TEMA 1: Cálculo Diferencial de una variable

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Los números Naturales

- **Los números Naturales**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

- **Principio de inducción**

Supongamos que n es un elemento perteneciente al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ y que P es una propiedad que puede verificar o no n. Si se cumple que

i) se verifica $P(1)$

ii) si se verifica $P(n)$ entonces se verifica $P(n+1)$

entonces todo número natural verifica la propiedad P.

Conjuntos Numéricos

- **Los números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- **Los números Racionales $\mathbb{Q}$**

$$\frac{m}{n} \text{ en donde } m \text{ y } n \text{ son números enteros, siendo } n \neq 0$$

- **Los números Reales $\mathbb{R}$**

Valor absoluto de un número real

- **Definición**

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

- **Propiedades del valor absoluto**

$$1)\ |x| \geq 0; |x| = 0 \iff x = 0$$

$$2)\ |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$$

$$3)\ |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$4)\ |x-y| \geq ||x| - |y||$$

$$5)\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$6)\ |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}\ si\ y \neq 0$$

Topología

- **Intervalos en $\mathbb{R}$**

Intervalo abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
Intervalo semiabierto	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
Intervalo semiabierto	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

- **Entorno en $\mathbb{R}$**

  Dado un número real x, se llama entorno de x a todo intervalo abierto de la forma $U(x) = (x - r, x + r)$, con $r > 0$.

- **Conjunto abierto**
- **Conjunto cerrado**
- **Punto interior, punto exterior y punto frontera**
- **Punto adherente y punto de acumulación**

Definiciones básicas

- **Función real de variable real**

  Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación de un subconjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$, *es decir a cada* $x \in A$ *le corresponde un valor* $f(x) \in \mathbb{R}$.

- **Dominio e imagen**

  Sea f *una función real de variable real. El dominio* f, *que se representa* $\operatorname{Dom} f$, *es el conjunto de números reales* x *para los cuales está definida* $f(x)$. *Si* $\operatorname{Dom} f = A$, *representaremos la función de la forma*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

  La imagen de f, *denotada por* $\operatorname{Im} f$, *es el conjunto de valores de la función* $y = f(x)$.

Definiciones básicas

- **Función creciente y decreciente**

  Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, y $B \subset A$.
  i) f es creciente en B si $\forall x_1, x_2 \in B$ con $x_1 < x_2$ es $f(x_1) \leq f(x_2)$.
  (Si $f(x_1) < f(x_2)$, f es estrictamente creciente).
  ii) f es decreciente si $\forall x_1, x_2 \in B$ con $x_1 < x_2$ es $f(x_1) \geq f(x_2)$.
  (Si $f(x_1) > f(x_2)$, f es estrictamente decreciente).

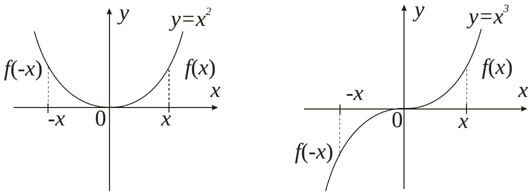
- **Función acotada**

  Una función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para todo $x \in A$. De manera análoga se definen las funciones acotadas inferiormente. Una función f es acotada si lo es superior e inferiormente, o lo que es equivalente, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.

Definiciones básicas

- **Función par e impar**

  Sea f una función definida en un dominio $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-x \in A$ si $x \in A$.
  i) f es par si $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.
  ii) f es impar si $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$.



La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

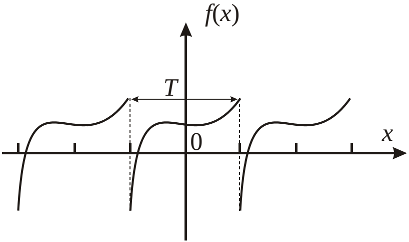
Definiciones básicas

- **Función periódica**

Una función f es periódica si existe $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tal que

$$f(x) = f(x+h), \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

El periodo T de una función f es el mínimo valor h con la propiedad anterior.



Definiciones básicas

- **Extremos Relativos y Absolutos**

  Sea f una función definida en dominio $A \in \mathbb{R}$.
  a) f tiene un máximo relativo en $x_0 \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.
  b) f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in A$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.
  c) f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in A$ si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A$.
  d) f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in A$ si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A$.

Definiciones básicas

- **Composición de funciones**

  Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *de modo que* $f(A) \subset B$, *se define la función compuesta* $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la forma*

  $$g \circ f(x) = g\left[f(x)\right], \forall x \in A$$

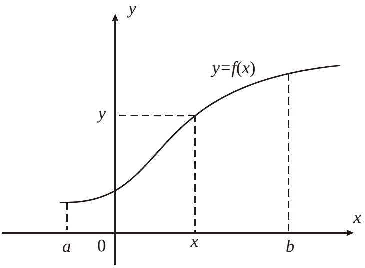
- **Función inversa**

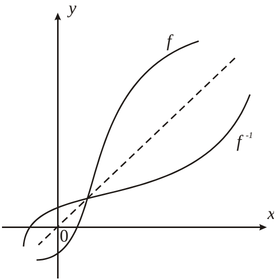
  Si f *es una función inyectiva entonces existe una única función* g *definida sobre la imagen de* f, *es decir* $g : \mathrm{Im}\, f \longrightarrow \mathbb{R}$, *que verifica* $g(f(x)) = x$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom}\, f$. *Esta función se denomina inversa de* f *y se denota por* $g = f^{-1}$.

