PRÁCTICA 2: Integrales Dobles

Para calcular integrales dobles haremos uso del teorema de Fubini.

Teorema de Fubini en regiones de integración de $\mathbb{R}^2$

Supongamos que f es continua en D (o bien, supongamos que al menos es continua en el interior de D y acotada en D). Si la región D es del tipo (I), es decir, si

$$D = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

donde $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre D se calcula por

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Si la región D es del tipo (II), es decir, si

$$D = \{(x, y) \,/\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

donde $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[c, d]$, entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre D se calcula por

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

- Para calcular las integrales iteradas utilizaremos la orden **integrate.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Ánalisis,** ir a, **Integrar**

- Para indicar si una expresión es positiva o negativa utilizaremos la orden **assume.**

- Para representar gráficamente las curvas en forma implícita, utilizaremos la orden **wxdraw2d** cargando previamente el paquete correspondiente mediante la orden **load(draw).**

Ejemplo 1

Calcular la integral doble $\iint_D 3xydxdy$ siendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 6\}.$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i1)    kill(all)$
(%i1)    integrate(integrate(3*x*y,x,0,1), y, 2, 6);
(%o1)    24
```

Ejemplo 2

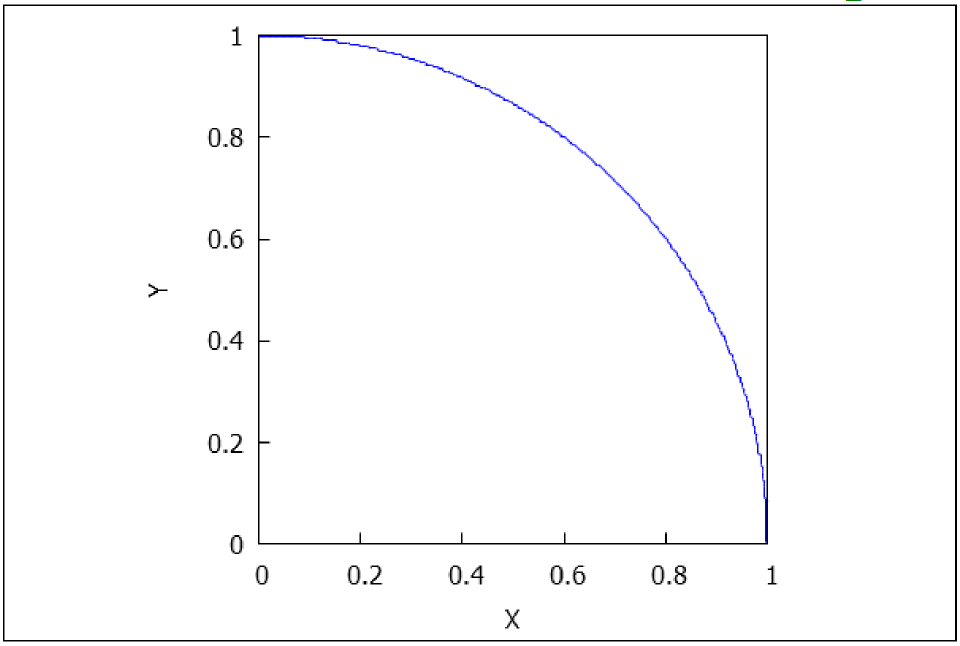
Calcular la integral doble $\iint_D xdxdy$ siendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i2)    load(draw)$
0 errors, 0 warnings
(%i3)    wxdraw2d(implicit(x^2+y^2=1,x,0,1,y,0,1),proportional_axes=xy);
```

(%t3)



(%o3)

```
(%i4)    integrate(integrate(x,y,0,sqrt(1-x^2)), x, 0, 1);
```

(%o4) $\frac{1}{3}$

Para calcular las integrales iteradas, es conveniente calcular primero una y luego la otra, porque si nos equivocamos es más fácil encontrar el error, haciéndolo de esta forma. Además para poder calcular la segunda integral a veces tenemos que simplificar la primera.

