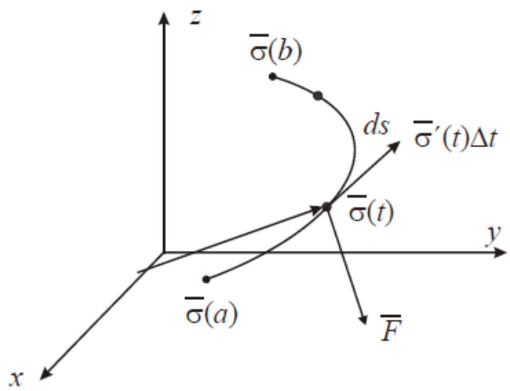
PRÁCTICA 4:
Integrales de Línea



Integral de línea de funciones escalares

Sea f un campo escalar continuo sobre la curva C dada por la parametrización $\overline{\sigma} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) de clase C^1. Definimos la integral de línea de f a lo largo de C como

$$\int_C f ds = \int_a^b f\left(\overline{\sigma}(t)\right) \left\|\overline{\sigma}'(t)\right\| dt$$

En el caso de $\mathbb{R}^2$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ y

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

y en el caso de $\mathbb{R}^3$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

- Para calcular las derivadas utilizaremos la orden **diff.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Ánalisis,** ir a, **Derivar.**

- Para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos la orden **trigsimp.**

- Para simplificar otras expresiones utilizaremos la orden **ratsimp.** Esta orden está en las paletas en el apartado **Simplificar,** ir a, **Simplificar Expresión.**

- Para indicar si una expresión es positiva o negativa utilizaremos la orden **assume.**

- Para representar gráficamente las curvas utilizaremos la orden **wxdraw2d,** cargando previamente el paquete correspondiente mediante la orden **load(draw).**

Ejemplo 1

Sea $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ *un campo escalar y C la elipse de ecuación* $x^2 + 2y^2 = 2$.
Calcular la integral de línea $I = \int_C f(x,y)ds$.
Desde el punto $(\sqrt{2},0)$hasta el punto $(0,1)$.

Podemos expresar la elipse como

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1$$

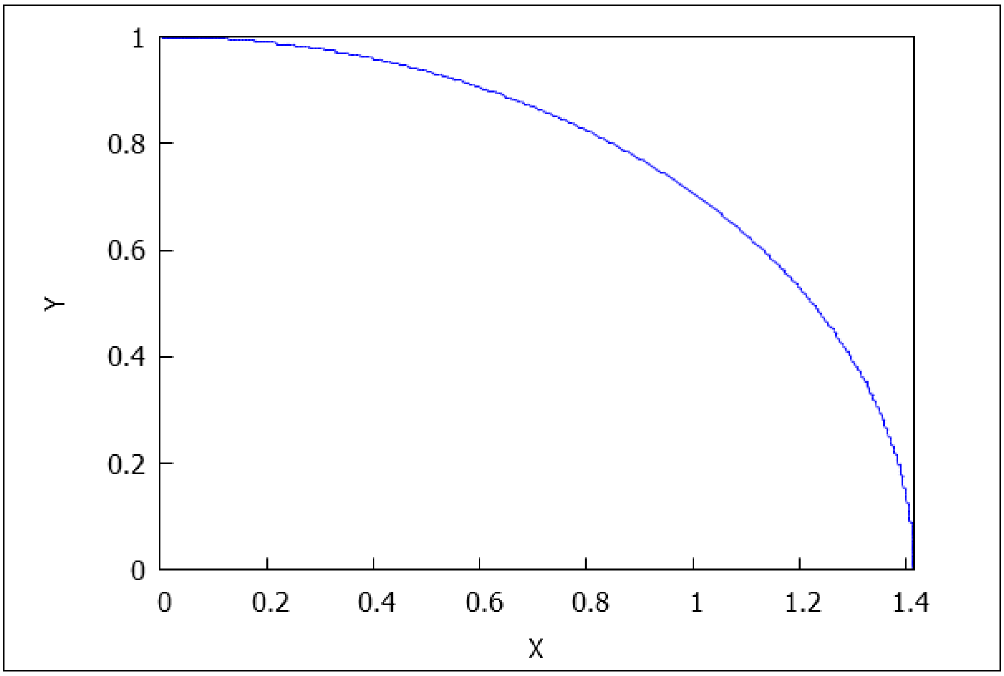
Por tanto la parametrización de la elipse será:

$$\begin{cases} \frac{x(t)}{\sqrt{2}} = \cos(t) \\ y(t) = sen(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = sen(t) \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i2)   wxdraw2d(color=blue,proportional_axes=xy,
           implicit(x^2+2*y^2=2,x,0,sqrt(2),y,0,1));
```

(%t2)



(%o2)