Definiciones básicas

- **Función inversa**

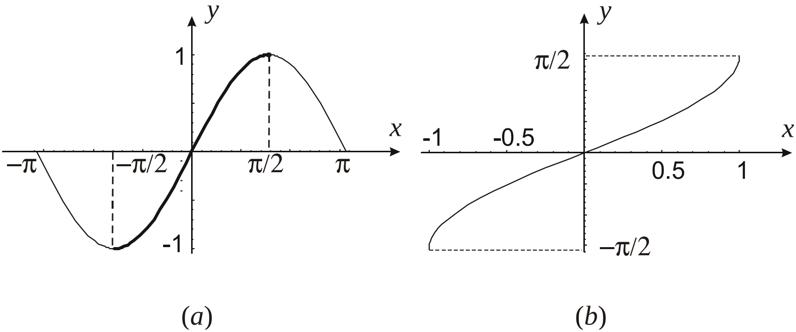
Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.





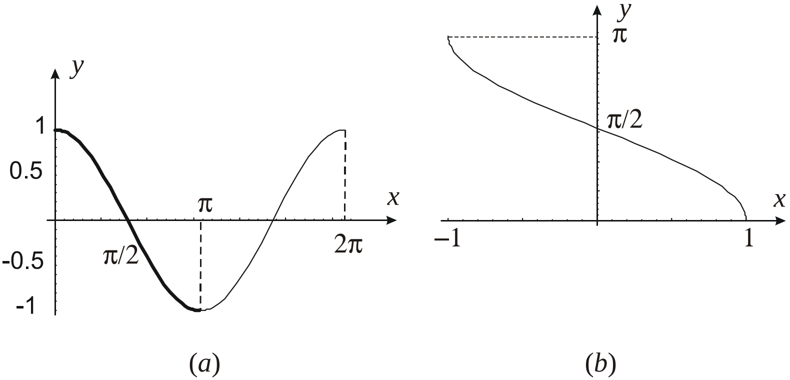
Función inyectiva. Gráficas de funciones inversas.

Funciones trigonométricas y sus inversas



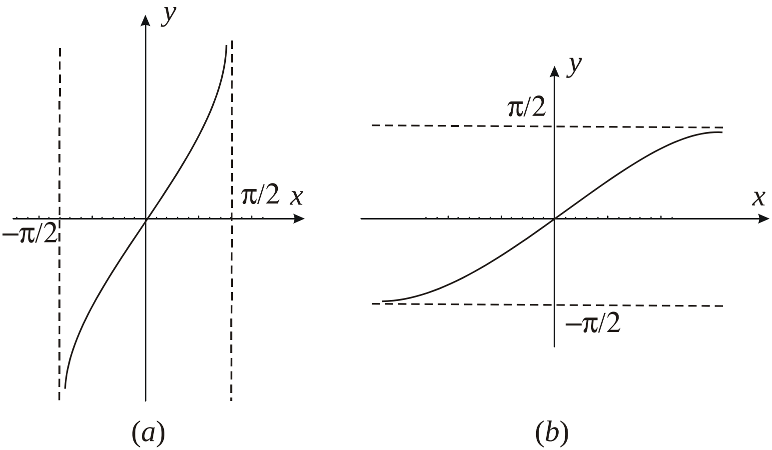
(a) $y = \operatorname{sen} x$. (b) $y = \operatorname{arcsen} x$.

Funciones trigonométricas y sus inversas



$(a)\ y = \cos x.\quad (b)\ y = \arccos x.$

Funciones trigonométricas y sus inversas



$(a)\ y = \operatorname{tg} x.\quad (b)\ y = \operatorname{arctg} x.$

Relaciones trigonométricas básicas

a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

c) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

d) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

a') $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

b') $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

c') $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

d') $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

e) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

f) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$

g) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

h) $\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$

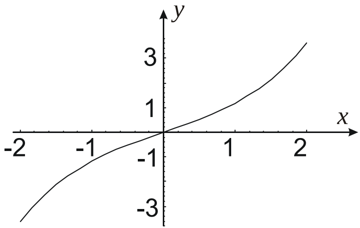
i) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

j) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

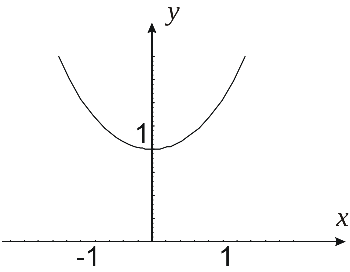
Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$y = \operatorname{sh} x.$

