ *es discontinua en cada punto del conjunto* $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| = |y|\right\}$.

DERIVADA Y DIFERENCIAL
Derivadas Parciales

Ejercicio 42 *Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes*

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad g(x,y)=y^x$$

Solución: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=y^x\ln y$; $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xy^{x-1}$.

Ejercicio 43 *Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes:*

$$a)\ f(x,y)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y};\ b)\ f(x,y)=y\ln\frac{x^3y}{x^2+y^2}$$

Solución: a)$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y-2\sqrt{xy}}{2\sqrt{x}(x+y)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x-2\sqrt{xy}}{2\sqrt{y}(x+y)^2}$; *b)* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+3y^2)}{x(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln\frac{x^3y}{(x^2+y^2)}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ejercicio 44 *Estudiar la derivabilidad en el origen de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Ejercicio 45 *Calcular las derivadas parciales, si existen, de la función*

$$f(x,y)=\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$$

en el punto $(0,1)$. Si $f(0,0)=1$, ¿existen las derivadas parciales en $(0,0)$?.

Solución: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=-2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Ejercicio 46 *Dada la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

estudiar la continuidad y la existencia de las derivadas parciales en el origen.

Solución: discontinua; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Ejercicio 47 *Sea*

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\operatorname{tg}\frac{y}{x} & si\quad x\neq0\\ 0 & si\quad x=0\end{cases}$$

Estudiar en qué puntos f satisface la ecuación

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2f(x,y)$$

Solución: f satisface la ecuación dada en los puntos del conjunto: $R^2-\{(0,y)/y\neq0\}$.

Diferencial

Ejercicio 48 *Estudiar la diferencialidad en $(0,0)$ de la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 49 *Estudiar la diferenciabilidad en* $(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: la función es diferenciable y su diferencial es $df(0,0)=0$.

Ejercicio 50 *Estudiar la diferenciabilidad, en el punto* $(0,0)$, *de la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: la función no es diferenciable en el origen.

Ejercicio 51 *Sea la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad de las derivadas parciales en el $(0,0)$ *y la diferenciabilidad de la función en el origen.*

Solución: la función es diferenciable.

Ejercicio 52 *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de las funciones siguientes*

$$a)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2};\ b)\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+4y^3}{2x^2-y^2} & si \quad 2x^2\neq y^2\\ 0 & si \quad 2x^2=y^2\end{cases}$$

Solución: a) f *es continua y no es diferenciable en* $(0,0)$. *b)* f *es discontinua y no es diferenciable en* $(0,0)$.

Ejercicio 53 *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de las funciones siguientes*

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases} (|x|-|y|)e^{-1/x^2} & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases};\ b)\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y} & si \quad y\neq 0\\ 0 & si \quad y=0\end{cases}$$

Solución: a) f *es continua y es diferenciable en el origen. b)* f *no es continua y no es diferenciable en el origen.*

Ejercicio 54 *Demostrar que la función* $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ *es continua en* $(0,0)$ *pero no es diferenciable en dicho punto.*

Ejercicio 55 *Utilizando el concepto de diferencial hallar el valor aproximado de*

$$a)\ m=\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3};\ b)\ M=\operatorname{sen}28^\circ\cos 61^\circ$$

Derivada direccional y gradiente

Ejercicio 56 *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcular la derivada $D_vf(0,0)$ *en la dirección de todo vector* $v=(a,b)$ *distinto del vector nulo.*

Solución: $D_vf(0,0)=0$ *si* $a=0$ *y* $D_vf(0,0)=\frac{b^2}{a}$ *si* $a\neq 0$.

Ejercicio 57 *Dada la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{4x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) ¿Es f *diferenciable en* $(0,0)$*?. b) Calcular las derivadas direccionales en* $(0,0)$.

Solución: a) la función no es diferenciable en el origen. b) $D_vf(0,0)=4\cos^3\alpha$.

