TEMA 3: Sucesiones y Series

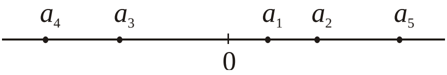
Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Definiciones

Sucesión

Una sucesión de números reales es una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Si para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a(n) = a_n$, *la sucesión* a *será representada por* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *o simplemente* (a_n).



Ejemplos

a) Se llama *progresión aritmética* a la sucesión donde cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante d llamada *distancia*

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d, \ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d; \quad s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

b) Se llama *progresión geométrica* a la sucesión donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constante r llamada *razón*

$$a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2, \ldots, a_1 \cdot r^{n-1}, \ldots$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; \quad s_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

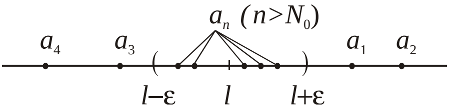
Límite de una sucesión

Se dice que l es límite de la sucesión (a_n) y se representa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad o \quad a_n \to l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon) \quad tal\ que \quad \forall n > N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$



Las sucesiones se clasifican en: *convergentes* (con límite finito), *divergentes* (con límite infinito) y *oscilantes* (cuando no existe límite).

Subsucesión

- **Definición**

  Una sucesión (β_n), *se dice que está contenida en la sucesión* (α_n), *o también que es una subsucesión de* (α_n), *si todos los términos de la sucesión* (β_n) *figuran en los de* (α_n).

- **Proposición**

  Si una sucesión tiene límite l, *finito o no, todas sus subsucesiones tienen también límite* l.

Propiedades de los límites de sucesiones

- **Operaciones con límites**

  Sean (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones convergentes a los límites* a *y* b*, respectivamente y* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$
\begin{array}{llcl}
i) & \lambda a_n & \longrightarrow & \lambda a \\
ii) & (a_n \pm b_n) & \longrightarrow & a \pm b \\
iii) & (a_n b_n) & \longrightarrow & ab \\
iv) & \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) & \longrightarrow & \dfrac{a}{b} \ (si\ b_n, b \neq 0)
\end{array}
$$

Propiedades de los límites de sucesiones

- *Sea f una de las siguientes funciones*

  potencial: $f(x) = x^k$ *raíz:* $f(x) = x^{1/p}, \; p \in \mathbb{N}$

  exponencial: $f(x) = a^x$ *logaritmo:* $f(x) = \log_a(x), a > 0$

  seno: $f(x) = \operatorname{sen} x$ *coseno:* $f(x) = \cos x$

  Se verifica que

  $$\text{si } a_n \longrightarrow l \text{ entonces } f(a_n) \longrightarrow f(l)$$

- **Potenciales-exponenciales**

  Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones convergentes a los límites a y b, respectivamente y $a > 0$, entonces

  $$(a_n)^{b_n} \longrightarrow a^b$$

Indeterminaciones

- **Infinitésimos e infinitos**

  Llamaremos sucesión infinitésima o infinitésimo a toda sucesión cuyo límite es cero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

  y llamaremos infinito a toda sucesión divergente

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$$

- **Casos de Indeterminación**

$$\boxed{\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}}$$

Resolución de Indeterminaciones

- **Sucesiones equivalentes**

  Se dice que dos sucesiones (a_n) *y* (b_n) *son equivalentes si*

  $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

  y lo representaremos por $a_n \sim b_n$.

Resolución de Indeterminaciones

- **Principio de sustitución**

  Sean (a_n),(b_n), (c_n) *tres sucesiones de números reales.*
  Si $a_n \sim b_n$, *entonces:*
  i) Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n c_n$, *también existe* $\lim_{n\to\infty} b_n c_n$ *y además*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \lim_{n\to\infty} b_n c_n$$

  ii) Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n}$, *también existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$ *y además*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{sen} a_n \sim a_n \sim \operatorname{tg} a_n \\ \operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arc\,tg} a_n \\ 1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2} \\ \ln(1 + a_n) \sim a_n \\ e^{a_n} - 1 \sim a_n \\ (1 + a_n)^{\lambda} - 1 \sim \lambda a_n \end{array}}$$

Tabla 1. Infinitésimos equivalentes cuando $(a_n) \rightarrow 0$.

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(Fórmula de Stirling)}$$

$$a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots \sim a_0 n^p$$

$$\ln\left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots\right) \sim \ln n^p, \quad (a_0 > 0)$$

Tabla 2. Infinitos equivalentes cuando $(n) \to \infty$.

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Tabla 3. Jerarquía de Infinitos.

Resolución de Indeterminaciones

1) Límites de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ **y** $\dfrac{0}{0}$

El principio de sustitución y la jerarquía de infinitos nos va a facilitar en muchos casos el cálculo de límites de sucesiones cuyo cálculo realizado de otro modo podría resultar muy laborioso.