```
-->       /* Ecuaciones paramétricas */;
(%i3)     x(t):=sqrt(2)*cos(t);
```

(%o3) $x(t) := \sqrt{2}\cos(t)$

```
(%i4)     y(t):=sin(t);
```

(%o4) $y(t) := \sin(t)$

```
-->      /* Función integrando */;
(%i5)    f:(x(t)*y(t))/sqrt(1+y(t)^2);
```

(f) $\dfrac{\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2+1}}$

```
-->      /* Módulo de la tangente */
(%i6)    m:sqrt(diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2);
```

(m) $\sqrt{2\sin(t)^2+\cos(t)^2}$

```
-->      /* Integral de línea */;
(%i7)    integrate(f*m, t, 0, %pi/2);
```

(%o7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- Para representar gráficamente las superficies, cargaremos previamente el paquete correspondiente mediante la orden **load(draw)** y utilizaremos la orden **wxdraw3d.**
- En dicha orden tenemos las opciones siguientes: **enhanced3d=true**: colorea las superficies. **surface_hide=true**: no dibuja la parte no visible de las superficies.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y,z) = x\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2$ un campo escalar y C la curva intersección de las superficies:

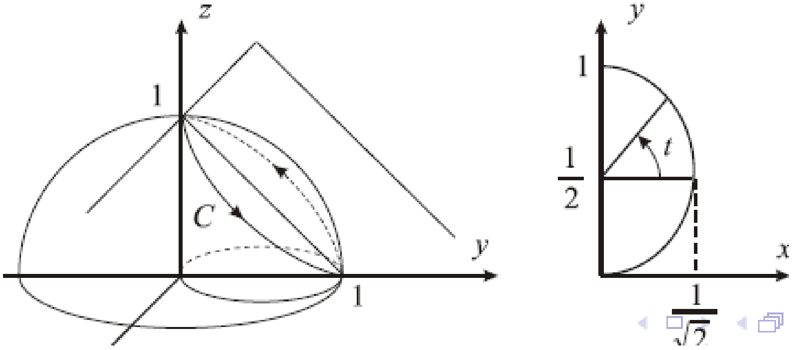
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z\hat{}2 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Calcular la integral de línea $I = \int_C f(x,y,z)ds$

En primer lugar proyectamos la curva en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy y parametrizamos dicha proyección.

$$z = 1 - y; x^2 + y^2 + (1-y)^2 = 1; x^2 + 2y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + 2(y - \tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}; \frac{x^2}{1/2} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{1/4} = 1; \left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-\frac{1}{2}}{1/2}\right)^2 = 1$$



Y haciendo lo mismo que en el ejemplo anterior

$$\begin{cases} \frac{x}{1/\sqrt{2}} = \cos t \\ \frac{y-\frac{1}{2}}{1/2} = \operatorname{sen} t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \end{cases}$$

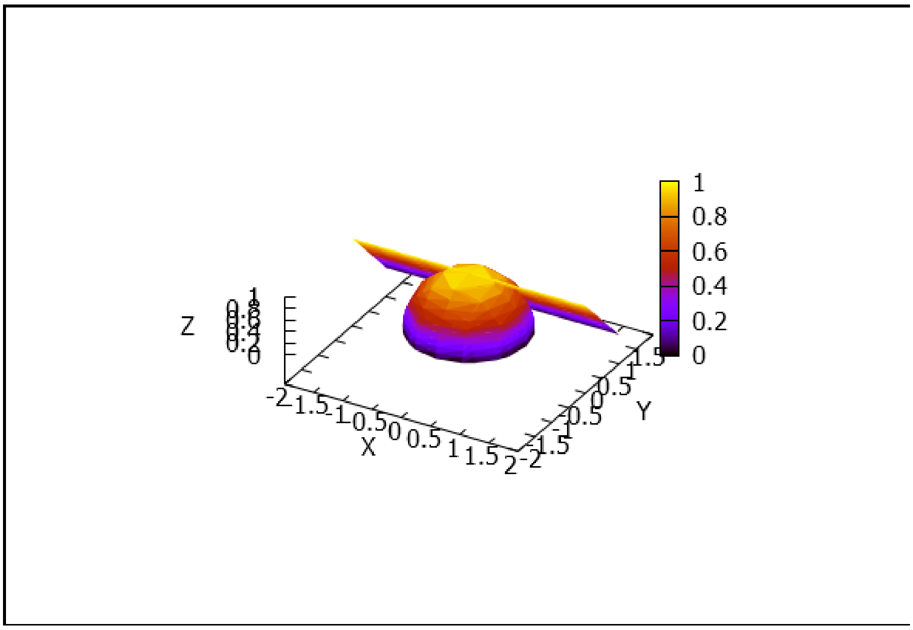
$$z = 1 - y; z = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t); z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i1)    kill(all)$
(%i1)    wxdraw3d(enhanced3d=true,surface_hide=true,
         proportional_axes=xyz,
         implicit(x^2+y^2+z^2=1,x,-2,2,y,-2,2,z,0,1),
         implicit(y+z=1,x,-2,2,y,-2,2,z,0,1));
0 errors, 0 warnings
```