Ejercicio 58 *Estudiar la existencia de las derivadas direccionales en el punto* $(0,0)$ *de las siguientes funciones*

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y} & si \quad y\neq 0\\ 0 & si \quad y=0\end{cases}\ ;\ b)\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución: a) $D_v f(0,0)=0$ *si* $\cos\alpha=0$; *b)* $D_v f(0,0)=\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$.

Ejercicio 59 *Hallar la derivada direccional de la función*

$$f(x,y)=2x^2-3y^2$$

en el punto de coordenadas $(1,0)$ *y en la dirección que forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo de* $120°$.

Solución: $D_\gamma f(1,0)=-2$.

Ejercicio 60 *Calcular la derivada direccional de la función*

$$f(x,y)=1-x^2-\frac{y^2}{4}$$

en el punto de la curva $4x^2+y^2=4$ *de abscisa:* $x_0=1/\sqrt{2}$ *y ordenada positiva, en la dirección de la normal interior a la curva en ese punto.*

Solución: $D_\gamma f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 61 *Demostrar que la derivada direccional de la función*

$$f(x,y)=y^2/x$$

evaluada en cualquier punto de la elipse $2x^2+y^2=c^2$, *a lo largo de la normal exterior a la misma, es igual a cero.*

Ejercicio 62 *Calcular la derivada direccional de la función*

$$f(x,y,z)=2xy-z^2$$

en el punto $P(2,-1,1)$ *en la dirección hacia* $Q(3,1,-1)$. *¿En qué dirección, a partir de* P, *es máxima la derivada direccional?. ¿Cuál es el valor de ese máximo?.*

Solución: La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente. Su máximo valor es $2\sqrt{6}$.

Ejercicio 63 *Calcular la derivada direccional de la fución*

$$f(x,y,z)=x^2-8xy+z^2$$

en la dirección de la normal exterior a la superficie $x^2+y^2+z^2=17$ *en el punto* $(4,0,1)$.

Solución: $D_\gamma f(4,0,1)=2\sqrt{17}$.

Ejercicio 64 *Calcular la derivada direccional de la función*

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

en el punto (x_0,y_0), *en la dirección de la normal exterior a la curva de nivel de* z *que pasa por ese punto.*

Solución: $D_v z(x_0,y_0)=|\nabla z(x_0,y_0)|=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

Ejercicio 65 *El potencial eléctrico en un punto* (x,y) *viene dado por*

$$V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Hallar la variación unitaria de V *en el punto* $(3,6)$ *en la dirección que va desde este punto al punto* $(2,4)$. *Demostrar que esta variación del potencial es máxima a lo largo de rectas que pasan por el origen.*

Solución: la derivada direccional es $D_\gamma V(3,6) = \frac{-11\sqrt{5}}{125}$.

Ejercicio 66 *Una función diferenciable tiene en el punto* $(1,2)$ *derivadas direccionales de valores:* 2 *en la dirección al punto* $(2,2)$ *y* -2 *en la dirección al punto* $(1,1)$. *Hallar el vector gradiente en* $(1,2)$ *y calcular el valor de la derivada direccional en este punto en la dirección del punto* $(4,6)$.

Solución: $\nabla f(1,2) = 2i + 2j$. $D_\gamma f(1,2) = \frac{14}{5}$.

Ejercicio 67 *Determinar los valores de las constantes* a, b *y* c *tales que la derivada direccional de*

$$f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$$

en el punto $(1,2,-1)$ *tenga un valor máximo* 64 *en la dirección del semieje positivo* OZ.

Solución: $a = 6, b = 24$ *y* $c = 8$.

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

Ejercicio 68 *Dada la función* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y,z) = x^2y + z + 2$$

estudiar la diferencialidad de f *en* $\mathbb{R}^3$ *y calcular la diferencial en aquellos puntos en los que exista.*

Solución: $df = 2xyh_1 + x^2h_2 + h_3$.

Ejercicio 69 *Dada la función* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + y + z, 2xy + yz\right)$$

estudiar la diferencialidad de esta función en $\mathbb{R}^3$ *y calcular la diferencial en el punto* $(1,2,3)$.