2) Límites de la forma $0 \cdot \infty$

Los límites de la forma producto $a_n \cdot b_n$ siempre pueden ponerse en forma de cociente sun más que escribir

$$a_n \cdot b_n = \frac{a_n}{1/\,b_n} = \frac{b_n}{1/\,a_n}$$

Resolución de Indeterminaciones

3) Límites de la forma $\infty - \infty$

El cálculo del límite de alguna sucesión cuyo término general es de esta forma indeterminada, suele facilitarse multiplicando y dividiendo por expresiones convenientes o bien escribiéndolo de esta forma

$$a_n - b_n = a_n \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right)$$

4) Límites de la forma $(a_n)^{b_n}$

En las indeterminaciones que provienen de la forma $(a_n)^{b_n}$, esto es ∞^0, 0^0 y 1^∞, se puede utilizar la técnica siguiente, consistente en tomar logaritmos:

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} \Rightarrow \ln L = \ln \lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$$

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} b_n \ln a_n \Rightarrow L = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ln a_n}$$

Otras propiedades

- **Criterio de Stolz**

  Sean (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones tales que*

  i) (b_n) *es una sucesión monótona divergente o bien*

  ii) $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$ *y* (b_n) *es monótona*

  Se cumple que

  si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$

Otras propiedades

- **Límites de la razón y de la raíz**

  Para toda sucesión (a_n) *de números positivos se verifica que si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Definición

- **Serie de números reales**

  Dada una sucesión de números reales (a_n)*, se considera la nueva sucesión* (S_n)

  $$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

  Al par ordenado de sucesiones $((a_n), (S_n))$ *se le llama serie de números reales.*

- La serie $((a_n), (S_n))$ se representa por

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  y la sucesión (S_n) se denomina *sucesión de sumas parciales* de la serie.

Definición

- **Carácter de una serie**

  Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, divergente u oscilante si la sucesión de sus sumas parciales* (S_n) *es convergente, divergente u oscilante.*

- **Proposición**

  El carácter de una serie no cambia si se suprimen, en la misma, un número finito de términos.

Ejemplo

- *Serie geométrica*, formada a partir de los términos de una progresión geométrica indefinida

$$a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} + \ldots$$

La expresión de la suma de los n primeros términos es, según sabemos

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 \cdot r^n}{1-r}$$

de donde resultan los casos siguientes:

1) Si $|r| > 1$ la serie es divergente, pues $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$
2) Si $|r| < 1$ la serie es convergente, de suma $S = \frac{a_1}{1-r}$
3) Si $r = 1$ la serie es divergente, pues se reduce a $a_1 + a_1 + a_1 + \ldots$
4) Si $r = -1$ la serie es oscilante, pues se reduce a $a_1 - a_1 + a_1 - \ldots$

Propiedades

- **Resto de una serie**

  Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se denomina resto de orden* k, *y se denota* R_k, *a la suma*

  $$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

- **Condición necesaria de convergencia**

  Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Operaciones con series

- **Suma de series**

  Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *son convergentes con sumas* S_1 *y* S_2 *respectivamente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *es convergente, siendo su suma* $S_1 + S_2$.

- **Multiplicación por una constante**

  Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente y su suma es* S *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ *es convergente y su suma es* λS.

Operaciones con series

- **Propiedad Asociativa**

  a) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente su carácter y su suma permanecen inalterados al sustituir grupos de términos consecutivos por sus sumas.*

  b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente, sigue siéndolo al sustituirse grupos de términos consecutivos por sus sumas.*

  c) Si la serie es oscilante, en general, no se puede usar la propiedad asociativa.

Ejemplo. En la serie oscilante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, asociando los términos de formas distintas se pueden obtener distintos resultados

$$(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots=0$$
$$-1+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots=-1$$

Operaciones con series

- **Propiedad Disociativa**

Ni siquiera para las series convergentes se verifica, en general, la que podríamos llamar *Propiedad Disociativa*, es decir, no se puede descomponer arbitrariamente los términos de una serie en suma de varios.

Ejemplo. Dada la serie convergente

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

disociando cada término en la forma

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{7}{8}\right)+\left(1-\frac{15}{16}\right)+\dots$$

se obtiene la serie oscilante

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+1-\frac{15}{16}+\dots$$

Operaciones con series

- **Propiedad Conmutativa**

Tampoco tienen, en general, las series la *Propiedad Conmutativa*.
Ejemplo. Dada la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots$$

convergente y de suma $S=\ln 2$, permutando resulta la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\dots$$

Convergente pero de suma $S'=\frac{1}{2}\ln 2$.
Permutando ahora de otra manera, se obtiene la serie

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$$

también convergente pero de suma $S''=\frac{3}{2}\ln 2$.