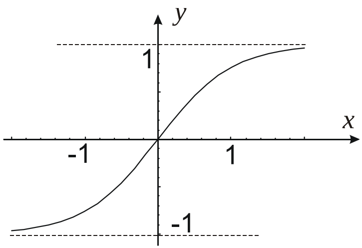


$y = \operatorname{ch} x.$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}; \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$



$$y = \operatorname{th} x.$$

Relaciones hiperbólicas

a) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

b) $\mathrm{sh}\,(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x \,\mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x \,\mathrm{sh}\, y$

c) $\mathrm{ch}\,(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x \,\mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x \,\mathrm{sh}\, y$

d) $\mathrm{th}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{th}\, x + \mathrm{th}\, y}{1 \pm \mathrm{th}\, x \,\mathrm{th}\, y}$

a') $1 - \mathrm{th}^2 x = \mathrm{sech}^2 x$

b') $\mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x \,\mathrm{ch}\, x$

c') $\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$

d') $\mathrm{th}\, 2x = \dfrac{2\,\mathrm{th}\, x}{1 + \mathrm{th}^2 x}$

e) $\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}$

f) $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}$

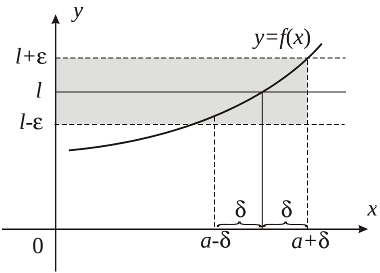
Definición de límite

- **Definición de límite según Cauchy**

Sea $f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y a un punto de acumulación de A.*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l$$

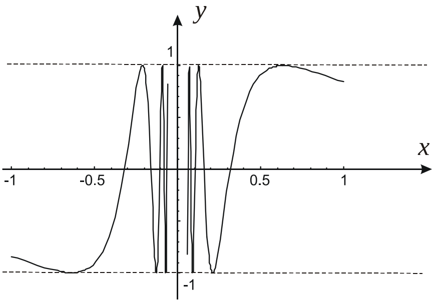
si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x \in A, \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



No existencia de Límite

- Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Propiedades de los límites

- **Propiedades de los límites de funciones**

Si existen los límites $\lim\limits_{x\longrightarrow a} u(x)$ *y* $\lim\limits_{x\longrightarrow a} v(x)$ *se verifica:*

$$i)\ \lim_{x\longrightarrow a}[u(x)\pm v(x)] = \lim_{x\longrightarrow a} u(x) \pm \lim_{x\longrightarrow a} v(x)$$

$$ii)\ \lim_{x\longrightarrow a}[u(x).v(x)] = \lim_{x\longrightarrow a} u(x).\lim_{x\longrightarrow a} v(x)$$

$$iii)\ \lim_{x\longrightarrow a}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x\longrightarrow a} u(x)}{\lim\limits_{x\longrightarrow a} v(x)};\quad (si\ \lim_{x\longrightarrow a} v(x) \neq 0)$$

Límites de uso frecuente

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828...$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \ \left(\begin{smallmatrix} a>0 \\ a\neq 1\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ \ (a>0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Límites laterales

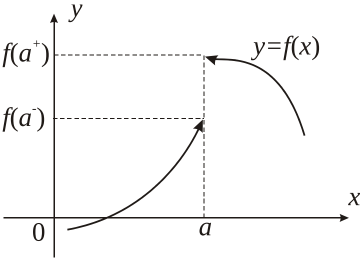
- **Límites laterales**

  Límite por la derecha de $f(x)$ *cuando* $x \longrightarrow a$

  $$l = f(a^+) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$$

  Límite por la izquierda de $f(x)$ *cuando* $x \longrightarrow a$

  $$l = f(a^-) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$$



- **Límites laterales y existencia de límite**

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$$

Infinitésimos

- **Infinitésimos**

  Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \longrightarrow a$ si

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$$

- **Propiedades de los Infinitésimos**

  i) La suma y el producto de un número finito de infinitésimos cuando $x \longrightarrow a$ es un nuevo infinitésimo cuando $x \longrightarrow a$.
  ii) El producto de un infinitésimo cuando $x \longrightarrow a$ por una función acotada cuando $x \longrightarrow a$, es un nuevo infinitésimo cuando $x \longrightarrow a$.

Infinitésimos

- **Comparación de Infinitésimos**

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \to a$. Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f \text{ es de orden superior a } g, \text{ y se denota } f = o(g) \\ \infty & f \text{ es de orden inferior a } g, \text{ y se denota } g = o(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0, 1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se denota por } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

- **Orden de un Infinitésimo**

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \to a$. Si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = l$$

con $0 < |l| < \infty$ se dice que la función f es un infinitésimo de orden n respecto de $g(x)$.