Solución: $df(1,2,3) = \binom{h_1+h_2+h_3}{4h_1+5h_2+2h_3}$.

Derivada de la función compuesta. Cambios de variables

Ejercicio 70 *Demostrar que la función*

$$z = y \cdot g(x^2 - y^2)$$

siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable, satisface la ecuación*

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Ejercicio 71 *Comprobar que la función*

$$z = x - y + f(x^2 + y^2)$$

donde f *es derivable dos veces, satisface las ecuaciones*

$$a)\ y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = x + y;\ \ b)\ y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ejercicio 72 *Tomando como nuevas variables independientes* $u = x$, $v = y/x$, *transformar la ecuación*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Solución: $u\frac{\partial z}{\partial u} = 0$.

Ejercicio 73 *Transformar la expresión*

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x}$$

mediante el cambio de las variables independientes, definido por las fórmulas

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \end{cases}$$

Solución: $u\frac{\partial z}{\partial u}$.

Ejercicio 74 *Efectuar el cambio de variables a coordenadas polares* (r,θ), *en la ecuación*

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Solución: $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$.

Ejercicio 75 *En la ecuación*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

efectuar el cambio de variables

$$u = \ln x; v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$$

Solución: $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

Ejercicio 76 *En la ecuación*

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

efectuar el cambio de las variables independientes (x,y) *por las* (u,v), *definidas mediante*

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2}; v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Solución: $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

Derivadas de orden superior

Ejercicio 77 *Dada la función* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular $f''_{xy}(0,0)$ *y* $f''_{yx}(0,0)$.

Solución: $f''_{xy}(0,0) = -1$; $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Ejercicio 78 *Comprobar que la función:* $z = f[x + \phi(y)]$ *satisface la ecuación*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Ejercicio 79 *Demostrar que la función* $z = f(ax+y) + g(y-ax)$ *satisface la ecuación*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

siendo f *y* g *dos funciones cualesquiera que admiten derivadas segundas.*

Ejercicio 80 *Demostrar que la función* $z = xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right)$ *en donde* g *y* h *son funciones derivables dos veces, satisface la ecuación*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Ejercicio 81 *Dada la función* $f(x,y) = x^2 + xy + \frac{y}{x+y}$ *hallar* a *y* b *para que verifique la igualdad*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

cualesquiera que sean x *e* y $(x+y \neq 0)$.

Ejercicio 82 *Comprobar que la función* $z = f[x+\phi(y)]$ *donde* f *y* ϕ *son dos funciones diferenciables dos veces, satisface la ecuación*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Ejercicio 83 *Transformar la ecuación de vibraciones de la cuerda*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; a \neq 0$$

tomando como nuevas variables independientes: $u = x - at$, $v = x + at$.

Solución: $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$.

Ejercicio 84 *Expresar en coordenadas polares* (r, θ)*, la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Solución: $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$.

Ejercicio 85 *Transformar la ecuación*

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

introduciendo las nuevas variables independientes $u = y$, $v = y/x$.

Solución: $\frac{\partial z}{\partial v} = u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Diferenciales de orden superior

Ejercicio 86 *Calcular* $d^2 f$ *siendo*

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

Solución: $d^2 f = e^x \operatorname{sen} y dx^2 + 2e^x \cos y dx dy - e^x \operatorname{sen} y dy^2$.

Ejercicio 87 *Calcular* $d^3 f$ *siendo*

$$f(x, y, z) = x^3 + y - y^2 + z^2$$

Solución: $d^3 f = 6dx^3$.

Ejercicio 88 *Se considera la función*

$$z = e^{xy}$$

Calcular $d^2 z$*: a) si* x *e* y *son variables independientes; b) si* $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$.

Solución: a) $d^2 z = e^{xy} \cdot (ydx + xdy)^2$. *b)* $d^2 z = e^{\operatorname{sen} t \cos t} \cdot (\cos^2 2t - \operatorname{sen} 2t) dt^2$.

