TEMA 2: Cálculo Integral en una variable

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Definiciones

- **Función primitiva**

  Decimos que la función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si

  $$F'(x) = f(x)$$

  para todo punto x del dominio de f.

- **Función integral indefinida**

  Dada la función f, se llama función integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas. Se suele escribir

  $$\int f(x)dx = F(x) + C$$

  con C constante arbitraria, y F una primitiva cualquiera de f.

Integrales inmediatas

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int p^x\,dx = \frac{p^x}{\ln p} + C, \quad p > 0, \quad p \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \operatorname{cotg} x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Integrales inmediatas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right| + C \qquad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

Propiedades

- **Linealidad de la integral**

  Dadas dos funciones f y g que admiten primitiva y una constante $k \in \mathbb{R}$ se verifica

$$i) \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$ii) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

- **Propiedad**

  Dada una función $f(x)$ que admite primitiva y dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\begin{aligned} Si \int f(x)dx &= F(x) + C \Rightarrow \int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C \\ Si \int f(x)dx &= F(x) + C \Rightarrow \int f(x+b)dx = F(x+b) + C \end{aligned}$$

Técnicas generales de integración

- **Cambio de variable**
- **Integración por partes**
- **Fórmulas de reducción**
- **Integrales de funciones racionales**
- **Integración de funciones reducibles a racionales**
- **Integración de funciones trigonométricas**
- **Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas**

Cambio de variable

Sea $\varphi(t)$ una función con derivada $\varphi'(t)$ continua y que admite inversa, y sea $f(x)$ una función continua. Entonces, haciendo $x = \varphi(t)$, se tiene

$$\int f\left[\varphi(t)\right] \varphi'(t) dt = \int f(x) dx$$

Una vez resuelta la integral en la nueva variable (la cual se supone más sencilla) debe deshacerse el cambio realizado.

Integración por partes

Dadas dos funciones derivables u y v se verifica

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Como "regla" general la integración por partes es recomendada para integrales de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{polinomio} & \cdot & \text{función logarítmica} \\ \text{polinomio} & \cdot & \text{función trigonométrica inversa} \\ dv & & u \end{array}$$

y también de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{polinomio} & \cdot & \text{función exponencial} \\ \text{polinomio} & \cdot & \text{función trigonométrica} \\ u & & dv \end{array}$$

Fórmulas de reducción

Sea I_n una integral indefinida que depende de un número natural n. Se denomina *fórmula de reducción a* una relación recurrente del tipo

$$f(I_n, I_{n+1}, ..., I_{n+p}, n, x) = 0$$

En la mayoría de los casos prácticos la relación recurrente es del tipo

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n)$$

con lo que nos basta conocer una integral para obtener las siguientes.

- Para obtener la fórmula de recurrencia se suele utilizar integración por partes.

Integrales de funciones racionales

Función racional expresada como cociente (fracción simplificada y propia) de dos polinomios

$$\frac{Q(x)}{f(x)}$$

- **Método: Descomposición en fracciones simples según las raíces del denominador**

$$f(x) = 0$$

A cada:

$$1) \text{ Raíz real simple } a$$

$$\text{le corresponde una fracción:}$$

$$\frac{A}{(x-a)}$$

Integrales de funciones racionales

A cada:

2) Raíz real múltiple a de orden n

le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)}$$

3) Par de raíces complejas conjugadas simples

le corresponde una fracción:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

4) Par de raíces complejas conjugadas múltiples de orden n

le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n x + B_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{A_{n-1}x + B_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q}$$

Integrales de funciones racionales

Primitivas de las fracciones simples

$$\textbf{Tipo 1)} \quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\textbf{Tipo 2)} \quad \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C, \;\; n \neq 1$$

$$\textbf{Tipo 3)} \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + C \\ \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x-r)^2+s^2}dx = \frac{B-\frac{Ap}{2}}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-r}{s}\right) + C \end{aligned}$$

Integración de funciones reducibles a racionales

Integrales del tipo

$$\int R(f(x))dx$$

con R una función racional y f una función cuya inversa tiene derivada racional.

- Para este tipo de funciones, el cambio de variable

$$f(x) = t$$

  transforma la integral en racional.

Integración de funciones trigonométricas

Integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

con R función racional.