Infinitésimos

- **Principio de Sustitución**

  Si en una función sustituimos un factor o un divisor infinitésimo por otro equivalente, el valor del límite de la función no varía. Es decir si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos cuando $x \longrightarrow a$ y si $\alpha(x) \backsim f(x)$ y $\beta(x) \backsim g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \\ \lim_{x \longrightarrow a} f(x).g(x) &= \lim_{x \longrightarrow a} \alpha(x).\beta(x) \end{aligned}$$

Infinitésimos Equivalentes

$$\boxed{\begin{gathered}
\operatorname{sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{tg} f(x) \\
\operatorname{arc\,sen} f(x) \sim f(x) \sim \operatorname{arc\,tg} f(x) \\
1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2} \\
\log_a (1 + f(x)) \sim \log_a e . f(x) \\
\ln (1 + f(x)) \sim f(x) \\
a^{f(x)} - 1 \sim \ln a . f(x) \\
e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \\
(1 + f(x))^p - 1 \sim p f(x); \;\; p \in \mathbb{R}
\end{gathered}}$$

Infinitos

- **Infinitos**

  Se dice que la función $f(x)$ es un infinito cuando $x \longrightarrow a$ si

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \infty$$

- **Comparación de infinitos**

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitos cuando $x \longrightarrow a$. Se tienen los siguientes casos según el valor del límite del cociente

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & f \text{ es de orden superior a } g\text{, y se denota } f = O(g) \\ 0 & f \text{ es de orden inferior a } g\text{, y se denota } g = O(f) \\ l & f \text{ y } g \text{ son del mismo orden } (l \in \mathbb{R} - \{0,1\}) \\ 1 & f \text{ y } g \text{ son equivalentes y se escribe } f(x) \sim g(x) \end{cases}$$

Infinitos

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \sim a_n x^n$$

$$\ln\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\right) \sim \ln x^n, \quad (a_n > 0)$$

Infinitos equivalentes.

$$\log_a x \quad \ll \quad x^k \quad \ll \quad a^x \quad \ll \quad x^{bx}$$

Jerarquía de infinitos.

Casos de indeterminación

$$\boxed{\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}}$$

Resolución de Indeterminaciones

- **a) Límites de la forma:** $0 \cdot \infty$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

- b) **Límites de la forma:** $\infty - \infty$

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

- **c) Límites de la forma** 1^{∞}, ∞^0 **y** 0^0

$$L = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x) \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x)-1)}$$

Asíntotas

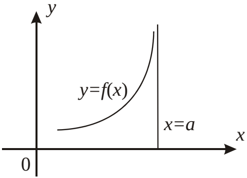
- **Asíntotas**

(a) La recta $x = a$ es asíntota vertical de la función $f(x)$ si al menos uno de los límites laterales de f en a es $+\infty$ ó $-\infty$

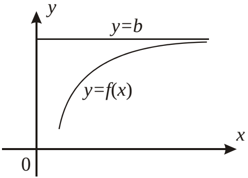
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad ó \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

(b) La recta $y = b$ es asíntota horizontal de la función $f(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad ó \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



(a)



(b)

Asíntotas

- **Asíntotas**

  (c) La recta $y = mx + n$, $(m \neq 0)$ es asíntota oblicua de la función $f(x)$ si

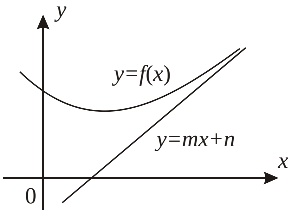
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

Cálculo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

ó

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$$



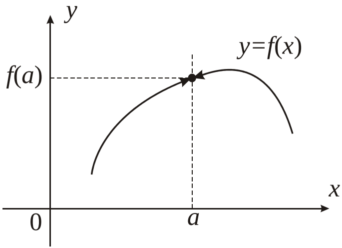
(c)

Continuidad. Definiciones

- **Continuidad en un punto**

  Se dice que una función $f(x)$ *es continua en el punto* a *si* $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$. *De este modo la función* $f(x)$ *es continua en* a *si y sólo si*

$$\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$$



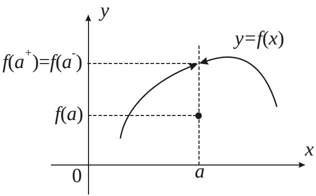
Continuidad. Definiciones

- **Puntos de Discontinuidad de 1ª Especie**

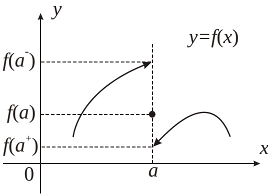
El punto a se dice punto de discontinuidad de 1ª especie de la función $f(x)$ si existen los límites por la derecha y por la izquierda y son finitos.

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ *la discontinuidad es evitable*

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ *la discontinuidad es no evitable*



1ª especie evitable.

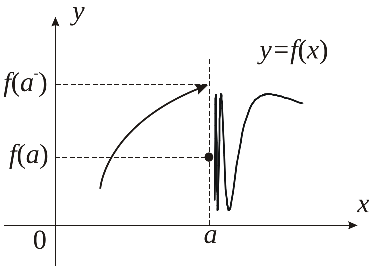


1ª especie no evitable.

Continuidad. Definiciones

- **Puntos de Discontinuidad de 2ª Especie**

Si al menos uno de los límites $f(a^+)$ o $f(a^-)$ no existe o es infinito, entonces a es un punto de discontinuidad de 2ª especie de $f(x)$.



2ª especie.