Ejercicio 89 *Determinar la diferencial tercera en los puntos* $(0, \pi)$ *y* $(-\pi/2, \pi/2)$*, de la función*

$$z = \operatorname{sen}(2x + y)$$

Solución: $d^3 z(0, \pi) = (2dx + dy)^3; d^3 z\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Funciones definidas implicitamente. Sistemas

Ejercicio 90 *Determinar la ecuación de la tangente a la curva* $y = y(x)$ *dada en forma implícita por la ecuación*

$$x^3 y^2 + 2xy^4 = 3$$

en el punto $(1, 1)$.

Solución: $x + 2y - 3 = 0$.

Ejercicio 91 *Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z = z(x, y)$ *definida implícitamente por la ecuación*

$$xe^y + ye^{2z} + ze^{3x} = 0$$

en el punto $(0, 0, 0)$.

Solución: $x + y + z = 0$.

Ejercicio 92 *Comprobar que la función $z = f(x, y)$, definida implícitamente por la ecuación*

$$F(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$$

satisface la condición

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ejercicio 93 *Demostrar que la función $z(x, y)$, definida implícitamente por la ecuación*

$$(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\operatorname{sen}\alpha)^2 = \left(\frac{z-a}{m}\right)^2$$

donde a, α y m son constantes, satisface la relación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2$$

Ejercicio 94 *Demostrar que la función $z(x, y)$, definida implícitamente por la ecuación*

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

satisface la relación

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

Ejercicio 95 *Dada la función $z = \phi(x, y)$, definida implícitamente mediante la ecuación*

$$F\left(x^2 + y^2 - z^2, \frac{xy}{z}\right) = 0$$

calcular la expresión

$$x(y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución: $z(y^2 - x^2)$.

Ejercicio 96 *Determinar dx y dy en el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2u = 0 \\ x + 2y + z + u = 0 \end{cases}$$

Solución: $dx = \frac{1}{3}(7dz + 5du)$; $dy = -\frac{1}{3}(5dz + 4du)$.

Ejercicio 97 *Consideremos las funciones*

$$u = u(x, y); v = v(x, y); w = w(x, y)$$

definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + u - v + w = -1 \\ 2x - 2u + v + w^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2u - 3v^2 - 2w = 1 \end{cases}$$

Determinar las derivadas parciales de dichas funciones en el $x = 1$, $y = 1$, $u = 1$, $v = 1$, $w = 0$.

Solución: $\frac{\partial u(1,1)}{\partial x} = \frac{5}{3}$; $\frac{\partial u(1,1)}{\partial y} = -\frac{1}{6}$; $\frac{\partial v(1,1)}{\partial x} = \frac{4}{3}$; $\frac{\partial v(1,1)}{\partial y} = -\frac{1}{3}$; $\frac{\partial w(1,1)}{\partial x} = -\frac{4}{3}$; $\frac{\partial w(1,1)}{\partial y} = \frac{11}{6}$.

Ejercicio 98 *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

determina dos funciones diferenciables, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, tales que $u(1, 2) = 0$ y $v(1, 2) = 0$. Hallar $du(1, 2)$ y $dv(1, 2)$.

Solución: $du = -\frac{1}{3}dy; dv = -dx + \frac{1}{3}dy$.

EXTREMOS
Extremos Relativos

Ejercicio 99 *Estudiar los máximos y mínimos relativos de* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Solución: f *alcanza en* $(-2/3, -1/3, 1)$ *un mínimo estricto.*

Ejercicio 100 *Determinar los extremos relativos de la función* $u = f(x,y,z)$ *definida por*

$$u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z};\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$$

Solución: en el punto $(1/2, 1, 1)$ *hay un mínimo relativo.*

Ejercicio 101 *Estudiar si los puntos* $(0,0,0)$ *y* $(2\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ *son extremos relativos de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$$

Solución: $(0,0,0)$ *es mínimo y* $(2\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$ *es punto de silla.*

Ejercicio 102 *Estudiar los extremos relativos de la función:* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y + y^2 + 2y$$