Definición

- **Serie de términos positivos**

  Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es de términos positivos si* $a_n \geq 0$, $\forall n$.

- **Carácter de una serie de términos positivos**

  La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *no puede ser oscilante, es decir debe ser convergente, o divergente a* $+\infty$.

Propiedades

- **Propiedad Conmutativa**

  En una serie de términos positivos se puede alterar el orden de sus términos sin que cambie el carácter de la serie dada, ni su suma si es convergente.

- **Propiedad Disociativa**

  En una serie de términos positivos se puede descomponer arbitrariamente cada término en un número finito de sumandos positivos sin que se altere su carácter, ni su suma si es convergente.

Criterios de Convergencia

- **Convergencia de la serie armónica generalizada**

  La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

  llamada serie armónica generalizada:

$$\begin{array}{lll} \textit{converge} & \textit{si} & \alpha > 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si} & \alpha \leq 1 \end{array}$$

Criterios de Convergencia

- **Criterio del producto o de Pringsheim**

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y* α *un número real tal que*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = \lambda$$

$$\text{Entonces} \begin{cases} i) \text{ Si } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \text{ y } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ la serie converge} \\ \alpha \leq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases} \\ ii) \text{ Si } \lambda = 0 \text{ y } \alpha > 1 \text{ la serie converge} \\ iii) \text{ Si } \lambda = \infty \text{ y } \alpha \leq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

Criterios de Convergencia

- **Criterio de cociente o Criterio de D'Alembert**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que existe*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Entonces} \begin{cases} i)\ \text{Si } \lambda < 1 \text{ la serie converge} \\ ii)\ \text{Si } \lambda > 1 \text{ la serie diverge} \\ iii)\ \text{Si } \lambda = 1 \text{ es un caso dudoso} \end{cases}$$

En el tercer caso sólo se puede asegurar que la serie diverge si existe un N_0 *tal que para* $n > N_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Criterios de Convergencia

- **Criterio de Raabe**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que existe*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$$\textit{Entonces}\begin{cases} \textit{i) Si } \lambda > 1 \textit{ la serie converge} \\ \textit{ii) Si } \lambda < 1 \textit{ la serie diverge} \\ \textit{iii) Si } \lambda = 1 \textit{ es un caso dudoso} \end{cases}$$

Criterios de Convergencia

- **Criterio de la raíz o Criterio de Cauchy**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que existe*

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$Entonces \begin{cases} i) \text{ Si } \lambda < 1 \text{ la serie converge} \\ ii) \text{ Si } \lambda > 1 \text{ la serie diverge} \\ iii) \text{ Si } \lambda = 1 \text{ es un caso dudoso} \end{cases}$$

En el caso dudoso sólo podemos decir que la serie diverge si existe un N_0 *tal que para* $n > N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1$

Definición

- **Serie alternada**

  La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *es alternada si tiene sus términos alternativamente positivos y negativos.*

La forma más común que presentan las series alternadas es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

donde $a_n \geq 0$.

Condición suficiente de convergencia

- **Criterio de Leibniz**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie alternada que verifica*

$$\begin{aligned} i)\ \lim_{n\to\infty} a_n &= 0 \\ ii)\ |a_{n+1}| &< |a_n|, \forall_n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

entonces la serie es convergente.

Suma aproximada

- **Proposición**

  Al tomar una suma parcial cualquiera S_n como valor aproximado de la suma S de una serie alternada de términos constantemente decrecientes en valor absoluto y convergente, el error cometido es menor que el primer término despreciado. Es decir

$$S \simeq S_n; \;\; Error = |S - S_n| < |a_{n+1}|$$

Definiciones

- **Serie absolutamente convergente**

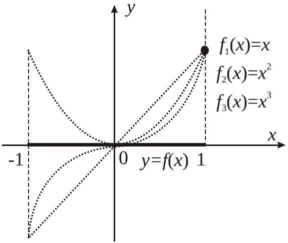
  Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

- **Convergencia absoluta y convergencia**

  Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie absolutamente convergente entonces es convergente.*

Introducción

En lugar de sucesiones y series de números, podemos considerar sucesiones y series de funciones, tales como:



$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} nx + \cos nx = \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x + \cdots$$

Introducción

- Si duda alguna, entre todas las clases de series de funciones, las series de potencias son las más simples y a la vez unas de las más utilizadas en Ingeniería, junto a otras series trigonométricas llamadas *series de Fourier*.

- Una de las notables propiedades de estas series, es que sus dominios de convergencia son intervalos cuya semiamplitud o radio se determina de forma directa y se denomina radio de convergencia de la serie.