Continuidad de las funciones elementales

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones irracionales.
- Función exponencial.
- Función logarítmica.
- Funciones trigonométricas y sus inversas.
- Funciones hiperbólicas y sus inversas.

Propiedades de las funciones continuas

- **Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la funcion compuesta**

  i) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en a, tambien son continuas en a

$$f(x) \pm g(x); \quad f(x).g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)} \; (g(a) \neq 0)$$

  ii) Si la función $u = \varphi(x)$ es continua en $x = a$ e $y = f(u)$ es continua en $u_a = \varphi(a)$ entonces la función compuesta $y = f[\varphi(x)]$ es continua en el punto $x = a$.

- **Continuidad de la función inversa**

  Si la función $y = f(x)$ está definida, es estrictamente monótona creciente (decreciente) y continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(a) = c$, y $f(b) = d$, entonces existe una función inversa $x = \varphi(y)$ definida, estrictamente monótona creciente (decreciente) y también continua en el intervalo $[c, d]$ ($[d, c]$).

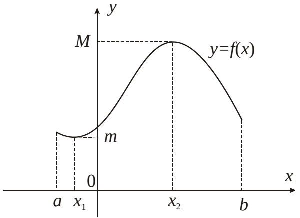
Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

- **Acotación**

  Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ está acotada en $[a, b]$

- **Teorema de Weierstrass**

  Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$.

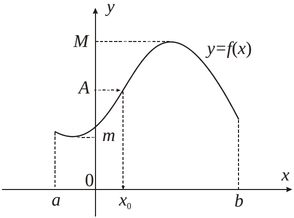


Teorema de Weierstrass.

Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

- **Teorema de Darboux de los Valores intermedios**

Si $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y si* $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ *y* $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, *entonces* $f(x)$ *toma todos los valores comprendidos entre* m *y* M.



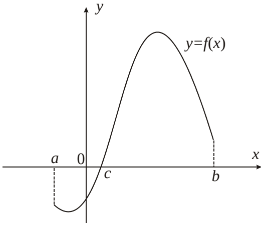
Teorema de valores intermedios.

Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado

- **Teorema de Bolzano**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo, entonces existe al menos una raíz de $f(x)$ en (a,b), es decir

$$si\ f(a).f(b) < 0,\ \exists c \in (a,b)\ tal\ que\ f(c) = 0$$



Teorema de Bolzano.

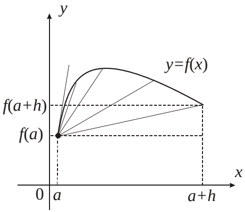
Derivada. Definiciones

- **Derivada en un punto**

Dada una función $y = f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *y un punto* $a \in \mathring{A}$, *se dice que* f *es derivable en* a *si existe y es finito, el límite*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al límite se le denomina derivada de f *en el punto* a.



Interpretación geométrica de la derivada.

Derivada. Definiciones

- **Derivadas laterales**

  Sea $f(x) : A \to \mathbb{R}$. Si f está definida en un intervalo a la derecha de a de la forma $[a, a+\varepsilon)$, si existe el límite

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  se le denomina derivada por la derecha de f en a.
  Si f está definida en un intervalo a la izquierda de a de la forma $(a-\varepsilon, a]$, si existe el límite

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  se le denomina derivada por la izquierda de f en a.

- Se cumple que:

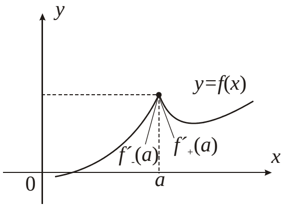
$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$$

Derivada. Definiciones

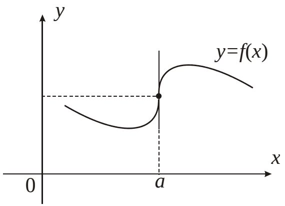
- **Recta tangente**

Si la función $f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tiene derivada en el punto* $a \in \mathring{A}$, *existe una y sólo una recta tangente a la curva dada por* f *en dicho punto, que tiene por ecuación*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Punto anguloso.



Tangente vertical.

Derivada. Propiedades

- **Continuidad y derivabilidad**

  Si una función f es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

- **Continuidad de la derivada y derivabilidad**

  Sea $f(x)$ una función continua en a, tal que existe $f'(x)$ para todo punto de un entorno reducido de a.
  i) Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$ entonces existe $f'(a)$ y se cumple

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

  ii) Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) \neq \lim_{x \to a^-} f'(x)$ entonces $\nexists$ $f'(a)$.

Derivada. Propiedades

- **Función derivable en un conjunto**

  Si la función f tiene derivada en cada punto de un intervalo abierto $A = (a, b)$ se dice que es derivable en dicho intervalo A.

Y para este tipo de funciones definimos el siguiente concepto.