(%t1)



(%o1)

```
-->      /* Ecuaciones paramétricas */;
(%i2)    x(t):=1/sqrt(2)*cos(t);
```

(%o2) $x(t):=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)$

```
(%i3)    y(t):=1/2+1/2*sin(t);
```

(%o3) $y(t):=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(t)$

```
(%i4)    z(t):=1/2-1/2*sin(t);
```

(%o4) $z(t):=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(t)$

```
-->      /* Función integrando */;
(%i5)    f:x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2;
```

(f) $\left(\frac{\sin(t)}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin(t)}{2}\right)^2+\frac{\cos(t)^2}{2}$

```
(%i6)    f:trigsimp(f);
```

(f) 1

```
-->      /* Módulo de la tangente */;
(%i7)    m:sqrt(diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2+diff(z(t),t)^2);
```

(m) $\sqrt{\frac{\sin(t)^2}{2}+\frac{\cos(t)^2}{2}}$

```
(%i8)    m:trigsimp(m);
```

(m) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

```
-->      /* Integral de línea */;
(%i9)    integrate(f*m, t, 0, 2*%pi);
```

(%o9) $\sqrt{2}\,\pi$

Integral de línea de funciones vectoriales

Sea $\overline{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) continuo sobre una curva dada por la parametrización $\overline{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$), de clase C^1. Definimos la integral de línea de $\overline{F}$ a lo largo de C como

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_a^b \overline{F}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right) \cdot \overline{\sigma}'\left(t\right) dt$$

Otra manera de denotar las integrales de línea es

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial $\overline{F}$. Esta notación es útil para recordar el cálculo de la integral de línea, pues

En el caso de $\mathbb{R}^2$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ y

$$\int_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{ds} = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b [F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

y en el caso de $\mathbb{R}^3$ tendremos $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{ds} &= \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ &\quad +F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular la integral de línea $\int_C x^2 dx + y^2 dy$ siendo C la elipse $2x^2 + 3y^2 = 1$, desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al punto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, en sentido positivo.

En primer lugar paramerizamos la elipse:

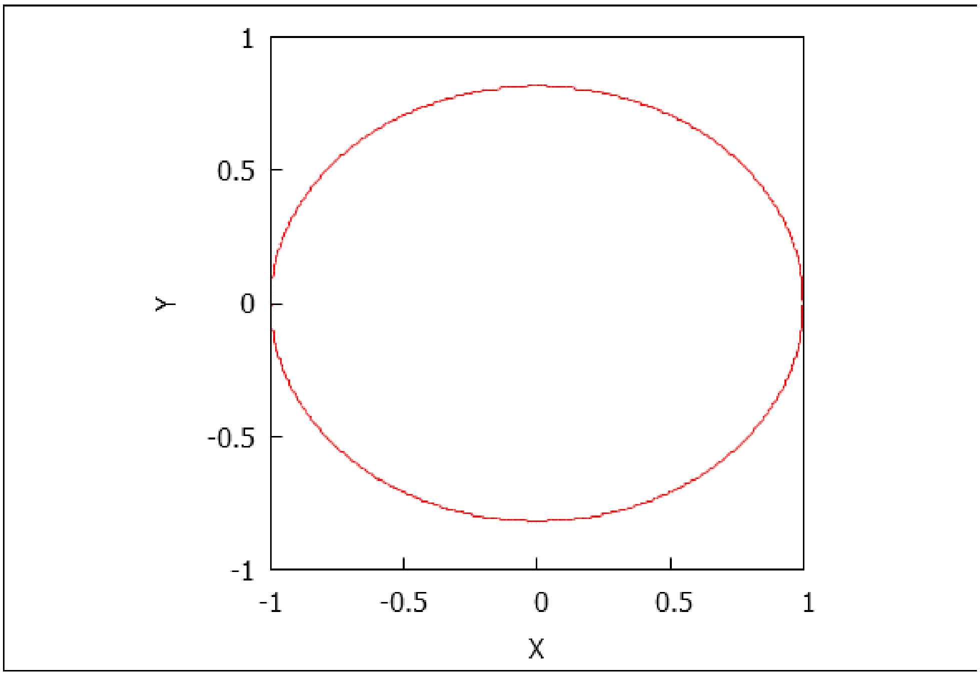
$$2x^2 + 3y^2 = 1 \to \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \to \left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos(t) \\ \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = sen(t) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}sen(t) \end{array}\right.$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i1)   kill(all)$
(%i1)   wxdraw2d(color=red,
            proportional_axes=xy,
            implicit(2*x^2+3*y^2=2,x,-1,1,y,-1,1));
0 errors, 0 warnings
```

(%t1)



(%o1)

```
-->     /* Ecuaciones paramétricas */;
(%i2)   x(t):=1/sqrt(2)*cos(t);
```

(%o2) $x(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t)$

```
(%i3)   y(t):=1/sqrt(3)*sin(t);
```

(%o3) $y(t) := \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(t)$

```
-->     /* Integral de línea */;
(%i4)   integrate(x(t)^2*diff(x(t),t)+y(t)^2*diff(y(t),t), t, 0,%pi);
```

(%o4) $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Ejemplo 4

Calcular, desde el punto $(0,1,0)$ hasta el punto $(0,0,1)$, la integral de línea

$$\int_C x^3 y dx + y^2 z dy + xyz dz$$

siendo C la curva intersección de las superficies:.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

En un ejemplo anterior vimos que las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sent \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} sent \end{cases}$$

Además, los valores del parámetro t que corresponden a los puntos inicial y final serán:

$$t = \frac{\pi}{2} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sen(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} sen(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad ; \quad t = \frac{3\pi}{2} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sen(\frac{3\pi}{2}) = 0 \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} sen(\frac{3\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

```
-->      /* Ecuaciones paramétricas */;
(%i5)    x(t):=1/sqrt(2)*cos(t);
```

$$(\%o5) \quad x(t):=\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t)$$

```
(%i6)    y(t):=1/2+1/2*sin(t);
```

$$(\%o6) \quad y(t):=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \sin(t)$$

```
(%i7)    z(t):=1/2-1/2*sin(t);
```

$$(\%o7) \quad z(t):=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \sin(t)$$

```
-->      /* Integral de línea */;