- Otras importantes propiedades son las que se refieren a los teoremas fundamentales sobre la derivación e integración término a término. Las series de potencias poseen unas propiedades que no poseen, en general, otras series de funciones y que las hacen especialmente interesantes.

Definiciones

- **Serie de potencias**

  Se llama serie de potencias a una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$.

Radio de convergencia

- **Fórmula de Hadamard**

  Llamaremos R, radio de convergencia de la serie de potencias a

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

  con el convenio $1/0 = \infty$.

- Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

  si ambos existen, el radio de convergencia, en este caso, viene también dado por

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Convergencia

- **Convergencia puntual de una serie de potencias**

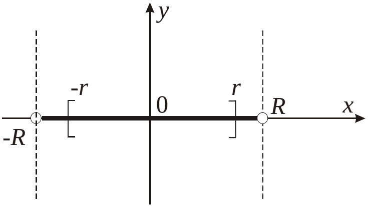
Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

- la serie converge para todo $|x - x_0| < R$

- la serie diverge para todo $|x - x_0| > R$

- en los puntos $|x - x_0| = R$ *puede ser convergente o divergente.*

En la figura se ilustra el caso particular en que $x_0 = 0$.



Convergencia y Propiedades de la función suma

- Designaremos por $f(x)$ la suma de la serie de potencias, que será una función definida en el intervalo de convergencia, incluidos los puntos frontera en los que haya convergencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- Para estudiar las propiedades de la función f, se tendrá en cuenta que los términos de la serie de potencias son funciones producto de un número por una potencia, que tienen las propiedades de ser continuas en cualquier intervalo, derivables cuantas veces se desee e integrables en todo intervalo.

Convergencia, Continuidad e Integrabilidad

- **Proposición**

  La función suma $f(x)$ es continua en todo punto interior al domino de convergencia.

- **Proposición**

  La función suma $f(x)$, definida por una serie de potencias, es integrable y la derivación se puede realizar término a término, es decir

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$$

Convergencia y Derivabilidad

- **Proposición**

Sea una serie de potencias de radio de convergencia $R \neq 0$ *y sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

la función definida por dicha serie para $|x - x_0| < R$.
Consideremos la serie de potencias derivada término a término, R' *su radio de convergencia y sea*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

la función definida para $|x - x_0| < R'$.
Entonces $R = R'$, *la función* $f(x)$ *es derivable y* $f'(x) = g(x)$.

Introducción

- Conocidas las propiedades de las series de potencias veremos ahora el problema inverso: es decir determinar las funciones que se pueden expresar como sumas de estas series, es decir, las funciones desarrollables en series de potencias.
- Condición necesaria para poder representar una función en serie de potencias en un dominio, que sea infinitamente derivable en el mismo.
- Condiciones suficientes se obtienen como consecuencia de las fórmulas de Taylor y MacLaurin, probando que los restos complementarios de Lagrange o Cauchy tienden a cero.
- No siempre es este el método más rápido, y muchas veces la aplicación acertada de la derivación e integración término a término conducen a los resultados deseados.

Definiciones

- **Desarrollo en serie**

  Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función real definida en el conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que una serie de potencias

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad o \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (si\ x_0 = 0)$$

  convergente en un intervalo I centrado en x_0 es un desarrollo en serie de la función f en el conjunto $X \cap I$, si la suma de la serie coincide con el valor de la función en ese conjunto.

Definiciones

- **Proposición. Desarrollo en serie**

  Si la función $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$, admite un desarrollo en serie de potencias entorno de x_0, que es un punto interior de X, este desarrollo es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- Como vemos el desarrollo en serie es una generalización evidente de los polinomios de Taylor.

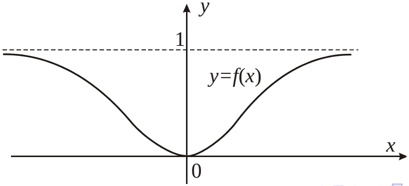
Propiedades

- **Condición necesaria**

  Condición necesaria para que la función $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}$, admita un desarrollo en serie de potencias en un intervalo I, es que la función posea derivadas de todos los órdenes en I.

- Sin embargo esta condición no es suficiente. Un ejemplo notable de función de esta clase es la llamada *función de Cauchy*, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$



Propiedades

- **Condición necesaria y suficiente**

  Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, una función real definida en $X \subset \mathbb{R}$, e $I \subset X$ un intervalo I centrado en x_0 en el que la función posee derivadas de todos los órdenes. Condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ admita el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

  en I, es que el resto n-ésimo $R_n(x)$ de la fórmula de Taylor, tienda hacia 0, cuando $n \longrightarrow \infty$, para cada $x \in I$.