- **Función Derivada**

  Sea f una función derivable en un conjunto A. La función que en cada punto $x \in A$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada de f y se denota por f'

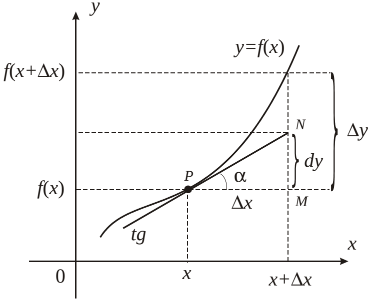
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{array}$$

Diferencial. Definición

- **Diferencial**

  Sea f una función derivable. Se define la diferencial de f como

$$dy = f'(x)\Delta x$$



Derivadas de funciones elementales

$y = k$	$y' = 0$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Derivadas de funciones elementales

$$\boxed{\begin{array}{llll} y = \operatorname{sh} x & y' = \operatorname{ch} x & y = \operatorname{argsh} x & y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ y = \operatorname{ch} x & y' = \operatorname{sh} x & y = \operatorname{argch} x & y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ y = \operatorname{th} x & y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} & y = \operatorname{argth} x & y' = \dfrac{1}{1-x^2} \end{array}}$$

Propiedades fundamentales de la derivada

Regla de linealidad	$y = af \pm bg$	$y' = af' \pm bg'$
Regla del producto	$y = f \cdot g$	$y' = f'g + fg'$
Regla del cociente	$y = \dfrac{f}{g}$	$y' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- **Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena**

  Si $u = h(x)$ es una función derivable en a, e $y = g(u)$ es una función derivable en $h(a)$ entonces la función compuesta $y = g \circ h$, esto es $y = f(x) = g[h(x)]$ es derivable en a y se verifica

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Propiedades fundamentales de la derivada

- **Derivada de la función inversa**

  Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva y derivable en a, con $f'(a) \neq 0$ y sea $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ su inversa. Entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y se cumple que

$$(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$$

- **Derivada de una función expresada en forma paramétrica**

  Sea una función $y(x)$ dada, en un entorno de x_0, por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

  con $x(t_0) = x_0$. Si x es derivable en t_0, con $x'(t_0) \neq 0$, e y es derivable en x_0 se verifica que

$$y'(x_0) = y'(t_0)/x'(t_0)$$

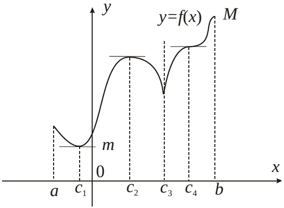
Condición necesaria de Extremo Relativo

- **Condición necesaria de extremo**

  Sea f derivable en $c \in (a, b)$. Si c es un extremo relativo de f entonces $f'(c) = 0$.

- **Punto crítico**

  Se dice que c es un punto crítico de f si se cumple $f'(c) = 0$ o bien $\nexists f'(c)$.



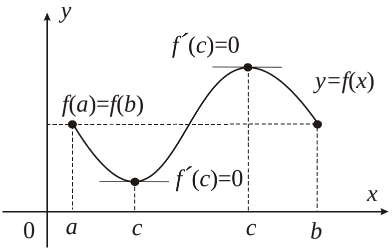
Extremos relativos.

Propiedades de las funciones derivables

- **Teorema de Rolle**

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)=0$$

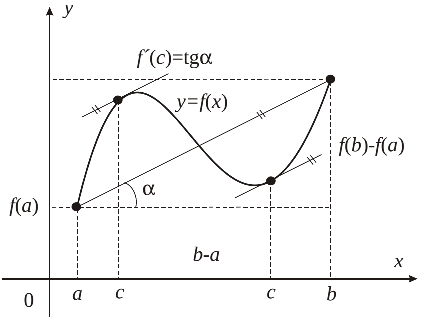


Propiedades de las funciones derivables

- **Teorema del valor medio de Lagrange**

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Propiedades de las funciones derivables

- **Regla de l´Hôpital**

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido del punto a, con $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno.
  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ y el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, o es infinito con signo determinado, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, verificándose

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Derivadas y Diferenciales sucesivas.

- **Notación**

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(df) &= d^2 f \\ d^2 f &= f''(x)dx^2 \\ d^{(n)} f &= f^{(n)}(x)dx^n \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}; \dots; f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Derivadas sucesivas. Definiciones

- **Derivada segunda en un punto**

  Si $y = f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *es una función derivable en un entorno de* a *se define la derivada segunda de* f *en* a *como*

  $$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

  suponiendo que este límite exista y sea finito.

- **Derivada** n**-ésima en un punto**

  Si $y = f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *es una función derivable* $n-1$ *veces en un entorno de* a *se define la derivada n-ésima de* f *en* a *como*

  $$f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

  suponiendo que este límite exista y sea finito.