(%i8)    integrate(x(t)^3*y(t)*diff(x(t),t)+y(t)^2*z(t)*diff(y(t),t)
         +z(t)*x(t)*y(t)*diff(z(t),t), t,%pi/2,3*%pi/2);
```

$$(\%o8) \quad -\frac{15\,\pi+2^{9/2}}{5\,2^{13/2}}$$

Ejemplo 5

Calcular la integral de línea $\oint_C x^2 ydx + y^2 xdy$ siendo C la elipse $2x^2 + y^2 - 2x = 0$, en sentido positivo.

En primer lugar paramerizamos la elipse:

$$2x^2+y^2-2x=0 \to 2(x^2-x)+y^2=0 \to 2(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2} \to$$

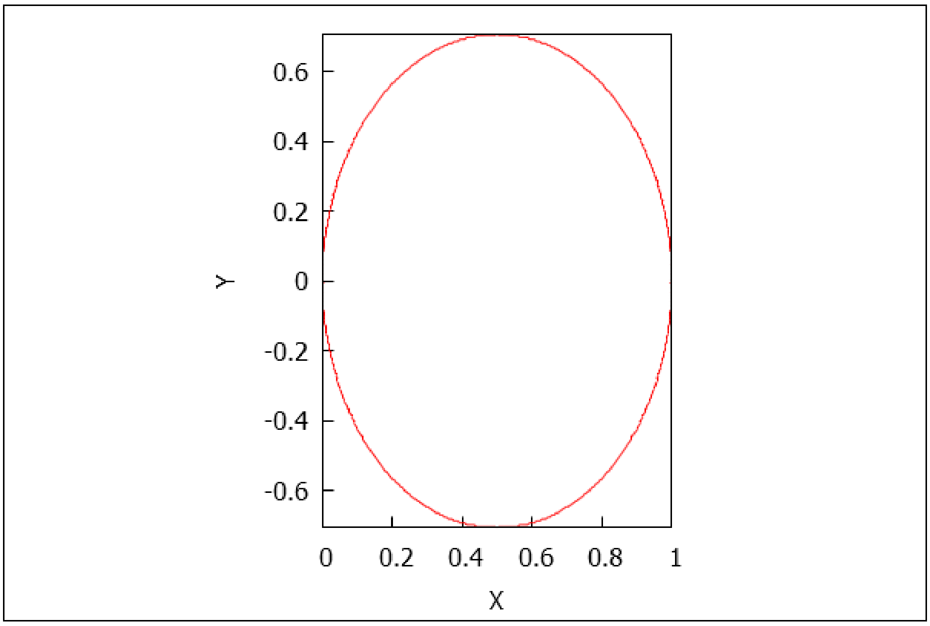
$$\to \frac{2(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1 \to \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1 \to \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2=1$$

$$\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\cos(t) \\ \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=sen(t) \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}sen(t) \end{cases}$$

Solución con wxMaxima:

```
(%i9)  wxdraw2d(color=red,
           proportional_axes=xy,
           implicit(2*x^2+y^2-2*x=0,x,0,1,y,-1/sqrt(2),1/sqrt(2)));
```

(%t9)



(%o9)

```
-->      /* Ecuaciones paramétricas */;
(%i10)   x(t):=1/2+1/2*cos(t);
```

(%o10) $x(t):=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t)$

```
(%i11)   y(t):=1/sqrt(2)*sin(t);
```

(%o11) $y(t):=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)$

```
-->      /* Integral de línea */;
(%i12)  integrate(x(t)^2*y(t)*diff(x(t),t)+y(t)^2*x(t)*diff(y(t),t), t, 0,2*%pi);
```

(%o12) $-\frac{3\pi}{2^{11/2}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

Calcular la integral de línea $\int_C (x^2+y^2)ds$ siendo C la elipse $4x^2+y^2=2$.

Solución: 7.742155314045863

2.

Calcular la integral de línea $\int_C x^2y^2z^2 ds$ siendo C la curva intersección de las superficies:

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} ; z \geq 0$$

desde el punto $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ hasta el punto $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

Solución: $\sqrt{2}\pi$

3.

Calcular la integral de línea $\oint_C x^2ydx + x^3dy$ siendo C la elipse $x^2+2y^2+2y=0$, en sentido positivo.

Solución: $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

4.

Calcular la integral de línea

$$\int_C xdx + ydy + xzdz$$

siendo C la curva intersección de las superficies:.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-y=0 \end{cases}$$

Solución: $-\frac{\pi}{8}$

5.

Calcular la integral de línea

$$\int_C y^3xdx + x^2zdy + xyzdz$$

siendo C la curva intersección de las superficies:.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+z=2 \end{cases}$$

Solución: $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

6.

Representar gráficamente el paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 - \sqrt{5y} = 0$.
Hallar la integral de línea $\int_C xdx + y^2xdy + zdz$, siendo C la intersección de las dos superficies anteriores

Solución: $\frac{125\pi}{64}$

7.

Calcular el trabajo desarrollado por el campo de fuerzas

$$\overrightarrow{F} = x\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}$$

actuando sobre una párticula que recorre la intersección de las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Solución: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$