El ejemplo anterior lo podíamos haber hecho de la siguiente forma**:**

```
(%i5)    iterada1:integrate(x,y,0,sqrt(1-x^2));
```
(iterada1) $x\sqrt{1-x^2}$

```
(%i6)    integrate(iterada1, x, 0, 1);
```
(%o6) $\frac{1}{3}$

- Para calcular los puntos de corte de las curvas, tendremos que resolver sistemas de ecuaciones y para ello utilizaremos la orden **algsys.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Ecuaciones,** ir a, **Resolver sistema algebráico.**

- También podemos usar la orden **solve.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Ecuaciones,** ir a, **Resolver.**

Ejemplo 3

Calcular la integral doble $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$ siendo

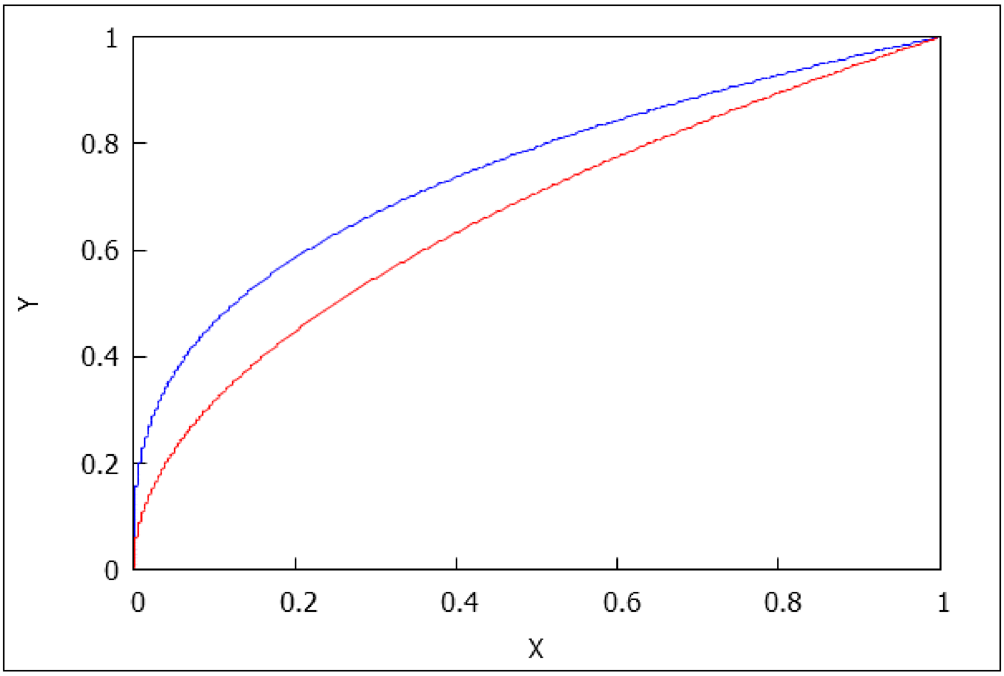
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y^3 \leq x \leq y^2\}.$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i7)    algsys([x=y^3, x=y^2], [x,y]);
(%o7)    [[x=1,y=1],[x=0,y=0]]
(%i8)    solve([x=y^3, x=y^2], [x,y]);
(%o8)    [[x=1,y=1],[x=0,y=0]]
```

```
(%i9)    wxdraw2d(color=blue,implicit(y^3=x,x,0,1,y,0,1),
         color=red,implicit(y^2=x,x,0,1,y,0,1));
```

(%t9)



(%o9)

```
(%i10) iterada1:integrate(%e^(x/y),x,y^3,y^2);
```

(iterada1) $y\,\%e^{y} - y\,\%e^{y^2}$