Derivadas sucesivas. Propiedades

- **Derivada de la suma**

$$y = au(x) \pm bv(x) \rightarrow y^{(n)} = au^{(n)}(x) + bv^{(n)}(x)$$

- **Derivada del producto. Fórmula de Leibniz**

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \ldots + \binom{n}{n} u v^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
y &= uv \\
y' &= u'v + uv' \\
y'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\
y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\
y^{(4)} &= u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

- **Polinomio de Taylor**

Sea $f(x)$ una función con derivadas hasta orden n en un punto $x = a$. Entonces existe un polinomio $P_n(x)$, y sólo uno, de grado $\leq n$ que satisface

$$P_n(a) = f(a); P_n'(a) = f'(a); P_n''(a) = f''(a); \ldots; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

y es el polinomio de Taylor

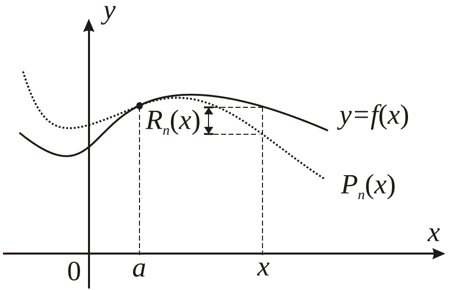
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aproximación de funciones. Polinomios de Taylor

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$



Fórmula de Taylor

- **Teorema de Taylor**

Si las funciones $f, f', f'', ..., f^{(n+1)}$ están definidas en $[a, x]$, existe $t \in (a, x)$ tal que el resto de Taylor de orden n de f en a viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

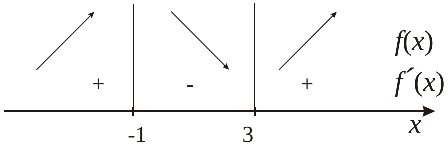
Esta es la llamada *fórmula de Taylor con el resto en la forma de Lagrange.*

Estudio local de una función

- **Función creciente y decreciente. Definición**

  Sea f derivable en (a, b). Entonces f es estrictamente creciente en (a, b) si $f'(x) > 0$ para $a < x < b$.

  Sea f derivable en (a, b). Entonces f es estrictamente decreciente en (a, b) si $f'(x) < 0$ para $a < x < b$.



Estudio del crecimiento y decrecimiento.

Estudio local de una función

- **Condiciones suficientes de Extremo Relativo**

  1) La Definición.
  2) Condición suficiente basada en la derivada primera.
  3) Condición suficiente basada en la derivada segunda.
  4) Condición suficiente basada en las derivadas superiores.

  Métodos para estudiar puntos críticos.

Estudio local de una función

- **Condición suficiente basada en la derivada primera**

  Sea c un punto crítico de la función f siendo f una función continua en un entorno de c y derivable en dicho entorno excepto, quizás, en el punto c. Si en ese entorno se cumple

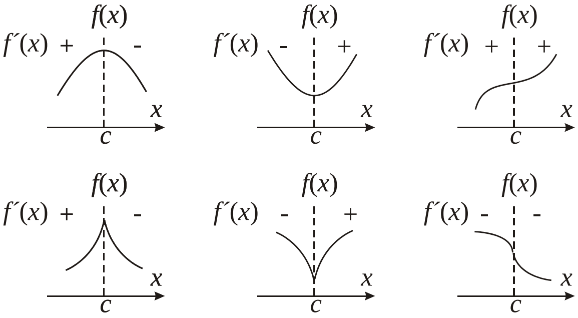
$$\left\{\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \textit{para} & x < c \\ f'(x) < 0 & \textit{para} & x > c \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c \textit{ es máximo relativo de } f$$

$$\left\{\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \textit{para} & x < c \\ f'(x) > 0 & \textit{para} & x > c \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c \textit{ es mínimo relativo de } f$$

$$\begin{array}{c} f'(x) \textit{ tiene el mismo signo} \\ \textit{a ambos lados de } c \end{array} \Rightarrow \quad c \textit{ no es extremo relativo de } f$$

Estudio local de una función

- **Condición suficiente basada en la derivada primera**



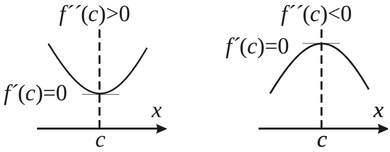
(a) (b) (c)

Estudio local de una función

- **Condición suficiente basada en la derivada segunda**

  Sea c un punto crítico de la función f tal que $f'(c) = 0$. Si existe y es continua la derivada segunda f'' en un entorno de c se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Si } f''(c) &> 0 \Rightarrow c \text{ es mínimo relativo de } f \\ \text{Si } f''(c) &< 0 \Rightarrow c \text{ es máximo relativo de } f \\ \text{Si } f''(c) &= 0 \Rightarrow \text{No podemos asegurar nada} \end{aligned}$$



(a) (b)

Estudio local de una función

- **Condición suficiente basada en las derivadas de orden superior a dos**

  Sea $f(x)$ una función con derivadas continuas hasta el orden $n+1$ en un entorno del punto c. Supongamos además que se cumple

  $$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = ... = f^{(n)}(c) = 0; f^{(n+1)}(c) \neq 0; n \geq 2$$