- **Cambio universal**

Se pueden reducir siempre a una integral racional con el cambio de variable

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Integración de funciones trigonométricas

- **Cambios Alternativos**

Si R es una función	Cambio:
i) impar en $\operatorname{sen} x$ $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\cos x = t$
ii) impar en $\cos x$ $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{sen} x = t$
iii) par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$

Integración de funciones trigonométrica

- **Métodos Alternativos**

iv) Las integrales

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx dx; \ \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx; \ \int \cos ax \cos bx dx$$

se tranforman en integrales inmediatas mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A-B) + \cos(A+B) \\ 2 \operatorname{sen} A \cos B &= \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+b) \end{aligned}$$

v) Las integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x dx; \ \int \cos^n x dx$$

siendo n un exponente positivo y par, se simplifican mediante las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas

Las integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx \text{ y } \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$$

con R función racional se pueden reducir a alguno de los tipos analizados anteriormente mediante los siguientes cambios de variable:

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \operatorname{sen} t$ ó $x = a \cos t$

$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \operatorname{tg} t$ ó $x = a \operatorname{sh} t$

$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ se resuelve con el cambio $x = a \sec t$ ó $x = a \operatorname{ch} t$

Definición de la integral de Riemann

Sea $y = f(x)$ una función acotada en un intervalo $[a, b]$.

- **Partición**

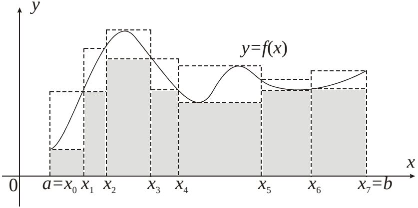
  Se llama partición del intervalo cerrado $[a, b]$ a todo conjunto finito

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ / \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

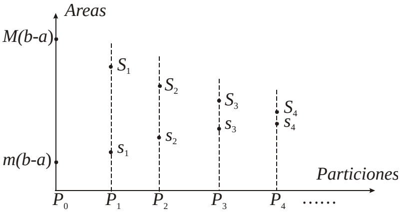
Supongamos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Efectuamos una partición P_1 en n intervalos parciales. Sea m_i el ínfimo de f y M_i el supremo de f en cada intervalo. Se denominan *suma inferior* y *suma superior* correspondiente a la partición P_1 a:

$$\begin{aligned} s_1(P_1) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ S_1(P_1) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \end{aligned}$$

Definición de la integral de Riemann



Suma inferior y suma superior.



Sucesión de sumas.

Repetimos indefinidamente este proceso con particiones $P_3, P_4, \ldots$ cada vez más finas.

Definición de la integral de Riemann

- **Función integrable en el sentido de Riemann**

  Cuando
  $$\lim_{m\to\infty} s_m = s = \lim_{m\to\infty} S_m = S$$
  se dice que la función $y = f(x)$ *es integrable (en el sentido Riemann) en el intervalo* $[a, b]$ *.*

A dicho valor común $s = S$ se le denomina *integral definida* según Riemann y se le representa por
$$\int_a^b f(x)dx$$

Definición de la integral de Riemann

- Otra forma de imponer la condición de integrabilidad. Consideremos una partición P_1 en n intervalos parciales. Tomemos en cada subintervalo un punto intermedio $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y formemos la denominada *suma de Riemann*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

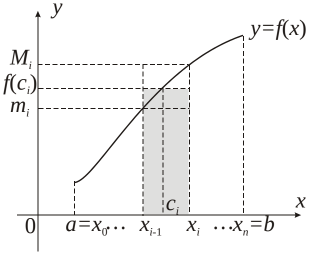
Repitiendo de nuevo este proceso con particiones cada vez más finas, de forma que n tienda hacia ∞, la integrabilidad de la función se basa en la existencia de límite de la sucesión de sumas de Riemann.