```
(%i11) integrate(iterada1, y, 0, 1);
```

(%o11) $-\frac{\%e-3}{2}$

```
(%i12) %,numer;
(%o12) 0.1408590857704775
```

En muchas ocasiones para poder calcular las integrales dobles tendremos que utilizar cambios de variables.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\left(x\left(u,v\right),y(u,v)\right)\left|J(u,v)\right| dudv$$

$$J(u,v) = \frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

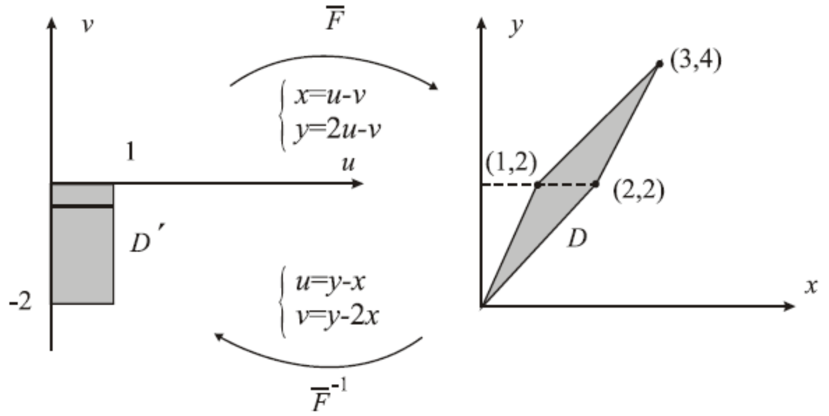
$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

- Para calcular la matriz Jacobiana utilizaremos la orden **jacobian** y para el determinante la orden **determinant.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Álgebra,** ir a, **Determinante**

Ejemplo 4

Sea D el paralelogramo acotado por $y = 2x, y = 2x-2, y = x$ y $y = x+1$
Calcular $\iint_D xydxdy$.

$$u = y - x; \quad v = y - 2x$$



Solución con wxMaxima:

```
-->       /* Ecuaciones del cambio de variable */;
(%i14)    x(u,v):=u-v;
          y(u,v):=2*u-v;
(%o13)    x(u,v):=u-v
(%o14)    y(u,v):=2 u-
```

```
-->       /* Cálculo de la matriz jacobiana */;
(%i15)    m:jacobian ([x(u,v), y(u,v)], [u, v]);
0 errors, 0 warnings
```

(m) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

```
-->       /* Cálculo del jacobiano */;
(%i16)    j:determinant(m);
(j)       1
```

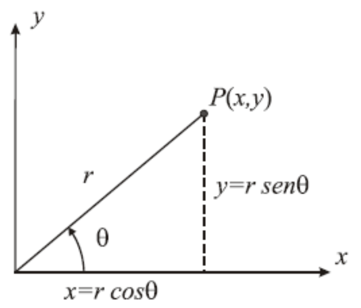
```
-->       /* Cálculo de la integral doble */
(%i17)    iterada1:integrate(x(u,v)*y(u,v)*j,u,0,1);
```

(iterada1) $\dfrac{6\,v^2-9\,v+4}{6}$

```
(%i18)    integrate(iterada1,v,-2,0);
(%o18)    7
```

En muchos casos tendremos que efectuar el cambio de variables a coordenadas polares.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$



- Para simplificar el jacobiano y la integral iterada, utilizaremos la orden **trigsimp.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Simplificar,** ir a, **Simplificación Trigonométrica.**

Ejemplo 5

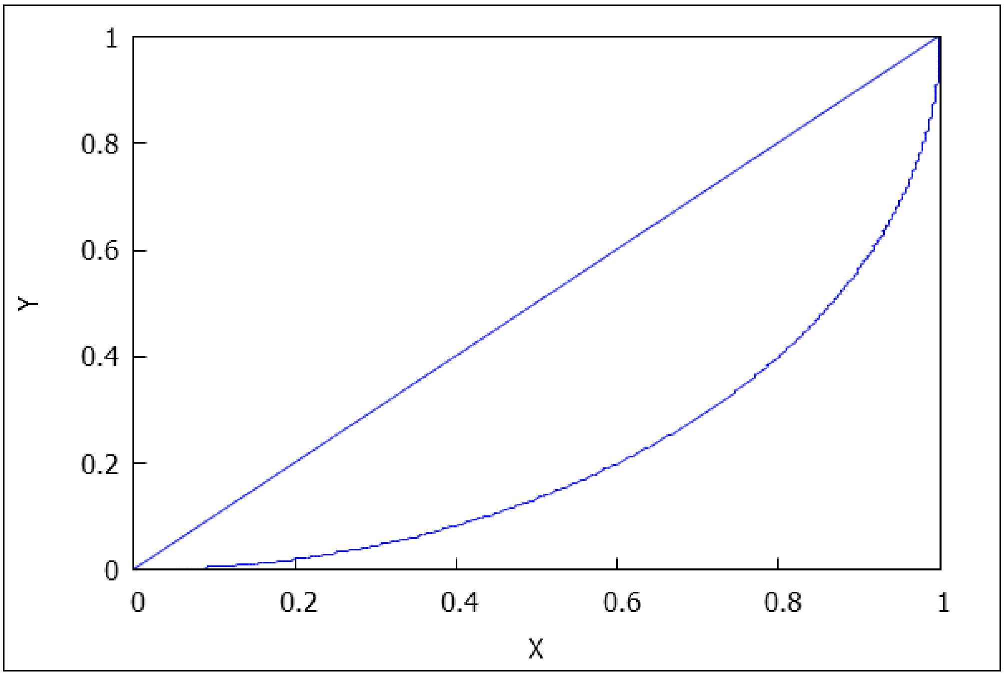
Calcular la integral doble $\iint_D x\,dx\,dy$ siendo D la región limitada superiormente por la recta $y = x$ e inferiormente por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

En coordenadas polares la ecuación de la circunferencia será $x^2+y^2-2y=0 \rightarrow x^2+y^2=2y \rightarrow r^2=2rsent \rightarrow r=2sent$

Solución con wxMaxima:

```
-->      /* Cálculo de los puntos de corte */;
(%i19)   algsys([x^2+y^2-2*y=0,  y=x],  [x,y]);
(%o19)   [[x=1,y=1],[x=0,y=0]]

(%i20)   wxdraw2d(implicit(x^2+y^2-2*y=0,x,0,1,y,0,1)
         ,implicit(y=x,x,0,1,y,0,1));
(%t20)
```




```
(%o20)

-->      /* Ecuaciones del cambio de variable */;
(%i22)   x(r,t):=r*cos(t);
         y(r,t):=r*sin(t);
(%o21)   x(r,t):=r cos(t)
(%o22)   y(r,t):=r sin(t)

-->      /* Cálculo de la matriz jacobiana */;
(%i23)   m:jacobian([x(r,t),y(r,t)],[r,t]);
```

(m) $\begin{bmatrix} \cos(t) & -r\sin(t) \\ \sin(t) & r\cos(t) \end{bmatrix}$

```
-->      /* Cálculo del jacobiano */;
```

```
(%i24)  j:determinant(m);
```

(j) $r\sin(t)^2+r\cos(t)^2$

```
-->     /* Simplificación del jacobiano */
(%i25)  j:trigsimp(j);
```

(j) r

```
-->     /* Cálculo de la integral doble */
(%i26)  iterada1:integrate(x(r,t)*j,r,0,2*sin(t));
```

(iterada1) $\frac{8\cos(t)\sin(t)^3}{3}$

```
(%i27)  iterada1:trigsimp(iterada1);
```

(iterada1) $\frac{8\cos(t)\sin(t)^3}{3}$

```
(%i28)  integrate(iterada1,t,0,%pi/4);
```

(%o28) $\frac{1}{6}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ siendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}.$$

a) En coordenadas cartesianas. b) En coordenadas polares.

Solución: $\frac{2\pi}{3}$

2.

Calcular, mediante un cambio de variables, la integral doble $\iint_D (x+y+1)dxdy$ siendo D la región limitada por las rectas:

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y-x=-1 \end{cases} ; \begin{cases} y+x=1 \\ y+x=2 \end{cases}$$

Solución: $\frac{5}{2}$

3.

Hallar la masa de la lámina de densidad $\mu(x,y) = x^2$ que ocupa la región D limitada por la parábola $y = 2-x^2$ y la recta $y = x$.

Solución: $\frac{63}{20}$

4.

Hallar, utilizando coordenadas polares, el área comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2 = 2x$ y $x^2+y^2 = 4x$, perteneciente al primer cuadrante..

Solución: $\frac{3\pi}{2}$

5.

Calcular la integral doble $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ siendo D la región, del primer cuadrante, limitada por:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Solución: $4-\pi$

6.

Hallar el centro de masa del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, si la densidad de masa es $\mu(x,y) = e^{x+y}$.

Solución: $\frac{1}{e-1}$

7.

Calcular la integral doble $\iint_D (x^2+y^2)^2 dxdy$ siendo D el recinto limitado por la circunferencia:

$$x^2+y^2-2x=0$$

a) En coordenadas cartesianas. b) En coordenadas polares. c) Comprobar que el resultado es el mismo.
Nota: Representar gráficamente la curva.

Solución: $\dfrac{10\pi}{3}$

8.

Calcular la integral doble $\iint_D (x^3+y^3) dxdy$ siendo D el recinto limitado por la circunferencia:

$$x^2+y^2-2y=0$$

a) En coordenadas cartesianas. b) En coordenadas polares. c) Comprobar que el resultado es el mismo.
Nota: Representar gráficamente la curva.

Solución: $\dfrac{7\pi}{4}$