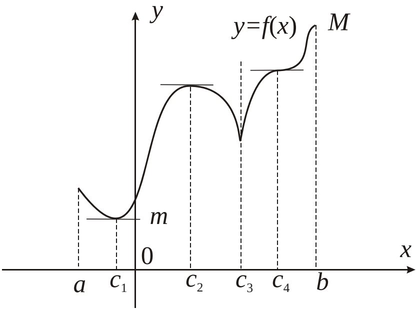
  Entonces, se tiene

  $$\text{Si } n+1 \text{ es par} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n+1)}(c) > 0 & \Rightarrow \quad c \text{ es mín. relativo de } f \\ f^{(n+1)}(c) < 0 & \Rightarrow \quad c \text{ es máx. relativo de } f \end{cases}$$

  $$\text{Si } n+1 \text{ es impar} \Rightarrow \quad \text{no hay ni máximo ni mínimo}$$

Extremos Absolutos. Método

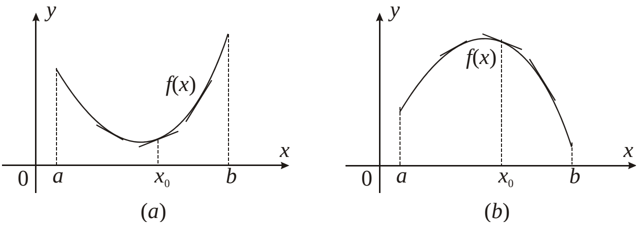
1) Calcular los p. críticos de f en (a, b) (en la figura son c_1, c_2, c_3 y c_4).
2) Hallar el valor de f en a, b y en los puntos críticos.
3) Comparar los valores obtenidos en el paso 2.
- El mayor valor es el máximo absoluto de f en $[a, b]$ (en la figura es b).
- El menor valor es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$ (en la figura es c_1).



Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

- **Concavidad y Convexidad. Definición**

Sea I un intervalo real y $f(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I. Se dice que $f(x)$ es convexa en I si y sólo si para todo $x_0, x \in I$, la gráfica de $f(x)$ en I queda por encima de la tangente a la curva de $f(x)$ en x_0. Si la gráfica queda por debajo, la función se dice que es cóncava en I.



(a) Función convexa. (b)Función cóncava.

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

- **Criterio de Concavidad y Convexidad**

  Sea I un intervalo real y $f(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I.

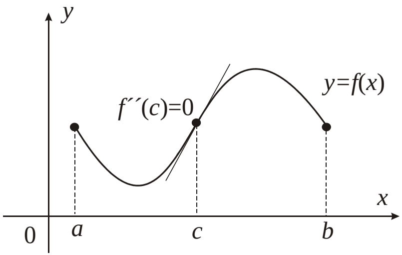
  Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es convexa en I.

  Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x)$ es cóncava en I.

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

- **Punto de Inflexión. Definición**

  Sea I un intervalo real y $x_0 \in I$ un punto de continuidad de $f(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Se dice que la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0, si la función pasa en este punto de convexa a cóncava, o viceversa.



Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

- **Criterio de Punto de Inflexión**

  Sea I un intervalo real, $x_0 \in I$ y $f(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un entorno del punto x_0, excepto quizás en el propio x_0.
  Si $f''(x_0) = 0$ o bien $\nexists f''(x_0)$ y $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el punto x_0 entonces la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0.
  Si $f''(x)$ mantiene su signo, no hay punto de inflexión en x_0.

Construcción de gráficas. Sumario

$i)$ Dominio.

$ii)$ Crecimiento y Decrecimiento.

$iii)$ Máximos y Mínimos.

$iv)$ Concavidad, Convexidad y Puntos de Inflexión.

$v)$ Asíntotas.

Sumario de dibujo de curvas.

Optimización en Ingeniería. Método

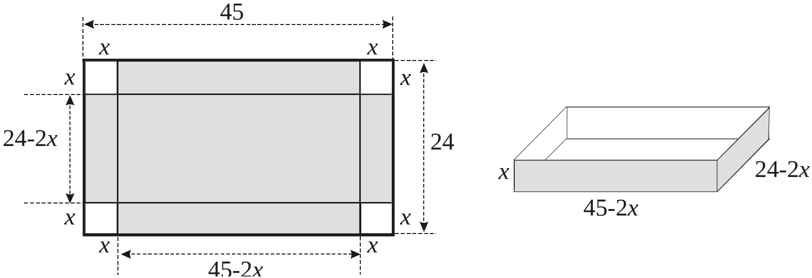
1) Encontrar la función a optimizar F y las variables o incógnitas: $x, y, \ldots$

2) Hallar la relación entre las variables de forma que podamos expresar F como función de una sola variable: $F(x)$.

3) Hallar el dominio de la función $F(x)$.

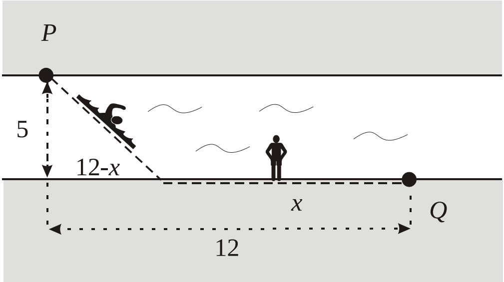
4) Calcular el máximo o mínimo absoluto de $F(x)$.

Optimización en Ingeniería. Ejemplo



Construcción de una caja.

Optimización en Ingeniería. Ejemplo



Trayectoria de tiempo mínimo.