Definición de la integral de Riemann

- **Función integrable en el sentido de Riemann**

  La función $y = f(x)$, acotada en el intervalo $[a, b]$, es integrable (en el sentido Riemann) en dicho intervalo cuando, para cualquier sucesión de particiones con $n \to \infty$ y cualesquiera que sean los puntos c_i elegidos, existe un mismo límite para la sucesión de sumas de Riemann. Este límite es la integral definida.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

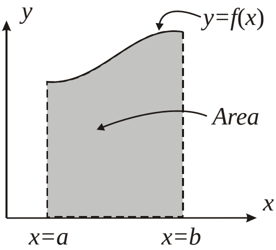


Interpretación geométrica de la integral definida

Si $y = f(x)$ *es integrable en* $[a, b]$ *y* $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, *el valor*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

representa el área A *encerrada por la curva* $y = f(x)$, *el eje* Ox *y las rectas* $x = a, x = b$.



Funciones Integrables

- *Toda función* $y = f(x)$ *monótona en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *es integrable en el mismo.*

- *Toda función continua en un intervalo cerrado es integrable en el mismo.*

Propiedades de la integral definida

- *Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$, la función $f(x) + g(x)$ es también integrable en dicho intervalo, verificándose*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- *Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, la función $K \cdot f(x)$ es integrable en dicho intervalo y se verifica*

$$\int_a^b K f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

Propiedades de la integral definida

- *Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, $|f(x)|$ también lo es.*
- *Si $f(x)$ es integrable se verifican las siguientes expresiones*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt; \quad \int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- *Si $f(x)$ es integrable, cualesquiera que sean a, b y c, se verifica*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida

- *Si* $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- *Si* $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

- *Si* $f(x)$ *es integrable en* $[a, b]$, *se verifica*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Propiedades de la integral definida

- **Valor medio**

  Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de dicha función en ese intervalo $[a,b]$ al número real dado por

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- **Primer teorema del valor medio**

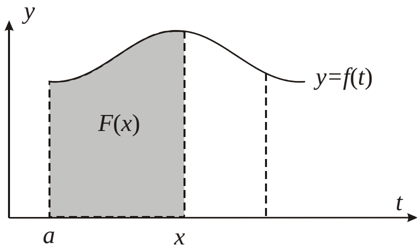
  Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ existe algún punto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teoremas Fundamentales del Cálculo

- La integral como función de su límite superior.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Teoremas Fundamentales del Cálculo

- **Primer teorema fundamental del cálculo**

  Sea $f(t)$ una función acotada e integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$. En estas condiciones, la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

  en donde $x \in [a, b]$, es continua en $[a, b]$.
  Asímismo, si $f(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(x)$ es derivable en dicho intervalo, verificándose que

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \ \forall x \in [a, b]$$

Teoremas Fundamentales del Cálculo

- **Segundo teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow**

  Sea $f(x)$ una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que existe alguna función $F(x)$ continua para la que en dicho intervalo se verifique

  $$F'(x) = f(x), \ \forall x \in [a, b]$$

  En estas condiciones

  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de integrales definidas

- **Integración por partes**

Dadas dos funciones con derivada continua $u(x)$ y $v(x)$, $\forall x \in [a, b]$ se verifica

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

- **Cambio de variable**

Sea $\varphi(t)$ una función con derivada $\varphi'(t)$ continua $\forall t \in [a, b]$ y que admite inversa, y sea $f(x)$ una función continua $\forall x \in [\varphi(a), \varphi(b)]$. Entonces, haciendo $x = \varphi(t)$, se tiene

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

Integrales Impropias

- **Definición**

  Se dice que la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

  es una integral impropia, si el intervalo de integración $[a, b]$ *es infinito, o bien cuando la función subintegral* $f(x)$ *no está acotada en algún o algunos puntos de dicho intervalo.*

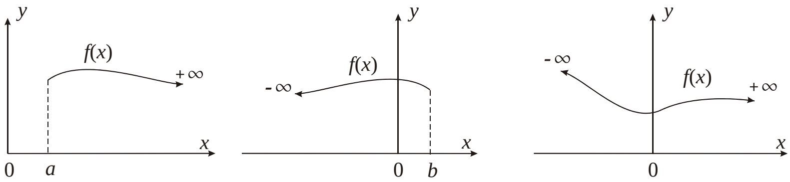
Integrales Impropias de Primera especie

- **Definición**

Dada una integral impropia, diremos que es de primera especie si tiene infinito en su intervalo de integración y la función subintegral $f(x)$ está acotada en dicho intervalo. Por consiguiente

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

son las tres formas en que pueden presentarse estas integrales.