Solución: en $(0,-1)$ *punto de silla; en* $(2,-3)$ *punto de silla; en* $(1,-3/2)$ *hay un mínimo.*

Ejercicio 103 *Hallar los máximos y mínimos de la función*

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Solución: en $(2,1)$ *mínimo; en* $(-2,-1)$ *máximo; en* $(1,2)$ *punto de silla; en* $(-1,-2)$ *punto de silla.*

Ejercicio 104 *Hallar los máximos y mínimos de la función*

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

Solución: en $(0,0)$ *hay punto de silla y en* $(-4,-2)$ *hay máximo.*

Ejercicio 105 *Determinar los extremos de la función* $z = f(x,y)$ *definida implícitamente por la ecuación*

$$x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0; z > 0$$

Solución: En $(1,2,2)$ *hay punto de silla y en* $(-1,2,1)$ *hay mínimo.*

Ejercicio 106 *Calcular los máximos y mínimos de la función*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Solución: en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *hay un mínimo; en* $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ *hay un mínimo; en* $(0,0)$ *hay punto de silla.*

Ejercicio 107 *Determinar los extremos de la función*

$$z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$$

Solución: punto de silla en $(0,0)$.

Ejercicio 108 *Calcular los máximos y mínimos relativos de la función*

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$$

Solución: punto de silla en $(0,0)$.

Ejercicio 109 *Calcular los extremos relativos de la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(x,y) = 1 + 2x^2 + 8xy + 8y^2$$

Solución: mínimo sobre los puntos de la recta $x + 2y = 0$.

Ejercicio 110 *Hallar los extremos relativos de la función*

$$z = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 1$$

Solución: mínimo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 111 *Determinar los extremos relativos de la función*

$$z = (x^3 - y)^2 - x^8$$

Solución: $(0, 0)$ *punto de silla.*

Ejercicio 112 *Determinar los extremos relativos de la función*

$$z = x^2 + y^4 - 2xy^2 - y^3$$

Solución: $(0, 0)$ *punto de silla.*

Ejercicio 113 *Determinar los extremos relativos de la función*

$$z = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Solución: $(0, 0)$ *punto de silla;* $(-6, 0)$ *mínimo.*

Ejercicio 114 *Investigar los máximos y mínimos de la función*

$$z = f(x, y) = x^4 - 2ax^2 - y^2 + 3$$

según los distintos valores del parámetro a.

Solución: Si $a > 0 : (\sqrt{a}, 0)$ *punto de silla y* $(-\sqrt{a}, 0)$ *punto de silla. Si* $a = 0 : (0, 0)$ *punto de silla.*

Extremos Absolutos

Ejercicio 115 *Hallar los valores máximo y mínimo de la función*

$$z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$$

en el rectángulo

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Solución: $z_{máx} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ *en* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$; $z_{mín} = 0$ *en* $(0, 0)$.

Ejercicio 116 *Hallar el máximo y mínimo absolutos de la función*

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

sobre el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

Solución: f *alcanza su mínimo,* $m = 0$, *en* $(0, 0)$ *y su máximo,* $M = 3$, *en los puntos* $(-1, 1)$ *y* $(1, -1)$.

Ejercicio 117 *Determinar los extremos absolutos de las funciones:*

$$a)\ z = x^2y;\ \ b)\ z = x^2 - y^2$$

en la región

$$x^2 + y^2 \le 1$$

Solución: a) $z_{máx} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ *en* $\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $z_{mín} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$ *en* $\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. *b)* $z_{máx} = 1$ *en* $(\pm 1, 0)$; $z_{mín} = -1$ *en* $(0, \pm 1)$.

Ejercicio 118 *Determinar los extremos absolutos de la función*

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

en el dominio

$$0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2$$

Solución: $z_{máx} = 13$ *en* $(2, -1)$; $z_{mín} = -1$ *en* $(0, -1)$ *y en* $(1, 1)$.

Extremos Condicionados

Ejercicio 119 *Determinar los extremos de la función*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

con x *e* y *relacionadas por la ecuación*

$$x + y - 1 = 0$$

Solución: mínimo en el punto $(1/2, 1/2)$.