Integrales Impropias de Primera especie

- **Definición**

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx \\ I &= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)dx \\ I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{N\to-\infty}\int_N^c f(x)dx + \lim_{M\to+\infty}\int_c^M f(x)dx \end{aligned}$$

$$\textit{La integral } I \textit{ es: } \begin{cases} \textit{Convergente, si existe el límite y éste es finito} \\ \textit{Divergente, cuando el límite es infinito} \\ \textit{Oscilante, si no existe dicho límite} \end{cases}$$

Primera especie. Criterio de Convergencia

Sea la integral impropia de primera especie

$$I = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

con $f(x)$ acotada y no negativa en $[a, \infty)$.

Proposition

- **Criterio del Límite**

Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \begin{cases} K \text{ finito (puede ser } 0) & \text{con } \lambda > 1 \Longrightarrow I \text{ es convergente} \\ K \neq 0 \text{ (puede ser } \infty) & \text{con } \lambda \leq 1 \Longrightarrow I \text{ es divergente} \end{cases}$$

Integrales Impropias de Segunda especie

- **Definición**

  Se dice que una integral impropia lo es de segunda especie si la función subintegral $f(x)$ no está acotada en algún o algunos puntos de su intervalo de integración. Casos:

1. $f(x)$ no acotada en el extremo superior b del intervalo.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

2. $f(x)$ no acotada en el extremo inferior a del intervalo.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

3. $f(x)$ no acotada en ambos extremos.

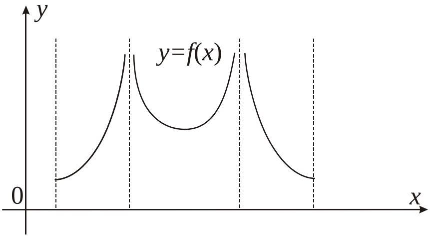
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$

Integrales Impropias de Segunda especie

- **Definición**

4. $f(x)$ no acotada en un punto intermedio $c \in (a,b)$.

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$



$$\textit{La integral I es:} \begin{cases} \textit{Convergente, si existe el límite y éste es finito} \\ \textit{Divergente, cuando el límite es infinito} \\ \textit{Oscilante, si no existe dicho límite} \end{cases}$$

Segunda especie. Criterio de Convergencia

Sea la integral impropia de segunda especie

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{con } f(b) = \infty \;\; \text{o} \;\; f(a) = \infty$$

- **Criterio del Límite**

  Sea l cualquiera de los límites

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^\lambda}} \; (\textit{cuando } f(b) = \infty) \, ; \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-a)^\lambda}} \; (\textit{cuando } f(a) = \infty)$$

$$\textit{Si } l = \begin{cases} K \textit{ finito (puede ser } 0) & \textit{con } \lambda < 1 \Longrightarrow & I \textit{ es convergente} \\ K \neq 0 \textit{ (puede ser } \infty) & \textit{con } \lambda \geq 1 \Longrightarrow & I \textit{ es divergente} \end{cases}$$

Integrales Paramétricas

- **Definición**

Las integrales de la forma

$$\int_a^b (f(x, \lambda_1, \lambda_2, ...) dx$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ...$ *son parámetros que permanecen constantes durante la integración, pudiendo a su vez los extremos a y b depender o no de dichos parámetros, reciben el nombre de integrales paramétricas.*

Nuestro estudio se limitará a integrales dependientes de un parámetro λ, las cuales denotaremos por

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx$$

Integrales Paramétricas

- **Ejemplo. Transformada de Laplace**

  Sea $f(t)$ una función definida para $t > 0$. Si converge la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

  decimos que $f(t)$ admite transformada de Laplace y se denota por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Integrales Paramétricas

- **Ejemplo. Función Γ de Euler**

  Se denomina función Γ de Euler a la integral impropia

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad p > 0$$

  y recibe también el nombre de integral de Euler de primera especie. Se demuestra que la integral impropia es convergente para todo $p > 0$.

Propiedades de la Función Γ de Euler

$$\begin{aligned} a)\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ b)\ \Gamma(p)\Gamma(1-p) &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}, \ 0 < p < 1 \\ c)\ \Gamma(p+1) &= p\Gamma(p), \ p > 0 \end{aligned}$$

Integrales Paramétricas

- **Ejemplo. Función B de Euler**

  Se denomina función B de Euler a la integral

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p,q>0$$

  y recibe también el nombre de integral de Euler de segunda especie. Se demuestra que la integral impropia es convergente para todo $p,q>0$.

Propiedades de la Función B de Euler

$$\begin{aligned} a)\ B(p,q) &= B(q,p),\ \forall p,q>0 \\ b)\ B(p,q) &= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx,\ \forall p,q>0 \\ c)\ B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \forall p,q>0 \end{aligned}$$

Integrales Paramétricas. Propiedades

- **Continuidad**

Si la función $f(x, \lambda)$ *es continua en la bola cerrada*

$$B = \left\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq \lambda \leq d\right\}$$

entonces la función $I(\lambda)$ *es continua* $\forall \lambda \in (c, d)$.

- **Derivabilidad**

Caso a) Caso en que los extremos a **y** b **no dependen del parámetro**

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx \implies \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b f'_\lambda(x, \lambda) dx$$

Caso b) Caso en que los extremos a **y** b **dependan del parámetro**

$$\frac{dI(\lambda, a, b)}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x, \lambda) dx + f(b, \lambda) \frac{db}{d\lambda} - f(a, \lambda) \frac{da}{d\lambda}$$

Aplicaciones de la Derivación Paramétrica

La derivación bajo el signo integral permite en muchas ocasiones calcular integrales que dependen de un parámetro. Sea la integral paramétrica

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)dx$$

cuya resolución directa se considera complicada. Mediante derivación

$$\begin{aligned} \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} &= h(\lambda) \\ dI(\lambda) &= h(\lambda)d\lambda \Rightarrow I(\lambda) = \int h(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

integral ésta que puede ser mucho más sencilla que la dada y de cuya relación se tendrá

$$I(\lambda) = \int h(\lambda)d\lambda = H(\lambda) + C$$

Para hallar C basta conocer la integral dada por algún valor de λ.

$$I(\lambda_0) = H(\lambda_0) + C \Longrightarrow C = I(\lambda_0) - H(\lambda_0)$$

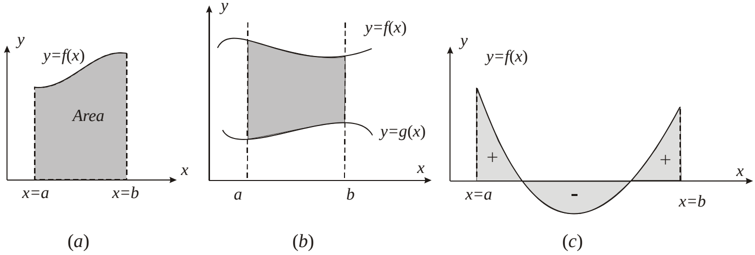
Áreas planas

Si $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$

(a) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$: $\quad A = \int_a^b f(x)dx$

(b) Área entre dos curvas $y = f(x), y = g(x)$: $\quad A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

(c) Si $f(x)$ cambia de signo en $[a, b]$: $\quad A = \int_a^b |f(x)|dx$



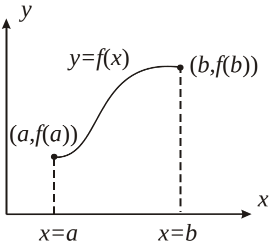
Nota: Para que el área sea positiva el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.

Longitud de un arco de curva

Si $y = f(x)$ es una curva con $f'(x)$ continua $\forall x \in [a, b]$, el valor

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

representa la longitud del arco de curva $y = f(x)$ limitada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

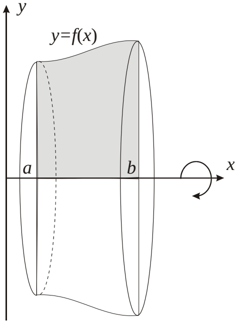


Nota: Para que la longitud sea positiva el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.

Áreas y Volúmenes de cuerpos de revolución

Consideremos el cuerpo de revolución engendrado por el trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$, $x = b$ al girar alrededor del eje Ox.

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx \\ \text{Área} &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \end{aligned}$$



Nota: Para que el área y el volumen sean positivos el intervalo de integración debe tomarse siempre creciente.