Ejercicio 120 *Determinar los extremos de la función*

$$f(x, y) = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)$$

con la condición

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Solución: mínimos, de valor -3, *en los puntos,* $(0, 2)$ *y* $(0, -2)$ *y máximos, de valor* $3/4$, *en los puntos* $(1, 0)$ *y* $(-1, 0)$.

Ejercicio 121 *Determinar la distancia mínima del punto* $P(1, 0)$ *a la parábola* $y^2 = 4x$.

Solución: distancia mínima, de valor 1, *desde el punto* $(0, 0)$.

Ejercicio 122 *Calcular la distancia mínima del punto* $P(0, 0)$ *a la curva* $(x - 1)^3 - y^2 = 0$.

Solución: distancia mínima, de valor 1, *desde el punto* $(1, 0)$.

Ejercicio 123 *Calcular los máximos y mínimos de la función*

$$f_0(x, y, z) = x + y + z$$

sobre el elipsoide

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

Solución: mínimo: $f_0\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{11}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}\right) = -\frac{20}{24}\sqrt{\frac{11}{24}}$; *máximo:* $f_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{11}}\right) = \frac{20}{24}\sqrt{\frac{11}{24}}$.

Ejercicio 124 *Determinar los extremos de la función*

$$z = x^2 + y^2$$

con la condición

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$$

Solución: máximo: $f_0\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 9$; *máximo:* $f_0\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) = 9$; *mínimo:* $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 4$; *mínimo:* $f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 4$.

Ejercicio 125 *Descomponer un número positivo* a *en tres sumandos positivos, de modo que sea mínima la suma de sus cubos.*

Solución: mínimo en $x = \frac{a}{3}, y = \frac{a}{3}, z = \frac{a}{3}$.

Ejercicio 126 *Estudiar los extremos de la función*

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

con las condiciones

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 6 \end{cases}$$

Solución: mínimo en $(-2, 2, 4)$.

Ejercicio 127 *Hallar las distancias máxima y mínima del origen a la elipse de ecuación* $5x^2+6xy+5y^2 = 8$.

Solución: $d_{máx} = 2$ *en* $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ *y en* $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $d_{mín} = 1$ *en* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *y en* $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ejercicio 128 *Determinar los extremos de la función*

$$z = x^2 + y^2$$

con la condición

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

Solución: $z_{mín} = \frac{468}{169}$ *para* $x = \frac{18}{13}, y = \frac{12}{13}$.

Ejercicio 129 *Calcular las distancias máxima y mínima de un punto de la elipse* $x^2 + 4y^2 = 4$ *a la recta* $x + y = 4$.

Solución: $d_{mín} = \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ *en el punto* $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $d_{máx} = \frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ *en el punto* $\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

Ejercicio 130 *Determinar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución: Las dimensiones del paralelepípedo son: $\frac{2a}{\sqrt{3}}; \frac{2b}{\sqrt{3}}; \frac{2c}{\sqrt{3}}$.

Ejercicio 131 *a) Calcular los extremos relativos libres de la función*

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

b) Calcular, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de $f(x, y)$ *con la condición*

$$x + 1 = 0$$

Solución: a) punto de silla en $(0, 0)$; *b) máximo condicionado en* $(-1, 0)$.

Ejercicio 132 *a) Calcular los extremos relativos libres de la función*

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

b) Determinar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos de la misma función $f(x, y)$ *pero ahora con la condición*

$$y - 1 = 0$$

Interpretar gráficamente los resultados.

Solución: a) máximo en $(0, 0)$; *b) máximo condicionado en* $(0, 1)$.

Ejercicio 133 *a) Calcular, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función*

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

con la condición

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

b) ¿Tiene extremos relativos libres la función $f(x, y)$*? Interpretar graficamente los resultados.*

Solución: a) máximo en $(-1, -1)$ *y mínimo en* $(1, 1)$; *b) no tiene, es un plano.*